UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS AVANZADAS MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICADOS A LA REALIDAD USANDO EL ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN ORIENTADA

TRABAJO DE ASCENSO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA ASCENDER A LA CATEGORÍA DE PROFESOR TITULAR

AUTOR: DR. JESÚS A. MEDINA P.

CUMANÁ, MAYO DE 2023

ÍNDICE

RESUMEN

Los estudios indican un número de dificultades de los estudiantes para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre las causas de dichas dificultades se menciona la falla que los alumnos tienen en los contenidos de matemática básica, lo que les ocasiona serios problemas para desarrollar un entendimiento funcional de las matemáticas relacionadas con el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. En consecuencia, los alumnos no muestran interés ni están motivados para aprender los contenidos de ecuaciones diferenciales por no comprender lo que están haciendo.

De acuerdo con la Teoría de Aprendizaje de Ausubel, para que ocurra este entendimiento funcional o aprendizaje significativo el alumno debe mostrar interés para aprender, y el profesor debe promover la predisposición del alumno para aprender. Para ello, es importante que el profesor trabaje de acuerdo con los intereses, expectativas y necesidades de los alumnos. En este sentido, presentamos este trabajo de investigación en el cual, para despertar el interés de los estudiantes, desarrollamos la resolución de dos situaciones-problemas en las que se aplican las ecuaciones diferenciales a situaciones de la vida real y están relacionadas al área de actuación de los futuros profesionales: Transferencia de calor por conducción en una barra metálica delgada, y Vibraciones de una cuerda elástica.

Debemos buscar que el alumno entienda lo aprendido en clase. Pero para lograr este entendimiento del conocimiento, Piagget propone que el alumno use la manipulación y la investigación como fundamentales elementos de desarrollo cognitivo. Por esta razón las situaciones-problema fueron enfocadas con el método de investigación orientada, en el cual, bajo la orientación del profesor, según sus necesidades los alumnos investigaron y aplicaron los conceptos matemáticos necesarios para obtener las soluciones de las situaciones-problema propuestas.

De acuerdo con la Teoría Socio-interaccionista de Vygotsky, con la interacción con sus compañeros, con el profesor y con el material didáctico los alumnos adquieren la motivación necesaria para encontrarle interés a lo que están estudiando y aprendiendo. Por lo tanto, las actividades de investigación y aplicación de los conceptos matemáticos deben realizarse en grupo.

Cuando se plantearon las dos situaciones-problema de la vida diaria relacionadas con el área de actuación de los futuros profesionales, los alumnos se mostraron muy interesados y entusiasmados por los temas considerados. Estas situaciones-problema fueron dos factores que influyeron fuertemente en despertar el interés y la motivación en los estudiantes. Esto se percibió en los alumnos cuando comenzó el proceso de investigación y aplicación de los conceptos matemáticos.

Con la manipulación de los conceptos, métodos y técnicas para resolver las ecuaciones diferenciales, los alumnos lograron el entendimiento del conocimiento, es decir, crearon sus propios conocimientos. Esto se percibió en los estudiantes

cuando desarrollaron la resolución de la situación-problema sobre las vibraciones de una cuerda elástica.

De acuerdo con el método de investigación orientada, los estudiantes trabajaron en equipo. La interacción con sus compañeros, con el profesor y con el material didáctico, aumentó la motivación por el aprendizaje. Esto se percibe porque a los alumnos ahora les agrada más el ambiente de trabajo, establecen mejores relaciones con los demás, les aumentó su autoestima y confianza.

INTRODUCCION

Como las ecuaciones diferenciales son relaciones asociadas con la razón de cambio con que suceden las cosas, se usan para describir sistemas y fenómenos reales. Por esta razón surgen en una amplia variedad de problemas en las ciencias físicas, biológicas, económicas, sociales, ingeniería, etc. También son importantes en matemática porque establecen relaciones entre muchos conceptos matemáticos tales como funciones, derivadas, integrales, etc.

Debido a la importancia de las ecuaciones diferenciales, el tema ha atraído la atención de muchos investigadores, y la bibliografía muestra que se han realizado, y se siguen realizando numerosas investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

En relación a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, los estudios indican que no existe un método general para analizarlas. En el caso particular de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, por lo general, se vienen utilizando tres formas en que pueden analizarse: algebraica (o analítica), gráfica (o cualitativa) y numérica.

Cuando se utilizan métodos algebraicos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, se necesita identificar primero la clase o tipo de ecuación diferencial que se está considerando (variables separables, exactas y lineales) para luego aplicar la técnica correspondiente al tipo de ecuación diferencial. Los métodos algebraicos proporcionan soluciones exactas explícitas o implícitas. El aprendizaje de los alumnos se limita a dominar y aplicar una secuencia de técnicas algebraicas, lo que lleva al alumno a la memorización. Por esta razón, los detalles de los procedimientos matemáticos y algorítmicos se olvidan rápidamente a menos que se usen frecuentemente.

Muchas de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden son difíciles o imposibles de resolver por métodos analíticos, pero utilizando métodos gráficos o numéricos se pueden obtener aproximaciones de las soluciones y algunas conclusiones cualitativas acerca del comportamiento de las mismas y del proceso subyacente que el problema modela. Los cálculos numéricos y la construcción de los campos direccionales a mano constituyen un trabajo muy laborioso. Y éste fue uno de los principales factores por los que el enfoque algebraico predominó en los cursos tradicionales de enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los recursos computacionales disponibles para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales han posibilitado que en las últimas dos décadas haya surgido una serie de trabajos que intentan incluir los enfoques gráficos y numéricos en los cursos, lo que ha facilitado la comprensión del comportamiento de la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Sin embargo, actualmente se observa que algunos de los cursos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias son abordados mediante un enfoque netamente algebraico. Moreno y Azcárate (2003) en su trabajo muestran que las razones más relevantes en la persistencia de los métodos tradicionales son la comodidad de los profesores y la despreocupación por la docencia.

En la mayor parte de los problemas reales se tienen dos o más variables independientes, por lo que los modelos matemáticos correspondientes implican ecuaciones diferenciales parciales.

Con el método de separación de variables la ecuación diferencial parcial se sustituye por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales deben resolverse sujetas a condiciones iniciales y de fronteras dadas. La solución deseada de la ecuación diferencial parcial se expresa entonces como una suma de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En muchos casos, la suma es una serie infinita de senos, cosenos o ambos, y se les conoce como series de Fourier.

En relación al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, los estudios indican que algunos de los trabajos donde se incluyen los enfoques gráficos y numéricos muestran que existen dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre las dificultades se destaca que los alumnos no muestran interés por el contenido, y les falta motivación para aprenderlo de forma significativa.

Con el fin de despertar en los estudiantes un interés por el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, y desarrollar la motivación por su entendimiento, proponemos considerar dos situaciones-problema del mundo real relacionadas al área de actuación de los futuros profesionales, y usando el enfoque de investigación orientada: conducción de calor en una barra metálica delgada, y vibraciones de una cuerda elástica. Pero, los modelos matemáticos correspondientes en los problemas propuestos implican ecuaciones diferenciales parciales. Por esta razón dichos problemas fueron enfocados bajo la forma de proyectos. En este sentido, con la orientación del profesor, los alumnos los modelaron y, a medida que resolvían las ecuaciones diferenciales parciales, iban investigando los nuevos conceptos matemáticos, los métodos de solución y todo lo necesario para obtener las soluciones. En la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales, la interacción de los alumnos, en grupo, con el material de instrucción y con el profesor proporciona condiciones propicias para el aprendizaje significativo del contenido, y el alumno adquiere la motivación necesaria para encontrarle interés a lo que está haciendo y aprendiendo.

Para llevar esta propuesta a cabo se organizó el trabajo de investigación en cuatro capítulos. En el capítulo I se presenta la revisión bibliográfica y los objetivos de la investigación. El capítulo II, Marco teórico, es un análisis de algunas propiedades de las ecuaciones diferenciales y se muestran algunos de los métodos que han resultado eficaces para encontrar soluciones o, en determinados casos, una aproximación. En el capítulo III se describe el método de investigación, y se proponen dos situaciones-problema del mundo real, junto con el material de instrucción. En el capítulo IV encontramos los resultados y las conclusiones.

CAPÍTULO I

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Se hizo una revisión de la bibliografía de las últimas dos décadas en las que se incluyeron los enfoques gráficos y numéricos en los cursos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Estas investigaciones muestran un número de dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En función de esas dificultades se plantean los objetivos de la investigación.

1.1 Revisión bibliográfica

En esta sección presentamos un análisis de algunas de las investigaciones que muestran las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre estas investigaciones tenemos:

Saglan (2004) y Anderson&Seaquist (1999), por ejemplo, observaron que los estudiantes tienen dificultades en comprender lo que expresa una ecuación diferencial, y también en interpretar una ecuación diferencial que modela un problema de la vida diaria.

Habre (2000) investigó la aplicación del método de solución gráfico. Al final del curso, la mayoría de los estudiantes todavía prefería soluciones algebraicas en vez de aproximaciones gráficas. El autor señaló que los estudiantes están más inclinados a creer que la representación simbólica de una función es más importante y más útil que la gráfica y numérica. Esto es consecuencia de que se usa mucho tiempo y esfuerzo en la construcción de competencias de los alumnos en manipular el lenguaje simbólico formal. La capacidad de los estudiantes en la lectura de información de estos campos apareció y quedó bien evidenciado cuando todos los alumnos fueron capaces de dibujar e interpretar las trayectorias. Ninguno de los estudiantes consiguió convertir informaciones simbólicas en gráficas y viceversa, lo que muestra que los alumnos encontraron dificultades para pensar simultáneamente de modos diferentes (algebraico y gráfico).

En otro estudio, Habre (2003) investigó la aplicación de los estudiantes de un enfoque geométrico para las ecuaciones diferenciales y sus soluciones. El autor destacó como resultado que, a pesar de los alumnos asistir a un curso con un enfoque geométrico, seguían viendo una EDO como una ecuación abstracta que involucra símbolos y no como una representación simbólica de un fenómeno del mundo real. En relación a la solución la definieron como una función expresada algebraicamente que satisfacía la ecuación dada, y en lo que se refiere al enfoque para resolverla, los estudiantes eligieron el enfoque analítico. El autor afirmó que esto se debía al hecho de que gran parte de las matemáticas se enseñan simbólicamente, desde la escuela hasta la universidad, lo que genera una creencia en los estudiantes que el enfoque gráfico no es tan preciso como el simbólico.

En relación a la aceptación de gráficos como solución de una EDO, algunos estudiantes aceptaron la solución geométrica, y otros se rehusaron a aceptarla. Tradicionalmente, en las matemáticas se da la función analítica y entonces se solicita la representación geométrica. El autor concluyó que tal vez algunos estudiantes no aceptaron la solución geométrica porque no podían asociarla a una representación (función) analítica. Los resultados mostraron que inicialmente los estudiantes presentaron resistencia en aceptar el enfoque geométrico, pero a lo largo del curso muchos estudiantes lo aceptaron, apreciando su utilidad e incluso desearon que se ofrecieran otros cursos de matemática de forma similar.

Rasmussen (2001) realizó un estudio con el propósito de ofrecer un marco para interpretar la comprensión de los estudiantes de las ideas centrales de matemática y las dificultades con las mismas. El autor durante todo el curso trató de usar equilibradamente métodos analíticos, gráficos y numéricos para el análisis de EDs, en vez de concentrarse exclusivamente en soluciones analíticas. El autor destacó que cuando distinguen una ecuación los estudiantes piensan en función y no en gráfico. Entre las dificultades observó que los estudiantes no aceptan con facilidad las funciones como solución de una ED, considerando que están acostumbrados a ver números como solución.

Rowland&Jovanoski (2004) investigan las dificultades de los estudiantes en la interpretación de los términos de EDOs de primer orden en un contexto de modelación. Estas investigaciones indican que cuando piensan acerca de tales EDOs muchos estudiantes se confunden pensando acerca de la función que da la cantidad que se va a determinar y la ecuación para la tasa de variación de dicha cantidad. Parece que desplazarse de un pensamiento del tipo−cantidad− a un pensamiento del tipo−tasa de cambio− es difícil para muchos estudiantes. Algunos parecen ignorar que todos los términos en la ecuación física necesitaban de alguna unidad. Con el fin de obtener un mejoramiento pedagógico, los autores sugirieron la inclusión de más preguntas conceptuales o cualitativas en el enfoque de las EDs, pues estas harían que los estudiantes cambiaran el interés en la simple manipulación en dirección al enfoque de la comprensión. Asimismo, sugirieron muchas discusiones en grupo.

En otro estudio, Rowland (2006) investigó la comprensión de estudiantes de ingeniería en relación a las unidades de factores y términos de EDOs de primer orden en un contexto de modelación. A partir de los resultados, el autor destacó que pocos estudiantes parecían percatarse de que los términos de las ecuaciones necesitaban tener las mismas unidades, o si comprendían, no conseguían usar este conocimiento cuando era necesario. Además, los estudiantes usaban unidades que representaban cantidades y no tasa de variación de cantidades, pues interpretaban una ecuación diferencial como cantidad. Otro error encontrado con frecuencia se refiere a la falta de atención a las unidades requeridas por las constantes de proporcionalidad. Los estudiantes las percibían como un número puro, sin unidades. Pocos estudiantes fueron capaces de determinar la unidad de la constante de proporcionalidad de una ecuación simple. Según el autor, los profesores de cursos de modelación no podían considerar que esto fuera del conocimiento de los alumnos, y para garantizarlo debían incluirlo explícitamente en el proceso instruccional.

Los resultados también mostraron que la mayoría de los estudiantes no utilizaba la información de que las ecuaciones necesitaban ser homogéneamente dimensionales para ayudarlos en el entendimiento de ecuaciones en el contexto de la modelación, y que muchos estudiantes no entendían la conexión entre la ecuación diferencial y el sistema físico modelado. Por eso, el autor defendía la importancia de ser explícita la consideración de las unidades en la parte instruccional, así como su combinación, y cómo los alumnos podían usarla para analizar sistemas en el contexto de modelación. El autor también destacó que, al realizar una comparación de respuestas, percibió que en muchos casos los estudiantes presentaban dificultades en la comunicación escrita y oral, pues lo que expresaban no era lo que pretendían expresar.

Dullius (2009). Para motivar a los alumnos, trabajó las EDOs de forma más contextualizada a partir de situaciones problema, y abordó el contenido usando métodos analíticos, gráficos y numéricos. La autora detectó varias dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de EDs, y entre las más importantes tenemos: los estudiantes no dominan contenidos de matemática básica, como por ejemplo, trigonometría, operaciones con fracciones, números complejos, derivadas e integrales, necesarios para la resolución analítica de ecuaciones diferenciales. Dullius también observó que los alumnos poseen problemas conceptuales, principalmente en lo que se refiere a la interpretación de la derivada, que es la base de las EDs. No entienden lo que significa una derivada (tasa de variación), y presentan dificultades considerables en la interpretación de gráficos. Los estudiantes no saben el por qué de los procedimientos matemáticos, y sólo saben resolver mecánicamente las actividades propuestas, necesitan siempre de un modelo patrón para seguir.

Por último, la autora destacó que los alumnos no muestran interés por el contenido, les falta motivación para aprenderlo de forma significativa, es decir, comprender lo que están haciendo.

El análisis de la bibliografía muestra un número de dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de EDs, entre las cuales se destacan: los alumnos no muestran interés por el contenido, y la falta de motivación entre los estudiantes.

1.2. Objetivos de la investigación.

El análisis de las investigaciones presentado en la sección 1.1 muestra un número de dificultades de los estudiantes para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales. Entre las causas de dichas dificultades se menciona las fallas que los alumnos tienen en los contenidos de matemática básica, lo que les ocasiona serios problemas para desarrollar un entendimiento funcional de las matemáticas relacionadas con el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. En consecuencia, los alumnos no muestran interés ni están motivados para aprender los contenidos de ecuaciones diferenciales por no comprender lo que están haciendo.

En todo trabajo de investigación existen dos preguntas importantes que deben responderse claramente: En primer lugar, ¿cuál es el problema a resolver en el trabajo de investigación? En nuestro caso, el problema es la falta de interés y motivación en los estudiantes por el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Éste es un problema que afecta el aprendizaje de la matemática en todos los niveles: básico, media y superior. En consecuencia, nuestro objetivo es despertar en los estudiantes el interés y la motivación por el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

De acuerdo con la Teoría de aprendizaje de Ausubel (Moreira, 2006) para que ocurra el aprendizaje significativo el alumno debe mostrar un interés para aprender, y el profesor debe promover la predisposición del alumno para aprender. Para ello es importante que el profesor trabaje de acuerdo con los intereses, expectativas y necesidades de los alumnos.

En segundo lugar, ¿cómo se va a resolver el problema identificado en dicho trabajo? En nuestro caso, realizando actividades de enseñanza mediante la resolución de situaciones−problema del mundo real, relacionadas al área de actuación de los futuros profesionales, usando el enfoque de investigación orientada.

De acuerdo con la Teoría Socio−interaccionista de Vygotsky, con la interacción con sus compañeros, con el profesor y con el material didáctico los alumnos adquieren la motivación que necesitan para encontrarle interés a lo que están estudiando y aprendiendo. Por lo tanto, estas actividades de enseñanza deben propiciar dichas interacciones de modo que proporcionen condiciones favorables al aprendizaje significativo del contenido.

Con el fin de despertar en los estudiantes un interés por el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y desarrollar la motivación por su entendimiento, en las actividades de enseñanza proponemos dos situaciones−problema del mundo real relacionadas al área de actuación de los futuros profesionales: transferencia de calor por conducción en un alambre delgado, y vibraciones de una cuerda elástica.

Debemos aclarar que el objetivo de este trabajo de investigación no es resolver las situaciones−problema propuestas.

