



UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
NÚCLEO DE SUCRE  
ESCUELA DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR EN UN GAS DILUIDO EN  
RÉGIMEN DE TRANSICIÓN.  
(Modalidad: Investigación)

Br. ASDRÚBAL JOSÉ ZURITA PAREDES

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA  
OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

CUMANÁ, 2022.

GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR EN UN GAS DILUIDO EN  
RÉGIMEN DE TRANSICIÓN.

APROBADO POR:



Dr. Luis Antonio Araque Lameda  
Asesor Académico



## **DEDICATORIA**

A mi familia quienes han estado conmigo apoyándome y guiándome en cada paso que doy. Uds. son mi fortaleza y razón para seguir adelante. A Dios por otorgarme el entendimiento y las bendiciones que me han traído a este punto de mi vida. Gracias Sr. por nunca abandonarme.

## **AGRADECIMIENTOS**

Primero que todo a Dios por mi vida y los seres que puso en ella. Les agradezco a todas aquellas personas que nunca dudan de mí y estuvieron conmigo apoyándome, principalmente a mi familia Rosángel Paredes, José Zurita, Keiber Zurita, Genesis Zurita y Deivy Zurita. Gracias por todo, los AMO. Les agradezco a mis amigos André Dosil, María Medina, José Carlos y compañeros de carrera por siempre estar ahí pendiente de mí y apoyándome. Les agradezco todos los profesores que formaron parte de mi crecimiento académico en especial a los profesores Delfin Marval, Ángel Betancourt, José Mendoza, Glenys Hernandez, José Bastardo y no menos importante mi asesor Luis Araque Lameda.

## ÍNDICE

DEDICATORIA .....	II
AGRADECIMIENTOS .....	III
ÍNDICE .....	IV
LISTA DE FIGURAS .....	VI
RESUMEN .....	VIII
CAPÍTULO I .....	1
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO II .....	5
MARCO TEÓRICO .....	5
2.1 Conductividad térmica .....	5
2.2 Tiempo de colisión .....	7
2.3 La hipótesis atomística de la materia y la ecuación de transporte de Boltzmann .....	11
2.4 Las leyes de conservación .....	20
2.5 Ecuación de transporte de Boltzmann con hipótesis del tiempo de relajación .....	22
2.6 Método Chapman–Enskog y aproximaciones de la funciones de distribución .....	23
2.7 Condiciones de contorno .....	26
CAPÍTULO III .....	27
MARCO METODOLOGÍCO .....	27
3.1 Ecuación de la conducción térmica en el régimen de transición .....	27
3.2 Ecuación de transporte de Boltzmann .....	27

3.3 El método de Chapman-Enskog y linealización de las funciones de corrección .....	28
3.4 La ecuación general de transferencia térmica en régimen de transición .....	31
CAPÍTULO IV .....	34
RESULTADOS Y DISCUSION .....	34
CONCLUSIONES .....	42
BIBLIOGRAFIA .....	43
APÉNDICES .....	46
<b>METADATOS</b> .....	<b>65</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Principales escalas de longitud característica a tener en cuenta a nivel molecular.....	1
Figura 2. Un gas en contacto termodinámico con dos acumuladores de calor a temperatura constantes $T_2$ y $T_1$ . Si $T_2 > T_1$ el calor fluye en la dirección $-z$ desde la región de temperatura más alta a la de temperatura más baja.....	5
Figura 3. Probabilidad $\mathcal{P}(t)$ de supervivencia durante un tiempo $t$ sin sufrir un choque. (El área sombreada representa la probabilidad $\mathcal{P}(t)dt$ de sufrir un choque en el intervalo de tiempo entre $t$ y $t + dt$ después de una supervivencia durante un tiempo $t$ sin choques).....	7
Figura 4. Sección transversal total de colisión en el plano de colisión.....	11
Figura 5. El espacio de seis dimensiones $\mu$ de una molécula.....	13
Figura 6. La invariancia del elemento de volumen en el espacio $\mu$ bajo evolución dinámica en el tiempo.....	15
Figura 7. Un elemento de volumen en el espacio $\mu$ en los tiempos $t$ y $t + \delta t$ .....	17
Figura 8. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de $1 \times 10^{-4}$ K/cm y $2 \times 10^{-4}$ K/cm. El recorrido libre medio se eligió de $\lambda = 0,08$ cm, mientras que el ancho del canal $L = 0,8$ cm.....	35
Figura 9. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de $1 \times 10^{-4}$ K/cm y $2 \times 10^{-4}$ K/cm. El recorrido libre medio se eligió de $\lambda = 0,02$ cm, mientras que el ancho del canal $L = 0,8$ cm.....	35
Figura 10. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de 0,1 K/cm y 0,2 K/cm. El recorrido libre medio se eligió de $\lambda = 0,08$ cm, mientras que el ancho del canal $L = 0,8$ cm.....	36

- Figura 11. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de 0,1 K/cm y 0,2 K/cm. El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 0,02 \text{ cm}$ , mientras que el ancho del canal  $L = 0,8 \text{ cm}$ ..... 37
- Figura 12. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de  $1 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$  y  $2 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$ . El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 0,01 \text{ cm}$ , mientras que el ancho del canal  $L = 0,8 \text{ cm}$ ..... 37
- Figura 13. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de  $1 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$  y  $2 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$ . El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 10^{-3} \text{ cm}$ , mientras que el ancho del canal  $L = 0,8 \text{ cm}$ ..... 38
- Figura 14. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de  $1 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$  y  $2 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$ . El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 1 \times 10^{-5} \text{ cm}$ , mientras que el ancho del canal  $L = 0,8 \text{ cm}$ ..... 38
- Figura A1. Representación geométrica de la cinemática de una colisión binaria. (a) El impulso total  $\vec{P}$  no ha cambiado (conservación del impulso). El impulso relativo se gira desde la dirección inicial  $i$  a la dirección final  $f$ , sin cambios en la magnitud (conservación de la energía). El ángulo de dispersión son los ángulos  $\theta, \phi$  de  $f$  en relación con  $i$ . (b) El momento individual de los socios de colisión  $P_1$  y  $P_2$  se puede construir a partir de  $\vec{P}$  y  $2\vec{P}$ , como se muestra. Los puntos A y B coincidirán a O, el punto medio de  $\vec{P}$ , las moléculas de colisión tienen la misma masa..... 47
- Figura A2. Dispersión clásica de una molécula por un centro fijo de fuerza O..... 48
- Figura A3. Operaciones de simetría que llevan una colisión a la colisión inversa. En  $A', B', C'$  y  $D'$ ,  $i$  y  $f$ , respectivamente, denotan momentos relativos inicial y final..... 49



## RESUMEN

Se determinó la ecuación general de transferencia térmica, para un gas diluido en régimen de transición, calculando la función de distribución hasta tercer orden en el número de Knudsen, usando la ecuación de Boltzmann, en la aproximación del tiempo de relajación [1] y el método de Chapman-Enskog [2], junto con la ecuación de la conservación de la energía [2]. Esta ecuación es particularmente sencilla para el caso de un gas en reposo, la cual nos da como resultado la ecuación de la conducción térmica o ecuación de Fourier generalizada, con derivadas espaciales hasta cuarto orden. Para una aplicación se consideró una geometría simple: dos planos infinitos paralelos a una distancia  $L$  y sometidos a dos temperaturas diferentes. El perfil de temperaturas obtenido, presentó oscilaciones características del régimen de transición, es poco sensible a la parametrización de las interacciones moleculares en las fronteras, este perfil para números de Knudsen muy pequeños reproduce el comportamiento lineal característico del continuo.

## CAPÍTULO I

### INTRODUCCIÓN

Unos de los principales resultados de la teoría cinética de los gases son que la viscosidad y la conductividad térmica son independientes de la densidad del gas [1, 3, 4]. Pero a medida que la presión disminuye, estas cantidades comienzan a depender de la densidad y tienden a cero con la densidad [5]. Un criterio para establecer el grado de enrarecimiento de un gas es mediante el número de Knunsen

$$k_n = \frac{\lambda}{L}, \quad (1.1)$$

donde  $\lambda$  es el recorrido libre medio de las moléculas del gas y  $L$  una distancia característica del recipiente que lo contiene como aparece en la figura 1. Según este número, un gas está en el régimen de Knunsen, si  $k_n \geq 1$  y en el régimen continuo si  $k_n < 1$ . La región de densidades cerca de la unidad  $k_n \sim 1$  se le conoce como régimen de transición [5].

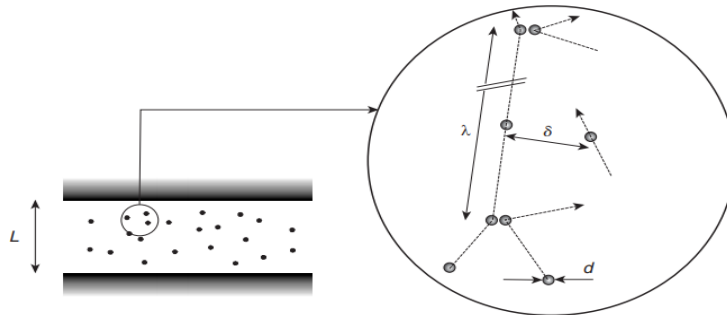


Figura 1. Principales escalas de longitud característica a tener en cuenta a nivel molecular.

Desde el año 1978 ha desarrollado un intenso esfuerzo teórico y experimental para entender las propiedades del flujo de estos gases diluidos en régimen de transición por García Sucre y colaboradores [6, 13, 14, 18]. Uno de los principales resultados de estas investigaciones es que las leyes lineales tales como la transferencia de momentum de Newton y la ley de Fourier para la transferencia de calor por conductividad térmica, no pueden explicar la dinámica de los flujos desarrollados en estas condiciones de dilución, es

decir, la hipótesis del continuo, la que sustenta a estas leyes, pierde su validez [6, 18]. En otras palabras había que buscar una descripción alterna para estudiar estos nuevos flujos y establecer la dinámica de los mismos. Este nuevo enfoque no debe fundamentarse en la hipótesis del continuo, si no, en la hipótesis atomística de la materia.

En vista del gran número de grados de libertad involucrados en una descripción atomística, esta debe fundamentarse en el supuesto probabilístico, tal como aparece en el núcleo de las colisiones de la ecuación de transporte de Boltzmann [19, 20]. Esta rama de la teoría cinética se conoce hoy en día como la dinámica de gases enrarecidos y se inicia con el mismo Boltzmann a principios del siglo XIX y comienza a tener importancia por primera vez en el año 1958 con los vuelos espaciales [19].

La ecuación de transporte de Boltzmann es una de las herramientas más adecuada para el estudio de la dinámica de los gases enrarecidos, ya que esta incluye de manera muy natural a los parámetros fundamentales como el recorrido libre medio, el tiempo libre medio de colisión y la sección transversal de colisión, con los cuales se pueden explicar los fenómenos de transporte [1, 2, 19, 20]. A pesar de ser una ecuación integro diferencial no lineal, y de difícil solución, la dependencia con estos parámetros la hace más conveniente que cualquier otra formulación [5, 21].

La descripción teórica de los fenómenos de transporte se puede clasificar en dos clases de manera muy general [23]. La primera clase la que incluye a todos aquellos que parten de la ecuación de transporte de Boltzmann y se les denominan analíticos. La segunda está formada por aquellos que parten del formalismo de Green-Kubo. A estos se les llama de simulación y usan la dinámica molecular fuera del equilibrio. No es necesario decir cual método es más ventajoso. Aunque la dinámica molecular de no equilibrio parece prometedora para el cálculo de los coeficientes de transporte a un mejor nivel de exactitud. Una de las ventajas del método analítico es que permite seleccionar los parámetros físicamente relevantes en la descripción del fenómeno y de una relación aproximada que depende de esos parámetros. Por esta razón ambas descripciones son complementarias una con otra [21, 23].

La teoría matemática de la ecuación de transporte de Boltzmann se puede decir que comienza con los ilustrísimos matemáticos alemanes Hilbert y Carleman. A partir de aquí la cantidad de resultados relacionados con ella han ido en aumento. Entre estos se pueden citar los métodos de linealización y solución, al conocido como el método de Hilbert y el método de S. Chapman y D. Enskog [24]. Este último aparece en el libro: La Teoría Matemática de los Gases no uniformes, por S. Chapman y T. G. Cowling, desde entonces se le conoce así. Muy usado y tomado como base para otros abordajes donde las teorías fenomenológicas fallan. De aquí partió Burnett para la obtención de sus celebres ecuaciones que hoy se conocen con su nombre [25]. Además de estos resultados, no se pueden dejar de citar, entre otros, los de H. Grad y los C. Cercignani desde los comienzos de 1977 hasta su muerte.

Mientras que los métodos de simulación de la dinámica molecular, que comenzaron con los pioneros Alder y Wainwright, también se puede decir que se han desarrollado y superado con la llegada de las supercomputadoras, entre estos se pueden nombrar el método de Monte Carlo, el método de simulación directa de Monte Carlo, los autómatas celulares, y el enmallado de Boltzmann [5], entre otros.

Todo este cúmulo de conocimientos y herramientas de cálculo será el escenario, al final del año 1980 y de aquí en adelante, para el desarrollo tecnológico de los nuevos dispositivos en los que los canales son la parte fundamental y el flujo a través de ellos es un tópico de popular interés a investigar debido a las ramas emergentes de la Bioquímica en los sistemas conformados por chips, y en las tecnologías de fabricación de los sistemas micro-electromecánicos que comenzaron a finales de estos años [19-21].

Con el avance tecnológico, los dispositivos se hacen cada vez más pequeños, en consecuencia los flujos en las escalas de los micrómetros hasta el nanómetro son un desafío para la suposición fundamental de la mecánica del continuo. Los efectos de las moléculas en el volumen del fluido versus las moléculas próximas a la frontera sólida son totalmente diferentes. Estos son aspectos extremadamente interesantes para ser investigados en los flujos a estas escalas [19, 21, 26-28]. La delimitación entre la frontera del continuo y no continuo todavía no está determinada e inevitablemente tiene una gran influencia en el

comportamiento de los fluidos a pequeña escala, que tiene que ser comprendida y considerada en el diseño de tales dispositivos [19, 21, 26-28].

En vista de la gran aplicación que tiene el conocimiento teórico de la dinámica de fluidos de gases enrarecidos, en la tecnología emergente, en este trabajo nos proponemos obtener una generalización de la ecuación de la conducción térmica [29] o ecuación de Fourier, a partir de la ecuación de transporte de Boltzmann, en el régimen de transición. Como en esta condición de dilución son importantes los efectos de la interacción de las moléculas del gas con las de la frontera sólida, sustituiremos una descripción detallada que considere el potencial de interacción de las moléculas de la superficie sólida con las del gas próximas a ella, por una parametrización, dada por los valores de la primera derivada de la temperatura evaluada sobre la superficie [6-18].

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1 Conductividad térmica

Consideremos un gas en la que la temperatura no es uniforme en toda su masa. En particular, imaginemos que la temperatura  $T$  es una función de la coordenada  $z$ , como aparece en la figura 2, es decir que  $T = T(z)$ . El gas no está, entonces, en condiciones de equilibrio. En consecuencia, la energía, en forma de calor, pasará de la región de mayor a la de menor temperatura [1, 2, 4, 29, 30]. Sea  $q_z$  el calor que atraviesa la unidad de área de un plano (en la dirección  $z$ , normal al plano) por unidad de tiempo. La magnitud  $q_z$  es el flujo de calor en la dirección  $z$ . Si la temperatura fuera uniforme,  $q_z = 0$ . Si no es uniforme, es de esperar que con una buena aproximación sea proporcional al gradiente de temperatura  $\frac{\partial T}{\partial z}$ , si este no es demasiado grande [29]. Por lo tanto, podemos escribir:

$$q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.1)$$

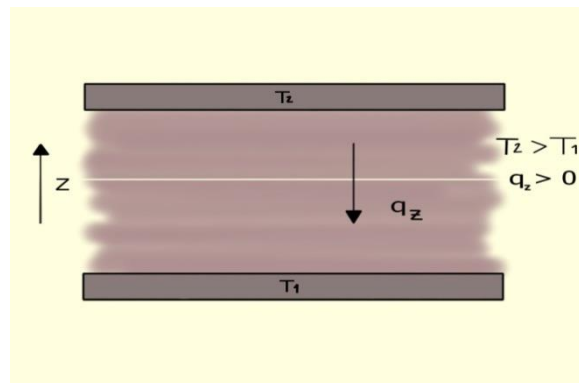


Figura 2. Un gas en contacto termodinámico con dos acumuladores de calor a temperaturas constantes  $T_2$  y  $T_1$ . Si  $T_2 > T_1$  el calor fluye en la dirección  $-z$  desde la región de temperatura más alta a la de temperatura más baja.

