



UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

**UN MODELO MATEMÁTICO PARA UN FLUJO
CENTRO-ANULAR CON SURFACTANTES INSOLUBLES
DISTRIBUIDOS UNIFORMEMENTE EN LA INTERFAZ ENTRE
LOS DOS FLUÍDOS CON DENSIDADES DISTINTAS CONFINADO
EN TUBERÍAS HORIZONTALES**

MOISÉS DANIEL ROJAS SUBERO

TESIS DE GRADO PRESENTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER SCIENTIARUM EN MATEMÁTICA

CUMANÁ, JULIO DE 2019



VICERRECTORADO ACADÉMICO
CONSEJO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Núcleo de: SUCRE

Postgrado en: MATEMÁTICAS

N° 365

ACTA DE DEFENSA DE TRABAJO DE GRADO

Nosotros, ASTUDILLO FRANKLIN, LAFORGUE JACQUES Y ARGUELLO RENÉ integrantes del jurado designado por la Comisión Coordinadora del Postgrado en MATEMÁTICAS para examinar el Trabajo de Grado intitulado "UN MODELO MATEMÁTICO PARA UN FLUJO CENTRO-ANULAR CON SURFACTANTES INSOLUBLES DISTRIBUIDOS UNIFORMEMENTE EN LA INTERFAZ ENTRE LOS DOS FLUIDOS CON DENSIDADES DISTINTAS CONFINADOS EN TUBERÍAS HORIZONTALES", presentado por el (la): Lic. MOISÉS ROJAS, con cédula de identidad N° 24.691.979, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al Grado de: MAGISTER SCIENTIARUM EN MATEMÁTICAS, hacemos constar que, hemos examinado el mismo he interrogado al postulante en sesión privada celebrada hoy, a las 04:30 p.m EN LA SALA DE CONFERENCIAS DEL RECTORADO II.

Finalizada la defensa del trabajo por parte del postulante, el jurado decidió APROBARLO (Aprobarlo o Improbarlo) por considerar, sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que el mismo SE (se/no se) ajusta a los dispuesto y exigido en el Reglamento de Postgrado de la Institución.

En fe de lo anterior, se levanta la presente acta, que firmamos conjuntamente con el Coordinador del Postgrado en Matemáticas, en la ciudad de CUMANÁ, a los DOCE días del mes de DICIEMBRE DEL AÑO DOS MIL DIECINUEVE.

A Jesucristo mi Señor y Salvador, el Rey de reyes y Señor de señores.

A mi amada abuela Lola y a mi apreciada Minerva.

AGRADECIMIENTOS

Gracias doy, sobremanera, al Dios de Abraham, de Isaac y de Jacob, mi Dios, por ser mi guía y mi ayudador.

A mi tutor-asesor, Dr. Franklin Astudillo. Su valiosa ayuda, comprensión, esfuerzo y dedicación hizo posible el desarrollo y culminación de este trabajo. A mi co-asesor, Dr. Said Kas-Danouche, quien siempre está a la disposición como un padre para ayudarme y se que sin su apoyo esta investigación hubiese sido sumamente difícil culminarla.

A la Universidad de Oriente, en especial al Departamento de Matemáticas, así como a sus profesores que contribuyeron en mi formación académica. De manera muy especial, agradezco a mi estimado y apreciado profesor, Dr. Jacques Laforgue, a quien admiro y es uno de mis ejemplos a seguir en el área académica y científica, porque siempre ha estado disponible para brindarme su ayuda cuando los problemas parecen irresolubles.