Durante el desarrollo del curso se enfatizó que las situaciones−problema propuestas no son problemas prototipo que los estudiantes debían aprender o memorizar. Son sólo ejemplos que se tomaron como herramientas didácticas. Se pudo haber tomado cualquier otro problema de la vida diaria como, por ejemplo, la conducción eléctrica en una aleación.

También se resaltó que, al finalizar el curso, los estudiantes deberán ser capaces de aplicar lo aprendido en el curso en la resolución de otros problemas diferentes en su carrera.

Hasta donde sabemos, en la literatura no existe un trabajo de investigación que aborde la falta de interés y motivación en los estudiantes por el aprendizaje de ecuaciones diferenciales, mediante la resolución de situaciones-problema aplicadas a la realidad usando el enfoque de la investigación orientada.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

El principal objetivo de este capítulo es analizar algunas de las propiedades de las ecuaciones diferenciales y presentar algunos de los métodos que han resultado eficaces para encontrar soluciones o, en determinados casos, una aproximación.

2.1 Introducción a las ecuaciones diferenciales.

El propósito de esta sección es: Primero, presentar las definiciones básicas necesarias para entender el tema. Después, se indican varias maneras de clasificar las ecuaciones. Por último, se analiza brevemente la forma en que surgen las ecuaciones diferenciales con el fin de describir algún fenómeno físico real en términos matemáticos.

2.1.1 Definiciones y clasificaciones de las ecuaciones diferenciales.

Muchos de los principios o leyes que describen el comportamiento del mundo son enunciados o relaciones asociadas con la razón de cambio con que suceden las cosas. Cuando se expresan en términos matemáticos, las relaciones son ecuaciones y las razones de cambio son derivadas. Las ecuaciones que contienen derivadas son ecuaciones diferenciales. Por tanto, para entender e investigar problemas acerca de la disipación del calor en objetos sólidos, la propagación y detección de ondas sísmicas, es necesario saber algo acerca de las ecuaciones diferenciales.

Con el objetivo de referirnos a ellas, debemos clasificar las ecuaciones diferenciales por tipo, orden y linealidad.

Clasificación por tipo.

Una de las clasificaciones más obvias se basa en si la función desconocida depende de una sola variable independiente o de varias. En el primer caso, en la ecuación diferencial sólo aparecen derivadas ordinarias, y se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO). En el segundo caso, las derivadas son parciales, y se tiene una ecuación diferencial parcial (EDP). Por ejemplo,

$dy/dx + 5y = e^{x}$, $\quad d^2y/dx^2 - dy/dx + 6y = 0 \quad$ y $\quad dx/dt + dy/dt = 2x + y \qquad (1)$

son ecuaciones diferenciales ordinarias.

Son ejemplos típicos de ecuaciones diferenciales parciales o EDPs la ecuación de conducción de calor

$$\alpha^2 \quad \partial^2 u(x,t)/\partial x^2 \quad = \quad \partial u(x,t)/\partial t \qquad (2)$$

y la ecuación de onda

$$\beta^2 \quad \partial^2 u(x,t)/\partial x^2 \quad = \quad \partial^2 u(x,t)/\partial t^2 \tag{3}$$

Clasificación por orden.

El orden de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación. Por ejemplo,

$$\underbrace{d^2y/dx^2}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{segundo orden}}} + 5\,(\underbrace{dy/dx}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{primer orden}}})^3 = e^x \tag{4}$$

representa una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Las ecuaciones (2) y (3) son EDP de segundo orden.

De manera más general, la ecuación

$$F(x, \quad y, \quad y', \quad . \quad . \quad . \quad ,y^{(n)}) \quad = \quad 0 \tag{5}$$

Es una EDO de n-ésimo orden.

Se supone que siempre es posible despejar la derivada de orden más alto en una EDO dada, obteniéndose

$$d^n y/dx^n \quad = \quad f(x, \quad y, \quad y', \quad . \quad . \quad . \quad , \quad y^{(n-1)}) \tag{6}$$

donde f es una función continua con valores reales. Esta ecuación diferencial se denomina forma normal de (5).

Clasificación por linealidad.

Se dice que la EDO de n-ésimo orden (5) es lineal si F es lineal en y, y', . . ., $y^{(n)}$. En otras palabras, la variable dependiente y así como todas sus derivadas y', y'',. . ., $y^{(n)}$ son de primer grado, es decir, la potencia de cada uno de los términos que involucran a y es 1. Por ejemplo,

$$(y-x)\,dx + 4x\,dy = 0, \qquad y'' - 2y' + y = 0, \qquad d^3y/dx^3 + 3x\,dy/dx - 5y = e^x \tag{7}$$

son EDOs lineales de primero, segundo y tercer orden, respectivamente.

Una EDO no lineal simplemente es una ecuación que no es lineal.

Las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como, sen *y* o $e^{y'}$, no pueden aparecer en una ecuación lineal. Por ejemplo,

$$\underbrace{(1-y)}_{\text{término no lineal}}y' + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\text{sen } y}_{\text{término no lineal}} = 0, \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + \underbrace{y^2}_{\text{término no lineal}} = 0 \qquad (8)$$

son EDOs no lineales, de primero, segundo *y* cuarto orden, respectivamente.

<u>Soluciones.</u>

Una solución de la EDO (6) sobre un intervalo I es una función tal que posea al menos n derivadas sobre I, y que al ser sustituida en (6) reduzca la ecuación a una identidad.

2.1.2 Ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.

En términos generales, un modelo matemático es una descripción matemática de algo. Con frecuencia se requiere describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno real, ya sea físico, sociológico o incluso económico en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno real se denomina modelo matemático.

La construcción de un modelo matemático de un sistema inicia con la identificación de las variables responsables del cambio que se produzca en el sistema. Es posible que al principio decidamos no incorporar todas estas variables en el modelo. En este primer paso se especifica el nivel de resolución del modelo. A continuación, formulamos un conjunto de premisas razonables o hipótesis acerca del sistema que intentamos describir.

Para ciertos propósitos es perfectamente razonable aceptar modelos de bajas resoluciones.

Debido a que las suposiciones acerca de un sistema con frecuencia implican una tasa de cambio de una o más variables, la representación matemática de todas estas suposiciones puede implicar una o más ecuaciones que involucran derivadas. En otras palabras, el modelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

Una vez formulado un modelo matemático equivalente a una ecuación diferencial o a un sistema de ecuaciones diferenciales, se enfrenta el no menos importante problema de intentar resolverlo. Si podemos resolverlo, entonces consideramos que el modelo será razonable cuando su solución sea consistente con datos experimentales o con hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Pero si las predicciones generadas por la solución no son adecuadas, podemos incrementar el nivel de resolución del modelo o formular premisas alternativas sobre los mecanismos causantes del cambio en el sistema. Los pasos del proceso de modelación se muestran en el siguiente diagrama (ver Zill- 2008- p.21).

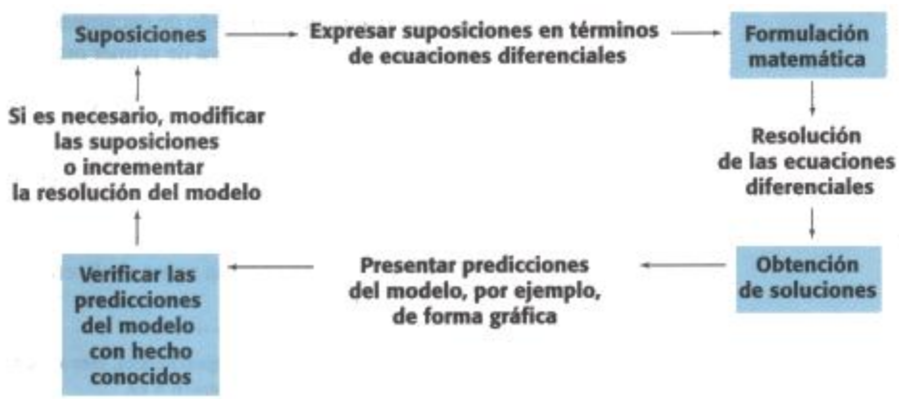


Diagrama del proceso de modelación.

2.2 Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Los estudios indican que no existe un método general para resolver las EDOs de primer orden. Por lo general, se vienen utilizando tres formas en que pueden analizarse: algebraica (o analítica), gráfica (o cualitativa) y numérica.

2.2.1 Métodos algebraicos o analíticos.

Los métodos algebraicos proporcionan soluciones explícitas o implícitas. El aprendizaje de los alumnos se limita a dominar y aplicar una secuencia de técnicas algebraicas, lo que lleva al alumno a la memorización. Por esta razón, los detalles de los procedimientos matemáticos y algorítmicos se olvidan rápidamente a menos que se usen frecuentemente.

Cuando se utilizan métodos algebraicos para resolver EDOs de primer orden, se necesita identificar primero la clase o tipo de ecuación diferencial que se está considerando, para luego aplicar la técnica correspondiente al tipo de EDO de primer orden. Las clases más importantes son: las lineales, las separables y las exactas.

A continuación presentamos las clases con sus respectivas técnicas.

2.2.1.1 *Ecuaciones lineales; método de factores de integración.*

Las EDOs de primer orden se pueden expresar como

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

Si la función f en la ecuación (1) depende linealmente de la variable dependiente *y*, entonces la ecuación (1) se denomina ecuación lineal de primer orden.

La ecuación lineal de primer orden general casi siempre se escribe en la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\ y = g(x) \qquad (2)$$

donde p y g son funciones dadas de la variable independiente. El método de factores de integración consiste en multiplicar la ecuación diferencial (2) por una determinada función $\mu(x)$, la cual se denomina factor de integración. Después de ciertas manipulaciones y ciertos procedimientos, como la integración, se obtiene la función para μ, a saber,

$$\mu(x) = \exp\int p(x)dx \qquad (3)$$

con esta función se obtiene que

$$\mu(x)\ y = \int \mu(x)\ g(x)dx + c \qquad (4)$$

o

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int_{xo}^{x} \mu(s)g(s)ds + c\right] \qquad (5)$$

2.2.1.2 *Ecuaciones separables*

Si la función f en la ecuación (1) no es lineal en la variable dependiente *y*, entonces la ecuación (1) es no lineal, y no existe un método universalmente aplicable para resolverla. Cuando f es un producto de una función de *x* y una función de *y*, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\ h(y) \qquad (6)$$

y se dice que la ecuación diferencial de primer orden (6) es separable o que tiene variables separables, y se puede resolver por integración directa.

***2.2.1.3** Ecuaciones exactas.*

Una expresión diferencial M(x,y) dx + N(x,y) dy es una diferencial exacta en una región R del plano xy si corresponde al diferencial de alguna función f(x,y). Es decir, si

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = \frac{\partial f}{\partial x}\ dx + \frac{\partial f}{\partial y}\ dy \qquad (1)$$

Por tanto

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Si M(x,y) y N(x,y) son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región R del plano xy, se obtiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

entonces, una condición necesaria y suficiente para que M(x,y) dx + N(x,y) dy *sea una diferencial* exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad (2)$$

Si la función f es una familia de curvas f(x,y) = c, de (1) se obtiene la ecuación diferencial exacta

$$M(x,y)\ dx + N(x,y)\ dy = 0 \qquad (3)$$

Ahora supongamos que tenemos una ecuación diferencial de la forma (3) y queremos obtener la solución. Primero determinamos si se cumple la igualdad en (2). Si lo hace, entonces existe una función f para la cual

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

Podemos encontrar f al integrar M(x,y) con respecto a x, mientras y se mantiene constante:

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \qquad (4)$$

donde la función arbitraria g(y) es la "constante" de integración. Ahora al derivar (4) con respecto a y y asumir ∂f/dy = N(x,y):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y) = N(x,y)$$

Esto da

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \qquad (5)$$

Por último, integramos (5) con respecto a *y* y sustituimos el resultado en (4). La solución implícita de la ecuación es f(*x*,*y*) = c.

Notemos que en (5) la expresión $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$ es independiente de *x*, debido a que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad \text{de (2)}$$

También podríamos comenzar el procedimiento anterior con el supuesto de que $\partial f/\partial y = N(x,y)$. Después de integrar N con respecto a *y* y diferenciar entonces ese resultado, encontraríamos los análogos de (4) y (5), respectivamente, como

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x)$$

y

$$h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy$$

2.2.2 Métodos gráficos o cualitativos.

Ya hemos visto que algunas EDOs de primer orden tienen soluciones que pueden encontrarse en forma algebraica, es decir, soluciones de forma explícita o implícita encontradas al implementar un método de solución para una ecuación específica. Estos métodos de solución pueden implicar ciertas manipulaciones, como sustituciones, y ciertos procedimientos, como la integración. Otras EDOs de primer orden tienen soluciones pero no pueden ser resueltas en forma algebraica. Sin embargo, a menudo es posible responder algunas preguntas cualitativas acerca de las propiedades de las soluciones – digamos, ¿cómo se comporta una solución cerca de cierto punto? o ¿cómo se comporta una solución cuando $x \to \infty$? –

Para estudiar las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

donde f es una función dada de las dos variables *x* y *y*, que a veces recibe el nombre de función razón de cambio, se evalúa a f en cada punto de una malla rectangular dentro del plano *xy*. Luego en cada punto de la malla se traza un segmento de recta corto cuya pendiente es el valor de f en ese punto. Entonces cada segmento es tangente a la gráfica de la solución que pasa por ese punto. El conjunto de todos estos segmentos se denomina campo direccional o campo de pendientes de la ecuación diferencia $dy/dx = f(x,y)$. Un campo direccional trazado sobre una malla más o menos fina da una idea del comportamiento general de las soluciones de una ecuación diferencial.

Visualmente, el campo direccional señala la apariencia o forma de una familia de curvas solución para la ecuación diferencial y, en consecuencia, es posible visualizar de manera rápida ciertos aspectos cualitativos de las soluciones.

2.2.3 Métodos de las aproximaciones numéricas.

Las soluciones de la mayoría de las EDOs de primer orden no pueden encontrarse por medios analíticos, pero se pueden calcular valores aproximados de la solución $y = \emptyset(x)$ del problema para un conjunto seleccionado de valores de x.

En la actualidad existen numerosos métodos que producen aproximaciones numéricas de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Uno de los más sencillos es el método de la recta tangente o método de Euler.

Asumamos que el problema de valor inicial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_o) = y_o \tag{1}$$

posee una solución $y = \emptyset(x)$.

Consideraremos el modo en que se podría aproximar la solución $y = \emptyset(x)$ de las ecuaciones (1) en la vecindad de $x=x_o$. Se sabe que la curva solución pasa por el punto inicial (x_o,y_o) y con base en la ecuación diferencial se sabe además que su pendiente en este punto es $f(x_o,y_o)$. Por tanto, es posible escribir una ecuación para la recta tangente a la curva solución en (x_o,y_o), a saber, (ver Boyce y Diprima-2013-p.102)

$$Y = f(x_o,y_o)\,(x-x_o) + y_o \tag{2}$$

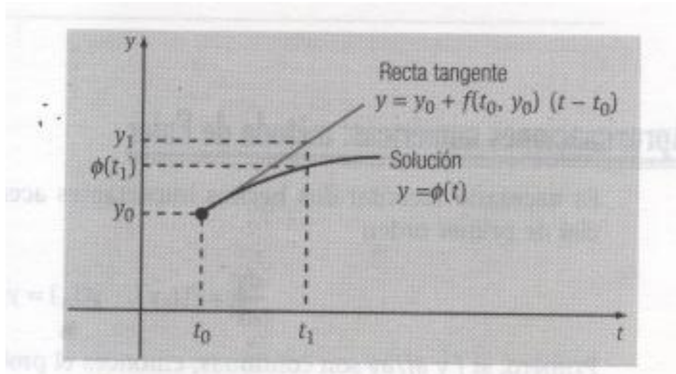


Figura 2.2.1 Aproximación de una recta tangente

La recta tangente es una buena aproximación de la verdadera curva solución en un intervalo suficientemente corto para que la pendiente de la solución no cambie de manera apreciable respecto de su valor en el punto inicial. Por lo tanto, si x_1 está lo suficientemente cerca de x_o, es posible aproximar $\emptyset(x_1)$ con el valor y_1 determinado al sustituir $x=x_1$ en (2); así

$$y_1 = f(x_o,y_o)(x_o+h - x_o) + y_o \qquad \text{o} \qquad y_1 = y_o + f(x_o,y_o)h \tag{3}$$

Como se desconoce el valor $\emptyset(x_1)$ de la curva solución en x_1, en su lugar se usa el valor aproximado y_1, es decir, $\emptyset(x_1)\approx y_1$. Ahora repetimos el proceso construyendo la recta tangente a la curva solución en $(x_1,\emptyset(x_1))$ con la pendiente $f(x_1,\emptyset(x_1))$. Entonces, ahora el punto de inicio es $(x_1,\emptyset(x_1)\approx y_1)$

$$y = f(x_1,y_1)(x-x_1) + y_1 \tag{4}$$

Para aproximar el valor de $\emptyset(x)$ en un punto cercano x_2, se utiliza en cambio la ecuación (4), de donde se obtiene

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)(x_2-x_1)$$

La aproximación $\emptyset(x_2)\approx y_2$, corresponde a dos pasos de longitud h desde x_o. es decir, $x_2=x_1+h=x_o+2h$ y

$$\emptyset(x_2) = \emptyset(x_o+2h) = \emptyset(x_1+h)\approx y_2 = y_1+hf(x_1,y_1) \tag{5}$$

Si continuamos de esta forma, veremos que y_1, y_2, y_3, . . ., pueden definirse de manera recursiva mediante la fórmula general

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) \tag{6}$$

donde $x_n=x_o+nh$, n=o, 1, 2, . . . ,

Ésta es la fórmula de Euler, y el procedimiento de usar rectas tangentes sucesivas se denomina método de Euler.

2.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden.