La constante  $k$  de proporcionalidad se llama coeficiente de conductividad térmica del gas [1, 2, 4, 29, 30]. Como el calor fluye desde la región de mayor a la de menor

temperatura,  $q_z < 0$ , si  $\frac{\partial T}{\partial z} > 0$ . El signo menos se pone explícitamente en (2.1) de forma que  $k$  sea una magnitud positiva. En el espacio la ecuación (2.1) se puede escribir de la forma siguiente [4, 29]:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T . \quad (2.2)$$

Esta es la densidad de flujo térmico debido a la conducción térmica. Podemos escribir esta ecuación como una función de la temperatura. De acuerdo con la ley de la conservación de la energía, la cantidad de calor absorbida en un volumen determinado en la unidad de tiempo debe ser igual al flujo térmico total que entra en dicho volumen a través de la superficie que lo limita. Como sabemos, dicha ley de conservación puede expresarse como una “ecuación de continuidad” para la cantidad de calor. Esta ecuación se obtiene igualando la cantidad de calor absorbida en la unidad de volumen por unidad de tiempo a la divergencia de la densidad del flujo térmico con signo menos [1, 2, 4, 29, 30]. La primera vale  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$ ; tomamos el calor específico  $c_p$ , puesto que la presión es naturalmente constante en todo el gas en reposo. Igualando esta expresión a  $-\nabla \cdot \mathbf{q} = k\nabla^2 T$ , obtenemos la ecuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = x\nabla^2 T, \quad x = \frac{k}{\rho c_p} . \quad (2.3)$$

Es bueno aclarar que al tomar la divergencia de  $\mathbf{q}$ , admitimos que  $k$  es independiente de  $T(z)$ , pero, según la teoría cinética, esta depende de  $T$ , mediante el promedio de las velocidades moleculares, aun para un sólido existe una dependencia en  $T$  [1, 4].

La ecuación (2.3) es conocida como la ecuación de la conducción térmica o ecuación de Fourier. En la región de bajo densidad, es decir, cuando el número de Knudsen se aproxima a la unidad  $k_n \sim 1$ , ocurren nuevos efectos debido a las moléculas que constituyen el gas, por ejemplo, la condiciones de no deslizamiento en la frontera, el coeficiente de conducción térmica depende de la temperatura, las cuales no pueden ser descrita por la ecuación (2.3), [6-14, 16]. El entendimiento de estos nuevos efectos se logrará

con la hipótesis atómica de la materia. En las siguientes secciones desarrollaremos la teoría cinética clásica, la cual nos permite estudiar estos sistemas constituidos por un número muy elevado de moléculas  $N(N \sim 10^{23})$ , en donde una descripción del movimiento clásico de cada molécula es poco práctica, debido al gran número de constituyentes y una descripción estadística se vuelve más ventajosa ya que las funciones que describen el estado del fluido (campo de velocidad del fluido, temperatura y densidad) pueden obtenerse como promedios estadísticos de los micro-estados [2, 30].

## 2.2 Tiempo de colisión

Consideremos una molécula con velocidad  $v$ . Sea  $\mathcal{P}(t)$  la probabilidad de que tal molécula pase un tiempo  $t$  sin sufrir un choque. Desde luego,  $\mathcal{P}(0) = 1$ , puesto que una molécula no tiene posibilidad de chocar en un tiempo  $t \rightarrow 0$ . Por el contrario,  $\mathcal{P}(t)$  disminuye cuando  $t$  aumenta, puesto que una molécula está constantemente expuesta a sufrir un choque; en consecuencia, la probabilidad de sobrevivir un tiempo  $t$  sin que este se produzca, disminuye al crecer el tiempo [30]. Finalmente,  $\mathcal{P}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . (La situación es muy similar a una que nos es a todos muy familiar; por nuestra constante exposición a las enfermedades y los accidentes, todos, más pronto o más tarde, hemos de morir). En definitiva, el resultado se refleja en la representación gráfica de  $\mathcal{P}(t)$  en función de  $t$ , cuya forma se señala en la figura 3.

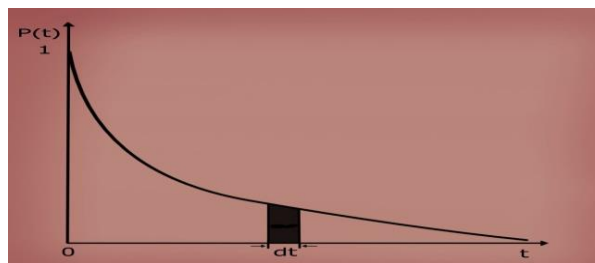


Figura 3. Probabilidad  $\mathcal{P}(t)$  de supervivencia durante un tiempo  $t$  sin sufrir un choque. (El área sombreada representa la probabilidad  $\mathcal{P}(t)dt$  de sufrir un choque en el intervalo de tiempo entre  $t$  y  $t + dt$  después de una supervivencia durante un tiempo  $t$  sin choques).

Para describir los choques, sea  $w dt$  la probabilidad de que una molécula sufra un choque en el tiempo comprendido entre  $t$  y  $t + dt$ . La magnitud  $w$  es, por tanto, la probabilidad por unidad de tiempo de que una partícula sufra una colisión; es, por consiguiente, la velocidad de choque. Supongamos que la probabilidad  $w$  es independiente



de la historia pasada de la molécula; esto es, no importa cuando sufrió la molécula su última colisión. En general,  $w$ , sin embargo, puede depender de la rapidez  $v$  de la molécula particular que se considera, o sea que  $w = w(v)$ .

Conociendo la probabilidad de choque  $w$  es posible calcular la probabilidad de supervivencia  $\mathcal{P}(t)$ . Esto puede hacerse observando que la probabilidad de que una molécula sobreviva un tiempo  $t + dt$  sin sufrir un choque tiene que ser igual a la probabilidad de que esta molécula sobreviva un tiempo  $t$  sin sufrir un choque multiplicada por la probabilidad de que no sufre un choque en el intervalo de tiempo siguiente, entre  $t$  y  $t + dt$  simbólicamente podemos expresarlo por

$$\mathcal{P}(t + dt) = \mathcal{P}(t)(1 - w dt), \quad (2.4)$$

por consiguiente

$$\mathcal{P}(t) + \frac{d\mathcal{P}}{dt} dt = \mathcal{P}(t) - \mathcal{P}(t)w dt, \quad (2.5)$$

o bien

$$\frac{1}{\mathcal{P}} \frac{d\mathcal{P}}{dt} = -w. \quad (2.6)$$

Entre choques (esto es, en un tiempo del orden de  $w^{-1}$ ) la velocidad  $v$  de una molécula no varía; o bien, si la molécula está sometida a fuerza exteriores debidas a campos gravitatorios o electromagnéticos, su velocidad varía, normalmente, en una cantidad relativamente pequeña en el breve tiempo  $w^{-1}$ . En consecuencia, la probabilidad  $w$ , aunque sea función de  $v$ , puede considerarse ordinariamente como una constante independiente del tiempo. La integral de (2.6) es, por lo tanto, inmediata y dá

$$\ln \mathcal{P} = -wt + C \quad (2.7)$$

o

$$\mathcal{P} = Ce^{-wt}, \quad (2.8)$$

la constante de integración  $C$  puede determinarse aquí por la condición  $\mathcal{P}(0) = 1$ . Se obtienen así que  $C = 1$  y

$$\mathcal{P} = e^{-wt}. \quad (2.9)$$

$\mathcal{P}(t) dt$  la probabilidad de que una molécula, después de sobrevivir sin choques durante un tiempo  $t$ , sufra una colisión en el intervalo de tiempo entre  $t$  y  $t + dt$ . Por tanto,

$$\mathcal{P}(t) dt = e^{-wt} w dt, \quad (2.10)$$

la probabilidad (2.10) debe ser normalizada adecuadamente, en el sentido de que

$$\int_0^{\infty} \mathcal{P}(t) dt = 1. \quad (2.11)$$

Lo que sencillamente afirma que existe una probabilidad unidad de que molécula choque en algún momento. En efecto, por (2.10) se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-wt} w dt = \int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1, \quad (2.12)$$

con lo que queda comprobada la condición de normalización (2.11). Sea  $\tau \equiv \bar{t}$  el tiempo medio entre choques. Este se llama también tiempo de colisión o tiempo de relajación de la molécula [2, 30]. Según (2.10) podemos escribir

$$\tau \equiv \bar{t} = \int_0^{\infty} \mathcal{P}(t) dt t = \int_0^{\infty} e^{-wt} w dt t = \frac{1}{w} \int_0^{\infty} e^{-y} y dy = \frac{1}{w} \quad (2.13)$$

por lo tanto,

$$\tau = \frac{1}{w} \quad (2.14)$$

(2.10) puede escribirse igualmente bien en la forma

$$\mathcal{P}(t) dt = e^{-t/\tau} \frac{dt}{\tau}. \quad (2.15)$$

Como en general  $w = w(v)$ ,  $\tau$  puede depender de la velocidad  $v$  de la molécula. Hemos establecido que  $\frac{dt}{\tau}$  es la probabilidad de que una molécula sufra una colisión en su movimiento errático. Como consecuencia de esta colisión la molécula sufre un cambio en la dirección de su movimiento [30]. La probabilidad de colisión depende de tres factores; la

densidad de moléculas, su tamaño, y su velocidad media relativa [30]. Si las moléculas son de forma esféricas, de radio  $a$ , dos moléculas chocarán si la distancia entre sus centros es menor que  $d = 2a$ . Para calcular la probabilidad de que una molécula choque con otra en tiempo muy pequeño  $\delta t$ . Consideraremos un cilindro de base  $\pi d^2$  y una altura igual a la distancia viajada por la partícula en este tiempo  $\langle v \rangle \delta t$ . La probabilidad de colisión es exactamente igual a la probabilidad de que el centro de la otra se encuentre dentro de este cilindro. Considerando el número de partículas contenidas en el cilindro, a parte de la partícula blanco, esta probabilidad se expresa como:

$$dP = n\pi d^2 \langle v \rangle dt, \quad (2.16)$$

donde  $n$  es la densidad de partículas incidentes [30]. También se acostumbra a expresarla como

$$dP = I\sigma_0 dt, \quad (2.17)$$

en la que  $I = n\langle v \rangle$  es el flujo incidente y  $\sigma_0 = \pi d^2$  la sección eficaz de dispersión, como aparece en la figura 4. La distancia media recorrida por tal molécula entre choques se denomina camino libre medio  $\lambda$  de la molécula. Así tenemos:

$$\lambda = \tau \langle v \rangle. \quad (2.18)$$

El camino libre medio para el choque de dos partículas esféricas viene dado por

$$\lambda \approx \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma_0}. \quad (2.19)$$

Si las dos partículas son iguales, la sección eficaz de dispersión tiene la forma

$$\sigma_0 = \pi d^2. \quad (2.20)$$

En los apéndices [A.3] y [A.4], se expone este concepto de manera más general [2, 30].

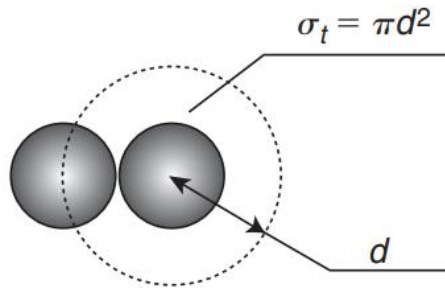


Figura 4. Sección transversal total de colisión en el plano de colisión.

Podemos tener una estimación del camino libre medio de las moléculas, para un gas típico a la temperatura ambiente ( $T \approx 300\text{ K}$ ) y a la presión atmosférica ( $10^6 \text{ dinas cm}^{-2}$ ). Con estos valores se tiene una densidad de moléculas  $n$ , que se puede calcular a partir de la ecuación de estado, obtenemos así

$$n = \frac{P}{kT} = \frac{10^6}{(1,4 \times 10^{16})(300)} = 2,4 \times 10^{19} \frac{\text{moléculas}}{\text{cm}^3}. \quad (2.21)$$

Un diámetro molecular típico podría ser  $d = 2 \times 10^{-8} \text{ cm}$ , la ecuación (2.20) dará, por lo tanto,  $\sigma_0 \approx 2 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$ , con lo que la ecuación (2.19) nos dará la estimación del camino libre medio aproximado

$$\lambda \approx 3 \times 10^{-5} \text{ cm}, \quad (2.22)$$

por consiguiente,

$$\lambda \gg d, \quad (2.23)$$

de forma que en nuestras aproximaciones, podemos justificar que los choques entre las moléculas son relativamente poco frecuentes [2, 30].

### 2.3 La hipótesis atomística de la materia y la ecuación de transporte de Boltzmann

Partiremos del supuesto de la teoría atomística de la materia. Consideraremos que el gas está lo bastante diluido [2, 4, 31], para poder decir que:

- a) Cada molécula pasa una fracción relativamente grande de su tiempo a distancias grandes de las otras moléculas de forma que no tiene interacciones con

ellas. Dicho brevemente, el tiempo entre colisiones es mucho mayor que el tiempo involucrado en una colisión.

b) La probabilidad de que más de dos moléculas se acerquen lo suficiente entre sí en un instante cualquiera como para tener interacciones simultáneas, es despreciablemente pequeña comparada con la probabilidad de que esto ocurra con solo dos partículas. Dicho brevemente, los choques triples se producen muy raramente en comparación con los de dos partículas.

c) La longitud de onda media de de Broglie de las moléculas es pequeña si se compara con la separación media entre las moléculas [2, 5]. El comportamiento de una molécula entre colisiones puede describirse en forma adecuada por el movimiento de una partícula que sigue una trayectoria clásica con posición  $\mathbf{r}$  y momentun  $\mathbf{p}$  bien definidos, y así se puede usar la Mecánica Clásica.

El sistema considerado por la teoría cinética clásica de los gases es el de un gas diluido de  $N$  moléculas encerradas en una caja de volumen  $V$ . Si la temperatura es lo suficientemente alta y la densidad es suficientemente baja, entonces las moléculas se pueden considerar localizadas como paquetes de ondas, cuyas extensiones son pequeñas en comparación a la distancia intermolecular media [2, 5]. Así se cumple que,

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2mkT}} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \ll 1, \quad (2.24)$$

es decir, que la longitud de onda promedio de Broglie de una molécula, debe ser mucho menor que la separación promedio entre ellas.

En tales condiciones, cada molécula puede considerarse una partícula clásica con una posición y un momento bien definidos. Además, se puede considerar que dos moléculas se pueden distinguir entre sí. Las moléculas interactúan entre sí a través de colisiones cuya naturaleza se especifica mediante una sección transversal de dispersión diferencial dada  $\sigma$  [2, 5, 30, 31]. A lo largo de nuestra discusión de la teoría cinética, solo se considerará el caso especial de un sistema de un tipo de molécula monoatómica.

No estamos interesados en el movimiento de cada molécula en detalle [2, 31]. Más bien, estamos interesados en la función de distribución  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , definida de manera que

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v. \quad (2.25)$$

Es el número de moléculas que, en el tiempo  $t$ , tienen posiciones dentro de un elemento de volumen  $d^3r$  alrededor de  $\mathbf{r}$  y velocidades dentro de un elemento de espacio-velocidad  $d^3v$  alrededor de  $\mathbf{v}$ . Los elementos de volumen  $d^3r$  y  $d^3v$  no deben tomarse literalmente como cantidades matemáticamente infinitesimales [2, 5]. Son elementos de volumen finito que son lo suficientemente grandes para contener una gran cantidad de moléculas y, sin embargo, lo suficientemente pequeños como para que, en comparación con las dimensiones macroscópicas, sean esencialmente puntos [2, 5, 30, 31]. Que tal elección es posible puede verse con un ejemplo. En condiciones estándar hay aproximadamente  $3 \times 10^{19}$  moléculas /  $cm^3$  en un gas. Si elegimos  $d^3r \sim 10^{-10} cm^3$ , que para nosotros es lo suficientemente pequeño como para ser llamado punto, todavía hay moléculas del orden de  $3 \times 10^9$  en  $d^3r$ .

Para hacer la definición de  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  más precisa, consideremos el espacio de seis dimensiones, llamado espacio  $\mu$ , generado por las coordenadas  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  de una molécula. El espacio  $\mu$  se representa esquemáticamente en la figura 5.