ÍNDICE

RESUMEN	VI
INTRODUCCIÓN	1
1 PRELIMINARES	5
1.1 Ecuaciones en Derivadas Parciales	5
1.2 Dinámica de fluidos y algunas definiciones básicas	6
1.3 Propiedades físicas de los fluidos	7
1.4 El fluido como un medio continuo	8
1.5 El número de Reynolds	8
1.6 Derivada material	10
1.6.1 Convenio de suma de Einstein	10
1.7 Transformación de coordenadas y el tensor esfuerzo	12
1.7.1 Transformación de coordenadas	12
1.7.2 Vectores contravariante y covariante	13
1.8 Sistemas de coordenadas: cartesianas y cilíndricas	13
1.8.1 Sistema de coordenadas cartesianas	14
1.8.2 Sistema de coordenadas cilíndricas	15
1.9 Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos viscosos incompresibles	17
1.10 Condiciones de frontera	18
1.10.1 Superficies sólidas	19
1.10.2 Interfaces de fluidos	20
1.11 Surfactantes y sus efectos en la interfaz	22
1.12 Transformada de Fourier	24
1.13 Algunas propiedades de la transformada de Fourier	25
1.14 La transformada de Fourier en varias variables	26
1.15 Aproximación asintótica	27
2 MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO	29
2.1 Ecuaciones que rigen el problema matemático	29
2.2 Condiciones de frontera para el problema físico	31
3 DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EVOLUCIÓN	42
3.1 Variables adimensionales	42
3.2 Solución del estado básico	45
3.3 Derivación de las ecuaciones de evolución	48
3.3.1 Película y centro acoplados	52
CONCLUSIONES	67
BIBLIOGRAFÍA	68
HOJA DE METADATOS	71

RESUMEN

En este trabajo, se presenta la derivación de un modelo matemático para un flujo centro-anular confinado en tuberías horizontales con surfactantes insolubles distribuidos uniformemente en la interfaz entre los dos fluidos con densidades distintas. Dicho flujo se considera dependiente de la variable azimutal. Para modelar la evolución de la interfaz, se utilizan las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad. Se requiere la condición de no deslizamiento en las paredes del tubo, la continuidad de velocidades en la interfaz y la condición cinemática. Además, se considera el balance de los esfuerzos normales y el balance de los esfuerzos tangenciales. Para modelar la distribución de surfactantes insolubles se considera la ecuación de transporte. Usando expansiones asintóticas, se deriva un sistema de dos ecuaciones integro-diferenciales no lineales acopladas.

INTRODUCCIÓN

Un modelo matemático, en términos generales, es una ecuación o conjunto de ecuaciones matemáticas que dan solución a un problema matemático específico. Este problema, en muchos casos es la idealización del problema físico real planteado para ser resuelto. La idealización es el proceso a través del cual se plantean suposiciones para simplificar el problema a resolver; esto se hace porque no es fácil dar con todas las ecuaciones involucradas, para modelar dicho problema, desde un sólo intento y de una sola vez.

Después de resolver el problema idealizado, se le añaden nuevas características, que se traducen en ecuaciones o condiciones, que forman parte del problema original, y se procura encontrar su modelo. Una vez resuelto este nuevo problema, se vuelve a añadir alguna otra condición, y así sucesivamente. Eventualmente, los nuevos modelos arrojarán resultados más cercanos a lo que se espera sea la realidad. De ahí que, uno de los principios de la modelación es ir de lo más simple a los más complejo.

Al tratar las relaciones del flujo de un fluido, con bases matemáticas o analíticas, para obtener un modelo matemático del fenómeno, al fluido no se le trata como conformado por partículas sencillas, sino que se considera la estructura molecular real como un medio continuo, conocido como el continuo [12, 25].

Actualmente, al modelar flujos estratificados se han considerado muchos regímenes diferentes, entre los cuales están los flujos de dos fluidos. Especialmente, aquellos de dos líquidos a través de un dominio de medio poroso [4], los cuales se clasifican en miscibles e inmiscibles. También, están los flujos de dos fluidos con configuración centro-anular. Son flujos de dos fluidos concéntricos, uno acumulado en el centro y el otro ocupando la región anular que envuelve al fluido central, y que está en contacto con la pared del cilindro. Este tipo de flujo consiste en que ambos fluidos se encuentran viajando simultáneamente dentro del cilindro. La estabilidad de estos

flujos es de fundamental importancia práctica y científica. Para el caso más general de flujos de dos fluidos con una configuración centro-anular, la teoría de estabilidad lineal fue estudiada por Hu [11], Joseph [13], Renardy y Kerchman [19], entre muchos otros. Usando la teoría fuertemente no lineal Kerchman [19], modeló el problema del petróleo en una región anular; Por otro lado, Coward, Papageorgiou y Smyrlis [5], examinaron el caso cuando el gradiente de presión se modula por oscilaciones armónicas en tiempo y, la estratificación de viscosidades y la tensión interfacial están presentes.