Una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden tiene la forma

$$y'' = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \qquad (1)$$

donde f es alguna función dada. Se dice que la ecuación (1) es lineal cuando se puede expresar de la forma

$$P(t)\; y'' + Q(t)\; y' + R(t)\; y = G(t) \qquad (2)$$

Un problema con valor inicial consta de una ecuación diferencial de la forma (1) o (2) junto con un par de condiciones iniciales

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0', \qquad (3)$$

donde y_0 y y_0' son números dados.

2.3.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden homogéneas con coeficientes constantes.

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden es homogénea si el término G(t) en la ecuación (2) es cero para todo t. En caso contrario, la ecuación se denomina no homogénea. La EDO lineal de segundo orden homogénea se expresa entonces como

$$P(t)\; y'' + Q(t)\; y' + R(t)\; y = 0, \qquad (4)$$

En esta sección la atención se concentrará en las ecuaciones en que las funciones P, Q y R son constantes. En este caso, la ecuación (4) pasa a ser

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (5)$$

donde a, b y c son constantes. Ésta es la EDO lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes. Antes de abordar la ecuación (5), se acostumbra examinar un ejemplo sencillo pero típico. Considérese la ecuación

$$y'' - y = 0, \quad (6)$$

Esta ecuación dice que se busca una función con la propiedad de que la segunda derivada de la función es igual a la función misma. Una función bien conocida del cálculo con esta propiedad es $y_1(t)=e^t$, la función exponencial. Otra función con esta propiedad es $y_2(t)=e^{-t}$. También observamos que los múltiplos de estas dos soluciones son a su vez soluciones. Por ejemplo, las funciones $c_1y_1(t)=c_1e^t$ y $c_2y_2(t)=c_2e^{-t}$ satisfacen la ecuación diferencial (6) para todos los valores de las constantes c_1 y c_2. Además, observamos que cualquier suma de las soluciones de la ecuación (6) también es una solución. En particular, dado que $c_1y_1(t)$ y $c_2y_2(t)$ son soluciones de la ecuación (6), también lo es la función

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}, \quad (7)$$

para cualesquiera valores de c_1 y c_2. Esto es lo que se conoce como el principio de superposición. Esta expresión representa una familia infinita de soluciones de la ecuación diferencial (6).

Ahora es posible elegir un miembro particular de esta familia de soluciones que además satisfaga un conjunto de condiciones iniciales. Por ejemplo, supóngase que se buscan las soluciones de la ecuación (6) que además satisfagan las condiciones iniciales

$$y(0)=2, \qquad y'(0)=-1, \quad (8)$$

Primero se hace t=0 y y=2 en la ecuación (7); esto da la ecuación

$$c_1 + c_2 = 2, \quad (9)$$

Después se deriva la ecuación (7), de donde resulta

$$y' = c_1e^t - c_2e^{-t}$$

Entonces, haciendo t=0 y $y'(0)=-1$, se obtiene

$$c_1 - c_2 = -1, \quad (10)$$

Despejando c_1 y c_2 simultáneamente en las ecuaciones (9) y (10), se encuentra que

$$c_1=\frac{1}{2}, \qquad c_2=\frac{3}{2} \quad (11)$$

Por último, insertando estos valores en la ecuación (7) se llega a

$$y = \frac{1}{2} e^{t} + \frac{3}{2} e^{-t}, \quad (12)$$

la solución del problema con valor inicial que consta de la ecuación diferencial (6) y las condiciones iniciales (8).

Volviendo ahora a la ecuación (5)

$$ay'' + by' + cy = 0$$

que tiene coeficientes constantes (reales) arbitrarios. Se buscarán también soluciones exponenciales de la ecuación (5). Para ello se supone que $y=e^{rt}$, donde r es un parámetro por determinar. Entonces se sigue que $y'=re^{rt}$ y $y''=r^2e^{rt}$. Sustituyendo y, y'' y y'' por estas expresiones en la ecuación (5), se obtiene

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

o, dado que $e^{rt} \neq 0$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (13)$$

La ecuación (13) se denomina la ecuación característica de la ecuación diferencial (5). Su importancia radica en el hecho de que si r es una raíz de la ecuación polinómica (13), entonces $y=e^{rt}$ es una solución de la ecuación diferencial (5). Dado que la ecuación (13) es cuadrática con coeficientes reales, tiene dos raíces, que pueden ser reales y diferentes, reales y repetidas, o complejas conjugadas. A continuación consideraremos los tres casos.

2.3.1.1 Raíces reales y diferentes de la ecuación característica.

Ejemplo 1. Encontrar la solución general de

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad (14)$$

Solución. La ecuación característica es

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0$$

Por tanto, los valores posibles de r son $r_1=-2$ y $r_2=-3$; la solución general de la ecuación (14) es

$$y = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}, \quad (15)$$

Ejemplo 2. Encontrar la solución del problema con valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0)=2, \quad y'(0)=3, \qquad (16)$$

Solución. La solución general de la ecuación diferencial se encontró en el ejemplo 1 y está dada por la ecuación (15). Para satisfacer la primera condición inicial, se hace t=0 y y=2 en la ecuación (15); por tanto, c_1 y c_2 deben satisfacer

$$c_1 + c_2 = 2, \qquad (17)$$

Para usar la segunda condición inicial es necesario derivar antes la ecuación (15). El resultado es $y' = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$. Luego, haciendo t=0 y y'=3, se obtiene

$$-2c_1 - 3c_2 = 3, \qquad (18)$$

Resolviendo las ecuaciones (17) y (18) se encuentra que $c_1=9$ y $c_2=-7$. Aplicando estos valores en la expresión (15), se llega a la solución

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}, \qquad (19)$$

del problema con valor inicial (16).

Ejemplo 3. Determinar la solución del problema con valor inicial

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0)=2, \quad y'(0)=\frac{1}{2}, \qquad (20)$$

Solución. La ecuación característica es

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

y sus raíces son r=3/2 y r=1/2. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1e^{3t/2} + c_2e^{t/2}, \qquad (21)$$

Aplicando las condiciones iniciales, se obtienen las dos ecuaciones siguientes para c_1 y c_2:

$$c_1 + c_2 = 2, \qquad \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}$$

La solución de estas ecuaciones es $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{2}$, y la solución del problema con valor inicial (20) es

$$y = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}, \qquad (22)$$

2.3.1.2 Raíces complejas conjugadas de la ecuación característica.

En la sección 2.3.1 analizamos la ecuación

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

y se vio que si se buscan soluciones de la forma $y = e^{rt}$, entonces r debe ser una raíz de la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0, \qquad (2)$$

Si las raíces r_1 y r_2 son reales y diferentes, lo cual ocurre siempre que el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, entonces la solución general de la ecuación (1) es

$$y = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t). \qquad (3)$$

Supóngase ahora que $b^2 - 4ac$ es negativo. Entonces las raíces de la ecuación (2) son números complejos conjugados; se les denota por

$$r_1 = \lambda + i\mu \qquad r_2 = \lambda - i\mu \qquad (4)$$

donde λ y μ son reales. Las expresiones correspondientes para las soluciones y_1 y y_2 son

$$y_1 = \exp[(\lambda + i\mu)t] \qquad y_2 = \exp[(\lambda - i\mu)t] \qquad (5)$$

Usando la fórmula de Euler

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \qquad e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t, \qquad (6)$$

las soluciones y_1 y y_2 se pueden expresar como

$y_1 = e^{\lambda t}$ (cos μt + i sen μt) $\qquad$ $y_2 = e^{\lambda t}$ (cos $\mu t - i$ sen μt)

Las soluciones y_1 y y_2 son funciones con valores complejos, mientras que en general se preferiría tener soluciones con valores reales, de ser posible, porque la ecuación diferencial en sí tiene coeficientes reales. Tales soluciones pueden hallarse como consecuencia del principio de superposición, el cual establece que si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación (1), entonces cualquier combinación lineal de y_1 y y_2 es también una solución. En particular, puede formarse la suma y luego la diferencia de y_1 y y_2. Se tiene

$$y_1(t) + y_2(t) = e^{\lambda t} (\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) + e^{\lambda t} (\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) = 2\, e^{\lambda t} \cos \mu t$$

y

$$y_1(t) - y_2(t) = e^{\lambda t} (\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) - e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) = 2\, i\, e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t$$

Por consiguiente, si se omiten los multiplicadores constantes 2 y $2i$, respectivamente, se ha obtenido un par de soluciones con valores reales

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \qquad v(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \qquad (7)$$

Obsérvese que u y v son simplemente las partes real e imaginaria, respectivamente, de y_1. En consecuencia, si las raíces de la ecuación característica son números complejos $\lambda \pm i\, \mu$, con $\mu \neq 0$, entonces la solución general de la ecuación (1) es

$$y = c_1\, e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2\, e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t \qquad (8)$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

<u>Ejemplo 1.</u> Encontrar la solución general de

$$y'' + y' + y = 0 \qquad (9)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + r + 1 = 0$$

y sus raíces son

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{(1-4)}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto, λ=$-\,{}^{1}\!/_{2}$ y μ=${}^{\sqrt{3}}\!/_{2}$, de donde la solución general de la ecuación (9) es

$$y = c_1\ e^{-t/2}\ \cos\ (\sqrt{3}\ \ t/2) + c_2\ e^{-t/2}\ \text{sen}\ (\sqrt{3}\ \ t/2), \qquad (10)$$

<u>Ejemplo 2.</u> Encontrar la solución general de

$$y'' + 9y = 0. \qquad (11)$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 9 = 0$$

y sus raíces son r=$\pm\ 3i$; por tanto, λ=0 y μ=3. La solución general es

$$y = c_1\ \cos\ 3t + c_2\ \text{sen}\ 3t \qquad (12)$$

<u>Ejemplo 3.</u> Determinar la solución del problema con valor inicial

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0)=-2, \qquad y'(0)=1. \qquad (13)$$

La ecuación característica es

$$16r^2 - 8r + 145 = 0,$$

y sus raíces son r=1/4 $\pm$ $3i$. La solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1\ e^{t/4}\ \cos\ 3t + c_2\ e^{t/4}\ \text{sen}\ 3t \qquad (14)$$

Aplicando la primera condición inicial se hace t=0 en la ecuación (14), se obtiene así

$$y(0) = c_1 = -\,2$$

Para la segunda condición inicial se debe derivar (14) y luego hacer t=0. Se obtiene

$$y' = \tfrac{1}{4}\, c_1\, e^{t/4} \cos 3t - 3\, c_1\, e^{t/4}\, \text{sen}\ 3t + \tfrac{1}{4}\, c_2\, e^{t/4}\, \text{sen}\ 3t + 3\, c_2\, e^{t/4} \cos 3t$$

$$y'(0) = \tfrac{1}{4}\, c_1 + 3\, c_2 = 1$$

de donde $c_2=1/2$. Utilizando los valores de c_1 y c_2 en la ecuación (14), se obtiene que

$$y = -2\, e^{t/4} \cos 3t + \frac{1}{2}\, e^{t/4} \operatorname{sen} 3t \tag{15}$$

es la solución del problema con valor inicial (13).

2.3.1.3 Raíces repetidas

Ahora se considera resolver la ecuación

$$a\, y'' + b\, y' + cy = 0 \tag{1}$$

cuando las raíces de la ecuación característica

$$a\, r^2 + b\, r + c = 0 \tag{2}$$

r_1 y r_2 son iguales. Esto ocurre cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es cero. Entonces se sigue que

$$r_1 = r_2 = -\, b/2a \tag{3}$$

Ambas raíces producen la misma solución

$$y_1 = e^{-bt/2a} \tag{4}$$

de la ecuación diferencial (1).

Veamos con un ejemplo como encontrar una segunda solución.

<u>Ejemplo 1</u>. Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \tag{5}$$

La ecuación característica es

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0$$

de modo que $r_1=r_2= -2$. Por lo tanto, una solución de la ecuación (5) es $y_1(t)= e^{-2t}$. Para hallar la solución general de (5) se requiere una segunda solución que no sea múltiplo de y_1. Esta segunda solución puede encontrarse de varias maneras. Recuérdese que al ser $y_1(t)$ una solución de la ecuación (1), también lo es $cy_1(t)$

para cualquier constante c. La idea básica es generalizar esta observación sustituyendo c por una función $v(t)$ y luego tratar de determinar $v(t)$ de modo que el producto $v(t)\ y_1(t)$ sea también una solución de la ecuación (1).

Para aplicar este procedimiento se sustituye $y = v(t)\ y_1(t)$ en la ecuación (1) y se utiliza la ecuación resultante para encontrar $v(t)$. Partiendo de

$$y = v(t)\ y_1(t) = v(t)\ e^{-2t} \tag{6}$$

se tiene

$$y' = v'(t)\ e^{-2t} - 2v(t)\ e^{-2t} \tag{7}$$

y

$$y'' = v''(t)\ e^{-2t} - 4v'(t)\ e^{-2t} + 4v(t)\ e^{-2t}, \tag{8}$$

Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones (6), (7) y (8) en la ecuación (5) y agrupando términos, se obtiene

$$[\ v''(t) - 4v'(t) + 4v(t) + 4v'(t) - 8v(t) + 4v(t)\ ]\ e^{-2t} = 0$$

Que al simplificar queda como

$$v''(t) = 0 \tag{9}$$

Por tanto,

$$v'(t) = c_1$$

y

$$v(t) = c_1 t + c_2 \tag{10}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias. Por último, sustituyendo $v(t)$ en la ecuación (6), se obtiene

$$y = c_1 t\ e^{-2t} + c_2\ e^{-2t} \tag{11}$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación (11) corresponde a la solución original $y_1(t)= \exp(-2t)$, pero el primer término surge de una segunda solución, a saber, $y_2(t)= t \exp(-2t)$. Es evidente que estas dos soluciones no son proporcionales.

2.4 Ecuaciones diferenciales parciales y series de Fourier.

En muchos problemas aplicados al mundo real se tienen dos o más variables independientes, por lo que los modelos matemáticos correspondientes implican ecuaciones diferenciales parciales.

Uno de los métodos más importante para resolver ecuaciones diferenciales parciales es el método de separación de variables. Éste se caracteriza porque la ecuación diferencial parcial se sustituye por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales deben resolverse sujetas a condiciones iniciales o de frontera dadas. La solución deseada de la ecuación diferencial parcial se expresa entonces como una suma, por lo común, una serie infinita, formada a partir de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En muchos casos, la serie infinita es una serie de senos, cosenos o ambos, y se les conoce como series de Fourier.

2.4.1 El método de separación de variables.

En esta sección se ilustrará el método de separación de variables mediante algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1. Resuelva el problema con valor en la frontera

$$4\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 3u \qquad (1)$$

$$u(x,0) = 4e^{-x} - e^{-5x} \qquad (2)$$

Solución. Aquí las variables independientes son x y t, la variable dependiente es u.

La solución trivial $u(x,t)=0$, para todo x y t, satisface la ecuación diferencial (1). Por tanto, es una posible solución de la misma. Pero como no puede satisfacer la condición inicial (2), no puede ser aceptada como solución del problema con valor en la frontera (1), (2).

Asumimos que la solución $u(x,t)$ es el producto de dos funciones, una que depende sólo de x y otra que depende sólo de t, por tanto

$$u(x,t) = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t) \quad \text{o} \quad u = \mathrm{X}\,\mathrm{T}, \qquad (3)$$

Al sustituir (3) en la ecuación diferencial (1), se obtiene

$$4\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{X\ T}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{X\ T}) = 3\ \mathrm{X\ T} \qquad \text{o} \qquad 4\ \mathrm{X\ T'} + \mathrm{X'\ T} = 3\ \mathrm{X\ T}, \tag{4}$$

donde $\mathrm{X}' = d\mathrm{X}/dx$, $\quad \mathrm{T}' = d\mathrm{T}/dt$

Al dividir (4) por $\mathrm{X\ T}$, se obtiene

$$4\,\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} + \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}} = 3, \qquad \text{o} \qquad 3 - 4\,\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}}, \tag{5}$$

donde se han separado las variables. Como el miembro izquierdo es independiente de *x* y es igual al miembro derecho que es independiente de *t*, concluimos que ambos miembros de la ecuación son independientes de *x* y de *t*. En otras palabras, cada miembro de la ecuación debe ser una constante. Si se llama λ a esta constante de separación, entonces (5) pasa a ser

$$3 - 4\,\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}} = \lambda \tag{6}$$

De aquí se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

$$\frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}} = \lambda \qquad \text{o} \qquad \mathrm{X}' - \lambda\ \mathrm{X} = 0 \tag{7}$$

$$3 - 4\,\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} = \lambda \qquad \text{o} \qquad \mathrm{T}' - \frac{1}{4}(3 - \lambda)\ \mathrm{T} = 0 \tag{8}$$

La suposición (3) ha llevado a sustituir la ecuación diferencial parcial (1) por dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (7) y (8). Esto es lo que se conoce como el método de separación de variables para resolver una ecuación diferencial parcial. Las EDOs obtenidas deben resolverse sujetas a la condición inicial dada.

Como (7) es una EDO lineal de primer orden, se aplica la teoría: si la ecuación diferencial es de la forma $dy/dx + P(x)\,y = f(x)$ con $\mathrm{I} = \int P(x)dx$ se obtiene,

$$\frac{d}{dx}(e^{\mathrm{I}}y) = e^{\mathrm{I}}\,f(x), \qquad e^{\mathrm{I}}y = \int e^{\mathrm{I}}\,f(x)dx + a_1$$

En (7) tenemos $P(x) = -\lambda$, $\quad \mathrm{I} = \int -\lambda dx = -\lambda\,x$, $\quad e^{\mathrm{I}} = e^{-\lambda x}$, $f(x) = 0$.