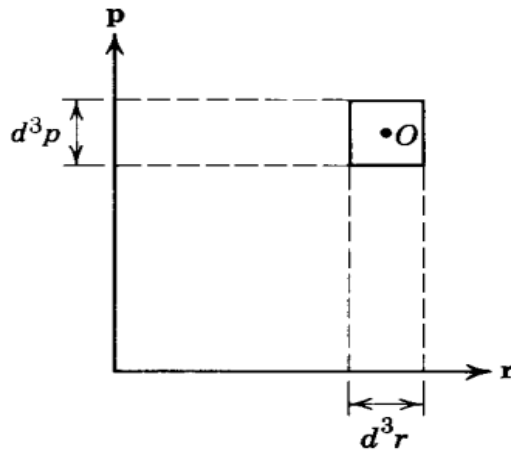


Figura 5. El espacio de seis dimensiones  $\mu$  de una molécula.

Un punto en este espacio representa el estado de una molécula. En cualquier instante de tiempo, el estado de todo el sistema de  $N$  moléculas está representado por  $N$  puntos en el espacio  $\mu$ . Dejemos que un elemento de volumen  $d^3r d^3v$  se construya

alrededor de cada punto en el espacio  $\mu$ , como el que se muestra sobre el punto  $O$  en la figura 5. Si nosotros contamos el número de puntos en este elemento de volumen, el resultado es por definición  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r d^3v$ , los elementos se eligen de modo que cada uno de ellos contenga un gran número de puntos, como  $10^9$ , y si la densidad de estos puntos no varía rápidamente de un elemento a un elemento vecino [2, 5], entonces  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  puede considerarse como una función continua de sus argumentos, podemos hacer la aproximación

$$\sum f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r d^3v \approx \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r d^3v \quad (2.26)$$

donde la suma de la izquierda se extiende sobre todos los centros de los elementos de volumen, y la integral del lado derecho se toma en el sentido de cálculo. Siempre se entenderá tal aproximación.

Habiendo definido la función de distribución, podemos expresar la información de que hay  $N$  moléculas en el volumen  $V$  a través de la condición de normalización

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)d^3r d^3v = N, \quad (2.27)$$

si las moléculas están distribuidas uniformemente en el espacio, de modo que  $f$  es independiente de  $\mathbf{r}$ , entonces

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v = \frac{N}{V}. \quad (2.28)$$

El objetivo de la teoría cinética es encontrar la función de distribución  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  para una forma dada de interacción molecular. La forma límite de  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  contendría entonces todas las propiedades de equilibrio del sistema [1, 2, 4, 5, 30, 31]. Por tanto, el objetivo de la teoría cinética incluye la derivación de la termodinámica de un gas diluido.

Para cumplir con este objetivo, nuestra primera tarea es encontrar la ecuación de movimiento para la función de distribución. La función de distribución cambia con el tiempo, porque las moléculas entran y salen constantemente de un elemento de volumen dado en el espacio  $\mu$ . Supongamos que no hubo colisiones moleculares (es decir,  $\sigma = 0$ ).

Entonces, una molécula con las coordenadas  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  en el instante  $t$  tendrá las coordenadas  $(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}\delta t)$  en el instante  $t + \delta t$ , donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza externa que actúa sobre una molécula y  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m}$  es la velocidad.  $\delta t$  Puede ser una cantidad verdaderamente infinitesimal. Por lo tanto, todas las moléculas contenidas en un  $\mu$  - espacio elemento  $d^3r d^3v$ , en  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , en el instante  $t$ , se encontrarán en un elemento  $d^3r' d^3v'$ , en  $(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}\delta t)$ , en el instante  $t + \delta t$ . Por lo tanto, en ausencia de colisiones, tenemos la igualdad

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}\delta t, t + \delta t) d^3r' d^3v' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v, \quad (2.29)$$

que se reduce a

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}\delta t, t + \delta t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (2.30)$$

porque  $d^3r' d^3v' = d^3r d^3v$ . El último hecho se establece fácilmente si asumimos que la fuerza externa  $\mathbf{F}$  depende únicamente de la posición. En cualquier instante  $t$ , podemos elegir  $d^3r d^3v$  para ser un cubo de seis dimensiones. Es suficiente mostrar que el área de cualquier proyección de este cubo, digamos,  $dx dv_x$ , no cambia. Un cálculo simple mostrará que esta proyección, originalmente un cuadrado, se convierte en un paralelogramo de la misma área en el tiempo  $\delta t$ , como se ilustra en Figura 6.

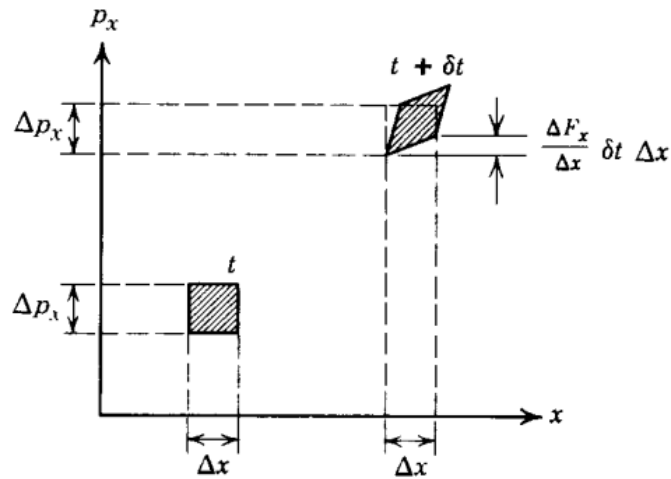


Figura 6. La invariancia del elemento de volumen en el espacio  $\mu$  bajo evolución dinámica en el tiempo.



Esta invariancia es válida siempre que  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  sean coordenadas generalizadas conjugadas canónicamente. Cuando hay colisiones (es decir,  $\sigma \neq 0$ ), debe modificarse la igualdad (2.30). Nosotros escribimos

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}\delta t, t + \delta t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}} \delta t \quad (2.31)$$

La que define a  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}}$  como el incremento neto, por unidad de tiempo, en  $d^3r d^3v$  y  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , del número de moléculas a consecuencia de las colisiones. Desarrollando el lado izquierdo hasta primer orden en  $\delta t$ , obtenemos la ecuación de movimiento para la función de distribución cuando dejamos  $\delta t \rightarrow 0$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}}. \quad (2.32)$$

Donde  $\nabla_{\mathbf{r}}, \nabla_{\mathbf{v}}$  son, respectivamente, los operadores de gradiente con respecto a  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{r}$ . Esta ecuación no es significativa hasta que especifiquemos explícitamente  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}}$ .

Para derivar una fórmula explícita para  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}}$ , asumimos que el gas está lo suficientemente diluido como para que solo se tengan en cuenta las colisiones binarias [A. 1]. El efecto de las fuerzas externas sobre las colisiones se ignora en el supuesto de que estas fuerzas, si están presentes, variarían poco en el rango del potencial intermolecular. Para obtener una forma explícita de  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}}$ , partiremos de la relación (2.31), y la que multiplicaremos por  $d^3r d^3v$ , para escribirla como:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \mathbf{F}\delta t, t + \delta t) d^3r d^3v &+ f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}} d^3r d^3v \delta t. \end{aligned} \quad (2.33)$$

La relación obtenida arriba, se puede aclarar mediante la figura 7

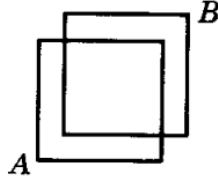


Figura 7. Un elemento de volumen en el espacio  $\mu$  en los tiempos  $t$  y  $t + \delta t$ .

donde el cuadrado etiquetado  $A$ , representa el elemento de volumen en el espacio de fase en  $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}, t\}$  y el etiquetado  $B$  representa el de  $\left\{\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}\delta t, t + \delta t\right\}$ , donde  $\delta t$  eventualmente tiende a cero. Durante el intervalo de tiempo  $\delta t$ , algunas moléculas en  $A$  serán sacadas de  $A$  por colisión. Consideramos  $A$  tan pequeño que cualquier colisión que sufra una molécula en  $A$  la sacará de  $A$ . Tal molécula no alcanza  $B$ . Por otro lado, hay moléculas afuera de  $A$  que, mediante las colisiones, entrarán en  $A$  durante el intervalo de tiempo  $\delta t$ . Estos estarán en  $B$ . Por lo tanto, el número de moléculas en  $B$  en  $t + \delta t$ , cuando  $\delta t \rightarrow 0$ , es igual al número original de moléculas en  $A$  en el tiempo  $t$  más la ganancia neta de moléculas en  $A$  debido a colisiones durante el intervalo de tiempo  $\delta t$ . Esta declaración es el contenido de (2.33), y se puede expresar en la forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} d^3r d^3v \delta t = (\bar{R} - R) d^3r d^3v \delta t. \quad (2.34)$$

Donde  $R\delta t d^3r d^3v$ , es el número de las colisiones que ocurren durante el tiempo entre  $t$  y  $t + \delta t$  en las que una de las moléculas iniciales está en  $d^3r d^3v$  aproximadamente  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ .

$\bar{R}\delta t d^3r d^3v$ , es el número de colisiones que ocurren durante el tiempo entre  $t$  y  $t + \delta t$  en las que una de las moléculas finaliza en  $d^3r d^3v$  aproximadamente  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ .

Estrictamente hablando, cometemos un pequeño error aquí. Estamos asumiendo implícitamente que si una molécula califica bajo la descripción, ninguno de sus socios en la colisión califica. Este error es insignificante debido a la pequeñez de  $d^3v$  [2, 5].

Como asumimos que el gas está extremadamente diluido, entonces podemos considerar solo colisiones binarias e ignorar la posibilidad de que tres o más moléculas puedan colisionar simultáneamente [2, 5, 30, 31]. Esto simplifica considerablemente la evaluación de  $R$  y  $\bar{R}$ . El efecto de las fuerzas externas en las colisiones se ignora, sobre la suposición de que estas fuerzas, si están presentes, variarían poco sobre el rango del potencial intermolecular.

Una colisión binaria se especifica, por ejemplo, como  $12 \rightarrow 1'2'$ , donde el 1 y 2, especifican la moléculas uno y la dos antes de la colisión y los primados después de la colisión. El número de pares de este tipo se denota como  $dN_{12}$  y el número de colisiones del tipo  $12 \rightarrow 1'2'$ , en un elemento de volumen  $d^3r$  en  $\mathbf{r}$ , por intervalo de tiempo  $\delta t$  es

$$dN_{12} I d\sigma \delta t. \quad (2.35)$$

Donde  $I d\sigma$  es la probabilidad de colisión por unidad de tiempo [2] y se debe ajustar la probabilidad de una colisión del tipo  $12 \rightarrow 1'2'$ , puesto que se están contando los pares en colisión [2], es decir, hacer  $n = 1$ . En los apéndices [A.3], [A.4] y [A.5] se ilustra el concepto de  $I d\sigma$ . Mediante la función de correlación de dos partículas  $\mathbf{F}$ , expresamos el número de pares como:

$$dN_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, t) d^3r d^3P_1 d^3P_2. \quad (2.36)$$

Escribimos

$$R \delta t d^3r d^3v_1 = \delta t d^3r d^3v_1 \int d^3v_2 I d\sigma \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t), \quad (2.37)$$

es decir

$$R = \int d^3v_2 I d\sigma \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t), \quad (2.38)$$

ahora para determinar  $\bar{R}$  consideraremos las colisiones del tipo  $1'2' \rightarrow 12$ , en este caso el número de colisiones se expresa como

$$d'N_{1'2'} \{I d\sigma\}' \delta t, \quad (2.39)$$

es decir que

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, t) d^3 r d^3 v'_1 d^3 v'_2 \{I d\sigma\}' \delta t. \quad (2.40)$$

Así

$$\bar{R} = \int \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, t) d^3 v'_2 \{I d\sigma\}'. \quad (2.41)$$

En la Mecánica Clásica la ecuación fundamental es  $m d^2 \mathbf{r} / t^2 = \mathbf{F}$ , la cual es invariante cuando hacemos la transformación  $t \rightarrow -t$ , si  $\mathbf{F}$  no depende explícitamente de  $t$ , esta invarianza permite cambiar el estado final por el inicial. En el apéndice [A.5] y en la figura A-5 se expone gráficamente esta simetría; por lo tanto:  $I d\sigma = \{I d\sigma\}'$ , por eso:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}} = \bar{R} - R = \int d^3 v_2 I d\sigma (\mathbf{F}'_{12} - \mathbf{F}_{12}), \quad (2.42)$$

donde  $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, t)$ . Así escribimos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}} = \int d^3 v_2 d\Omega |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}\right) (\mathbf{F}'_{12} - \mathbf{F}_{12}). \quad (2.43)$$

Esta expresión no es exacta [2, 5], aun para un gas suficientemente diluido, puesto que depende de la función de correlación de dos partículas:  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$ . Ahora admitiremos el supuesto crucial.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t) \approx f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t). \quad (2.44)$$

Esto dice que la probabilidad de encontrar dos partículas en el elemento de volumen  $d^3 r$  no se correlacionan, de modo que la probabilidad de encontrarlas simultáneamente en el mismo volumen, es el producto de la probabilidad de encontrar cada partícula por separado [2, 5, 30, 31]. Esto se conoce como el "supuesto de caos molecular". Con el supuesto de caos molecular, tenemos

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{colisión}} = \int d^3 v_2 d\Omega |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega}\right) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2). \quad (2.45)$$

En la que se han utilizado las siguientes abreviaturas:

$$f_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, t), \quad (2.46)$$

$$f_2 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_2, t), \quad (2.47)$$

$$f'_1 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_1, t), \quad (2.48)$$

$$f'_2 = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_2, t), \quad (2.49)$$

sustituyendo (2.45) en (2.32) obtenemos la Ecuación de Transporte de Boltzmann (ETB)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla_r + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}_1} \right) f_1 = \int d^3 v_2 d\Omega |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} \right) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2). \quad (2.50)$$

La cual es una ecuación integral-diferencial no lineal para la función de distribución.

## 2.4 Las leyes de conservación

Para investigar los fenómenos de no equilibrio, debemos resolver la ETB, con las condiciones iniciales dadas, para obtener la función de distribución. Algunas propiedades rigurosas de cualquier solución de la ETB se pueden obtenerse a partir de cualquier colisión molecular, hay cantidades dinámicas que se conservan [2, 4, 5, 19, 20, 30, 31].

Sea  $X(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  cualquier cantidad, que se conserve, asociada con una molécula de velocidad  $\mathbf{v}$ , ubicada en  $\mathbf{r}$ , de modo que en cualquier colisión del tipo  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \rightarrow \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2\}$  que tenga lugar en  $\mathbf{r}$ , se cumpla:

$$X_1 + X_2 = X'_1 + X'_2. \quad (2.51)$$

Llamamos a  $X$  una propiedad conservada [2, 4, 5]. El siguiente teorema es válido.

Teorema

$$\int d^3 v X(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \left[ \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} \right]_{colisión} = 0, \quad (2.52)$$

La ecuación para la evolución de la cantidad  $X$ , se basa en este teorema. Donde  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{colisión}$  es el lado derecho de (2.31). Este teorema se demuestra en el Apéndice [B.1].

Finalmente el teorema deseado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle nX \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle n v_i X \rangle - n \left\langle v_i \frac{\partial X}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle F_i \frac{\partial X}{\partial v_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle \frac{\partial F_i}{\partial v_i} x \right\rangle = 0. \quad (2.53)$$

Donde

$$\langle X \rangle = \frac{1}{n} \int d^3 v X f. \quad (2.54)$$

Para moléculas simples, las propiedades independientes conservadas son masa, impulso y energía. En consecuencia establecemos sucesivamente

$$X = m, \quad (\text{Masa}) \quad (2.55)$$

$$X = m v_i, \quad (\text{Momento}) \quad (2.56)$$

$$X = \frac{1}{2} m |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (\text{Energía térmica}) \quad (2.57)$$

donde

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (2.58)$$

Es la velocidad hidrodinámica del gas. Entonces deberíamos tener tres teoremas de conservación independientes. Los tres teoremas de conservación se resumen en (2.59), (2.60) y (2.61).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{Conservación de la masa}) \quad (2.59)$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = \frac{\rho}{m} \mathbf{F} - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_i}, \quad (\text{Conservación del momento}) \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \theta \\ = -\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{q} \\ - \frac{2}{3} P_{ij} \Lambda_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{Conservación de la energía}) \quad (2.61)$$

Las cantidades auxiliares se definen de la siguiente manera.

$$\rho(\mathbf{r}, t) \equiv m \int d^3v f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (\text{Densidad de masa}) \quad (2.62)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \mathbf{v} \rangle, \quad (\text{Velocidad media}) \quad (2.63)$$

$$\theta(\mathbf{r}, t) \equiv kT \equiv \frac{1}{3} m \langle U^2 \rangle, \quad (\text{Temperatura}) \quad (2.64)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} m \rho \langle \mathbf{U} U^2 \rangle, \quad (\text{Flujo de calor}) \quad (2.65)$$

$$P_{ij} = \rho \langle U_i U_j \rangle, \quad (\text{Tensión de tensiones}) \quad (2.66)$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (2.67)$$

$$n(\mathbf{r}, t) = \int d^3v f, \quad (2.68)$$

$$U_i = v_i - u_i. \quad (2.69)$$

Una vez obtenida la función de distribución, podemos usarla para obtener las cantidades físicas  $P_{ij}$  y  $\mathbf{q}$ , las cuales, al ser sustituidas en las ecuaciones (2.60)-(2.61) nos darán las ecuaciones del movimiento del gas diluido. La ecuación de la conservación de la energía (2.61) nos dará en forma directa la ecuación general de transferencia térmica para un gas diluido [2, 29].