La interfaz definida entre dos fluidos puede llegar a ser inestable por muchos mecanismos físicos, uno de ellos es la tensión interfacial. El término interfaz indica la frontera entre dos fluidos inmiscibles. Para analizar la inestabilidad de estos problemas físicos se han estudiado casos de flujos centro-anulares en ausencia y presencia de surfactantes insolubles [16, 17, 22]. Los surfactantes insolubles son moléculas largas que poseen una estructura dipolar formada por un segmento hidrófobo y otro hidrófilo; de esta manera, los surfactantes insolubles son distribuidos en interfaces que separan fluidos inmiscibles como el agua y el petróleo. La mayoría de los surfactantes reducen la tensión interfacial; por otra parte, la presencia de un gradiente en la concentración del surfactante introduce la fuerza de Marangoni. Ésta es una fuerza a lo largo de la interfaz que se dirige desde las regiones de alta concentración de surfactante hacia las regiones de baja concentración de surfactante.

Respecto a este tipo de problemas, figura el artículo de Papageorgiou, Maldarelli y Rumschitzki [22], quienes trabajaron en flujos centro-anulares con un gradiente de presión constante analizando la estabilidad de la interfaz entre ambos fluidos; ellos trabajaron en dicho problema inspirados en el trabajo de Hammond [10], quien no consideró en su problema gradiente de presión externo, obteniendo una ecuación complicada en la que el término de mayor orden es no lineal.

En el año 2004, Kas-Danouche, Papageorgiou y Siegel [17], desarrollaron un nuevo modelo para un flujo de dos fluidos centro-anulares con surfactantes insolubles en la interfaz entre ambos fluidos, con un gradiente de presión constante a través del

cual muestran que los surfactantes afectan la inestabilidad del problema.

Inspirado en este último trabajo, Astudillo [1], desarrolló un modelo matemático para un flujo centro-anular con surfactantes insolubles distribuidos no uniformemente en la interfaz entre los dos fluidos. Los resultados obtenidos son equivalentes a los obtenidos en [16]. Después, Lugo [21], estudia las rutas hacia el caos en el mismo problema de flujo centro anular con surfactantes insolubles.

Por otro lado, en el año 2007, Kas-Danouche [18], obtuvo un nuevo modelo matemático tomando como base el modelo de Hammond [10], añadiendo surfactantes insolubles en la interfaz, el resultado fue un sistema de dos ecuaciones acopladas integro diferenciales parciales, pero altamente no lineales con el término de mayor orden multiplicado por la función incógnita elevada al cubo.

Para el año 2011, Astudillo [2], desarrolló un nuevo modelo añadiendo surfactantes solubles. Obtuvo un sistema de tres ecuaciones acopladas, dos de las cuales son diferenciales parciales no lineales, y una de estas dos últimas ecuaciones, con un término integral. También desarrolló un esquema numérico para encontrar soluciones aproximadas del modelo.

Es de mucho interés prestar atención a los flujos centro-anulares a través de tubos horizontales cuando las densidades de ambos fluidos son diferentes. Es por ello, que en este trabajo, se pretende encontrar un modelo matemático similar a los comentados anteriormente, que permita estudiar la influencia de surfactantes insolubles en la interfaz entre los dos fluidos cuando las densidades de ambos fluidos son diferentes. Los flujos considerados ya no son axisimétricos. Este modelo resulta interesante desde un punto de vista práctico y científico. Puede, por ejemplo, usarse para transportar petróleo muy viscoso a través de una tubería lubricada con agua. Además, este nuevo modelo podría proporcionar un marco teórico bastante claro para estudiar la estabilidad del mismo problema bajo los efectos de un surfactante soluble, lo que pudiera permitir extender resultados, ya conocidos.

Para una mejor comprensión, este trabajo se ha desarrollado en 3 capítulos. El Capítulo 1 consta de preliminares, definiciones básicas para el desarrollo de este

trabajo. En el Capítulo 2 se desarrolla y se plantea de manera detallada el modelo matemático o problema físico. Además, se determinaron las ecuaciones gobernantes y las condiciones de fronteras pertinentes al problema físico. En el Capítulo 3 las ecuaciones determinadas en el Capítulo 2 se llevaron a su forma no dimensional; se buscó la solución del estado básico y se realizó un análisis asintótico del modelo; en donde finalmente se derivaron las ecuaciones de evolución del sistema.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se presentan resultados de carácter general que serán utilizados a lo largo del trabajo. Aquí se introducen conceptos básicos que han sido desarrollados en otras disciplinas como la física, y que son necesarios para entender el planteamiento y desarrollo del problema que se aborda en este trabajo. Además se adopta la notación que se usará a lo largo del trabajo.