De esta manera obtenemos, cambiando $y(x)$ por $\mathrm{X}(x)$,

$$e^{-\lambda x}.\mathrm{X} = \int e^{-\lambda x}.0\,dx + a_1 = a_1, \qquad e^{-\lambda x}.\mathrm{X} = a_1$$

$$\mathrm{X}(x) = a_1 \quad e^{\lambda x}, \qquad (9)$$

La ecuación (8) también es una EDO lineal de primer orden, se aplica la misma teoría con

P(t) = $-(3-\lambda)/4$ y f(t)=0, $\mathrm{I} = \int -\frac{1}{4}(3-\lambda)\, dt = -(3-\lambda)\, t/4$, $e^{-(3-\lambda)t/4}.\mathrm{T} = a_2$

$$\mathrm{T}(t) = a_2 \quad e^{(3-\lambda)t/4} \qquad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) son las soluciones generales de las EDOs lineales (7) y (8), respectivamente.

Con (9) y (10) se obtiene de (3) la solución producto de la EDP (1)

$$u(x,t) = \mathrm{X}\ \mathrm{T} = a_1 a_2\ e^{\lambda x}.e^{(3-\lambda)t/4} = \mathrm{B}\ e^{[\lambda x+\frac{(3-\lambda)t}{4}]} \qquad (11)$$

donde B=$a_1 a_2$ es una constante arbitraria. Existe una infinidad de soluciones.

La solución producto (11) es una solución general de (1), sólo interesan aquella soluciones de (1) que también satisfacen la condición inicial (2), es decir, la ecuación (11) para t=0 debe cumplir

$$u(x,0) = \mathrm{B}\ e^{\lambda x} = 4e^{-x} - e^{-5x} \qquad (12)$$

Vemos que (12) no puede ser cierto para ninguna selección de las constantes B y λ.

De la analogía con las EDOs, se puede enunciar el principio de superposición para las EDPs lineales homogéneas. Si u_1, u_2, . . . , u_k son las soluciones de una EDP lineal homogénea, entonces la combinación lineal

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ .\ .\ .\ + c_k u_k \qquad (13)$$

donde las c_i, i=1, 2, . . . , k son constantes, es también una solución. De aquí podemos suponer que si tenemos un conjunto infinito u_1, u_2, u_3, . . . de soluciones de una EDP lineal homogénea, podemos construir otra solución u formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad u_k \qquad (14)$$

donde las c_k, k=1, 2, . . . son constantes.

Volviendo a nuestro ejemplo, si escribimos la EDP (1) en la forma

$$4\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - 3u = 0$$

Vemos que tenemos una EDP lineal homogénea, por lo tanto, la suma de dos soluciones es también una solución.

De (11) obtenemos que

$$u_1 = B_1 \exp[\lambda_1 x + (3-\lambda_1)t/4] \quad \text{y} \quad u_2 = B_2 \exp[\lambda_2 x + (3-\lambda_2)t/4]$$

son ambas soluciones, y así, aplicando (13), debemos tener también como solución a $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$

$$u = c_1 B_1 \exp[\lambda_1 x + (3-\lambda_1)t/4] + c_2 B_2 \exp[\lambda_2 x + (3-\lambda_2)t/4]$$

$$= D_1 \exp[\lambda_1 x + (3-\lambda_1)t/4] + D_2 \exp[\lambda_2 x + (3-\lambda_2)t/4 \qquad (15)$$

La condición de frontera nos lleva ahora a

$$u(x,0) = D_1 \exp(\lambda_1 x) + D_2 \exp(\lambda_2 x) = 4\exp(-x) - \exp(-5x)$$

la cual se satisface si escogemos $D_1=4$, $\lambda_1=-1$, $D_2=-1$, $\lambda_2=-5$

Ahora la solución deseada es

$$u(x,t) = 4e^{(-x+t)} - e^{(-5x+2t)} \qquad (16)$$

Ejemplo 2. Resuelva el problema con valores en la frontera

$$2\frac{\partial u}{\partial t} = \partial^2 u/\partial x^2 \qquad (1)$$

$$u(0,t)=0; \qquad u(\pi,t)=0 \qquad (2)$$

$$u(x,0) = 2 \text{ sen } 3x - 5 \text{ sen } 4x \qquad (3)$$

Solución.

Aquí las variables independientes son x y t. Asumimos una solución de la forma $u = \mathrm{X}\,\mathrm{T}$, donde X depende sólo de x y T depende sólo de t.

Reemplazando u en la ecuación diferencial (1), obtenemos

$$2\frac{\partial(\mathrm{X\,T})}{\partial t} = \partial^2(\mathrm{X\,T})/\partial x^2 \qquad \text{o} \qquad 2\mathrm{X\,T}' = \mathrm{X}''\mathrm{T}$$

(4)

donde $\mathrm{T}' = d\mathrm{T}/dt$, $\mathrm{X}'' = d^2\mathrm{X}/dx^2$

Dividiendo por $\mathrm{X\,T}$, se obtiene

$$2\,\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}}$$

(5)

Vemos que cada lado debe ser independiente de *x* y *t*. Si se identifica con $-\lambda$ a la constante de separación, entonces (5) pasa a ser

$$\frac{\mathrm{X}''}{\mathrm{X}} = 2\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} = -\lambda$$

(6)

De aquí se obtienen las dos ecuaciones diferenciales siguientes para $\mathrm{X}(x)$ y $\mathrm{T}(t)$:

$$\mathrm{X}'' + \lambda\,\mathrm{X} = 0$$

(7)

$$\mathrm{T}' + \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{T} = 0$$

(8)

Al integrar (8) se obtiene

$$\mathrm{T}(t) = a_1\, e^{-\lambda t/2}$$

(9)

En esta ecuación vemos que para $\lambda > 0$, $\mathrm{T}(t)$ podría disminuir a cero cuando *t* aumenta, pero no podría aumentar a infinito como lo haría si hubiéramos usado $+\lambda$ como constante de separación. Esta es la razón física para escoger la constante de separación como $-\lambda$ (en vez de $+\lambda$).

Si se sustituye $u(x,t)=\mathrm{X\,T}$ en la condición de frontera (2) cuando $x=0$ y $x=\pi$, las condiciones de frontera se convierten en

$$u(0,t) = \mathrm{X}(0)\,\mathrm{T}(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(\pi,t) = \mathrm{X}(\pi)\,\mathrm{T}(t) = 0$$

(10)

Como estas igualdades deben ser válidas para todo tiempo *t*, debemos tener $\mathrm{X}(0)=0$ y $\mathrm{X}(\pi)=0$. Estas condiciones de frontera, junto con la ecuación diferencial ordinaria (7), constituye el problema:

$$\mathrm{X}'' + \lambda\,\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{X}(0)=0, \qquad \mathrm{X}(\pi)=0$$

(11)

Para resolver este problema es necesario considerar por separado los tres posibles casos para el parámetro λ: cero, negativo y positivo, ya que la forma de la solución de (7) es distinta en cada uno de estos casos.

<u>Caso λ=0.</u> En este caso la ecuación (7) pasa a ser

$$X'' = 0 \tag{12}$$

y la solución general es

$$d^2X/dx^2 = 0; \qquad \frac{dX}{dx} = a_1; \qquad X(x) = a_1 x + a_2 \tag{13}$$

De la primera condición de frontera en (11) tenemos

$$X(0) = a_1.0 + a_2 = a_2 = 0 \tag{14}$$

La solución (13) pasa a ser ahora

$$X(x)=a_1 x \tag{15}$$

Para la segunda condición de frontera en (11) tenemos, la ecuación (15) nos da $X(\pi)=a_1\,\pi=0$, lo que implica $a_1=0$. En este caso la solución es $X(x)=0$, lo que indica que $u(x,t)$ es la solución trivial, la cual no es aceptable.

<u>Caso $\lambda < 0$.</u> Haciendo $\lambda = -\alpha^2$, la ecuación (7) pasa a ser

$$X'' - \alpha^2 X = 0 \tag{16}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial (16) es $r^2 - \alpha^2 = 0$; las raíces son $r_1=\alpha$ y $r_2=-\alpha$. La solución general de (16) es

$$X(x) = a_1 e^{\alpha x} + a_2 e^{-\alpha x} \tag{17}$$

Con $\cosh y = (e^y + e^{-y})/2$ y $\operatorname{senh} y = (e^y - e^{-y})/2$, se obtiene

$\cosh y + \operatorname{senh} y = e^y$ *y* $\cosh y - \operatorname{senh} y = e^{-y}$

$$a_1 e^y + a_2 e^{-y} = a_1(\cosh y + \operatorname{senh} y) + a_2(\cosh y - \operatorname{senh} y)$$

$$= (a_1 + a_2)\cosh y + (a_1 - a_2)\operatorname{senh} y$$

$$= b_1 \cosh y + b_2 \operatorname{senh} y, \qquad (18)$$

Reemplazando la identidad (18) en (17) obtenemos

$$\mathrm{X}(x) = b_1 \cosh \alpha x + b_2 \operatorname{senh} \alpha x \qquad (19)$$

Por conveniencia al aplicar las condiciones en la frontera (11), se eligieron las funciones hiperbólicas $\cosh \alpha x$ y $\operatorname{senh} \alpha x$ en vez de las funciones exponenciales $e^{\alpha x}$ y $e^{-\alpha x}$.

De la primera condición de frontera en (11), la ecuación (19) nos da

$$\mathrm{X}(0) = b_1 \cosh 0 + b_2 \operatorname{senh} 0 = b_1.1 + b_2.0 = b_1=0$$

Por lo tanto, la ecuación (19) se convierte en

$$\mathrm{X}(x) = b_2 \operatorname{senh} \alpha x, \qquad (20)$$

Usando la segunda condición de frontera en (11), la ecuación (20) nos da $\mathrm{X}(\pi) = b_2 \operatorname{senh}\alpha\pi=0$. Cuando $\alpha \neq 0$, $\operatorname{senh} \alpha\pi \neq 0$, por lo que estamos obligados a elegir $b_2=0$. Se concluye que $\mathrm{X}(x)=0$, por lo tanto, $u(x,t) = \mathrm{X}(x)\, \mathrm{T}(t) = 0$ es la solución trivial, la cual no es aceptada.

<u>Caso $\lambda > 0$</u>

Haciendo $\lambda = \alpha^2$, la ecuación (16) pasa a ser

$$\mathrm{X}'' + \alpha^2 \mathrm{X} = 0 \qquad (21)$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial (21) es $r^2 + \alpha^2 = 0$, las raíces son $r_1=i\alpha$ y $r_2=-i\alpha$. La solución general es

$$\mathrm{X}(x) = a_1 e^{i\alpha x} + a_2 e^{-i\alpha x} \qquad (22)$$

Usando la fórmula de Euler se obtiene

$$\mathrm{X}(x) = a_1 (\cos \alpha x + i \operatorname{sen} \alpha x) + a_2 (\cos \alpha x - i \operatorname{sen} \alpha x)$$

$$= (a_1 + a_2) \cos \alpha x + i\,(a_1 - a_2) \operatorname{sen} \alpha x$$

$$= A \cos \alpha x + B \operatorname{sen} \alpha x \qquad (23)$$

Usando la primera condición de frontera en (11), la ecuación (23) nos da

$X(0) = A \cos 0 + B \text{ sen } 0 = A.1 + B.0 = A = 0$. Ahora la solución general (23) pasa a ser

$$X(x) = B \text{ sen } \alpha x, \tag{24}$$

Usando la segunda condición de frontera en (11), la ecuación (24) nos da $X(\pi) = B \text{ sen } \alpha\pi = 0$. B no puede ser cero porque nos convertiría la ecuación (24) en $X(x)=0$, lo que implicaría $u(x,t) = X(x)\ T(t) = 0$, la cual es la solución trivial, que no es aceptada. Por tanto se requiere que sen αx sea cero, lo que se cumple si $\alpha\pi = n\pi$, es decir, $\alpha=n$, donde n=1, 2, 3, . . . , $\lambda=\alpha^2=n^2$, o sea, cuando $\lambda_n=\alpha^2=n^2$, con n=1, 2, 3, ...

Los valores λ_n y las soluciones correspondientes

$$X_n(x) = B \text{ sen } nx, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

se conocen como los valores propio y las funciones propias, respectivamente, del problema de valores en la frontera (11).

Las soluciones (25) son múltiplos constantes de las funciones sen nx. En consecuencia, por ser (7) una ecuación diferencial lineal homogénea, cualquier múltiplo constante de una solución es también una solución. Entonces podemos tomar simplemente B=1, y quedaría (25) como

$$X_n(x) = \text{sen } nx, \qquad n=1, 2, 3, \ldots . \tag{26}$$

Volviendo a la ecuación (8) para $T(t)$ y sustituyendo λ por n^2, se obtiene

$$T' + (n^2/2)\ T = 0 \tag{27}$$

Como (27) es una EDO lineal de primer orden, se aplica la teoría como se hizo en el ejemplo 1 de la sección 2.4.1.

Con $P(t)=n^2/2$ y $f(t)=0$, se obtiene $I = \int P(t)dt = \int (n^2/2)dt = (n^2/2)\ t$, $e^I = \exp[(n^2/2)t]$

$$\exp[(n^2/2)t].T = \int \exp[(n^2/2)t].0\, dt + a_1 = a_1; \qquad \exp[(n^2/2)t].T = a_1$$

$$T(t) = a_1 \exp[-(n^2/2)t] \tag{28}$$

Por ser la ecuación (27) lineal homogénea, la solución puede ser cualquier múltiplo constante de exp $[-(n^2/2)t]$. De esta manera podemos tomar $a_1=1$. La solución producto es entonces

$$u_n(x,t) = \exp[-(n^2/2)t].\text{sen } nx, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \qquad (29)$$

Estas funciones satisfacen la ecuación diferencial (1) y las condiciones en la frontera (2) para cada valor entero positivo n. A veces a las funciones u_n se les llama las soluciones fundamentales del PVF (1), (2) y (3).

Aplicando la condición inicial (3), se obtiene

$$u_n(x,0) = \text{sen } nx = 2 \text{ sen } 3x - 5 \text{ sen } 4x, \qquad (30)$$

Vemos que no existe un valor de n para que se cumpla la condición (30). Concluimos que (29) no es una solución del problema dado en (1), (2) y (3). De (29) obtenemos que

$$u_{n1} = \exp[-(n_1^2/2)t] \text{ sen } n_1x \qquad \text{y} \qquad u_{n2} = \exp[-(n_2^2/2)t] \text{ sen } n_2x$$

son ambas soluciones. Aplicando el principio de superposición, debemos tener también como solución a

$$u(x,t) = c_1\, u_{n1} + c_2\, u_{n2} = c_1 \exp[-(n_1^2/2)t] \text{ sen } n_1x + c_2 \exp[-(n_2^2/2)t] \text{ sen } n_2x \qquad (31)$$

Aplicando la condición inicial (3), se obtiene

$$u(x,0) = c_1 \text{ sen } n_1x + c_2 \text{ sen } n_2x = 2 \text{ sen } 3x - 5 \text{ sen } 4x$$

Esta identidad se cumple si $c_1=2$, $n_1=3$, $c_2=-5$ y $n_2=4$

Ahora la solución es

$$u(x,t) = 2\, e^{-4.5t} \text{ sen } 3x - 5\, e^{-8t} \text{ sen } 4x.$$

<u>Ejemplo 3.</u>

Resuelva el problema con valores en la frontera

$$\partial^2u/\partial t^2 = \partial^2u/\partial x^2 \qquad (1)$$

$$u(0,t)=0; \qquad u(20,t)=0 \qquad (2)$$

$u_t(x,0)=0;$ $\quad u(x,0)= 10 \text{ sen } \frac{\pi}{2} x$ (3)

Solución.

Aquí las variables independientes son x y t. Asumimos una solución de la forma

$u(x,t) = \mathrm{X}(x)\ \mathrm{T}(t)$ o $u = \mathrm{X}\ \mathrm{T}$ (4)

Sustituyendo (4) en (1), obtenemos

$\partial^2(\mathrm{X\,T})/\partial t^2 = \partial^2(\mathrm{X\,T})/\partial x^2,$ $\quad \mathrm{X\,T''} = \mathrm{X''T}$ (5)

donde $\mathrm{T''}= d^2\mathrm{T}/dt^2$ y $\mathrm{X''}= d^2\mathrm{X}/dx^2$

Dividiendo por $\mathrm{X\,T}$, obtenemos

$$\frac{\mathrm{T''}}{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{X''}}{\mathrm{X}}$$ (6)

Ambos lados son iguales a una constante que denotamos por $-\lambda$, entonces (6) pasa a ser

$$\frac{\mathrm{X''}}{\mathrm{X}} = \frac{\mathrm{T''}}{\mathrm{T}} = -\lambda$$ (7)

De aquí se obtienen las dos ecuaciones diferenciales siguientes para $\mathrm{X}(x)$ y $\mathrm{T}(t)$:

$$\mathrm{X''} + \lambda\ \mathrm{X} = 0$$ (8)

$$\mathrm{T''} + \lambda\ \mathrm{T} = 0$$ (9)

Si se sustituye $u(x,t)$ de (4) en la primera condición de frontera en (2) cuando $x=0$, se obtiene

$$u(0,t) = \mathrm{X}(0)\ \mathrm{T}(t) = 0$$ (10)

Si la solución (10) se satisface eligiendo $\mathrm{T}(t)$ igual a cero para todo t, entonces $u(x,t)$ es cero para toda x y t, y esta es la solución trivial, la cual no puede ser aceptada porque satisface la ecuación (1), las condiciones de frontera (2) y la primera condición inicial en (3), pero no satisface la segunda condición inicial en (3). Por tanto, la ecuación (10) debe satisfacerse requiriendo que

$$\mathrm{X}(0) = 0 \tag{11}$$

De manera similar, la condición de frontera en x=20, requiere que

$$\mathrm{X}(20) = 0 \tag{12}$$

Ahora se desea resolver la ecuación (8) sujeta a las condiciones de frontera (11) y (12). Este problema es similar al resuelto en el ejemplo 2. Por tanto, para λ=0 y $\lambda < 0$ obtendremos soluciones triviales, las cuales no son aceptadas.