## 2.5 Ecuación de transporte de Boltzmann con hipótesis del tiempo de relajación

Por el momento queremos evitarnos complicaciones excesivas por medio de aproximaciones adecuadas de  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}}$ . Admitamos sencillamente que el efecto de las colisiones es siempre la restauración de una situación de equilibrio local [1, 2, 4, 5, 30, 31], definida por la función distribución de Maxwell

$$f^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{n}{(2\pi m\theta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{m}{2\theta}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2\right]. \quad (2.70)$$

En la que  $n, \theta, \mathbf{u}$  pueden ser funciones de variación lenta de  $\mathbf{r}$  y  $t$ , pero no dependen de  $\mathbf{v}$ . Supongamos además que si se perturba la distribución molecular correspondiente al equilibrio local [2, 4, 5], de forma que la distribución efectiva  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  es diferente de  $f^{(0)}$ , entonces el efecto de las moléculas es restablecer  $f$  a su valor de equilibrio  $f^{(0)}$  en un tiempo de relajación  $\tau$  que es de orden del tiempo de colisión [2, 4, 5]. Simbólicamente escribimos esta hipótesis para  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}}$  en la forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{colisión}} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}, \quad (2.71)$$

con la hipótesis (2.71), en la ecuación (2.32) se transforma en

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}\right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}. \quad (2.72)$$

Esta es sencillamente una ecuación lineal en derivadas parciales de  $f$  y es la ETB con hipótesis del tiempo de relajación.

## 2.6 Método Chapman–Enskog y aproximaciones de la funciones de distribución

Para aplicar los teoremas de conservación (2.59)-(2.60)-(2.61) y encontrar las ecuaciones del movimiento del gas diluido, es necesario hallar soluciones aproximadas de la ETB en el tiempo de relajación [5, 19, 20, 24, 31]. La aproximación del tiempo de relajación, aunque linealiza a la ETB en  $f$ , no garantiza soluciones exacta en la mayoría de las veces [19, 20, 31], esto es importante para justificar el empleo de métodos aproximados que nos permiten el estudio del comportamiento del sistema. En la literatura se han desarrollado varios métodos para resolver de forma aproximada la ETB [31, 32]. Unos de los métodos más usados es el método de Chapman-Enskog, que consiste básicamente en tomar aproximaciones sucesivas de la función de distribución para dar solución a la ETB. Brevemente, se propone una expansión de Chapman-Enskog de la ETB con el número de Knudsen como pequeño parámetro, es decir

$$f = f^{[0]} + f^{[1]} + f^{[2]} + f^{[3]} + \dots + f^{[n]}. \quad (2.73)$$



Una de las cosas más importante de una serie es su convergencia, si el número de Knudsen es pequeño garantiza que la serie converja.  $f^{[0]}$  es la función de distribución de Maxwell (2.70). Las correcciones del tensor de tensiones y el flujo de calor se pueden obtener de la siguiente manera:

$$P_{ij} = P_{ij}^{[0]} + P_{ij}^{[1]} + P_{ij}^{[2]} + P_{ij}^{[3]} + \dots + P_{ij}^{[n]}, \quad (2.74)$$

$$q_i = q_i^{[0]} + q_i^{[1]} + q_i^{[2]} + q_i^{[3]} + \dots + q_i^{[n]}. \quad (2.75)$$

Para ver un ejemplo, truncamos la expansión (2.73) hasta primer orden

$$f = f^{[0]} + f^{[1]} \quad (2.76)$$

y sustituimos (2.76) en la ecuación (2.72), obteniendo

$$f^{[1]} = -\tau \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r + \mathbf{F} \cdot \nabla_v \right) (f^{[0]} + f^{[1]}), \quad (2.77)$$

donde

$$f^{[1]} \equiv f - f^{[0]}. \quad (2.78)$$

Consideremos que la situación no está muy alejada del equilibrio ( $f \sim f^{[0]}$ ), por lo tanto

$$f^{[0]} \gg f^{[1]}, \quad (2.79)$$

podemos ignorar  $f^{[1]}$  en el lado derecho de la ecuación (2.77)

$$f^{[1]} \approx -\tau \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r + \mathbf{F} \cdot \nabla_v \right) f^{[0]}. \quad (2.80)$$

Suponga además que  $f^{[0]}$  varía en una cantidad significativa (es decir, del orden de sí mismo) solo cuando  $r$  varía en una distancia  $L$ . Luego se proporciona la estimación

$$f^{[1]} \approx -\tau \frac{\bar{v}}{L} f^{[0]}, \quad (2.81)$$

o

$$\frac{f^{[1]}}{f^{[0]}} \approx -\frac{\lambda}{L} \approx -k_n, \quad (2.82)$$

donde  $\lambda$  es una longitud del orden del camino libre medio. A partir de estas consideraciones, concluimos que  $f^{[0]}$  es una buena aproximación si la densidad, temperatura y velocidad locales tienen longitudes características  $L$  mucho más grandes que la trayectoria libre media  $\lambda$ . Podemos hacer esto de forma sucesiva

$$f^{[n]} = f - f^{[n-1]}. \quad (2.83)$$

Donde

$$f^{[0]} \gg f^{[1]}, \quad (2.84)$$

$$f^{[1]} \gg f^{[2]}, \quad (2.85)$$

$$f^{[2]} \gg f^{[3]}, \quad (2.86)$$

.

.

$$f^{[n-1]} \gg f^{[n]}. \quad (2.87)$$

Obtenemos las siguientes aproximaciones

$$f^{[2]} \approx -\tau \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r + \mathbf{F} \cdot \nabla_v \right) f^{[1]}, \quad (2.88)$$

$$f^{[3]} \approx -\tau \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r + \mathbf{F} \cdot \nabla_v \right) f^{[2]}, \quad (2.89)$$

.

.

.

$$f^{[n]} \approx -\tau \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r + \mathbf{F} \cdot \nabla_v \right) f^{[n-1]}. \quad (2.90)$$

Luego se proporciona las estimaciones

$$\frac{f^{[2]}}{f^{[0]}} \approx \left( \frac{\lambda}{L} \right)^2 \approx (k_n)^2, \quad (2.91)$$

$$\frac{f^{[3]}}{f^{[0]}} \approx \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 \approx (k_n)^3, \quad (2.92)$$

$$\frac{f^{[n]}}{f^{[0]}} \approx \left(\frac{\lambda}{L}\right)^n \approx (k_n)^n. \quad (2.93)$$

Utilizando las ecuaciones de conservación (2.60)-(2.61) y la función de distribución en los diferentes órdenes nos darán las ecuaciones del movimiento del gas.

## 2.7 Condiciones de contorno

Las ecuaciones del movimiento del fluido deben completarse con los condiciones de contorno. En el orden cero tenemos las ecuaciones de Euler (C-7)-(C-8)-(C-9) para un gas ideal y en orden uno obtenemos la ecuaciones de Navier-Stokes (C-32)-(C-33)-(C-34), estas descripciones se conocen como el régimen continuo. Usualmente en este régimen se emplean las condiciones de frontera de no deslizamiento, las cuales consisten en suponer que las paredes y la capa del gas adyacente tienen la misma temperatura y velocidad. Las soluciones a los siguientes órdenes en  $k_n$  conducen a las ecuaciones constitutivas de Burnett (C-49)-(C-50)-(C-51) y super-Burnett (C-65)-(C-66)-(C-67), [22, 24, 25, 31], aquí las descripciones microscópicas son necesarias para llevar a cabo el análisis del comportamiento del fluido, ya que las interacciones moleculares y moléculas-superficie se hacen notorias [6, 18]. Una de las características de este régimen es la llamada capa de Knudsen [33, 34], ésta es una capa delgada de gas que se forma en las inmediaciones de la superficie de la frontera, que tiene propiedades diferentes a las del gas y tampoco coinciden con las de la pared. En esta zona ocurren desviaciones apreciables en las propiedades macroscópicas de gas como en los perfiles de velocidad, la temperatura y la presión del gas. Debe saber que la capa de Knudsen aparece en el régimen del continuo, pero esta es tan pequeña que se desprecia. Sin embargo, en el régimen de transición, esto se considera al admitir valores diferentes de  $\Delta u/L$  y  $\Delta T/L$  de las primeras derivadas evaluadas en las fronteras [6, 9, 13, 16].

## CAPÍTULO III

### MARCO METODOLOGÍCO

#### 3.1 Ecuación de la conducción térmica en el régimen de transición

El problema a resolver es la determinación de la ecuación de conducción térmica o ecuación de Fourier, cuando nos encontramos en el régimen de transición, donde la ecuación fenomenológica (2.3) deja de ser válida, es decir, cuando el número de Knudsen está cerca a la unidad ( $k_n \sim 1$ ). Esta ecuación generalizada de Fourier se obtendrá de la ecuación general de transferencia térmica, para un gas en reposo, una vez conocidas las cantidades físicas  $\mathbf{q}$  y  $P_{ij}$  hasta tercer orden en el número de Knudsen. Para conocer estas cantidades físicas  $\mathbf{q}$  y  $P_{ij}$  supondremos que las funciones que describen el estado del fluido (campo de velocidad del fluido, presión y temperatura) son de variación lenta con respecto a la posición y utilizando el método perturbativo, expuesto en la sección 2.5, para garantizar la linealización de las funciones de distribución hasta tercer orden [2, 33, 34].

#### 3.2 Ecuación de transporte de Boltzmann

El modelo matemático a usar es la ETB en su formulación del tiempo de relajación, para un gas estacionario (es decir, las funciones que describen el estado del gas son funciones de las coordenadas) y sin fuerza externa

$$U_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau}, \quad (3.1)$$

hicimos la aproximación  $U_i \approx v_i$ . Esta aproximación toma validación, sí, la diferencia de temperatura es pequeña, pero los valores de temperatura son grandes, de tal manera que la velocidad más probable (la velocidad más probable es una función de la temperatura, según la ecuación  $\bar{v} = \sqrt{\frac{2\theta}{m}}$ ) es mucho mayor que la rapidez de la corriente principal del flujo del gas

$$\frac{u}{v} \ll 1. \quad (3.2)$$

El valor exacto  $\tau$  no puede ser determinado. Aparece en el lado derecho de ETB, al aproximar la integral de colisión, este tiempo de relajación tiene un orden de magnitud del tiempo colisiones.

### 3.3 El método de Chapman-Enskog y linealización de las funciones de corrección

Para determinar la función de distribución  $f$  que satisface a la ecuación (3.1) usaremos el método de Chapman-Enskog [24, 31], en el cual haremos aproximaciones sucesivas hasta tercer orden, tal como fue esbozado en la sección 2.6

$$f = f^{[0]} + f^{[1]} + f^{[2]} + f^{[3]}, \quad (3.3)$$

donde cada orden viene dada por el conjunto de ecuaciones

$$f^{[1]} \approx -\tau U_i \frac{\partial}{\partial x_i} f^{[0]}, \quad (3.4)$$

$$f^{[2]} \approx -\tau U_i \frac{\partial}{\partial x_i} f^{[1]}, \quad (3.5)$$

$$f^{[3]} \approx -\tau U_i \frac{\partial}{\partial x_i} f^{[2]}. \quad (3.6)$$

Como podemos notar en el conjunto de ecuaciones (3.4)-(3.6), si conocemos  $f^{[0]}$  que es la función de distribución de Maxwell del equilibrio local con toda la información del sistema que se estudia, se obtiene  $f^{[1]}$ , conocida  $f^{[1]}$  se obtiene  $f^{[2]}$ , y así sucesivamente. De esta manera se determinará la función de distribución hasta tercer orden en el tiempo de relajación. Para una distribución de orden cero  $f^{[0]}$  y las ecuaciones de conservación (2.60)-(2.61), obtendremos las ecuaciones de Euler (C-7)-(C-8)-(C-9) para un gas ideal, donde las correcciones de la densidad de flujo térmico (2.65) y el tensor de presión (2.66) son:

$$P_{ij} = P_{ij}^{[0]} = \delta_{ij} p, \quad (3.7)$$

$$q_i = q_i^{[0]} = 0. \quad (3.8)$$

Las corrección de orden uno  $f^{[1]}$  se escribirá en función de  $\mathbf{u}, \theta, \rho$  ya que  $f^{[0]}$  solo depende  $\mathbf{r}$  a través de estas cantidades físicas y utilizando las ecuaciones del movimiento de Euler para simplificar (C-7)-(C-8)-(C-9), se obtiene

$$f^{[1]} = -\tau f^{[0]} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{1}{\theta} \Lambda_{ij} \left( U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} U^2 \right) \right]. \quad (3.9)$$

Con esta función corrección hasta primer orden  $f = f^{[0]} + f^{[1]}$  y las ecuaciones de conservación (2.60)-(2.61) se obtendrán las ecuaciones de Navier-Stokes (C-32)-(C-33)-(C-34) para un gas viscoso, donde las correcciones de la densidad de flujo térmico (2.65) y el tensor de tensiones (2.66) son:

$$P_{ij} = P_{ij}^{[0]} + P_{ij}^{[1]} = \delta_{ij} p - 2 \frac{\tau n \theta}{m} \left[ \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right], \quad (3.10)$$

$$q_i = q_i^{[0]} + q_i^{[1]} = 0 - \frac{5}{2} n \theta \tau \frac{\partial \theta}{\partial x_i}. \quad (3.11)$$

Donde se pueden identificar a  $\tau n \theta$  y  $\frac{5}{2} n \theta \tau$  como los coeficientes de viscosidad y conductividad térmica, y se corresponde al régimen del continuo, es decir, de orden uno. En el orden uno los efectos de la colisiones moleculares empiezan aparecer como no homogeneidades en el gas, debido a que las colisiones contralan los procesos de transporte [1, 2, 4, 5]. Conocida  $f^{[1]}$ , podemos conocer  $f^{[2]}$  sustituyendo en la ecuación (3.5)

$$f^{[2]} \approx \tau U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \tau f^{[0]} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \frac{1}{\theta} \Lambda_{kl} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right\}, \quad (3.12)$$

conocida  $f^{[2]}$ , podemos conocer  $f^{[3]}$  sustituyendo en la ecuación (3.6)

$$f^{[3]} \approx -\tau U_h \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \tau U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \tau f^{[0]} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \frac{1}{\theta} \Lambda_{kl} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right\} \right\}. \quad (3.13)$$

Las funciones de corrección de orden dos y tres son ecuaciones no lineales. Despreciando los término donde aparecen los productos de las derivadas de la funciones que describen el estado del gas  $(\frac{\partial u}{\partial x_h}, \frac{\partial T}{\partial x_h}, \frac{\partial \rho}{\partial x_h}, \frac{\partial \tau}{\partial x_h})$  y la derivada del tiempo de relajación, ya que son de variación lenta con respecto a la posición, nos queda las funciones de corrección de orden dos y tres linealizadas (Apéndice [C.1])

$$f^{[2]} \approx \tau^2 \left[ \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_k} U_i U_k \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) + \frac{1}{\theta} U_i \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] f^{[0]}, \quad (3.14)$$

$$f^{[3]} \approx -\tau^3 \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_k U_i U_l \frac{\partial^3 \theta}{\partial x_k \partial x_i \partial x_l} + \frac{1}{\theta} U_l U_k \frac{\partial^2 \Lambda_{ij}}{\partial x_l \partial x_k} \left( U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} U^2 \right) \right] f^{[0]}. \quad (3.15)$$

Con esta función de corrección de segundo orden  $f = f^{[0]} + f^{[1]} + f^{[2]}$  y las ecuaciones de conservación (2.60)-(2.61), se obtendrán las ecuaciones de Burnett (C-49)-(C-50)-(C-51), [22-25, 31], donde las correcciones de la densidad de flujo térmico (2.65) y el tensor de tensiones (2.66) son:

$$P_{ij} = P_{ij}^{[0]} + P_{ij}^{[1]} + P_{ij}^{[2]} = \delta_{ij} p - 2 \frac{\tau n \theta}{m} \left[ \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] + 2 \frac{n \theta \tau^2}{m} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \nabla^2 \theta \right), \quad (3.16)$$

$$q_i = q_i^{[0]} + q_i^{[1]} + q_i^{[2]} = 0 - k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{7}{2} n \theta^2 \tau^2 \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (3.17)$$