1.1 Ecuaciones en Derivadas Parciales

Definición 1.1.1 (Ecuación en Derivadas Parciales,[7]). *Una ecuación en derivadas parciales (E.D.P.) es una ecuación que involucra una función incógnita de dos o más variables y algunas de sus derivadas parciales.*

La linealidad de estas ecuaciones se establece como sigue: si los coeficientes dependen sólo de las variables independientes entonces a la ecuación se le denomina lineal. Si además dependen de la propia función o de alguna de sus derivadas parciales entonces la ecuación es no lineal.

El orden de una E.D.P. es el de la derivada parcial de mayor orden que aparece en ella.

La teoría de las Ecuaciones en Derivadas Parciales es una de las áreas de las matemáticas más extensas e importantes y es fundamental en la modelación. Una E.D.P. puede modelar distintos fenómenos físicos. Existen varios métodos de solución para algunas de estas ecuaciones, pero es importante observar que no todas las soluciones analíticas son funciones suaves, y existen un gran número de problemas para los cuales es muy difícil o imposible encontrar una solución analítica. En este caso, se recurren a métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas. Para encontrar una solución numérica a una E.D.P. existen varios métodos, entre los cuáles

se pueden mencionar: el Método de Elementos Finitos y el Método de Diferencias Finitas.

Por otra parte, las condiciones iniciales y de frontera juegan un papel importante en la solución del problema y en general en la modelación de cualquier fenómeno físico. Este problema, se denomina problema de valor inicial o problema de Cauchy.

1.2 Dinámica de fluidos y algunas definiciones básicas

La Dinámica es el estudio del movimiento de materia; ésta se puede dividir en dos partes; la primera es la dinámica de cuerpos rígidos y la segunda la dinámica de cuerpos no rígidos. En particular, la dinámica de fluidos tiene que ver con el comportamiento de fluidos en movimientos.

Definición 1.2.1 (Fluido, [8, 12]). *Un fluido se define como una sustancia que sufre una deformación continua cuando se le aplica un esfuerzo cortante no importa que tan pequeño sea éste.*

En cambio, cuando se le aplica la acción de un esfuerzo cortante pequeño a un sólido elástico no se deforma continuamente, sino que asume una configuración determinada fija.

Definición 1.2.2 (Esfuerzo cortante). *Un esfuerzo cortante es la componente de fuerza tangente a una superficie [25]. Esta fuerza dividida por el área de superficie es el esfuerzo cortante promedio sobre dicha superficie. El esfuerzo cortante en un punto es el valor límite de la fuerza por unidad de área a medida que el área se reduce a un punto.*

Definición 1.2.3 (Flujo laminar,[15]). *Se define como flujo laminar o flujo puramente viscoso al flujo que fluye en láminas o capas.*

1.3 Propiedades físicas de los fluidos

En los fluidos se identifican algunas propiedades físicas cuyos valores pueden estar sujetos a cambios dependiendo de otras variables como: temperatura, presión, etc.

Definición 1.3.1 (Viscosidad,[15]). *La viscosidad es una cantidad física con la cual se mide la resistencia que el fluido ejerce a un esfuerzo cortante o fuerza tangencial cuando éste se encuentra moviéndose.*

Un fluido que no tenga viscosidad y que no fluye de una manera turbulenta se denomina fluido ideal [15]. En la realidad, ningún fluido es ideal, pero algunos fluidos en ciertas regiones de flujo se aproximan a condiciones ideales y se consideran como flujos ideales.

Definición 1.3.2 (Presión,[8]). *La presión se define como la fuerza compresiva normal por unidad de área (esfuerzo normal) que actúa sobre una superficie inmersa en el fluido.*

Definición 1.3.3 (Tensión superficial,[15]). *La tensión superficial es un término que se usa para identificar el esfuerzo aparente que existe en la capa superficial de un líquido, que actúa como una membrana estirada, pudiendo generar una diferencia de presiones a través de la superficie líquida curva. La tensión superficial es una energía asociada con cualquier interfaz fluido-fluido.*