Para $\lambda > 0$, al hacer $\lambda=\alpha^2$, obtenemos la solución

$$\mathrm{X}(x) = \mathrm{A}\cos\alpha x + \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\alpha x \tag{13}$$

Usando la condición de frontera (11), la ecuación (13) nos da

$$\mathrm{X}(0) = \mathrm{A}\cos 0 + \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,0 = \mathrm{A}.1 + \mathrm{B}.0 = \mathrm{A} = 0$$

Ahora la solución general (13) pasa a ser

$$\mathrm{X}(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\alpha x \tag{14}$$

De la condición de frontera (12), la ecuación (14) nos da

$$\mathrm{X}(20) = \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,20\alpha = 0.$$

B no puede ser cero porque nos convertiría la ecuación (14) en $\mathrm{X}(x)$=0, lo que implicaría u=XT=0, la solución trivial que no es aceptada. Por tanto, se requiere que sen (20α) sea cero, lo que se cumple si $20\alpha=n\pi$, $\alpha=n\pi/20$, donde n=1, 2, 3, ... En consecuencia (8) tiene soluciones no triviales cuando $\lambda=\alpha^2=(n\pi/20)^2$, o sea, cuando $\lambda_n=\alpha_n^2=(n\pi/20)^2$, con n=1, 2, 3,. . . . La solución (14) ahora es

$$\mathrm{X}_n(x) = \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{20}\,x \qquad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{15}$$

Si se deriva $u(x,t) = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}(t)$ con respecto a t, se obtiene

$$u_t(x,t) = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{T}'(t) \tag{16}$$

Reemplazando (16) en la primera condición inicial de (3), obtenemos

$$u_t(x,0) = \mathrm{X}(x)\ \mathrm{T}'(0) = 0 \tag{17}$$

$\mathrm{X}(x)$ no puede ser cero para cualquier x porque obtendríamos la solución trivial $u(x,t)$=0, la cual no es aceptada. Por lo tanto, (17) se cumple si

$$\mathrm{T}'(0) = 0 \tag{18}$$

Ahora debemos resolver la ecuación (9) sujeta a la condición (18). Como la ecuación (9) es similar a la ecuación (8), su solución es la misma cambiando x por t, así se obtiene

$$\mathrm{T}(t) = \mathrm{C}\cos \alpha t + \mathrm{D}\ \mathrm{sen}\ \alpha t \tag{19}$$

Su derivada con respecto a t es

$$\mathrm{T}'(t) = -\alpha\mathrm{C}\ \mathrm{sen}\ \alpha t + \alpha\mathrm{D}\cos \alpha t \tag{20}$$

Para t=0, obtenemos

$$\mathrm{T}'(0) = -\alpha\mathrm{C}.0 + \alpha\mathrm{D}.1 = \alpha\mathrm{D} = 0 \tag{21}$$

Como ya se determinó que $\alpha \neq 0$, se requiere que D sea cero. Por lo tanto ahora (19) pasa aser

$$\mathrm{T}_n(t) = \mathrm{C}\cos \alpha t = \mathrm{C}\cos\left(\frac{n\pi}{20}\right)x, \qquad n=1,\ 2,\ .\ .\ . \tag{22}$$

Con (15) y (22) la solución producto es

$$u_n(x,t) = \mathrm{B}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{20}\right)\mathrm{x}.\mathrm{C}\cos\left(\frac{n\pi}{20}\right)t$$

$$= \mathrm{E}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{20}\right)x.\ \cos\left(\frac{n\pi}{20}\right)t \tag{23}$$

Donde E=BC es una constante. Usando la segunda condición inicial en (3), se obtiene

$$u_n(x,0) = \mathrm{E}\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{20}\right)x = 10\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)x \tag{24}$$

la cual se cumple si E=10 y $\frac{n\pi}{20}=\frac{\pi}{2}$, es decir, n=10.

La solución deseada es

$$u(x,t) = 10 \text{ sen } \frac{\pi}{2} x \quad \cos \frac{\pi}{2} t \qquad (25)$$

2.4.2. Las series de Fourier.

Las series de Fourier expresan funciones periódicas complicadas como sumas infinitas de senos, cosenos o ambas.

En la sección 2.4.1 vimos que la solución de una EDP, sujeta a condiciones iniciales o de frontera, se puede expresar como una suma de las soluciones de las EDOs obtenidas al aplicar el método de separación de variables. En muchos casos, la solución es una suma infinita de senos, cosenos o ambas, y se le conoce como serie de Fourier.

Nuestro problema ahora es cómo expresar la solución o una función dada como una serie de Fourier. Comencemos con una serie como la dada por Fourier

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \text{ sen } \frac{n\pi}{L} x). \qquad (1)$$

Si indicamos con y_i los valores a los que converge la serie (1) para cada valor de x en un intervalo $(-L,L)$, obtendremos un conjunto de puntos (x,y_i) que definen una curva o función f, cuyo valor en cada punto es la suma de la serie para ese valor de x. En este caso se dice que la serie (1) es la serie de Fourier para f, es decir

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \text{ sen } \frac{n\pi}{L} x), \qquad (2)$$

Sabemos que una función f es periódica con periodo T si

$$f(x + T) = f(x) \qquad (3)$$

para todo valor de x. En la figura 2.4.1 se presenta un ejemplo de una función periódica.

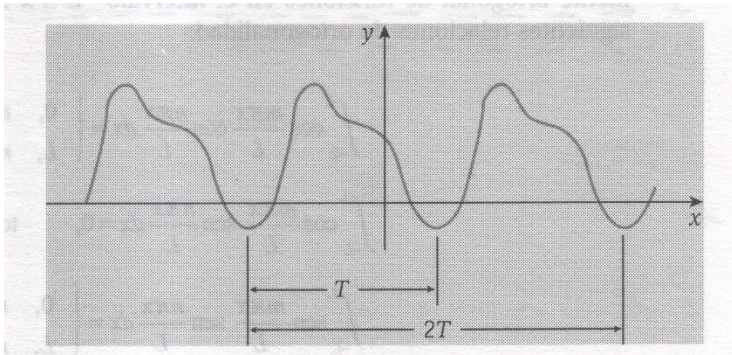


Figura 2.4.1 Una función periódica

Las funciones trigonométricas sen $\frac{n\pi}{L}x$ y cos $\frac{n\pi}{L}x$, con n=1, 2, 3, . . ., son periódicas con periodo básico T=2L.

Cuando el intervalo básico de longitud 2L es $-L \leq x \leq L$ los coeficientes a_n *y* b_n en la serie de Fourier (2) se relacionan con f(x) por medio de las fórmulas de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ . . ., \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{L}x\,dx, \qquad n=1,\ 2,\ 3,. . . , \tag{5}$$

A continuación presentaremos algunos ejemplos donde se obtiene la serie de Fourier.

Ejemplo 1. Grafique varios periodos de la función dada y expándala en una serie de Fourier.

f(x)=0 en (−1/2,0) y f(x)=x en (0,1/2)

Solución.

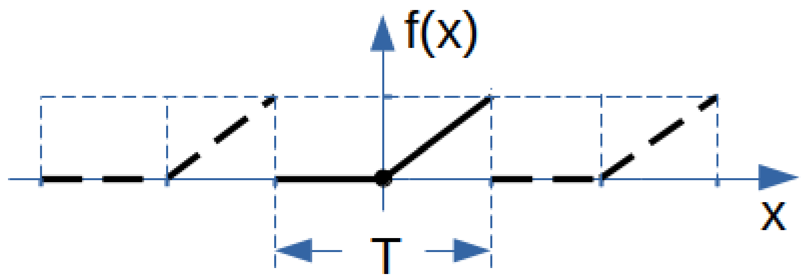


Figura 2.4.2 Extensión periódica de f(x) del ejemplo 1.

Como f(x) tiene periodo T=2L=1, L=1/2. Se utilizan las fórmulas (4) y (5)

$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{1/2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = 2[\int_{-\frac{1}{2}}^{0} 0.dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} x\,dx] = 1/4$

$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{1/2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\cos\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\,dx = 2[\int_{-\frac{1}{2}}^{0} 0.\cos 2n\pi x\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} x$ $\cos 2n\pi x\,dx]$

$$=2\int_{0}^{\frac{1}{2}} x\cos 2n\pi x\,dx$$

Integrando por partes se obtiene

$a_1=-1/\pi^2$, $a_3=-1/9\pi^2$, $a_5=-1/25\pi^2$, . . . ,

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{1}{1/2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{\frac{1}{2}}x\,dx = 2[\int_{-\frac{1}{2}}^{0} 0.\,\text{sen}\,2n\pi x\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} x$ $\text{sen}\,2n\pi x\,dx]$

$$=2\int_{0}^{\frac{1}{2}} x\,\text{sen}\,2n\pi x\,dx$$

Integrando por partes se obtiene

$b_1=1/2\pi$, $b_2=-1/4\pi$, $b_3=1/6\pi$

Sustituyendo los coeficientes obtenidos en la ecuación (2) se tiene

$$f(x) = 1/8 - 1/\pi^2(\cos 2\pi x + 1/9\cos 6\pi x + 1/25\cos 10\pi x + \ldots)$$

$$+ 1/2\pi(\text{sen}\,2\pi x - 1/2\,\text{sen}\,4\pi x + 1/3\,\text{sen}\,6\pi x - \ldots)$$

Algunas veces es necesario usar otros intervalos básicos de longitud 2L, tales como, por ejemplo c$< x < c + 2L$, donde c puede ser cualquier número real. En este caso, por tener f(x) periodo 2L, la serie de Fourier es la misma a la dada en (2), pero los coeficientes de Fourier (4) y (5) se reemplazan por

(6) $$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx, \qquad n=0, 1, 2, 3, \ldots$$

(7) $$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx, \qquad n=1, 2, 3, \ldots$$

En el caso especial donde c=0, obtenemos

(8) $$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

(9) $$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

Es decir, el intervalo básico de f(x) es ahora 0$< x < 2L$

En la práctica, los intervalos (−L, L) y (0, 2L) son los intervalos básicos que se usan con más frecuencia.

Recordar que en ambos casos es muy importante graficar f(x) primero en el intervalo básico dado y luego repetir dicha gráfica periódicamente con periodo 2L. Esto nos ayuda a visualizar claramente qué función estamos considerando. Mejor veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 2. Dada: (a) f(x)=x^2 en ($-\pi$, π) y (b) f(x)=x^2 en (0, 2π). Grafique varios periodos de la función en cada caso, y expándala en una serie de Fourier seno-coseno.

Solución.
(a)

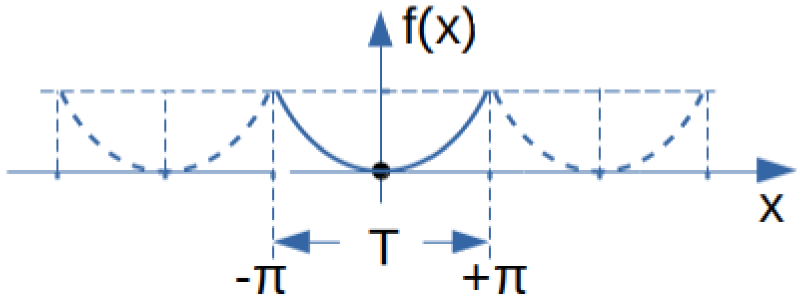


Figura 2.4.3 Extensión periódica de f(x)=x^2 definida en ($-\pi$, π).

(b)

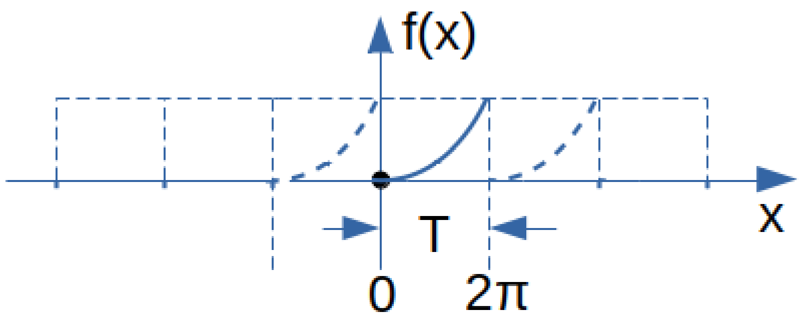


Figura 2.4.4 Extensión periódica de f(x)=x^2 definida en (0, 2π).

Vemos que las funciones periódicas extendidas son diferentes en cada caso.

La serie de Fourier en el caso (a) es:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$$

Integrando por partes se obtiene

$a_1 = -4,$ $\quad a_2 = 1,$ $\quad a_3 = -\frac{4}{9},$ $\quad a_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)$ sen nx dx = $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2$ sen nx dx

Integrando por partes se obtiene

$b_n=0$

La serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{1}{3}\pi^2 - 4(\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - \frac{1}{16}\cos 4x + \ldots)$$

La serie de Fourier en el caso (b) es:

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\, dx = \frac{8}{3}\pi^2$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)$ cos nx dx = $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2$ cos nx dx

Integrando por partes se obtiene

$a_n = 4/n^2$, n=1, 2, 3, . . .

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)$ sen nx dx = $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2$ sen nx dx

Integrando por partes se obtiene

$b_n = -\frac{4\pi}{n}$, n=1, 2, 3, . . .

La serie de Fourier es

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2 \cos nx - \pi/n \text{ sen } nx)$$

Vemos que las series de Fourier son diferentes en cada caso

<u>Ejemplo 3.</u> Dada:

(a)f(x)=1 en $(-\pi,0)$ y f(x)=0 en $(0,\pi)$

(b)f(x)=0 en $(0,\pi)$ y f(x)=1 en $(\pi,2\pi)$

Grafique varios periodos de las funciones dadas y obtenga las series de Fourier.

<u>Solución.</u>

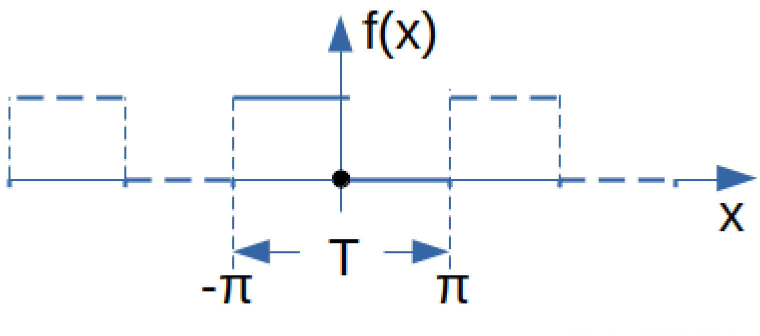


Figura 2.4.5 Extensión periódica de f(x) en el caso (a)

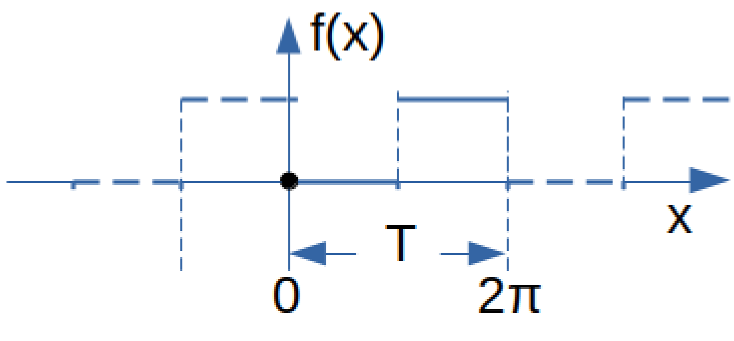


Figura 2.4.6 Extensión periódica de f(x) en el caso (b)

Observamos en las figuras 2.4.5 y 2.4.6 que las gráficas de las funciones extendidas son idénticas. En este caso se obtiene la misma respuesta de las fórmulas (4), (5) y de las fórmulas (8), (9).

La serie de Fourier en el caso (a) es:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 1.\, dx + \int_{0}^{\pi} 0.\, dx = 1 \right.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 1.\cos nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 0.\, dx \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} 1.\operatorname{sen} nx\, dx + \int_{0}^{\pi} 0.\, dx \right] = -\frac{2}{n\pi}$$

$b_1 = -\frac{2}{\pi}$, $b_2 = -\frac{2}{2\pi}$, $b_3 = -\frac{2}{3\pi}$, $b_4 = -\frac{2}{4\pi}$, . . .

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$ (sen x + $\frac{1}{2}$ sen $2x$ + $\frac{1}{3}$ sen $3x$ + $\frac{1}{4}$ sen $4x$ + … .)

La serie de Fourier en el caso (b) es:

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} 0.\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1.\, dx\,] = 1$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\,[\int_0^{\pi} 0.\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1. \cos nx\, dx] = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, \text{sen}\, nx\, dx = \frac{1}{\pi}\,[\int_0^{\pi} 0.\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} 1.\, \text{sen}\, nx\, dx = -\frac{2}{n\pi}$

$b_1 = -\frac{2}{\pi}$, $b_2 = -\frac{2}{2\pi}$, $b_3 = -\frac{2}{3\pi}$, $b_4 = -\frac{2}{4\pi}$, . . .

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$ (sen x + $\frac{1}{2}$ sen $2x$ + $\frac{1}{3}$ sen $3x$ + $\frac{1}{4}$ sen $4x$ + . . .)

Vemos que las series en los casos (a) y (b) son iguales como lo son las gráficas.

Ejemplo 4. La siguiente función está dada en un periodo. Grafique varios periodos de la función y expándala en una serie de Fourier apropiada.

$$f(x) = x, \qquad 0 < x < 2$$

Solución.