Con la función de corrección hasta tercer orden  $f = f^{[0]} + f^{[1]} + f^{[2]} + f^{[3]}$  y las ecuaciones de conservación (2.60)-(2.61), se obtendrán las ecuaciones de súper-Burnett (C-

65)-(C-66)-(C-67), donde las correcciones de la densidad de flujo térmico (2.65) y el tensor de presión (2.66) son:

$$\begin{aligned}
 P_{ij} = P_{ij}^{[0]} + P_{ij}^{[1]} + P_{ij}^{[2]} + P_{ij}^{[3]} = & 0 - 2 \frac{\tau n \theta}{m} \left[ \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right] \\
 & + 2 \frac{n \theta \tau^2}{m} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \nabla^2 \theta \right) - 2 \frac{n \theta^2 \tau^3}{m^2} \left[ 3 \nabla^2 \Lambda_{ij} + \right. \\
 & \left. \frac{2}{3} m \frac{\partial^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla^2 (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right],
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 q_i = q_i^{[0]} + q_i^{[1]} + q_i^{[2]} + q_i^{[3]} = & 0 - k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{7}{2} n \theta^2 \tau^2 \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \right. \\
 & \left. \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \\
 & - 21 \frac{n \theta^2 \tau^3}{m} \frac{\partial \nabla^2 \theta}{\partial x_i}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

### 3.4 La ecuación general de transferencia térmica en régimen de transición

La ecuación general de transferencia térmica, en régimen de transición hasta tercer orden, se obtiene de la ecuación de la conservación de la energía, es decir, de:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \theta = - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \frac{2}{3} P_{ij} \Lambda_{ij}. \tag{3.20}$$

Cuando los flujos, se expresan como (3.18) y (3.19). La ecuación general de transferencia térmica (3.20), es particularmente sencilla en el caso de un gas incomprensible en reposo, en el cual la transferencia de energía se debe totalmente a la conducción térmica. Así, tenemos simplemente

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \xi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} (\nabla^2 T) + \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}. \tag{3.21}$$

Hemos sustituido  $\theta$  por  $kT$  y  $\rho$  por  $nm$ . Donde  $\varepsilon = \frac{5}{2} \frac{kT\tau}{c_\rho m}$  y  $\xi = 21 \frac{(kT)^2 \tau^3}{m^2 c_\rho}$ . También hemos supuesto que las diferencias de temperaturas en el gas son tan pequeñas, tal que los cambios de los coeficientes  $\varepsilon$  y  $\xi$  con respecto a la temperatura son despreciables. Para un gas estacionario, esta se simplifica aun más



$$\xi \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} (\nabla^2 T) + \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = 0. \quad (3.22)$$

Es una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden, por lo cual, necesita de cuatro condiciones de fronteras, en este caso la temperatura evaluada en la frontera y la primera derivada de las mismas [16]. Esta última derivada ha demostrado que tiene un significado físico al parametrizar las interacciones de las moléculas del gas próximas a la fronteras con las moléculas de las paredes sólidas que lo confinan [13, 16]. Para una aplicación de esta ecuación, nos remitiremos a la geometría de la figura 2 que se encuentra en la sección 2.1, en este caso

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{d^2 T}{dz^2} \right) + \omega^2 \frac{d^2 T}{dz^2} = 0. \quad (3.23)$$

Donde,  $\omega^2 = \frac{\varepsilon}{\xi}$ . Haciendo  $Y = \frac{d^2 T}{dz^2}$  lo cual reduce el orden de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 Y}{dz^2} + \omega^2 Y = 0. \quad (3.24)$$

Cuyas soluciones son de la forma  $Y = A \cos(\omega z) + B \sin(\omega z)$ , entonces el campo de temperatura en el gas se expresa como

$$T = a + bz + A \cos(\omega z) + B \sin(\omega z), \quad (3.25)$$

las constantes se determinan usando las condiciones en la frontera:

$$T(z = 0) = T_1, \quad (3.26)$$

$$T(z = L) = T_2, \quad (3.27)$$

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = a_1; \quad \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=L} = a_2 \quad (3.28)$$

de aquí es inmediato que:

$$A = ((La_1\omega + T_1\omega - T_2\omega)\cos(\omega L) + (a_2 - a_1)\text{sen}(\omega L) - La_2\omega - T_1\omega + T_2\omega) \quad (3.29)$$

$$/ (\omega(L\text{sen}(\omega L)\omega - \text{sen}(\omega L)^2 - \cos(\omega L)^2 + 2\cos(\omega L) - 1)),$$

$$B = ((a_1 - a_2)\cos(\omega L) + (La_1\omega + T_1\omega - T_2\omega)\text{sen}(\omega L) - a_1 + a_2) \quad (3.30)$$

$$/ (\omega(L\text{sen}(\omega L)\omega - \text{sen}(\omega L)^2 - \cos(\omega L)^2 + 2\cos(\omega L) - 1))$$

$$a = (-\cos(\omega L)^2 T_1\omega + (-La_1\omega + T_1\omega + T_2\omega)\cos(\omega L) - \text{sen}(\omega L)^2 T_1\omega) \quad (3.31)$$

$$+ (LT_1\omega^2 + a_1 - a_2)\text{sen}(\omega L) + La_2\omega - T_2\omega$$

$$/ (\omega(L\text{sen}(\omega L)\omega - \text{sen}(\omega L)^2 - \cos(\omega L)^2 + 2\cos(\omega L) - 1))$$

$$b = -(\cos(\omega L)^2 a_1 + (-a_1 - a_2)\cos(\omega L) + \text{sen}(\omega L)^2 a_1 + (T_1\omega - T_2\omega)\text{sen}(\omega L) + a_2) \quad (3.32)$$

$$/ (L\text{sen}(\omega L)\omega - \text{sen}(\omega L)^2 - \cos(\omega L)^2 + 2\cos(\omega L) - 1).$$

De esta manera el campo de temperatura del gas diluido en régimen de transición, está especificado por:

$$T = a + bz + A\cos(\omega z) + B\text{sen}(\omega z), \quad (3.33)$$

donde se nota la dependencia de los coeficientes  $a, b, A,$  y  $B$  con

$$\omega = \frac{\varepsilon}{\xi} \approx \frac{0,49}{\lambda}. \quad (3.34)$$

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSION

Usando la ecuación de conservación de la energía (2.61), se obtuvo la ecuación general de transferencia térmica [2], al incluir los efectos disipativos como la conductividad térmica y la viscosidad del gas en régimen de transición hasta tercer orden en el número de Knudsen. Estos efectos se describen mediante la potencia disipada por la fuerza viscosa, es decir, el tensor de tensiones, y el flujo de calor debido a las diferencias de temperatura en el gas. Como las ecuaciones de conservación, son valederas para cualquier solución de ETB [2, 5]. Usamos la formulación del tiempo de relajación (3.1) y el método de Chapman-Enskog (sección 2.6), y se determinó la función de distribución hasta tercer orden, con esta función de distribución se calcularon de forma explícita los flujos de calor y de momentum para un caso general, donde las variables de estado que describen el gas se especifican como  $\mathbf{u}, \rho, T$ , las cuales son de variación lenta con la posición [2]; las ecuaciones (3.18)-(3.19) se determinaron de esta manera.

Para la ecuación de la conducción térmica en el régimen de transición, se calculó el campo de temperatura, el cual quedó determinando por las condiciones de las fronteras (el recorrido libre medio, y el ancho del canal, como lo establecen la sección 2.7). A continuación mostraremos las gráficas de  $T$ , según la ecuación (3.33), para diferentes valores de las condiciones en las fronteras.

En las figuras que mostraremos, la temperatura en las fronteras  $z = 0$  y  $z = L$ , se mantuvieron a 360 K y 365 K respectivamente. En todas las figuras se dejó fijo el ancho  $L = 0,8 \text{ cm}$  entre los planos infinitos. Las demás cantidades se cambiaron como se especifica en cada una de ellas:

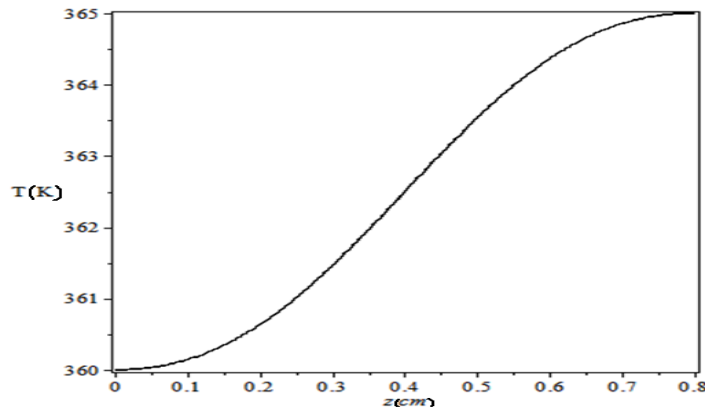


Figura 8. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de  $1 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$  y  $2 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$ . El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 8 \times 10^{-2} \text{ cm}$ , mientras que el ancho del canal  $L = 0,8 \text{ cm}$ .

En la figura 8, los valores de la primera derivada se especificaron como:  $\left. \frac{dy}{dz} \right|_{z=0} = 1 \times 10^{-4} \frac{\text{K}}{\text{cm}}$  y  $\left. \frac{dy}{dz} \right|_{z=L} = 2 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$ ; el recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 8 \times 10^{-2} \text{ cm}$ . En esta grafica se nota  $\frac{1}{4}$  de una oscilación suave en todo el ancho del canal, no obstante, en la ecuación (3.33) establece una superposición de un término lineal con un término oscilante.

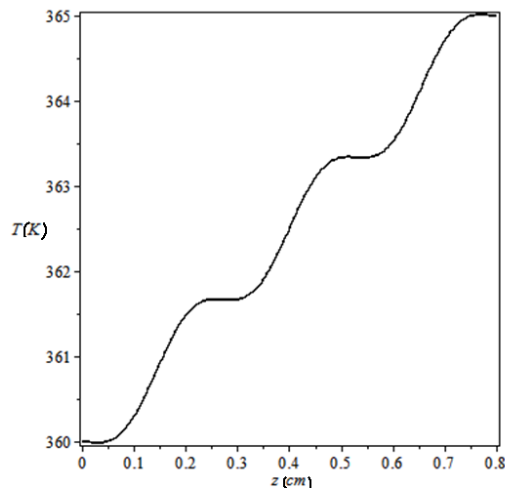


Figura 9. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de  $1 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$  y  $2 \times 10^{-4} \text{ K/cm}$ . El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 2 \times 10^{-2} \text{ cm}$ , mientras que el ancho del canal  $L = 0,8 \text{ cm}$ .

La figura 9 se hizo con  $\lambda = 2 \times 10^{-2} \text{ cm}$  y valor de las primera derivadas igual que en la figura 8. En esta se puede notar un aumento en la frecuencia de oscilaciones con respecto a la figura 8, y una amplitud con respecto a la recta del continuo, como se establece en la ecuación (3.33).

En la figura 10, se cambiaron los valores de las derivadas:  $\frac{dy}{dz}\bigg|_{z=0} = 0,1 \text{ K/cm}$  y  $\frac{dy}{dz}\bigg|_{z=L} = 0,2 \text{ K/cm}$ . Se puede notar que no hubo un cambio apreciable respecto a la figura 8, pero es muy diferente a la figura 9.

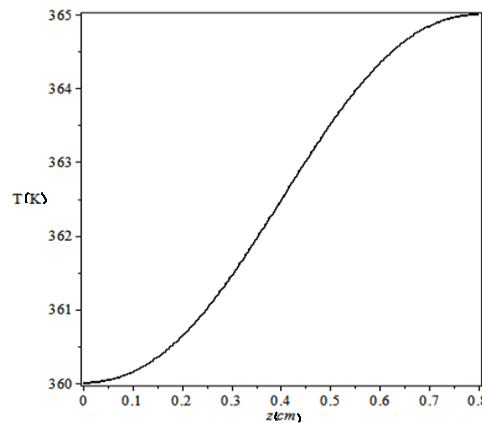


Figura 10. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de 0,1 K/cm y 0,2 K/cm. El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 8 \times 10^{-2} \text{ cm}$ , mientras que el ancho del canal  $L = 0,8 \text{ cm}$ .

En la figura 11, se dejó el mismo valor de las derivadas primeras en las fronteras de la figura 10, pero se cambió  $\lambda = 2 \times 10^{-2} \text{ cm}$ . Se puede notar que el perfil de temperatura no presentó un cambio apreciable respecto al de la figura 9, pero sí con respecto a la figura 10.

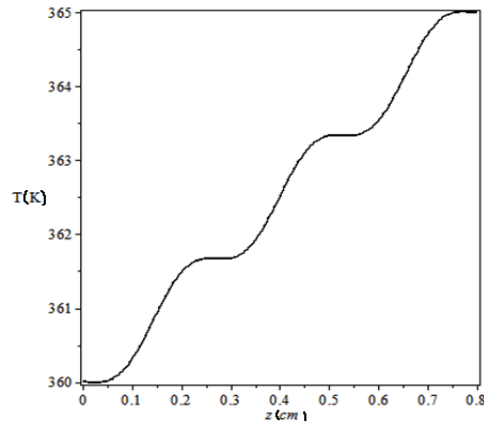


Figura 11. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de 0,1 K/cm y 0,2 K/cm. El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 2 \times 10^{-2}$  cm, mientras que el ancho del canal  $L = 0,8$  cm.

Para la figura 12, se tomó un valor de  $\lambda = 1 \times 10^{-2}$  cm y las primeras derivadas se fijaron igual que en la figura 8. Se puede notar aquí un aumento en la frecuencia de oscilaciones con respecto a la figura 11, pero una disminución en la amplitud con respecto a la recta del continuo.

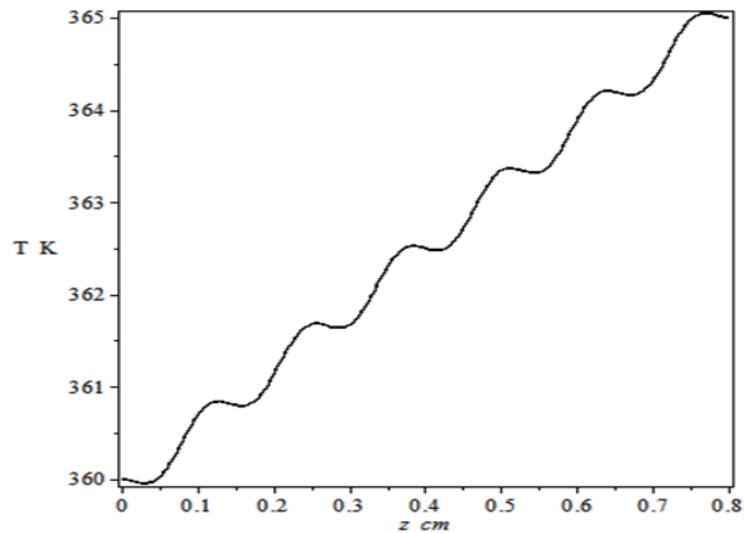


Figura 12. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de  $1 \times 10^{-4}$  K/cm y  $2 \times 10^{-4}$  K/cm. El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 1 \times 10^{-2}$  cm, mientras que el ancho del canal  $L = 0,8$  cm.

En las figuras 13 y 14, se fijaron los valores de las primeras derivadas igual que en la figura 8, pero se cambió el valor del recorrido libre medio  $\lambda = 1 \times 10^{-3}$  cm para la figura 13 y  $\lambda = 1 \times 10^{-5}$  cm para la figura 14.

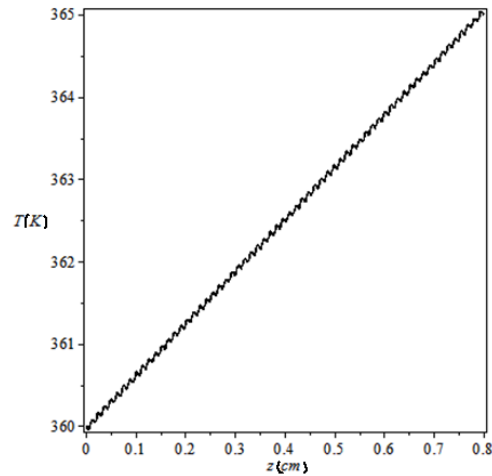


Figura 13. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de  $1 \times 10^{-4}$  K/cm y  $2 \times 10^{-4}$  K/cm. El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 1 \times 10^{-3}$  cm, mientras que el ancho del canal  $L = 0,8$  cm.