Definición 1.3.4 (Densidad,[15]). *La densidad, ρ , de un fluido se define como la cantidad de masa de fluido por cada unidad de volumen de dicho fluido. Además, es una propiedad termodinámica la cual depende del estado del fluido, de ahí la factibilidad de expresarla como función de temperatura y presión.*

Definición 1.3.5 (Flujo estacionario,[15]). *Es aquel en el cual las componentes de velocidad y propiedades termodinámicas en cada punto del espacio no cambian con el tiempo.*

1.4 El fluido como un medio continuo

En la Física, la teoría de la dinámica de los fluidos es desarrollada bajo dos puntos de vista: el microscópico y el macroscópico. En el nivel microscópico se toma en cuenta la estructura molecular del medio y el movimiento unidimensional de las partículas que lo forman. En el macroscópico en cambio, se consideran las propiedades físicas del medio.

Sin embargo, es importante notar que la materia no es continua, es decir que a nivel microscópico la materia tiene espacios entre las moléculas que la componen y a su vez éstas moléculas están compuestas por átomos que también están espaciados y así sucesivamente.

En un fluido no se trata con una partícula simple; de allí que es necesario al tratar las relaciones de flujo de un fluido con bases matemáticas o analíticas, considerar la estructura molecular real como un medio continuo, conocido como **la hipótesis del Continuo** [12, 25].

En esta hipótesis se considera que el fluido es continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando por tanto su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a esta. Con esta hipótesis se puede considerar que las propiedades del fluido (presión, densidad, temperatura, ...) son funciones continuas.

A medida que el tiempo transcurre, el fluido en algún punto del espacio se sustituye constantemente por nuevo fluido; así que no se mantiene registro de cualquier partícula individual del fluido sino de la historia en algún punto en el espacio sin importar qué porción de fluido está en dicho punto en cualquier tiempo particular. Tal descripción del fluido se llama una **descripción Euleriana**. Cuando se mantiene registro de una partícula individual como en dinámica de cuerpos rígidos se llama una **descripción Lagrangiana**.

1.5 El número de Reynolds

La naturaleza de un flujo dado de un fluido incompresible se caracteriza por

su número de Reynolds. Determinar si el flujo es turbulento o laminar, o si tiene una tendencia de turbulento a laminar o viceversa, dependerá del valor que tome el número de Reynolds asociado a ese flujo.

El irlandés Osborne Reynolds (1842-1912) realizó notables contribuciones en dinámica de fluidos, y a él es que se debe la existencia del número de Reynolds. Estudió las condiciones en las que un fluido confinado en un cilindro circular cambiaba de su estado laminar al régimen turbulento. El número de Reynolds llegó a conocerse en 1883 cuando se publica su artículo *An experimental investigation of the circumstances which determine wheter the motion of water in parallel chanel's shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels*.

Reynolds llegó a la conclusión de que si se tienen dos problemas de flujo geoméricamente similares, éstos serían dinámicamente idénticos si ambos poseían ecuaciones diferenciales generales equivalentes. He aquí donde el número de Reynolds cobra importancia. Al re-escalar las unidades de longitud, de tiempo y de masa usando cantidades características del mismo problema dado, Reynolds obtuvo la expresión adimensional $ul\rho/\mu$ igual para ambos casos. La variable u es la velocidad característica que se describe usando la longitud y el tiempo característico utilizados para hacer el re-escalamiento, ρ es la densidad de masa y μ es la viscosidad, ambas dadas por el problema. Esta expresión adimensional es la que se conoce como número de Reynolds (Re) y se expresa mediante la siguiente razón

$$Re = \frac{ul\rho}{\mu}.$$

Cuando Re toma valores grandes, significa que al menos uno de (podrían ser todos) los términos del numerador tendría(n) que ser grande(s) en comparación con el valor del denominador. Interpretando lo dicho previamente, del numerador se tendría una gran extensión de fluido, altas velocidades y altas densidades; del denominador se induce que las viscosidades son extremadamente pequeñas, o combinaciones de tales cantidades. Las variables del numerador están relacionadas con las fuerzas inerciales, éstas son causadas por la aceleración o desaceleración del fluido. La variable en el

denominador es el motivo de las fuerzas cortantes viscosas. De esta manera, el número de Reynolds puede considerarse como la relación entre las fuerzas inerciales y las viscosas.