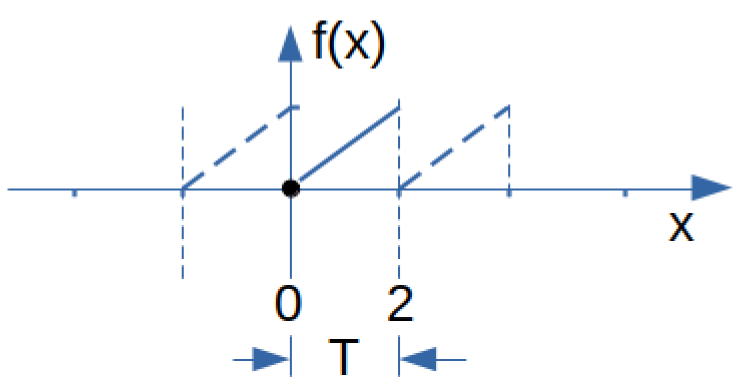


Figura 2.4.7 Extensión periódica de f(x) del ejemplo 4.

Puesto que el periodo es 2, tenemos T=2L=2, entonces L=1,

$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\, dx = \int_0^{2} x.\, dx = 2$

$a_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x) \cos (n\pi/L)x\, .dx = \int_0^{2} x \cos n\pi x\, .dx$

Integrando por partes se obtiene

$a_n=0$,

$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)$ sen $(n\pi/L)x$ dx = $\int_0^2 x$ sen $n\pi x$ dx

Integrando por partes se obtiene

$b_n = -\frac{2}{n\pi}$

$b_1=-\frac{2}{\pi}$, $b_2=-\frac{2}{2\pi}$, $b_3=-\frac{2}{3\pi}$, $b_4=-\frac{2}{4\pi}$, . . .

La serie es

$$f(x) = 1-\frac{2}{\pi}\left(\text{sen } \pi x + \frac{1}{2}\text{sen } 2\pi x + \frac{1}{3}\text{sen } 3\pi x + \frac{1}{4}\text{sen } 4\pi x + \ldots\right)$$

<u>Ejemplo 5.</u> La siguiente función está dada en un periodo. Grafique varios periodos de la función y
expándala en una serie de Fourier apropiada.

f(x)=0 en $(-1,0)$ y f(x)=1 en (0,3)

<u>Solución</u>

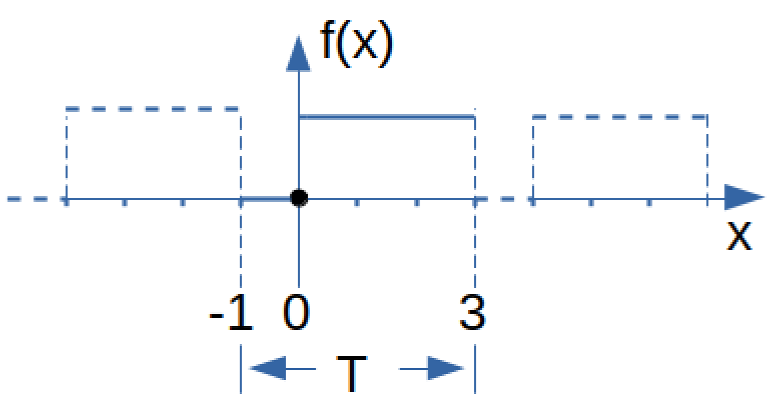


Figura 2.4.8 Extensión periódica de f(x) del ejemplo 5.

Como f(x) tiene periodo T=2L, en este caso se utilizan las fórmulas (6) y (7). La longitud del intervalo es 2L=4, es decir, L=2, y c=-1.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} 0.\,dx + \int_0^3 1.\,dx\right] = \frac{3}{2}$$

$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(x) \cos (n\pi/2)x \, dx = \frac{1}{2} [\int_{-1}^{0} 0. \cos (n\pi/2)x \, dx + \int_{0}^{3} 1. \cos (n\pi/2)x \, dx]$
$= \frac{1}{n\pi} \text{sen } (3n\pi/2)$

$a_1=-\frac{1}{\pi}$, $a_2=0$, $a_3=\frac{1}{3\pi}$, $a_4=0$, $a_5=-\frac{1}{5\pi}$, . . .

$b_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} f(x) \text{ sen } (n\pi/2)x \, dx = \frac{1}{2} [\int_{-1}^{0} 0. \text{ sen } (n\pi/2)x \, dx + \int_{0}^{3} 1. \text{ sen } (n\pi/2)x \, dx]$

$= -\frac{1}{n\pi} (\cos \frac{3n\pi}{2} -1)$,

$b_1=\frac{1}{\pi}$, $b_2=\frac{1}{\pi}$, $b_3=\frac{1}{3\pi}$, $b_4=0$, $b_5=\frac{1}{5\pi}$, $b_6=\frac{1}{3\pi}$,
. . .

$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{\pi}(\cos \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi x}{2} -+ . . .)$

$+ \frac{1}{\pi} (\text{sen } \frac{\pi x}{2} + \frac{2}{2} \text{ sen } \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \text{ sen } \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5} \text{ sen } \frac{5\pi x}{2} + \frac{2}{6} \text{ sen } \frac{6\pi x}{2} + . . .)$

2.4.2.1 Series de Fourier de cosenos y senos.

La serie de Fourier de una función par definida en $(-L, L)$ es la serie de cosenos, y la serie de Fourier de una función impar definida en $(-L, L)$ es la serie de senos.

Una función par es una como x^2 (figura 2.4.9). En ésta el valor de la función en $-x$ es igual al valor de la función en x, es decir, f(x) es par si f($-x$) = f(x).

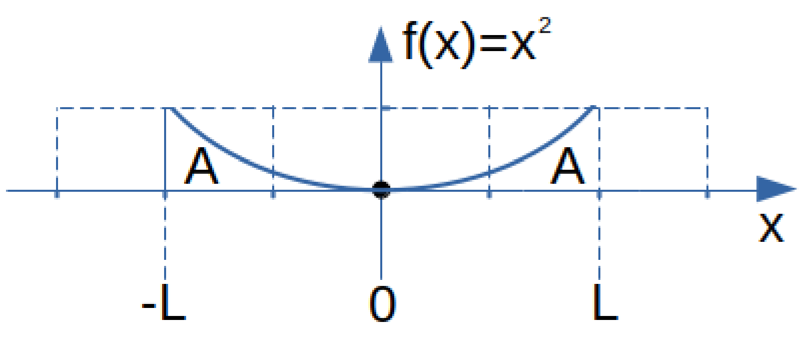


Figura 2.4.9 Gráfica de la función par f(x)=x^2.

Una función impar es una como x (figura 2.4.10). En ésta el valor de la función en $-x$ es igual al negativo del valor de la función en x, es decir, f(x) es impar si f($-x$) =$-$f(x).

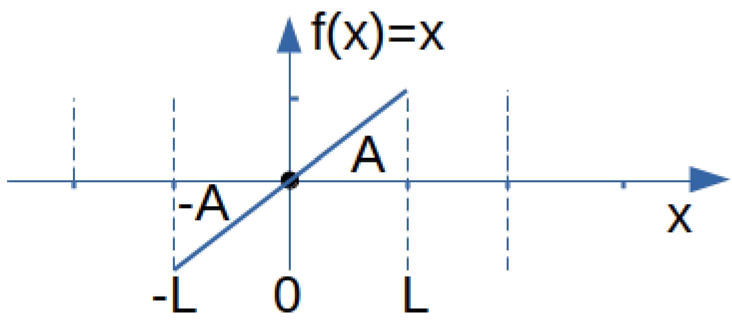


Figura 2.4.10 Gráfica de la función impar f(x)=x

Si nos fijamos en la gráfica de f(x)=x^2, vemos que el área de $-L$ a 0 es la misma que el área de 0 a L. De esta manera, $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\, dx$.

Ahora observamos la gráfica de f(x)=x. Notamos que la integral $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx=0$, las áreas a la izquierda y a la derecha se cancelan.

En general, si f(x) es par, la integral de f(x) de $-L$ a L es el doble de la integral de 0 a L. Entonces tenemos, $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx=0$ si f(x) es impar; $\int_{-L}^{L} f(x)\, dx=2\int_{0}^{L} f(x)\, dx$ si f(x) es par.

Para las funciones pares o impares, las fórmulas para los coeficientes a_n y b_n se simplifican. Primero supongamos que f(x) es una función par en el intervalo $(-L,\ L)$. Las fórmulas (4) y (5) para los coeficientes de Fourier se convierten en

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi}{L}x\, dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi}{L}x\, dx$$

Por ser par el producto de dos funciones pares [f(x) y cos $\frac{n\pi}{L}x$ son ambas pares].

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\, dx = 0$$

Por ser impar el producto de una función par [f(x) en este caso] y una función impar [sen $\frac{n\pi}{L}x$ en este caso].

De manera similar, cuando f(x) es impar en el intervalo $(-L,\ L)$,

$$a_n=0, \qquad n=0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}x \, dx.$$

Los resultados se resumen de la manera siguiente:

1) La serie de Fourier de una función par en el intervalo $(-L, L)$ es la serie de cosenos

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x \qquad (1)$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \, dx \qquad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx \qquad (3)$$

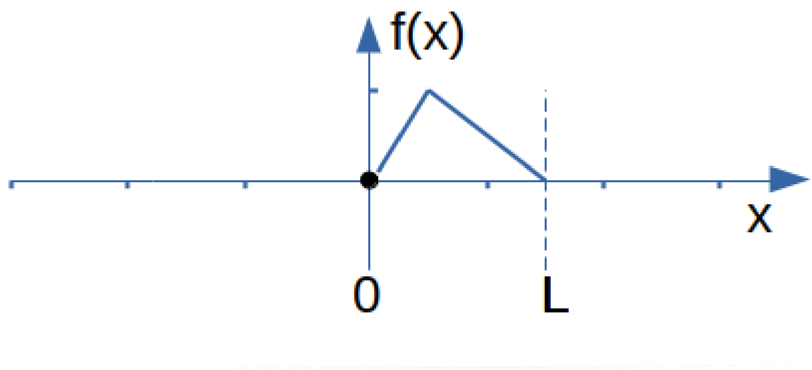
2) La serie de Fourier de una función impar en el intervalo $(-L, L)$ es la serie de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}x \, dx \qquad (4)$$

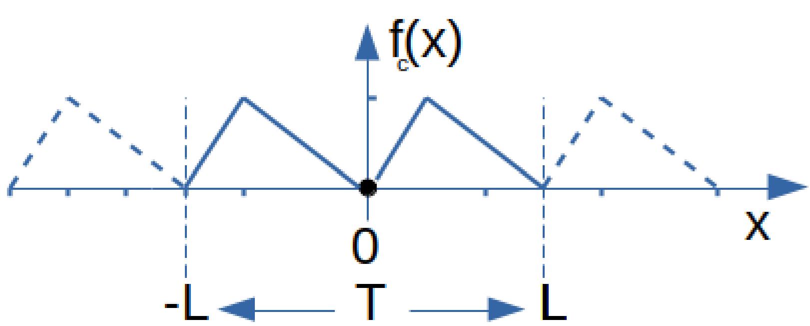
donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}x \, dx \qquad (5)$$

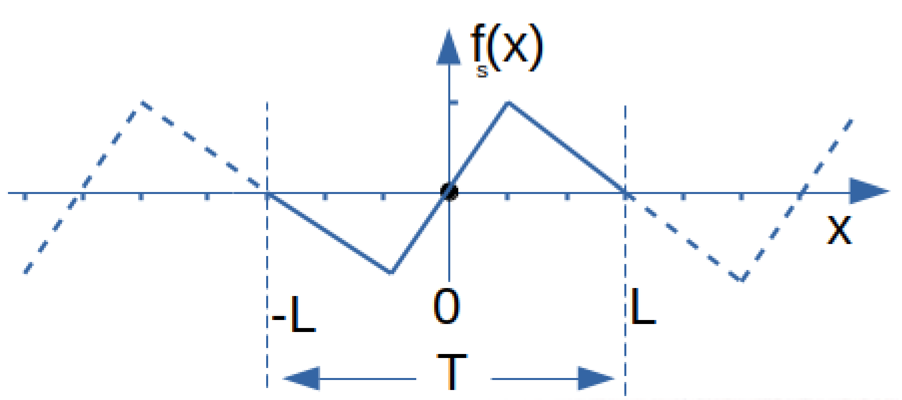
En el análisis anterior la función f(x) estaba definida en un intervalo $-L < x < L$. Supongamos ahora que nos dan una función f(x) definida en el intervalo $0< x < L$. Si queremos representar la función mediante una serie de Fourier de periodo T=2L, debemos tener a f(x) definida también en el intervalo $-L < x < 0$. En la práctica ocurre a menudo que necesitamos (por razones físicas) representar la función mediante una serie de Fourier de cosenos (o, en un problema diferente, mediante una serie de Fourier de senos). Para ello se requiere tener una función par o una función impar. Para lograrlo, primero trazamos la función dada en (0, L). Luego extendemos la función en $(-L$,0) para que sea par o impar como se requiera. Para ilustrar los tres casos más importantes de extensión de la función dada al intervalo $(-L$, 0), consideremos la función f(x) de la figura 2.4.11(a) donde f(x) puede ser, por ejemplo, la forma de una cuerda de violín deformada o la temperatura de una barra de metal con longitud L.



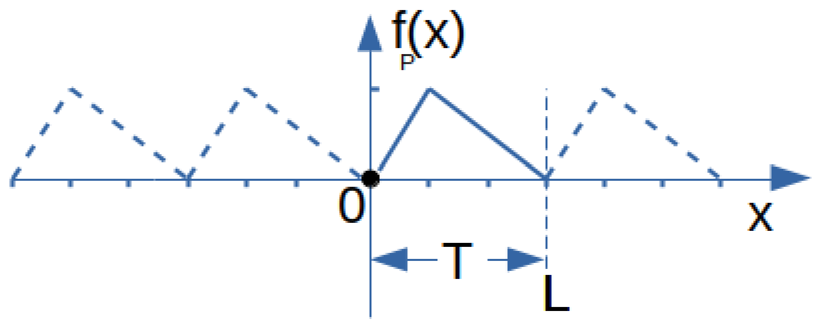
(a) Función dada f(x)



(b) f(x) extendida como una función periódica par con periodo $2L$



(c) f(x) extendida como una función periódica impar con periodo $2L$



(d) f(x) extendida como una función periódica con periodo L

Figura 2.4.11 (a) Función f(x) dada en un intervalo 0<x< L.

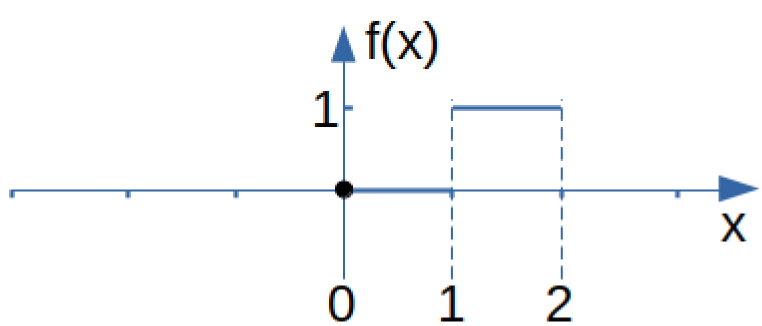
(b)Extensión par al rango completo (intervalo $-L$ <x< L) y extensión periódica con periodo $2L$ al eje x.

(c)Extensión impar a $-L$ <x< L y extensión periódica con periodo $2L$ al eje x.

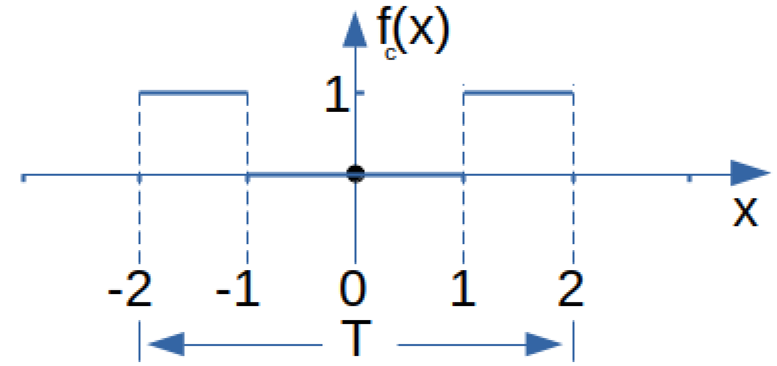
(d)Extensión periódica con periodo L al eje x.

Ejemplo. Dada f(x)=0 en $0 < x < 1$; f(x)=1 en $1 < x < 2$. Grafique la función par f_c de periodo 4, la función impar f_s de periodo 4, y la función f_p de periodo 2, cada una de las cuales es igual a f(x) en (0,2). Expanda f_c en una serie de cosenos, f_s en una serie seno, y f_p en una serie seno-coseno.

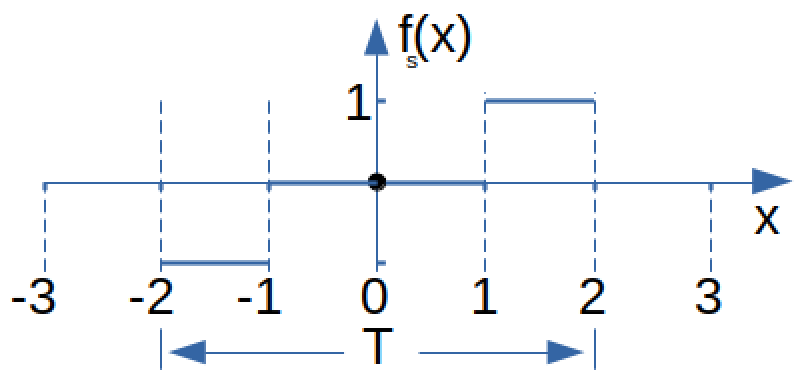
Solución.