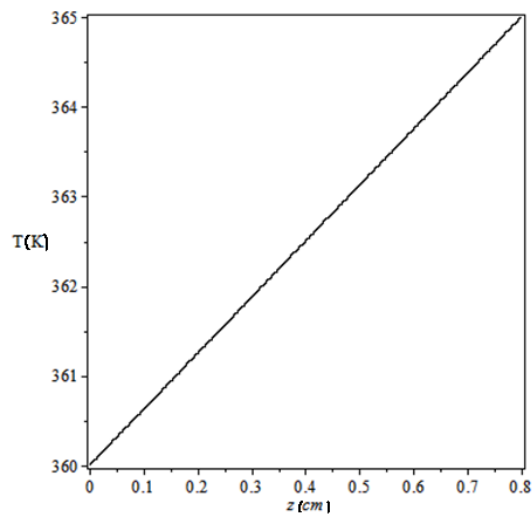


Figura 14. Perfil de temperatura entre dos placas paralelas con temperaturas en las fronteras de 360 K y 365 K, y valores de la primera derivada de  $1 \times 10^{-4}$  K/cm y  $2 \times 10^{-4}$  K/cm. El recorrido libre medio se eligió de  $\lambda = 1 \times 10^{-5}$  cm, mientras que el ancho del canal  $L = 0,8$  cm.

En la figura 13, podemos ver un aumento de la frecuencia de oscilación con respecto a la figura 12, pero una disminución en la amplitud de las oscilaciones. Mientras que en la figura 14, no podemos diferenciar las oscilaciones con respecto a la recta del continuo.

Los resultados dados en los párrafos anteriores pueden ser entendidos por un modelo menos restringido, que el obtenido según la ETB, en el cual se confirman el carácter oscilatorio del campo de temperatura en un gas diluido en régimen transición.

Por lo tanto, para dar una interpretación física e intuitiva de dichas oscilaciones, partiremos que el flujo de calor por conducción térmica se debe al transporte de la energía cinética promedio de las partículas del gas, por efecto de las colisiones. Considerando la figura 2, una partícula que viene de la parte superior de plano  $z$ , experimenta su última colisión en el punto  $z + \lambda$ , antes de llegar al plano  $z$ . Mientras que la partícula que va subiendo sufre la colisión en el punto  $z - \lambda$ , antes de llegar al plano  $z$ . En estas condiciones el flujo neto de la energía cinética promedio viene expresado como

$$q_z = \frac{1}{6} n(z) \langle v(z) \rangle [\epsilon(z - \lambda) - \epsilon(z + \lambda)]. \quad (4.1)$$

Donde  $n(z)$ ,  $\langle v(z) \rangle$  y  $\epsilon(z \pm \lambda)$  son las densidad de partículas, la velocidad promedio y la energía cinética promedio como función de la coordenada  $z$ . En este punto es bueno aclarar que se está admitiendo que el flujo de partículas a lo largo del eje  $z$  es  $\frac{1}{3} n(z) \langle v(z) \rangle$ , es decir, que al escribir  $\frac{1}{6}$  no diferenciamos en el flujo de partículas las que vienen de arriba de las de abajo, la diferencia solo está en la energía cinética expresada como  $\epsilon(z \pm \lambda)$ . Entonces, si requerimos de la estabilidad en el flujo de calor, ésta debe ser garantizada por la diferencia  $\epsilon(z - \lambda) - \epsilon(z + \lambda)$ , y no por el flujo. Si esto es así, entonces la única función que satisface este requisito es  $T = C + Dz + A \cos(\omega z) + B \sin(\omega z)$ , con la condición de que sea una función periódica de  $2\lambda$ . Ahora  $\omega = \frac{\pi}{\lambda}$ , mientras que haciendo el desarrollo de Taylor del promedio de la energía cinética, hasta tercer orden en el recorrido libre medio, y admitiendo que el calor específico no depende de la temperatura  $T$ ; se tiene bajo este supuesto:

$$q_z = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \left( -2\lambda \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial z} \right) - \frac{1}{6} n \langle v \rangle \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^3 \bar{\epsilon}}{\partial z^3} \lambda^3 \right) = -\xi \frac{\partial T}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial^3 T}{\partial z^3}, \quad (4.2)$$

pero esta vez



$$\varepsilon = \frac{1}{3}n\langle v \rangle C\lambda \quad (4.3)$$

y

$$\xi = \frac{1}{18}n\langle v \rangle C\lambda^3. \quad (4.4)$$

En otras palabras, la ecuación obtenida para el flujo de calor en este modelo semi\_instintivo, es idéntica a la obtenida usando ETB, bajo los supuestos de variación lenta de los coeficientes de transporte con la temperatura. En el modelo expuesto arriba, los supuestos entran al admitir que los flujos de moléculas calientes y frías no se diferencian, y también, al admitir que el calor específico no depende de la temperatura. Todos estos supuesto son equivalentes al enunciado de lo próximo al equilibrio y a los criterios de linealización usados en los cálculos (vea el apéndice). Así que la ecuación a resolver es de nuevo:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{d^2 T}{dz^2} \right) + \omega^2 \frac{d^2 T}{dz^2} = 0, \quad (4.5)$$

es decir, que la solución es también

$$T = C + Dz + A\cos(\omega z) + B\sin(\omega z). \quad (4.6)$$

Salvo ahora que  $\omega = \frac{\varepsilon}{\xi} \approx \frac{\sqrt{6}}{\lambda}$ . Hemos mostrado, que a partir de la diferencia para la energía promedio expresada como  $\varepsilon(z - \lambda) - \varepsilon(z + \lambda)$  y luego haciendo un desarrollo en serie de Taylor hasta tercer orden en  $\lambda$ , para la energía cinética, se logra explicar el carácter oscilante del campo de temperatura en régimen de transición, al admitir valores diferentes de  $\frac{T_2 - T_1}{L}$  para las derivadas normales de la temperatura en las fronteras.

Ahora bien, cuando  $T$  es lineal en  $z$ , es decir  $A = B = 0$ , entonces tenemos  $T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}z$  y  $q = -\varepsilon \frac{\Delta T}{L}$ , es decir, una vez especificadas  $T_1$  y  $T_2$  el único valor permisible

para las derivadas es  $a_1 = a_2 = \frac{T_2 - T_1}{L}$ . Por otra parte, la necesidad de ir más allá de la aproximación lineal para  $T(z)$  debida a la dependencia en  $\lambda$ , se presenta al considerar las propiedades físico Químicas del gas y de las fronteras en una región que tiene un espesor de varios recorridos libres medio conocida como: “boundary layers”. En estas condiciones son permisibles valores de  $a_1 \neq \frac{T_2 - T_1}{L}$  y  $a_2 \neq \frac{T_2 - T_1}{L}$ , las cuales admitimos que parametrizan estos efectos. Las figuras (8-14) ilustran muy bien lo antes expuesto.

## CONCLUSIONES

Hemos encontrado el campo de temperatura de un gas en reposo y diluido en régimen de transición, obtenido mediante la ecuación (3.23), con dos modelos muy simplificados que exponen con mucha claridad el fenómeno físico y la validez de las aproximaciones en los cálculos. En los dos casos se admitió una geometría muy sencilla; dos planos infinitos paralelos separados una distancia  $L$ , y el eje  $z$  normal a los planos. Las dos formas de obtener la dependencia oscilante de la temperatura, son consistente con el supuesto  $\left| \frac{T_3 - T_1}{L} \right| \ll 1$ , es decir, que las diferencias de temperatura en el fluido son muy pequeñas; en el método formal, es decir, el de ETB, esto garantiza todo el procedimiento de linealización para obtener la función de distribución hasta tercer orden en el número de Knudsen y luego la ecuación constitutiva para el flujo de calor, y así obtener la solución especificada por la ecuación(3.33). Mientras que en los dos modelo menos formales, la condición  $\left| \frac{T_3 - T_1}{L} \right| \ll 1$  garantizan que  $n(z)$ ,  $\langle v(z) \rangle$  y  $\lambda = 1/\sqrt{2}\sigma n$  casi no cambien con  $T$ . Las soluciones obtenidas para esto dos modelos es idéntica a la obtenida formalmente, donde  $\omega = 0,49/\lambda$ , mientras que en los menos formales  $\omega = \pi/\lambda$  y  $\omega = \sqrt{6}/\lambda$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Kittel, C. 1987. *Física Térmica*. Editorial Reverte, Barcelona.
- [2] Huang, K. 1987. *Statistical Mechanics*. Jhon Wiley y Sons, Inc. Canada.
- [3] Maxwell, J. C. 1860. Enero-julio Philos. Mag.
- [4] Sommerfeld, A. 1955. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Academic Press, Nueva York.
- [5] Bird, G. A. 1998. *Molecular Gas Dynamics and The Direct Simulation of Gas Flows*. Clarendon Press. Oxford.
- [6] Moronta, D y García Sucre, M. 1978. Phys. Rev. 2A 18: 756-765.
- [7] García Sucre, M y Moronta, D. 1982. Phys. Rev. 3A 26: 1713-1727.
- [8] García Sucre, M y Mata, G. J. 1986. Phys. Rev. 2A 34: 1591-1594.
- [9] García Sucre, M, Araque Lamedada, L. A, Urbina Villalba, G y Parra, R. 1995. Non monotonic dependence of transport coefficients of gases on pressure and external thermal gradient in transition régime. Proc. Of Third Caribbean Congress Fluid Dynamics and Third Latin Symposium on Fluid Mechanics, Caracas. Venezuela, Vol. 1. Section G, pp. 1-8.
- [10] García Sucre, M, Araque Lamedada, L. A, Parra, R, y Urbina Villalba, G. 1995. Ciencias, 2: 109-116.
- [11] García Sucre, M, Urbina Villalba, G, Araque Lamedada, L y Parra, R. 1996. Ciencias, 4: 313-321.
- [12] García Sucre, M, Urbina Villalba, G, Araque Lamedada, L y Parra, R. 1997. Ciencias, 5: 51-55.
- [13] Urbina Villalba, G, García Sucre, M, Araque Lamedada, L y Parra, R. 1977. *External Thermal Gradient Dependence of the Shear Viscosity of Helium in the transition Regimen*, Langmuir, 21: 5739-5739.
- [14] Araque Lamedada, L. A. 1994. Viscosidad efectiva de un gas en régimen de transición sometido a gradientes simultáneos de velocidad y temperatura. Tesis Doctoral, Universidad Central de Venezuela. Caracas.
- [15] Urbaneja, C. E. 2001, Viscosidad de un gas diluido en régimen de transición en la

- modalidad flujo de Poisseuille. Trabajo de Grado, Universidad de Oriente, Cumaná.
- [16] Araque Lamedo, L. A. 2005. La fuerza térmica con un campo de temperatura en régimen de transición. trabajo para ascender a la categoría de Profesor Asociado. Departamento de Física, Universidad de Oriente, Cumaná.
- [17] Machado Acuña, J. L. 2006. Flujo que pasa sobre una partícula esférica en régimen de transición. Trabajo de Grado. Universidad de Oriente. Cumana.
- [18] Bastardo González A. C. 20018. Magnetoforeis de una nano partícula magnética en un gas diluido en régimen de transición. Trabajo de Grado. Universidad de Oriente. Cumana.
- [19] Cercignani, C. 2005. *Flow Rarefied Flows. Theory and Application to Micro-Electro-Mechanical System*. Birkhäuser Verlag.
- [20] Cercignani, C. 1990. *Mathematical Methods in Kinetics Theory*, Plenum Press, New York.
- [21] Karniadakis, G. Beskok, A y Aluru, N. 2004. *Microflowsand Nanoflows Fundamentals and Simulation*, Springer, USA.
- [22] Uribe, F. J y Garcí Alejandro L. 1999. Burnett description for plane Poiseulle flow. Phys. Rev. E **60**, 4063.
- [23] García, A. L. 1999. *Numerical Metods for Physics*. Prentice Hall, Englwood, Cliff, N. J.
- [24] Chapman, S. y Cowling, T. G. 1970 *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. Oxford University Press.
- [25] Uribe, F. J, Velasco R. M y García Colin, L. S. 1998. *Burnett description of Strong Shock Waves*. Phys Rev. Lett.81, 2044.
- [26] Cercignani, C, Lampis, Mand Lorenzani, S. 2004. Variational approach to gas flows in microchannels, Phys. Fluid, 14: 3426-3437.
- [27] Nie, X, Doolen, C. DandChen, S. 2002. Lattice Boltzmann simulation of fluid flows in MEMS, J. Stat. Phys. , 107: 276-280.
- [28] Shen, C, Tian, D. B, Xie, Cand Fan, J. 2003. Examination of LBM in simulationo the micro-channel flow in transitional regime, Procc. Of the 1st Intern. Conference

of micro and mini-channels, AEME: 405-410 (2003).

- [29] Landau, L. D. y Lifshitz E. M, 1991. *Mecánica de Fluidos* Editorial Reverté. S. A.
- [30] Reif, F, 1965. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw Hill, New York.
- [31] Chapman, S. y Cowling, T.G. 1970 *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. An Account of the Kinetic Conduction Theory of Viscosity, Thermal and Diffusion Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [32] Grad, H. 1949. Note on n-dimensional Hermite polinomial. *Communs ,Pure and appl. Math.* 2: 325 -407.
- [33] Sone, Y. 1969. *In Rarefied Gas Dynamics*, editado por Trilling, L y Wachman, Academic, New York.Vol.1.
- [34] Sone, Y. 1971. *In Rarefied Gas Dynamics*, editado por Dini, D, Tecnico Scientifica, Pisa. Vol.2.

## APÉNDICES

### Apéndice A

#### A.1. Colisiones binarias y la conservación de la energía e impulso.

Sean  $m_1$  y  $m_2$ , las masas de las moléculas;  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ , los impulsos,  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  las energías en el estado inicial;  $\epsilon_i = \frac{P_i^2}{2m_i}$ . El estado final se indica con primas.

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}'_1 + \mathbf{P}'_2, \quad (\text{A-1})$$

$$E = \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon'_1 + \epsilon'_2. \quad (\text{A-2})$$

$E$  es la energía total;  $M$  la masa total,  $\mu$  la masa reducida:

$$M = m_1 + m_2, \quad (\text{A-3})$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (\text{A-4})$$

$\mathbf{P}$  el impulso total ; y  $\mathbf{P}_r$  el impulso relativo:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \quad (\text{A-5})$$

$\mathbf{P} \equiv \frac{m_2 \mathbf{P}_1 - m_1 \mathbf{P}_2}{m_1 + m_2} = \mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ ;  $v_i = \frac{P_i}{m_i}$  es la velocidad.

$$\mathbf{P}_1 = \frac{m_1}{M} \mathbf{P} - \mathbf{P}_r, \quad (\text{A-6})$$

$$\mathbf{P}_2 = \frac{m_2}{M} \mathbf{P} - \mathbf{P}_r. \quad (\text{A-7})$$

La energía total

$$E = \frac{P^2}{2M} + \frac{P_r^2}{2\mu}, \quad (\text{A-8})$$

la conservación de las cantidades se ilustra en la figura 15.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' \quad (\text{A-9})$$

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{P}'| \quad (\text{A-10})$$

### A.2. Ángulos de dispersión $\theta$ ; $\phi$ .

$\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{P}'$ .

$\phi$ . El ángulo azimutal de  $\mathbf{P}'$  alrededor de  $\mathbf{P}$ .

$\Omega$ , el ángulo sólido alrededor de  $\mathbf{P}'$ .

La cinemática de la colisión se representa geoméricamente en la Figura A1.

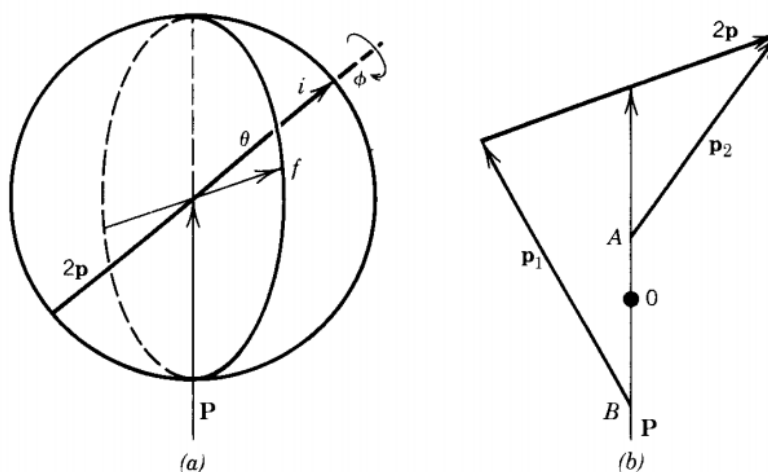


Figura A1. Representación la geometría de la cinemática de una colisión binaria. (a) El impulso total  $\mathbf{P}$  no ha cambiado (conservación del impulso). El impulso relativo se gira desde la dirección inicial  $i$  a la dirección final  $f$ , sin cambios en la magnitud (conservación de la energía). El ángulo de dispersión son los ángulos  $\theta$ ,  $\phi$  de  $f$  en relación con  $i$ . (b) El momento individual de los socios de colisión  $P_1$  y  $P_2$  se puede construir a partir de  $\mathbf{P}$  y  $2\mathbf{P}$ , como se muestra. Los puntos A y B coincidirán a O, el punto medio de  $\mathbf{P}$ , las moléculas de colisión tienen la misma masa.