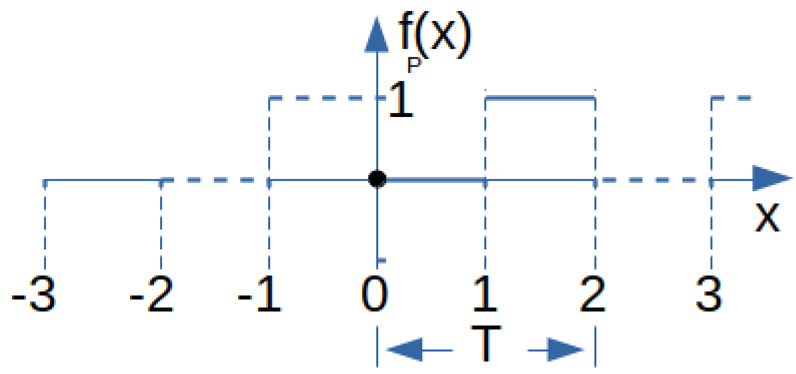
(a) Función dada f(x)



(b)Extensión periódica par con periodo 4



(c) Extensión periódica impar con periodo 4



(d) Extensión periódica de f(x) con periodo 2

Figura 2.4.12 (a) Función dada f(x), (b) Extensión par f_c, (c) Extensión impar f_s, (d) Extensión con periodo 2.

(b)Serie de Fourier de cosenos

El periodo es T=2L=4, es decir, L=2.

Como la función es par, $b_n=0$

$a_0= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 0.dx + \int_1^2 1.dx = 1$

$a_n= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 0.\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 1.\cos\frac{n\pi x}{2}dx$
$= -\frac{2}{n\pi}\text{sen}\frac{n\pi}{2}$,

$a_1=-\frac{2}{\pi}$; $a_2=0$; $a_3=\frac{2}{3\pi}$; $a_4=0$; $a_5=-\frac{2}{5\pi}$; $a_6=0$; $a_7=\frac{2}{7\pi}$

La serie coseno de f(x) es

$f_c = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}(\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2} - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi x}{2} + \ldots)$

(c)Serie de Fourier de senos

El periodo es T=2L=4, es decir, L=2.

Como la función es impar, $a_n=0$.

$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 0.\,\text{sen}\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 1.\,\text{sen}\frac{n\pi x}{2}dx$

$= -\frac{2}{n\pi}[(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}]$

$b_1=\frac{2}{\pi}$; $b_2=-\frac{2}{\pi}$; $b_3=\frac{2}{3\pi}$; $b_4=0$; $b_5=\frac{2}{5\pi}$; $b_6=-\frac{2}{3\pi}$

La serie seno de f(x) es

$$f_s=\frac{2}{\pi}\left(\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}-\text{sen}\,\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5}\,\text{sen}\,\frac{5\pi x}{2}-\frac{2}{6}\,\text{sen}\,\frac{6\pi x}{2}+\ldots\right)$$

(d)Serie seno-coseno de Fourier.

El periodo es ahora T=2L=2, es decir, L=1,

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,dx=\frac{1}{1}\int_0^{2} f(x)\,dx=\int_0^1 0.dx+\int_1^2 1.dx=1$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{1}\int_0^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}\,dx=\int_0^1 0.\cos n\pi x\,dx+\int_1^2 1.\cos n\pi x\,dx=0$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx=\frac{1}{1}\int_0^{2} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{1}\,dx=\int_0^1 0.\,\text{sen}\,n\pi x\,dx+\int_1^2 1.\text{sen}\,n\pi x\,dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$b_1=-\frac{2}{\pi}$; $b_2=0$; $b_3=-\frac{2}{3\pi}$; $b_4=0$; $b_5=-\frac{2}{5\pi}$; $b_6=0$; $b_7=-\frac{2}{7\pi}$;

La serie seno-coseno para f(x) es

$$f_p=\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left(\text{sen}\,\pi x+\frac{1}{3}\,\text{sen}\,3\pi x+\frac{1}{5}\,\text{sen}\,5\pi x+\frac{1}{7}\,\text{sen}\,7\pi x+\ldots\right)$$

CAPÍTULO I I I

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este estudio participaron cinco estudiantes del sexto semestre de la licenciatura en física de la Universidad de Oriente. Éstos habían asistido, un año antes, a un curso de introducción a las ecuaciones diferenciales.

La metodología de las clases consistía en reuniones en grupo con el profesor durante dos horas, tres veces por semana, durante 16 semanas. En estas reuniones se analizaba el avance del proyecto, se aclaraban dudas, se discutían los errores cometidos y los nuevos conceptos matemáticos, así como las propuestas por parte de los estudiantes. El rol protagónico era del alumno, el profesor se limitaba a orientar.

En este trabajo de investigación se aplicó la metodología de enseñanza a través de la resolución de situaciones-problema fundamentada en la concepción cuasi−empírica de las matemáticas, la cual le da al estudiante la oportunidad de conjeturar, refutar, comprobar, generalizar resultados, etc. Por lo tanto, las situaciones−problema, planteadas en nuestra propuesta de enseñanza, fueron enfocadas bajo la forma de investigación orientada. En este sentido, con la orientación del profesor, los alumnos las modelaron y, a medida que resolvían las ecuaciones diferenciales parciales, iban investigando los nuevos conceptos matemáticos, los métodos de solución y todo lo necesario para obtener las soluciones.

En este capítulo se presenta el material instruccional para la resolución de las dos situaciones−problema del mundo real propuestas en el capítulo 1 y enfocadas con el método de investigación orientada: transferencia de calor por conducción en un alambre delgado y vibraciones de una cuerda elástica.

Las instrucciones, por escrito, se le irán entregando a los alumnos en las clases. Los alumnos investigarán y tomarán nota de los asuntos planteados para investigar. No tienen que memorizar nada. No se les interrogará sobre nada. Las notas tomadas durante la investigación son muy importantes para las discusiones en clase. Las investigaciones las realizarán en grupos de dos. La evaluación se realizará por las intervenciones en clase.

3.1.- Transferencia de calor por conducción en un alambre delgado.

En la introducción de la clase, para despertar el entusiasmo de los alumnos por esta situación−problema, el profesor solicita a cada estudiante dar un ejemplo de un fenómeno o proceso de la vida diaria donde se percibe la difusión de calor.

3.1.1.- Planteamiento de la situación problema.

Consideremos un alambre de longitud L con sección transversal A, cuya orientación coincide con el eje x en el intervalo [0, L]. (ver la figura 3.1).

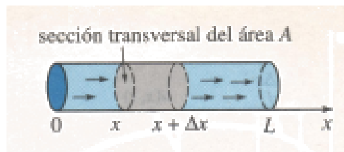


Figura 3.1 Flujo de calor unidimensional

Suponga que el alambre se sumerge en agua hirviendo de modo que su temperatura es de 100 ℃. Luego se saca y los extremos x=0 y x=L se mantienen en hielo para que la temperatura en los extremos sea 0 ℃.

Cuando las dimensiones laterales del alambre son pequeñas comparadas con su longitud, es una buena aproximación considerar que la temperatura u depende sólo de la posición axial x y del tiempo t, no de las constantes laterales *y* y *z*. Es decir, se supone que la temperatura es constante en cualquier sección transversal del alambre correspondiente a un valor fijo de x [u=u(x, t)].

Para obtener la temperatura u(x, t) en el alambre, necesitamos primero deducir la ecuación diferencial que rige el flujo de calor en los sólidos. La figura 3.2 muestra una gráfica de la solución u(x,t) como una función de x en el intervalo (0, π) para diversos tiempos específicos.

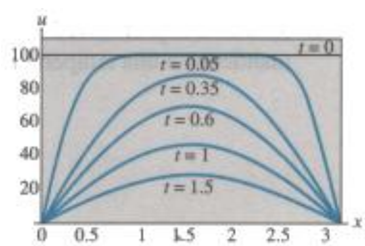


Figura 3.2 u(x,t) graficada como una función de x para diversos tiempos específicos.

3.1.2.- Deducción de la ecuación diferencial del flujo de calor unidimensional.

Para la deducción de la ecuación diferencial del flujo de calor tenemos que hacer muchas suposiciones de simplificación:

. Dentro del alambre, el flujo de calor tiene lugar sólo en la dirección x.

. La superficie lateral, o curva, del alambre está aislada; esto es, no escapa calor de su
superficie.

. No se está generando calor dentro del alambre.

. El alambre es homogéneo; esto es, su masa por unidad de volumen ρ es constante.

. El calor específico γ y la conductividad térmica κ del material del alambre son constantes.

Para deducir la ecuación diferencial parcial que se satisface mediante la temperatura u(x, t) necesitamos dos leyes empíricas de conducción de calor:

Instrucción 1: Investigar en la sección 11.2 del texto: Dennis G. Zill (2008), ¿cuáles son estas dos leyes empíricas y cómo se aplican para deducir la ecuación del flujo de calor unidimensional $\partial u(x,t)/\partial t = \beta\, \partial^2 u(x,t)/\partial x^2$?

3.1.3.- Planteamiento del problema de valores en la frontera.

La temperatura u(x, t), además de satisfacer la ecuación diferencial del flujo de calor

$$\partial u(x, t)/\partial t = \beta\, \partial^2 u(x, t)/\partial x^2, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \qquad (1)$$

También debe satisfacer otras dos restricciones especificadas en el problema original. Primeramente, los extremos del alambre se están manteniendo a 0 ℃. Así, se requiere que

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0\ , \qquad t > 0, \qquad (2)$$

para todo t. Éstas se llaman condiciones de frontera. En segundo lugar, la temperatura inicial es f(x)=100 ℃. Esto es, se requiere

$$u(x, 0) = f(x)=100, \qquad 0 \le x \le L, \qquad (3)$$

A esta ecuación se le denomina condición inicial en u.

El problema descrito por las ecuaciones (1), (2) y (3) se conoce como un problema de valores en la frontera. Para resolver el problema de valores en la frontera uno de los métodos de gran importancia y usado frecuentemente es el método de separación de variables.

Instrucción 2. Investigar, en la sección 2.4.1, capítulo II (Marco teórico), ¿en qué consiste el método de separación de variables? Resolver el ejemplo 1: 4 ∂u/∂t + ∂u/∂x = 3u con u(x, 0) = 4 $e^{-x} - e^{-5x}$,
para obtener

$$u(x, t) = 4 \exp(-x + t) - \exp(-5x + 2t).$$

Resolver el ejemplo 2: 2 ∂u/∂t = ∂^2u/∂x^2, con los valores de frontera u(0, t)=0; u(π, t)=0, y el valor inicial u(x, 0) = 2 sen 3x – 5 sen 4x; para obtener el problema

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0)=0, \qquad X(\pi)=0$$

Resuelva este problema para λ=0, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$, o consultar en Dennis Zill el ejemplo 2 de la sección 3.9. En este ejemplo obtendrá

$$u(x, t) = 2\, e^{-4.5} \text{ sen } 3x - 5\, e^{-8t} \text{ sen } 4x$$

3.1.4.- Resolución del problema de valores en la frontera.

Instrucción 3. Aplique el método de separación de variables al problema de valores en la frontera obtenido en la sección 3.1.3 y obtenga

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0)=0, \qquad X(L)=0, \tag{4}$$

y

$$T' + \beta\lambda T = 0 \tag{5}$$

La ecuación (4) es similar a la resuelta en el ejemplo 2, de la instrucción 2, por lo que no tiene que resolverla para λ=0 y $\lambda < 0$.

Instrucción 4. Para $\lambda > 0$, obtenga los valores propios $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, n=1, 2, 3, . . . , y las funciones propias correspondientes del problema planteado en (4),

$$X(x) = c_2 \text{ sen } \frac{n\pi}{L} x, \qquad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

Resolviendo la ecuación (5) para T(t), se obtiene

$$T(t) = c_3 \exp\left[-(\beta n\pi/L)^2 t\right] \tag{7}$$

La solución producto es entonces

$$u_n(x,t) = b_n \exp\left[-(\beta n\pi/L)^2\, t\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \qquad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

donde c_2c_3 es reemplazado por b_n. A las funciones u_n se les llama las soluciones fundamentales del problema de valores en la frontera (1), (2) y (3). Estas soluciones fundamentales u_n satisfacen la ecuación diferencial parcial (1) y las condiciones en la frontera (2) para cada valor entero positivo de n.

Sólo resta satisfacer la condición inicial (3),

$$u(x, 0) = f(x)=100, \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{9}$$

Instrucción 5. Investigue ¿en qué consiste el principio de superposición? y aplíquelo a la ecuación (8) para obtener:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left[-(\beta n\pi/L)^2\, t\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \tag{10}$$

Utilizando la condición inicial (3) se obtiene

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, = f(x) = 100, \tag{11}$$

Esto quiere decir que es necesario elegir los coeficientes b_n de modo que la ecuación (11) converja a la distribución de temperatura inicial f(x)=100 para $0 \leq x \leq L$. La serie de la ecuación (11) es lo que se conoce como una serie de Fourier de senos para la función f(x)=100.

Nuestro problema ahora es ¿cómo obtener los coeficientes b_n de la ecuación (11)?

3.1.5.- Solución formal de la situación−problema transferencia de calor por conducción en un alambre delgado.

La condición inicial (3) dice que (11) debe cumplirse para todos los valores de x dentro del rango $0 \leq x \leq L$. Pero, al reemplazar x=0 y x=L en (11) vemos que la serie converge a cero. Es decir, (11) no es cierto para los puntos extremos. Dicha ecuación se cumple para $0 < x < L$. En otras palabras, la serie (11) es una serie seno de Fourier donde la función f(x)=100 definida en $0 < x < L$ se expande como una función impar (ver la figura 3.3).

Figura 3.3 Extensión periódica impar con periodo 2L de la función f(x)=100 dada en $0 < x < L$

En los extremos, f(x) converge al valor promedio

$$\frac{1}{2}\,[\, f(0^+) + f(0^-) \,] = \frac{1}{2}\,[\, f(L^-) + f(L^+) \,] = \frac{1}{2}\,[100 + (-100)] = 0,$$

Instrucción 6. Obtenga los coeficientes $b_n = -\frac{200}{n\pi}\,[\,(-1)^n - 1]$ y exprese la solución completa:

$$u(x, t) = \frac{400}{\pi}\left\{ \exp\left[-(\beta\pi/L)^2\, t\right] \operatorname{sen} \frac{\pi}{L}x + \frac{1}{3}\exp\left[-9(\beta\pi/L)^2\, t\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5}\exp\left[-25(\beta\pi/L)^2\, t\right] \operatorname{sen} \frac{5\pi}{L}x + \ldots\right\}$$

3.2.- Vibraciones de una cuerda elástica

3.2.1.- Planteamiento de la situación problema.

Consideremos una cuerda elástica como la cuerda de un violín o piano. La cuerda se coloca sobre el eje x, se tensa fuertemente hasta la longitud L y se fijan sus extremos en x=0 y x=L [ver figura 3.4 (a)]. En el tiempo t=0 la cuerda se alza en el punto medio una distancia h. Luego la cuerda se suelta [ver figura 3.4 (b)].

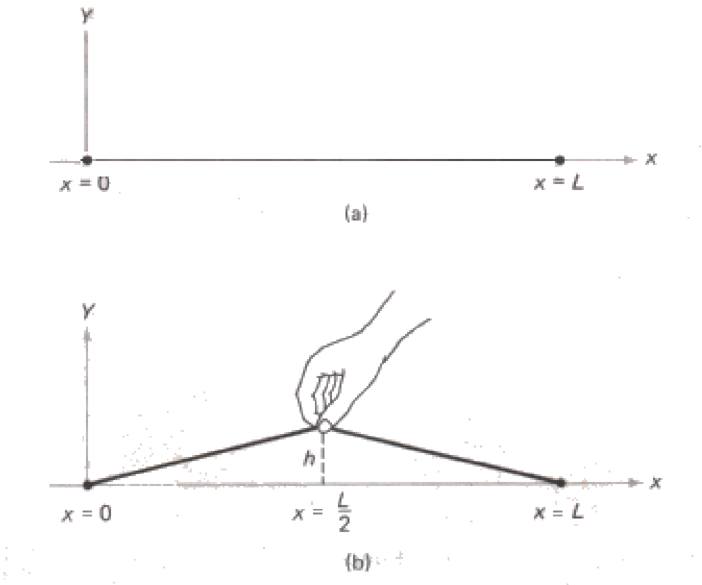


Figura 3.4. (a) Una cuerda elástica tensada entre dos puntos del eje x. (b) Una cuerda alzada en el punto medio una distancia h.

Si establecemos que u(x,t) representa el desplazamiento vertical de la cuerda en un punto x al instante $t > 0$ desde su posición de equilibrio, el problema consiste en determinar u(x,t).

Para determinar u(x,t) necesitamos primero deducir la ecuación diferencial que rige el desplazamiento vertical de la cuerda vibrante.

3.2.2.- Deducción de la ecuación de onda.

Para la deducción de la ecuación de onda tenemos que hacer muchas suposiciones de simplificación:

. La cuerda es perfectamente flexible.

. La cuerda es homogénea; esto es, su masa por unidad de longitud ρ es constante.

. Los desplazamientos u son pequeños en comparación con la longitud de la cuerda.

. La pendiente de la curva es pequeña en todos los puntos.

. La tensión T actúa en dirección tangente a la cuerda y su magnitud es igual en todos los
puntos.

. La tensión es grande en comparación con la fuerza de gravedad.

. No actúan otras fuerzas externas sobre la cuerda.

Instrucción 1: Haga un análisis de la deducción de la ecuación de onda presentada en el Apéndice B, capítulo 10 del texto: Boyce - Diprima (2013), en la que se obtiene $v^2\ \partial^2u/\partial x^2 = \partial^2u/\partial t^2$ donde $v^2=T/\rho$. v es la velocidad con la cual una perturbación se propaga a lo largo de una cuerda tensada.

3.2.3.- Planteamiento del problema de valores en la frontera.