### A.3. Sección transversal de colisión.

Definición

Experimentalmente se define considerando un haz de partículas incidentes, de clase 2, sobre una partícula, de clase 1, la que actúa como blanco.

Sea

$$I = n|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \quad (\text{A-11})$$

el flujo incidente.



$I \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \equiv$  Número de moléculas incidentes dispersas por segundo en el elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  alrededor de  $\Omega$ .

$\sigma_T = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv$  Número total de partículas dispersadas por segundo, en todas las direcciones.

#### A.4. El parámetro de impacto $b$ .

$Ib db d\phi \equiv$  Número de partículas incidentes, por unidad de tiempo, para la dispersión.

$I \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \equiv$  Número de partículas dispersadas por segundo dentro del elemento de ángulo sólido  $d\Omega$ , alrededor de  $\Omega$ , como se ilustra en la figura 16.

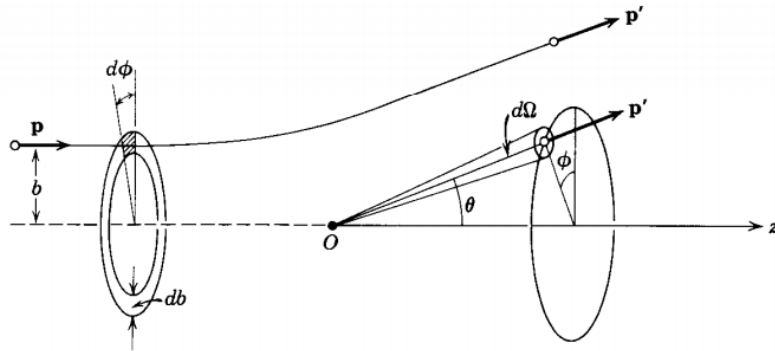


Figura A2. Dispersión clásica de una molécula por un centro fijo de fuerza  $O$ .

De la geometría está claro que

$$Ib db d\phi = I \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega. \quad (\text{A-12})$$

#### A.5. Invarianza de $I d\sigma$ .

La ecuación de Newton :  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \mathbf{F}$ , no cambia cuando  $t \leftrightarrow -t$ .

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1) \leftrightarrow (\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) \quad (\text{A-13})$$

$$I d\sigma = [I d\sigma]'. \quad (\text{A-14})$$

Esta simetría se muestra mediante el esquema de abajo, hasta obtener la colisión inversa.

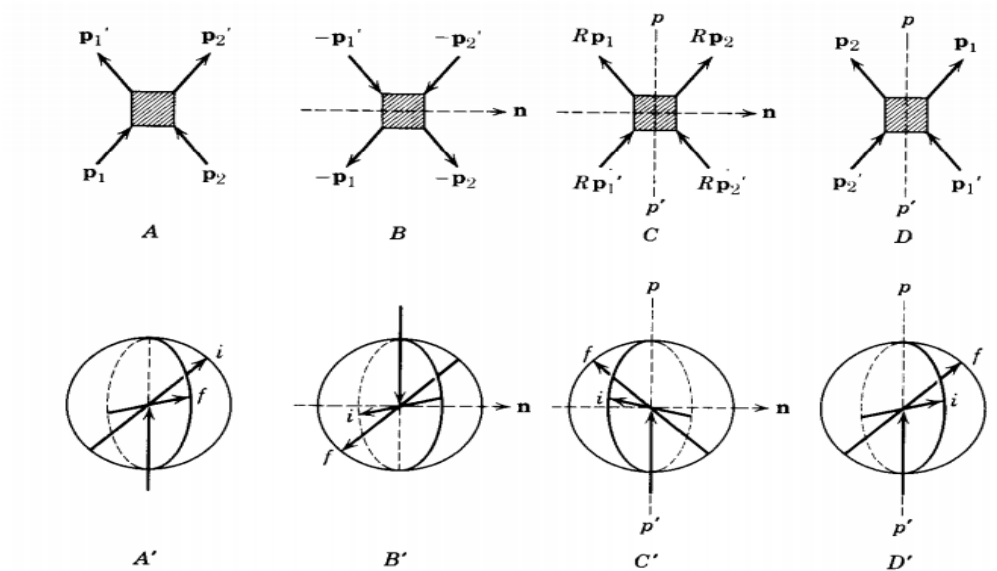


Figura A3. Operaciones de simetría que llevan una colisión a la colisión inversa. En  $A', B', C'$  y  $D'$ ,  $i$  y  $f$ , denotan momentos relativos inicial y final respectivamente.

## Apéndice B

### B.1. Las leyes de conservación.

Teorema

$$\int d^3v X(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \left[ \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} \right]_{\text{colisión}} = 0. \quad (\text{B-1})$$

donde  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{colisión}}$  es el lado derecho de (2.32).

Prueba.

Sea  $X(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  una cantidad que se conserva en una colisión binaria, es decir,

$$X_1 + X_2 = X'_1 + X'_2. \quad (\text{B-2})$$

Usando la definición de  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{colisión}}$ , obtendremos la ecuación que rige el transporte de esta cantidad  $X(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , es decir

$$\int d^3v X \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{colisión}} = \int d^3v_1 d^3v_2 d^3v'_1 d^3v'_2 \delta^4(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i) I d\sigma (f'_1 f'_2 - f_1 f_2). \quad (\text{B-3})$$

Usando las propiedades de  $I d\sigma$  utilizada en la sección 2.3, y haciendo cada uno de los siguientes intercambios de variables de integración.

$$\text{Primero: } \mathbf{p}_1 \rightleftharpoons \mathbf{p}_2,$$

$$\text{Siguiente: } \mathbf{p}_1 \rightleftharpoons \mathbf{p}'_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 \rightleftharpoons \mathbf{p}'_2,$$

$$\text{Siguiente: } \mathbf{p}_1 \rightleftharpoons \mathbf{p}'_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 \rightleftharpoons \mathbf{p}'_1.$$

Obtenemos una forma diferente para la misma integral. Sumando estas tres nuevas fórmulas así obtenidas, a la ecuación (B-3) y dividiendo el resultado entre 4, obtenemos la relación:

$$\int d^3v X \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{colisión}} = \frac{1}{4} \int d^3v_1 d^3v_2 d^3v'_1 d^3v'_2 I d\sigma \quad (\text{B})$$

$$(f'_1 f'_2 - f_1 f_2)(X_1 + X_2 - X'_1 - X'_2) = 0. \quad -4)$$

El teorema de conservación, relevante para la ecuación de transporte de Boltzmann, se obtiene multiplicando la ecuación de transporte de Boltzmann en ambos lados por  $X$  y luego integrando sobre  $\mathbf{v}$ . El término de colisión se anula, ya que  $X$  es una cantidad que se conserva (Vea la ecuación (2.32)) Según esto:

$$\int d^3P X(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{m} \circ \nabla_r + \mathbf{F} \circ \nabla_v \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0, \quad (\text{B})$$

$$-5)$$

podemos reescribir esta expresión en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3v X f + \frac{\partial}{\partial x_i} \int d^3v X \frac{v_i}{m} f - \int d^3v \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{p_i}{m} f + \int d^3v \frac{\partial}{\partial v_i} (X F_i f)$$

$$- \int d^3v \frac{\partial X}{\partial P_i} F_i f - \int d^3v X \frac{\partial F_i}{\partial P_i} f = 0. \quad (\text{B})$$

$$-6)$$

El cuarto término se anula si se admite que  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  tiende a cero cuando  $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$ . Este teorema de conservación es útil en la hidrodinámica, donde la velocidad  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{P}}{m}$  en lugar del impulso  $\mathbf{P}$  es una cantidad directamente medible. En consecuencia, expresaremos

$\mathbf{P}$  en términos de  $\mathbf{v}$ , donde sea conveniente. Además usaremos, la definición del valor promedio  $\langle X \rangle$ :

$$\langle X \rangle = \frac{\int d^3P X f}{\int d^3P f} = \frac{1}{n} \int d^3P X f, \quad (\text{B-7})$$

donde

$$n(\mathbf{r}, t) = \int d^3P f(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t), \quad (\text{B-8})$$

así obtenemos finalmente, el teorema deseado:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle nX \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle n v_i X \rangle - n \left\langle v_i \frac{\partial X}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle F_i \frac{\partial X}{\partial v_i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle \frac{\partial F_i}{\partial v_i} X \right\rangle = 0 \quad (\text{B-9})$$

## Apéndice C

### C.1. Función de distribución y ecuaciones del movimiento.

El flujo de calor (2.65) y el tensor de presión (2.66) en el orden cero están dados por

$$q_i^{[0]} = \frac{1}{2} m^2 \int d^3U U_i U^2 f^{[0]}. \quad (\text{C-1})$$

$$P_{ji}^{[0]} = m \int d^3U U_i U_j f^{[0]}, \quad (\text{C-2})$$

donde

$$f^{[0]} = \frac{n}{(2\pi m\theta)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{m}{2\theta} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 \right], \quad (\text{C-3})$$

el flujo de calor es

$$q_i^{[0]} = \frac{1}{2} m^2 C(r) \int d^3U U_i U^2 e^{-A(r)U^2} = 0. \quad (\text{C-4})$$

El cual  $C(r) = n \left( \frac{m}{2\pi\theta} \right)^{\frac{3}{2}}$  y  $A(r) = \frac{m}{2\theta}$ . Esta integral es cero debido a que el integrando es una función impar. Para

$$P_{ij}^{[0]} = m C(r) \int d^3U U_i U_j e^{-A(r)U^2} = \delta_{ij} P. \quad (\text{C-5})$$

Es decir, la integral será diferente de cero solo para los elementos principales de la matriz de  $P_{ij}^{[0]}$ , los cuales tienen el mismo valor, y viene dado por

$$P = \frac{1}{3} \rho \left( \frac{m}{2\pi\theta} \right)^{3/2} \int d^3U U^2 e^{-A(r)U^2} = n\theta, \quad (\text{C-6})$$

la cual es la presión hidrostática local. Sustituyendo las ecuaciones (C-4)-(C-5) en (2.60)-(2.61)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{Ecuación de continuidad}) \quad (\text{C-7})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P = \frac{\mathbf{F}}{m}, \quad (\text{Ecuación de Euler}) \quad (\text{C-8})$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \theta + \frac{1}{c_V} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \theta = 0, \quad (\text{C-9})$$

donde

$$\frac{\partial P_{ij}^{[0]}}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i}, \quad (\text{C-10})$$

$$P_{ij}^{[0]} \Lambda_{ij} = P \sum_{i=1}^3 \Lambda_{ii} = mP \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (\text{C-11})$$

$$c_V = \frac{3}{2}. \quad (\text{C-12})$$

Para calcular  $f^{[1]}$ , hay que tener en cuenta que  $f^{[0]}$  depende de  $\mathbf{r}$  solo a través de las funciones  $\rho, \theta$  y  $\mathbf{u}$  por lo tanto, necesitamos las derivadas

$$\frac{\partial f^{[0]}}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{3}{2} \right) f^{[0]}, \quad (\text{C-13})$$

$$\frac{\partial f^{[0]}}{\partial v_i} = -\frac{m}{\theta} U_i f^{[0]}, \quad (\text{C-14})$$

$$\frac{\partial f^{[0]}}{\partial \rho} = \frac{f^{[0]}}{\rho}, \quad (\text{C-15})$$

$$\frac{\partial f^{[0]}}{\partial u_i} = \frac{m}{\theta} U_i f^{[0]}, \quad (\text{C-16})$$

podemos escribir  $f^{[1]}$  como

$$f^{[1]} \approx -\tau U_i \frac{\partial f^{[0]}}{\partial x_i} = -\tau f^{[0]} \left[ \frac{1}{\rho} D(\rho) + \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{3}{2} \right) D(\theta) + \frac{m}{\theta} U_j D(u_j) \right], \quad (\text{C-17})$$

donde

$$D(X) \equiv \left( U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) X. \quad (\text{C-18})$$

Usando las ecuaciones hidrodinámicas de orden cero (C-7)-(C-8)-(C-9), podemos demostrar que

$$D(\rho) = -\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + U_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad (\text{C-19})$$

$$D(\theta) = -\frac{2}{3} \theta \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + U_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad (\text{C-20})$$

$$D(u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} + U_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad (\text{C-21})$$

sustituyendo estas relaciones en (C-17), obtenemos:

$$\begin{aligned} f^{[1]} \approx & -\tau f^{[0]} \left[ -\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{U} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right. \\ & + \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{3}{2} \right) \left( -\frac{2}{3} \theta \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{U} \cdot \nabla \theta \right) \\ & \left. + \frac{m}{\theta} \left( -\mathbf{U} \cdot \frac{\nabla P}{\rho} + U_i U_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{C-22})$$

con  $P = \frac{\rho \theta}{m}$  y después de alguna reordenación y cancelación de términos, se convierte en:

$$f^{[1]} = -\tau f^{[0]} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{1}{\theta} \Lambda_{ij} \left( U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} U^2 \right) \right], \quad (\text{C-23})$$

$\Lambda_{ij}$ , está definido por (2.67). El flujo de calor (2.60) y el tensor de tension (2.61) en el orden uno

$$q_i^{[1]} = \frac{1}{2} m^2 \int d^3U U_i U^2 f^{[1]}, \quad (\text{C-24})$$

$$P_{ij}^{[1]} = m \int d^3U U_i U_j f^{[1]}, \quad (\text{C-25})$$

donde el flujo de calor toma la forma

$$q_i^{[1]} = -\frac{1}{2} \frac{m^2 \tau}{\theta} \int d^3U U_i^2 U^2 \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) f^{[0]} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}. \quad (\text{C-26})$$

El segundo término de (C-23) no contribuye a esta integral. Podemos escribir esta relación de la forma

$$q_i^{[1]} = -K \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad (\text{C-27})$$

donde

$$K = \frac{1}{6} \frac{m^2 \tau}{\theta} \int d^3U U U^4 \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) f^{[0]} = \frac{5}{2} \tau \theta n, \quad (\text{C-28})$$

el valor de esta integral viene dado en el apéndice D

$$\begin{aligned} P_{ij}^{[1]} &= m \int d^3U U_i U_j f^{[1]} \\ &= -\frac{m\tau}{\theta} \int d^3U U_i U_j \Lambda_{hz} \left( U_h U_z - \frac{1}{3} \delta_{hz} U^2 \right) f^{[0]}, \end{aligned} \quad (\text{C-29})$$

la integral viene dada en el apéndice D. El resultado final es

$$P_{ij}^{[1]} = -2 \frac{\mu}{m} \left( \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \quad (\text{C-30})$$

donde

$$\mu = n\theta\tau, \quad (\text{C-31})$$

sustituyendo (C-27)-(C-30) en las ecuaciones de conservación (2.60)-(2.61)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{C-32})$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nabla P = \frac{\rho}{m} \mathbf{F} + 2 \frac{\mu}{m} \left( \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} m \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_j} \right), \quad (\text{C-33})$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \theta = \frac{2}{3} K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{m} \left( \Lambda_{ij} \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right) \quad (\text{C-34})$$

y observando que

$$\frac{\partial P_{ij}^{[1]}}{\partial x_i} = -2 \frac{\mu}{m} \left( \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} m \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{m} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \left( \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right), \quad (\text{C-35})$$

$$P_{ij}^{[1]} \Lambda_{ij} = -2 \frac{\mu}{m} \left( \Lambda_{ij} \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right), \quad (\text{C-36})$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = - \frac{\partial K}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (\text{C-37})$$

Donde hemos despreciados en la ecuaciones (C-35)-(C-37) los términos que contienen el producto de las derivada de las funciones que describen el estado del gas con los coeficiente de conductividad y viscosidad del gas, ya que son de variación lenta. Las ecuaciones (C-32)-(C-33)-(C-34) son las ecuaciones Navier-Stokes para un gas viscoso. Debemos linealizar la función de corrección de orden dos

$$f^{[2]} \approx \tau U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \tau f^{[0]} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \frac{1}{\theta} \Lambda_{kl} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right\} \quad (\text{C-38})$$

desarrollando la derivada



$$\begin{aligned}
f^{[2]} \approx & \tau U_i \left\{ \frac{\partial \tau}{\partial x_i} f^{[0]} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \frac{1}{\theta} \Lambda_{kl} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right. \\
& + \tau \frac{\partial f^{[0]}}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{\theta} \Lambda_{kl} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right. \\
& + \tau f^{[0]} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{\theta} \Lambda_{kl} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{C-39}$$

Donde hemos ignoramos los dos primeros términos porque contienen productos de las funciones que describen el estado del gas y también con la variación del tiempo de relajación.

$$\begin{aligned}
f^{[2]} \approx & \tau^2 U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{\theta} \Lambda_{kl} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right\} f^{[0]}
\end{aligned} \tag{C-40}$$

desarrollando nuevamente la derivada

$$\begin{aligned}
f^{[2]} \approx & \tau^2 U_i \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{\theta} \right\} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right. \\
& + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) \right\} U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \{ U_j \} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{\theta} \right\} \Lambda_{kl} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \\
& + \frac{1}{\theta} \Lambda_{kl} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \\
& \left. + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] f^{[0]}.
\end{aligned} \tag{C-41}$$

Donde ignoramos todos los pequeños, nos queda la aproximación

$$\begin{aligned}
f^{[2]} \approx & \tau^2 U_i \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] f^{[0]},
\end{aligned} \tag{C-42}$$

el tensor de tension y el flujo de calor, en el orden dos

$$q_i^{[2]} = \frac{1}{2} m^2 \int d^3 U U_l U^2 f^{[2]}, \tag{C-43}$$

$$P_{ij}^{[2]} = m \int d^3 U U_i U_j f^{[2]}, \tag{C-44}$$

donde el flujo de calor

$$q_i^{[2]} = \frac{1}{2} \frac{m^2 \tau^2}{\theta} \int d^3 U U_l U_i \frac{\partial \Lambda_{kh}}{\partial x_i} \left( U_k U_h - \frac{1}{3} \delta_{kh} U^2 \right) U^2 f^{[0]}. \tag{C-45}$$

El segundo término (C-42) solo contribuye a la integral. Esta integral viene dada en el apéndice D. El resultado final es

$$q_i^{[2]} = 7 \frac{n\theta^2\tau^2}{m} \left( \frac{\partial\Lambda_{ij}}{\partial x_j} + \frac{m}{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_l} \right), \quad (\text{C-46})$$

el tensor de tensiones, hasta segundo orden está dado por.

$$P_{ij}^{[2]} = \frac{m\tau^2}{\theta} \int d^3U U_i U_j U_l U_k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_l \partial x_k} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) f^{[0]}. \quad (\text{C-47})$$

Donde el primer término solo contribuye a la integral. La integral viene dada en el apéndice D. El resultado final es

$$P_{ij}^{[2]} = 2 \frac{n\theta\tau^2}{m} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \nabla^2 \theta \right). \quad (\text{C-48})$$

Las ecuaciones de conservación hasta este orden se obtienen sustituyendo (C-46)-(C-48) en las ecuaciones (2.60)-(2.61)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{C-49})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nabla P \\ = \frac{\rho}{m} \mathbf{F} + 2 \frac{\mu}{m} \left( \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} m \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) - 3 \frac{n\theta\tau^2}{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{C-50})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) = \frac{2}{3} K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{7n\theta^2\tau^2}{3m} \left( \frac{1}{3} m \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_l \partial x_l} + 2 \frac{\partial^2 \Lambda_{il}}{\partial x_i \partial x_l} \right) \\ + \frac{4}{3} \frac{\mu}{m} \left( \Lambda_{ij} \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{C-51})$$

$$- \frac{4n\theta\tau^2}{3m} \left( \Lambda_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{m}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla^2 \theta \right).$$

Donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_l^{[2]}}{\partial x_l} = \frac{7}{2} \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_l} \{ n\theta^2\tau^2 \} \left( \frac{1}{3} m \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_l} + 2 \frac{\partial \Lambda_{il}}{\partial x_i} \right) \\ + \frac{7n\theta^2\tau^2}{2m} \left( \frac{1}{3} m \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_l \partial x_l} + 2 \frac{\partial^2 \Lambda_{il}}{\partial x_i \partial x_l} \right), \end{aligned} \quad (\text{C-52})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}^{[2]}}{\partial x_i} &= \frac{2}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \{n\theta\tau^2\} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \nabla^2 \theta \right) \\ &+ 2 \frac{n\theta\tau^2}{m} \left( \frac{\partial^3 \theta}{\partial x_i \partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla^2 \theta \right), \end{aligned} \quad (\text{C-53})$$

$$\Lambda_{ij} P_{ij}^{[2]} = 2 \frac{n\theta\tau^2}{m} \left( \Lambda_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{m}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla^2 \theta \right). \quad (\text{C-54})$$

Hemos ignorado los términos relacionado con el producto de la derivadas de las funciones que describen el estado del gas y el tiempo de relajación. Las ecuaciones (C-49)-(C-50)-(C-51) son las ecuaciones de Burnett. Debemos linealizar la función de corrección de tercer orden

$$\begin{aligned} f^{[3]} \approx & -\tau U_h \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \tau^2 U_i \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] f^{[0]} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C-55})$$

al desarrollar la derivada

$$\begin{aligned}
f^{[3]} \approx & -\tau U_h \left\{ \frac{\partial \tau^2}{\partial x_h} U_i \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] f^{[0]} \\
& + \tau^2 \frac{\partial U_i}{\partial x_h} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
& + \left. \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] f^{[0]} \\
& + \tau^2 U_i \frac{\partial f^{[0]}}{\partial x_h} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
& + \left. \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \\
& + \tau^2 U_i f^{[0]} \frac{\partial}{\partial x_h} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{C-56}$$

donde podemos ignorar los primeros términos

$$\begin{aligned}
f^{[3]} \approx & -\tau^3 U_i U_h f^{[0]} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_h} \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{C-57}$$

desarrollando nuevamente la derivada

$$\begin{aligned}
f^{[3]} \approx & -\tau^3 U_i U_h f^{[0]} \left[ \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \frac{1}{\theta} \right\} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
& + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) \right\} U_j \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \\
& + \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_h} \{ U_j \} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} \\
& + \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_j \frac{\partial^3 \theta}{\partial x_h \partial x_i \partial x_j} \\
& + \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \frac{1}{\theta} \right\} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \\
& + \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \Lambda_{kl}}{\partial x_h \partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \\
& \left. + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Lambda_{kl}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right\} \right]. \tag{C-58}
\end{aligned}$$

Ignorando los términos pequeños

$$\begin{aligned}
f^{[3]} \approx & -\tau^3 \left[ \frac{1}{\theta} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U_h U_i U_j \frac{\partial^3 \theta}{\partial x_h \partial x_i \partial x_j} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\theta} U_h U_i \frac{\partial^2 \Lambda_{kl}}{\partial x_h \partial x_i} \left( U_k U_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} U^2 \right) \right] f^{[0]}. \tag{C-59}
\end{aligned}$$

La corrección del flujo de calor y del tensor de presión en este orden se puede determinar, así

$$q_l^{[3]} = \frac{1}{2} m^2 \int d^3 U U U_l U^2 f^{[3]} \tag{C-60}$$

$$P_{ij}^{[3]} = m \int d^3 U U U_i U_j f^{[3]} \tag{C-61}$$

es decir:

$$q_l^{[3]} = -\frac{m^2 \tau^3}{2\theta} \int d^3 U \frac{\partial^3 \theta}{\partial x_m \partial x_i \partial x_k} U_l U_m U_i U_k \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U^2 f^{[0]}. \tag{C-62}$$

Donde el primer término (C-58) solo contribuye a la integral. Esta integral viene dada en el apéndice D. Es resultado final es

$$q_l^{[3]} = -21 \frac{n\theta^2\tau^3}{m} \frac{\partial}{\partial x_l} \nabla^2 \theta, \quad (\text{C-63})$$

la corrección a tercer orden del tensor de tensiones es:

$$P_{ij}^{[3]} = -\frac{m\tau^3}{\theta} \int d^3U U_i U_j U_m U_k \frac{\partial^2 \Lambda_{hz}}{\partial x_m \partial x_k} \left( U_h U_z - \frac{1}{3} \delta_{hz} U^2 \right) f^{[0]}. \quad (\text{C-64})$$

Donde el segundo término es el que contribuye a la integral. La integral viene dada en el apéndice D. El resultado final es:

$$P_{ij}^{[3]} = -2 \frac{n\theta^2\tau^3}{m^2} \left[ 3\nabla^2 \Lambda_{ij} + \frac{2}{3} m \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right]. \quad (\text{C-65})$$

Las ecuaciones de conservación hasta este orden se obtienen sustituyendo (C-62)-(C-64) en las ecuaciones (2.60)-(2.61)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (\text{C-66})$$

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nabla P \\ = \frac{\rho}{m} \mathbf{F} + 2 \frac{\mu}{m} \left( \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_i} - \frac{1}{3} m \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) - 3 \frac{n\theta\tau^2}{m} \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla^2 \theta \\ + 2 \frac{n\theta^2\tau^3}{m^2} \nabla^2 \left[ 3 \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_i} + m \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_j} \right], \end{aligned} \quad (\text{C-67})$$

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) &= \frac{2}{3} K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_i} + 14 \frac{n\theta^2 \tau^3}{m} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \nabla^2 \theta \\
&\quad - \frac{7 n\theta^2 \tau^2}{3 m} \left( \frac{1}{3} m \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_l \partial x_l} + 2 \frac{\partial^2 \Lambda_{il}}{\partial x_i \partial x_l} \right) \\
&\quad + \frac{4 \mu}{3 m} \left( \Lambda_{ij} \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \right) \\
&\quad - \frac{4 n\theta \tau^2}{3 m} \left( \Lambda_{ij} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{m}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \nabla^2 \theta \right) \\
&\quad + \frac{4 n\theta^2 \tau^3}{3 m^2} \left[ 3 \nabla^2 \Lambda_{ij} + \frac{2}{3} m \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \Lambda_{ij}.
\end{aligned} \tag{C-68}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_l^{[3]}}{\partial x_l} &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ -21 \frac{n\theta^2 \tau^3}{m} \frac{\partial}{\partial x_l} \nabla^2 \theta \right] \\
&= -\frac{21}{m} \{n\theta^2 \tau^3\} \frac{\partial}{\partial x_l} \nabla^2 \theta - 21 \frac{n\theta^2 \tau^3}{m} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_l} \nabla^2 \theta,
\end{aligned} \tag{C-69}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_{ij}^{[3]}}{\partial x_i} &= -\frac{2}{m^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \{n\theta^2 \tau^3\} \left[ 3 \nabla^2 \Lambda_{ij} + \frac{2}{3} m \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \\
&\quad - 2 \frac{n\theta^2 \tau^3}{m^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ 3 \nabla^2 \Lambda_{ij} + \frac{2}{3} m \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right],
\end{aligned} \tag{C-70}$$

$$P_{ij}^{[3]} \Lambda_{ij} = -2 \frac{n\theta^2 \tau^3}{m^2} \left[ 3 \nabla^2 \Lambda_{ij} + \frac{2}{3} m \frac{\partial^2 \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \Lambda_{ij}. \tag{C-71}$$



Hemos ignorado los términos relacionado con el producto de las derivadas de las funciones que describen el estado del gas y el tiempo de relajación. Las ecuaciones (C-65)-(C-66)-(C-67) son las ecuaciones de Súper –Burnett.

Tabla de integrales

1	$\int d^3U U^4 f^{[0]} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) = 15 \frac{n\theta^2}{m^2}$
2	$\int d^3U U_i U_j \Lambda_{hz} \left( U_h U_z - \frac{1}{3} \delta_{hz} U^2 \right) f^{[0]} = 2 \frac{n\theta^2}{m^2} \left[ \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} m \delta_{ij} \nabla \cdot \vec{u} \right]$
3	$\int d^3U U_l U_k \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_k} \left( U_i U_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} U^2 \right) U^2 f^{[0]} = 14 \frac{n\theta^3}{m^3} \left( \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x_j} + \frac{m}{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l \partial x_i} \right)$
4	$\int d^3U U_i U_j U_k U_l \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_l} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) f^{[0]} = 2 \frac{n\theta^2}{m^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \nabla^2 \theta \right)$
5	$\int d^3U U_l U_h U_k U_i \frac{\partial^3 \theta}{\partial x_h \partial x_k \partial x_i} \left( \frac{m}{2\theta} U^2 - \frac{5}{2} \right) U^2 f^{[0]} = 42 \frac{u\theta^3}{m^3} \frac{\partial}{\partial x_l} \nabla^2 \theta$
6	$\int d^3U U_i U_j U_l U_k \frac{\partial^2 \Lambda_{hz}}{\partial x_l \partial x_k} \left( U_h U_z - \frac{1}{3} \delta_{hz} U^2 \right) f^{[0]}$ $= 2 \frac{n\theta^3}{m^2} \left( \frac{3}{m} \nabla^2 \Lambda_{ij} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 \nabla \cdot \vec{u}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u}) \right)$

## METADATOS

### Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/6

Título	GENERALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR EN UN GAS DILUIDO EN RÉGIMEN DE TRANSICIÓN
Subtítulo	

#### Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
<b>ASDRÚBAL JOSÉ ZURITA PAREDES</b>	CVLAC	<b>24.535.190</b>
	e-mail	<b>ASDRUBALZURI@GMAIL.COM</b>
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

#### Palabras o frases claves:

<b>Régimen de Knudsen, Fluidos, Ecuación de calor, Ecuación de transporte de Boltzmann</b>

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/6

### Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Sub área
<b>MECÁNICA DE FLUIDOS</b>	<b>FÍSICA</b>

### Resumen:

Se determinó la ecuación general de transferencia térmica, para un gas diluido en régimen de transición, calculando la función de distribución hasta tercer orden en el número de Knudsen, usando la ecuación de Boltzmann, en la aproximación del tiempo de relajación [1] y el método de Chapman-Enskog [2], junto con la ecuación de la conservación de la energía [2]. Esta ecuación es particularmente sencilla para el caso de un gas en reposo, la cual nos da como resultado la ecuación de la conducción térmica o ecuación de Fourier generalizada, con derivadas espaciales hasta cuarto orden. Para una aplicación se consideró una geometría simple: dos planos infinitos paralelos a una distancia  $L$  y sometidos a dos temperaturas diferentes. El perfil de temperaturas obtenido, presentó oscilaciones características del régimen de transición, es poco sensible a la parametrización de las interacciones moleculares en las fronteras, este perfil para números de Knudsen muy pequeños reproduce el comportamiento lineal característico del continuo.

### Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6

#### Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
<b>LUIS ANTONIO ARAQUE LAMEDA</b>	ROL	C <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> S <input checked="" type="checkbox"/> T <input type="checkbox"/> U <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	<b>2728346</b>
	e-mail	<b>aralameda@gmail.com</b>
	e-mail	
<b>ÁNGEL BETANCOURT</b>	ROL	C <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> S <input type="checkbox"/> T <input type="checkbox"/> U <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	<b>8434642</b>
	e-mail	<b>a.e.betancourt@gmail.com</b>
	e-mail	
<b>DAMARYS CARABALLO</b>	ROL	C <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> S <input type="checkbox"/> T <input type="checkbox"/> U <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	<b>11824773</b>
	e-mail	<a href="mailto:damarys.caraballo@gmail.com">damarys.caraballo@gmail.com</a>
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año Mes Día

2022	03	18
------	----	----

Lenguaje: SPA \_\_\_\_\_

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6

### Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
<b>Tesis final.doc</b>	<b>Application/word</b>

### Alcance:

Espacial: \_\_\_\_\_ (Opcional)

Temporal: \_\_\_\_\_ (Opcional)

### Título o Grado asociado con el trabajo:

**Licenciado EDUCACIÓN MENCIÓN FÍSICA**

---

**Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciado**

---

**Área de Estudio: EDUCACIÓN MENCIÓN FÍSICA**

---

**Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado: Universidad de Oriente**

---



---



---

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/6



UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
CONSEJO UNIVERSITARIO  
RECTORADO

CU N° 0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano  
**Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ**  
Vicerrector Académico  
Universidad de Oriente  
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda **"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009"**.

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

UNIVERSIDAD DE ORIENTE	
SISTEMA DE BIBLIOTECA	
RECIBIDO POR	<i>Martínez</i>
FECHA	05/08/09
HORA	5:20

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

**JUAN A. BOLAÑOS CURVELO**  
Secretario



C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Telemática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/manuja

**Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso- 6/6**

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009) : “los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario para su autorización”.

  
\_\_\_\_\_  
**ASDRÚBAL ZURITA**  
**AUTOR**

  
**PROF: LUÍS ARAQUE LAMEDA**  
**ASESOR**