La ecuación diferencial

$$v^2\ \partial^2u/\partial x^2 = \partial^2u/\partial t^2 \qquad (1)$$

rige el desplazamiento vertical de la cuerda vibrante. Por lo tanto, la solución u(x,t), además de satisfacer la ecuación diferencial (1), también debe satisfacer ciertas condiciones especificadas: como la cuerda se mantiene fija en los extremos, u(x,t) debe satisfacer las condiciones en la frontera:

$$\text{(a)}\ u(0,t) = 0 \quad \text{y} \quad \text{(b)}\ u(L,t)=0, \quad \text{para} \quad t \geq 0, \qquad (2)$$

De acuerdo con la figura 3.4 (b), inicialmente el desplazamiento de cualquier punto x está dado por u(x,0) = f(x), donde

$$f(x)=\frac{2h}{L}\,x, \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq L/2; \quad \text{y} \quad f(x)= \frac{2h}{L}\,(L-x) \quad \text{para} \quad L/2 \leq x \leq L, \qquad (3)$$

Puesto que la cuerda se suelta desde el reposo, su velocidad inicial en cualquier parte es cero. Denotando por u_t la velocidad $\partial u/\partial t$, podemos escribir:

$$u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L, \qquad (4)$$

lo cual dice que la velocidad en cualquier lugar x en el tiempo t=0 es cero.

De esta manera, las condiciones iniciales se pueden expresar como:

$$\text{(a)}\ u(x,0) = f(x), \qquad \text{(b)}\ u_t(x,0)=0, \qquad 0 < x < L, \qquad (5)$$

Entonces, las ecuaciones (1), (2) y (5) describen el problema de valores en la frontera, el cual se resuelve por el método de separación de variables.

3.2.4.- Resolución del problema de valores en la frontera.

Instrucción 2: En clase, aplique el método de separación de variables y obtenga las ecuaciones diferenciales para $X(x)$ y $T(t)$:

$$X'' + \alpha X = 0 \tag{6}$$

$$T'' + v^2\alpha T = 0 \tag{7}$$

Las condiciones en la frontera (2) se traducen en $X(0)=0$ y $X(L)=0$. La ecuación diferencial ordinaria dada en (6) junto con estas condiciones de frontera forman el problema de valores propios

$$X'' + \alpha X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0, \tag{8}$$

De las tres posibilidades usuales del parámetro α: $\alpha=0$, $\alpha=-k^2 < 0$ y $\alpha=k^2 > 0$, solamente la última nos lleva a soluciones no triviales.

La solución general de (6), correspondiente a $\alpha=k^2$, $k > 0$, es

$$X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \operatorname{sen} kx$$

$X(0)=0$ indica que $c_1=0$, y $X(L)=0$ indica que $c_2 \operatorname{sen} kL = 0$, lo que implica de nuevo que $kL=n\pi$ o $k=n\pi/L$.

Los valores propios y las correspondientes funciones propias de (8) son:

$$\alpha_n = n^2\pi^2/L^2 \quad \text{y} \quad X(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \qquad n= 1, 2, 3, \ldots,$$

La solución general de (7) es entonces:

$$T(t) = c_3 \cos \frac{n\pi v}{L} t + c_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{L} t$$

Por lo tanto, las soluciones que satisfacen tanto a la ecuación de onda (1) como a las condiciones de frontera (2) son:

$$u_n = X(x)T(t) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left(c_3 \cos \frac{n\pi v}{L} t + c_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{L} t\right), \qquad n=1, 2, 3, \ldots,$$

Instrucción 3: Aplique la condición inicial 3−(b) para obtener

$$u_t(x,0) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.\ c_4 \frac{n\pi v}{L}$$

Como c_2 sen $\frac{n\pi}{L}$ x $\neq$ 0, de lo contrario obtendríamos la solución trivial $u_n(x,t)=0$, se concluye que $c_4=0$. De esta manera

$$u_n(x,t) = c_2 \text{ sen } \frac{n\pi}{L} x . c_3 \cos \frac{n\pi v}{L} t = b_n \text{ sen } \frac{n\pi}{L} x . \cos \frac{n\pi v}{L} t, \qquad n= 1, 2, 3, . . . , \qquad (9)$$

donde c_2c_3 es reemplazado por b_n.

Pero las soluciones (9) no satisfacen la condición inicial 3−(a). Entonces, como la ecuación de onda (1) es lineal y homogénea, se combinarán dichas soluciones para obtener una solución que satisfaga tanto a la ecuación de onda (1) como a las condiciones (2) y (5).

Instrucción 4: Aplique el principio de superposición y obtenga:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } \frac{n\pi}{L} x . \cos \frac{n\pi v}{L} t \qquad (10)$$

Ahora hay que determinar los coeficientes b_n.

Instrucción 5: Utilizando la condición inicial 3−(a), obtenga:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ sen } \frac{n\pi}{L} x$$

Esta serie es un desarrollo de f(x) en una serie seno de Fourier.

3.2.5.- Solución formal de la situación-problema: vibraciones de una cuerda elástica

Instrucción 6: Obtenga los coeficientes b_n y exprese la solución completa:

$$u(x,t) = 8h/\pi^2 \left(\text{sen } \frac{\pi}{L} x . \cos \frac{\pi v}{L} t - \frac{1}{9} \text{ sen } \frac{3\pi}{L} x . \cos \frac{3\pi v}{L} t + \frac{1}{25} \text{ sen } \frac{5\pi}{L} x . \cos \frac{5\pi v}{L} t - + . . . , \right)$$

CAPÍTULO I V

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos en el desarrollo del proceso de investigación del proyecto propuesto en el capítulo I.

En la introducción del curso, cuando se planteó que se considerarían dos temas del área de física relacionados con la difusión de calor y la propagación de ondas, los alumnos hablaron sobre dichos temas, mostraron que les gustaban, y se percibió que estaban muy entusiasmados e interesados por los mismos.

Antes del planteamiento de la situación-problema: transferencia de calor por conducción en un alambre delgado, para despertar el interés de los alumnos por el tema flujo de calor, el profesor solicitó a cada estudiante dar un ejemplo de un fenómeno o proceso de la vida diaria donde se percibe la difusión del calor. Cuando los alumnos presentaron sus ejemplos mostraron entusiasmo por la difusión de calor.

Una vez planteada la situación-problema, los alumnos investigaron y, en clase, después de discutir y comprender el proceso de difusión de calor a través del alambre, lograron deducir la ecuación del flujo de calor. Todos se sintieron muy contentos, animados y entusiasmados por haber obtenido en equipo dicha ecuación. Opinaron que tal vez en solitario no hubieran podido lograrlo. Esto tiene una gran importancia para los participantes, pues se ha demostrado que los estudiantes aprenden más, les agrada más el ambiente de trabajo, establecen mejores relaciones con los demás, aumenta su autoestima y aprenden habilidades sociales más efectivas cuando trabajan en colaboración.

El grupo también logró expresar matemáticamente las condiciones de frontera y la condición inicial descritas en el enunciado del problema. En otras palabras, el grupo logró modelar el problema dado en el enunciado.

Borssoi y Almeida (2004) percibieron indicios de que la modelación matemática, como estrategia de enseñanza, era una facilitadora del aprendizaje significativo, pues las actividades de enseñanza en el ambiente de modelación permitían emerger una gran cantidad de conceptos matemáticos que proporcionaban interacciones favorables al aprendizaje.

Una vez obtenido el problema de valores en la frontera, los alumnos investigaron y aplicaron el método de separación de variables, con el cual lograron reemplazar la ecuación diferencial parcial del flujo de calor por dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Este método para resolver ecuaciones diferenciales parciales es un concepto matemático nuevo e importante para los estudiantes.

Luego, los estudiantes resolvieron las ecuaciones diferenciales ordinarias obtenidas, y así construyeron una solución general.

Con la condición inicial, obtuvieron una solución particular, la cual es un desarrollo de una serie seno de Fourier, cuyos coeficientes fueron obtenidos para presentar la solución formal que se muestra en la figura 3.2 del capítulo III.

Antes del planteamiento de la situación-problema: vibraciones de una cuerda elástica, para despertar el interés de los alumnos por el tema sobre las vibraciones o movimientos ondulatorios, el profesor solicitó a cada estudiante dar un ejemplo de un fenómeno o proceso de la vida diaria donde se percibe la propagación de ondas. A medida que los alumnos presentaban sus ejemplos, éstos mostraban mucho interés y entusiasmo por el tema propuesto.

Una vez planteada la situación problema, los alumnos investigaron y, en clase, después de discutir y comprender el proceso de propagación de una onda a través de una cuerda elástica, lograron deducir la ecuación de onda. El grupo también logró expresar matemáticamente las condiciones de frontera y las condiciones iniciales descritas en el enunciado del problema. Es decir, el grupo modeló el problema dado.

Aplicando el método de separación de variables, el grupo logró reemplazar la ecuación diferencial de onda por dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

Una vez resueltas dichas ecuaciones diferenciales ordinarias, los alumnos construyeron la solución general.

Utilizando la condición inicial, los estudiantes obtuvieron una solución particular, la cual es un desarrollo de una serie seno de Fourier, cuyos coeficientes también fueron obtenidos para presentar la solución formal.

Hasta el momento sólo hemos presentado resultados matemáticos. Pero debemos recordar que este trabajo de investigación es de tipo cualitativo, pues sus objetivos así lo indican. Recordemos que nuestro problema era la falta de interés y motivación en los estudiantes para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales. Los objetivos planteados eran despertar el interés y desarrollar la motivación de los estudiantes para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Nuestra estrategia docente consistió en resolver dos situaciones problema de la vida real relacionadas con el área de actuación de los futuros profesionales. El fenómeno de difusión de calor se percibe a diario en todas partes. El fenómeno en que interviene la propagación de ondas en un medio continuo, por ejemplo, las ondas sonoras, olas, luz, ondas sísmicas, etc. Estas situaciones problema fueron dos factores que influyeron fuertemente en despertar el interés y la motivación en los alumnos. Esto se percibió en los estudiantes cuando comenzó el proceso de investigación. Otra parte de nuestra estrategia consistió en resolver las situaciones problema mediante el enfoque de investigación orientada. Es decir, investigar y aplicar. Los alumnos se sintieron muy contentos y motivados cuando se enteraron de que no tendrían que memorizar métodos y técnicas para presentar exámenes. Sólo tendrían que investigar y participar en las discusiones con los compañeros en el aula de clase. El rol protagónico es de los estudiantes. Según Vygotsky (Moreira 2006), la interacción del alumno con sus compañeros, con el material de instrucción y con el profesor, lleva al estudiante a construir su propio conocimiento. Una de las grandes fallas que existe actualmente en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales es que los profesores le presentan a loa alumnos los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales y sus respectivas técnicas para resolverlas a través de clases expositivas (Dullius, 2009). El profesor actúa como un transmisor de conocimientos y los alumnos como unos receptores de información. El conocimiento no se transmite, pues induce a la memorización y, en consecuencia, al pronto olvido.

En la resolución de la situación problema, vibraciones de una cuerda elástica, se notó que los alumnos ya no tenían necesidad de recurrir a la investigación, sólo aplicaban lo aprendido en la resolución de la situación problema anterior. Los conocimientos fluían fácil y rápido, lo que indicaba que los estudiantes habían logrado un aprendizaje conceptual significativo. Los estudiantes terminaron reconociendo que la fuerza de la motivación se les había desarrollado y que para aprender sólo tenían que investigar y hacer.

Podemos concluir que los objetivos propuestos se lograron, los alumnos aumentaron su autoestima y tienen la confianza de poder realizar otro proyecto de investigación durante su carrera profesional con el lema que repitieron muchas veces: investigar y hacer.

También debemos reconocer que la manipulación de los conceptos y métodos matemáticos utilizados durante el proceso de investigación, así como la interacción entre dichos conceptos, produjo en los estudiantes un aprendizaje conceptual significativo.

BIBLIOGRAFÍA

AUSUBEL, D. P. (MOREIRA, M. A. 2006) A Teoría da aprendizagem significativa e sua implementacao em sala de aula. Brasilia: Editora Universidade de Brasilia.

BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R.C. (2013) Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. México: Limusa Wiley, 5_a. ed.

BORSSOI, A. H. e ALMEIDA, L. M. W. (2004) Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equacoes diferenciáis ordinárias. Educacao Matemática Pesquisa. V.6, n.2.

DULLIUS, M. M. (2009) Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico. Tesis, Universidad de Burgos.

HABRE, S. (2000) Exploring students'strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. Journal of Mathematical Behavior. V.18, n.4, p.455-472.

HABRE, S. (2003) Investigating students' aproval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. International Journal of Mathematical Educations in Science and Tecnology. V.35, n.5, p.651-662.

MOREIRA, M. A. (2006) A Teoria da aprendizagem significativa e sua implementacao em sala de aula. Brasília: Editora Universidade de Brasília.

MORENO, M. M. e AZCÁRATE, C. G. (2003) Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Revista Enseñanza de las Ciencias, V.21, n.2, p.265-280.

PIAGET, J. (1972), El nacimiento de la inteligencia en el niño. Madrid: Aguilar.

RASMUSSEN, C. (2001) New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. Journal of Mathematical Behavior, V.20. p55-87.

ROWLAND, D. R. ; JOVANOSKI, Z. (2004) Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. International Journal of Mathematical Educations in Science and Tecnology, V.35, n.4, p.503-516.

ROWLAND, D. R. (2006) Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts. International Journal of Mathematical Educations in Science and tecnology, V.37, n.5, p.553-558.

VYGOTSKY, L. S. (MOREIRA, M. A. 2006) A Teoria da aprendizagem significative e sua implementacao em sala de aula. Brasilia: Editora Universidade de Brasília.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. (2008) Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol.1. Ecuaciones Diferenciales-Tercera edición. McGraw-Hill-Interamericana.

METADATOS

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/6

Título	APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS AVANZADAS MEDIANTE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS APLICADOS A LA REALIDAD USANDO EL ENFOQUE DE LA INVESTIGACIÓN ORIENTADA
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
JESÚS ALBERTO MEDINA PEÑA	CVLAC	**2.804.354**
	e-mail	**Jesusmedina2804@gmail.com**
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Matemática-problemas reales-investigación

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/6

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Sub área
CIENCIAS	**FÍSICA**

Resumen (abstract):
Los estudios indican un número de dificultades de los estudiantes para el aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias. Entre las causas de dichas dificultades se menciona la falla que los alumnos tienen en los contenidos de matemática básica, lo que les ocasiona serios problemas para desarrollar un entendimiento funcional de las matemáticas relacionadas con el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. En consecuencia, los alumnos no muestran interés ni están motivados para aprender los contenidos de ecuaciones diferenciales por no comprender lo que están haciendo.

De acuerdo con la Teoría de Aprendizaje de Ausubel, para que ocurra este entendimiento funcional o aprendizaje significativo el alumno debe mostrar interés para aprender, y el profesor debe promover la predisposición del alumno para aprender. Para ello, es importante que el profesor trabaje de acuerdo con los intereses, expectativas y necesidades de los alumnos. En este sentido, presentamos este trabajo de investigación en el cual, para despertar el interés de los estudiantes, desarrollamos la resolución de dos situaciones-problemas en las que se aplican las ecuaciones diferenciales a situaciones de la vida real y están relacionadas al área de actuación de los futuros profesionales: Transferencia de calor por conducción en una barra metálica delgada, y Vibraciones de una cuerda elástica.

Debemos buscar que el alumno entienda lo aprendido en clase. Pero para lograr este entendimiento del conocimiento, Piagget propone que el alumno use la manipulación y la investigación como fundamentales elementos de desarrollo cognitivo. Por esta razón las situaciones-problema fueron enfocadas con el método de investigación orientada, en el cual, bajo la orientación del profesor, según sus necesidades los alumnos investigaron y aplicaron los conceptos matemáticos necesarios para obtener las soluciones de las situaciones-problema propuestas.

De acuerdo con la Teoría Socio-interaccionista de Vygotsky, con la interacción con sus compañeros, con el profesor y con el material didáctico los alumnos adquieren la motivación necesaria para encontrarle interés a lo que están estudiando y

aprendiendo. Por lo tanto, las actividades de investigación y aplicación de los conceptos matemáticos deben realizarse en grupo.

Cuando se plantearon las dos situaciones-problema de la vida diaria relacionadas con el área de actuación de los futuros profesionales, los alumnos se mostraron muy interesados y entusiasmados por los temas considerados. Estas situaciones-problema fueron dos factores que influyeron fuertemente en despertar el interés y la motivación en los estudiantes. Esto se percibió en los alumnos cuando comenzó el proceso de investigación y aplicación de los conceptos matemáticos.

Con la manipulación de los conceptos, métodos y técnicas para resolver las ecuaciones diferenciales, los alumnos lograron el entendimiento del conocimiento, es decir, crearon sus propios conocimientos. Esto se percibió en los estudiantes cuando desarrollaron la resolución de la situación-problema sobre las vibraciones de una cuerda elástica.

De acuerdo con el método de investigación orientada, los estudiantes trabajaron en equipo. La interacción con sus compañeros, con el profesor y con el material didáctico, aumentó la motivación por el aprendizaje. Esto se percibe porque a los alumnos ahora les agrada más el ambiente de trabajo, establecen mejores relaciones con los demás, les aumentó su autoestima y confianza.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [x] TU [ ] JU [ ]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día

Lenguaje: SPA

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
T.A.-MedinaP,Jesus	**Aplication/word**

Alcance:

Espacial: ________________________________ (Opcional)

Temporal: ________________________________ (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo:
Licenciado(a) Trabajo de Ascenso

Nivel Asociado con el Trabajo: Titular

Área de Estudio: Física

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado: Universidad de Oriente

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CU N° 0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda ***"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009".***

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

JUAN A. BOLAÑOS CURVELO
Secretario

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA UNIVERSIDAD DE ORIENTE SECRETARÍA CONSEJO UNIVERSITARIO

C.C: *Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.*

JABC/YGC/maruja

Apartado Correos 094 / Telfs: 4008042 - 4008044 / 8008045 Telefax: 4008043 / Cumaná - Venezuela

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso- 6/6

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009) : “los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario para su autorización”.

Dr. Jesús Medina
AUTOR