En general, a medida que el número de Reynolds crece, la intensidad de la turbulencia aumenta. Cuando los efectos inerciales como los de viscosidad son importantes, el número de Reynolds (Re) toma valores intermedios. Por ejemplo, en cilindros circulares (para otras configuraciones, lo que sigue varía) si $Re < 2100$ significa que el flujo es laminar, si $Re > 3000$ significa que el flujo es turbulento. Para valores de Re entre 2100 y 3000 se dice que el flujo está en régimen de transición, las capas se van ondulando variablemente en el tiempo pero no se mezclan.

En conclusión, el número de Reynolds provee una medida usando los resultados experimentales obtenidos con cierto flujo, para pronosticar el comportamiento de otros flujos de fluido. Sin embargo, todavía no se conoce a ciencia cierta el mecanismo y los motivos por los cuales un flujo es laminar o turbulento.

1.6 Derivada material

Antes de escribir algunas ecuaciones que se usarán en este trabajo, es necesario introducir un concepto clave que es el de derivada material (derivada total o derivada sustancial). Para ello, se considera previamente una convención de notación, conocida como el convenio de suma de Einstein.

1.6.1 Convenio de suma de Einstein

“Un índice repetido que aparezca como superíndice y como subíndice en una expresión, implicará una suma sobre el rango de dicho índice.”

Así por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^n A^i B_i \equiv A^i B_i; \quad \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_i^k B_k^i \equiv A_i^k B_k^i.$$

Definición 1.6.1 (Derivada material,[3]). *Se define la derivada material o derivada total o derivada sustancial como*

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

en coordenadas cartesianas, donde el primer sumando del segundo miembro se le llama parte local, y el segundo sumando se le llama parte convectiva.

Si $u = (u_1, u_2, u_3)$ entonces,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \text{grad},$$

donde

$$\text{grad} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

Hay muchos problemas cuya configuración geométrica no permite que se apliquen las ecuaciones en representación cartesiana; por ejemplo, es el caso de este trabajo, en el que se involucran tuberías para lo cual se requiere que las ecuaciones estén expresadas en coordenadas cilíndricas. En términos de coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) , con $u = (u, v, w)$ y $\text{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$; se tiene

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Un caso especial de fluido y de gran importancia, es el fluido incompresible. Este es definido a través de la derivada total, de la siguiente manera:

Definición 1.6.2 (Fluido incompresible,[9]). *Un fluido es incompresible si la derivada sustancial o total de su densidad es nula; en este caso, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$. Es decir, es aquel fluido cuya densidad siempre permanece constante con el tiempo.*

Por otra parte se tiene, en términos generales, que un flujo de fluido es incompresible cuando su volumen no cambia en el tiempo; por ejemplo, los líquidos. Sin embargo, los gases cuando están expuestos a presión (posiblemente por la acción de reducir la superficie del envase que los contiene), cambian su volumen (en este caso se comprimen); por lo cual son compresibles.

1.7 Transformación de coordenadas y el tensor esfuerzo

Existen cantidades físicas que se caracterizan solamente por la magnitud, tales como la masa, longitud y temperatura; tales cantidades suelen llamarse escalares. Hay otras cantidades físicas más generales no completamente específicas por una magnitud; pero que requieren al menos de una dirección, tales cantidades suelen llamarse vectores. A continuación, se define lo que es una transformación de coordenadas.

1.7.1 Transformación de coordenadas

Sean (x^1, x^2, \dots, x^n) (denotado por (x^i) , $i = 1, \dots, n$) y $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ (denotado por (\bar{x}^i) , $i = 1, \dots, n$) las coordenadas de un punto en dos diferentes marcos de referencia. Se supone que existen n relaciones independientes entre las coordenadas de los dos sistemas, con la forma

$$\begin{aligned}\bar{x}^1 &= \bar{x}^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \bar{x}^2 &= \bar{x}^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \vdots &= \quad \quad \quad \vdots \\ \bar{x}^n &= \bar{x}^n(x^1, x^2, \dots, x^n)\end{aligned}$$

donde se supone que las funciones involucradas se evalúan en un solo valor, son continuas y tienen derivadas continuas. En estas condiciones, a cada conjunto de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$, corresponderá un conjunto (x^1, x^2, \dots, x^n) de manera que las siguientes relaciones definen las fórmulas de transformación de coordenadas diferenciables.

$$\begin{aligned}\bar{x}^j &= \bar{x}^j(x^i) \\ x^i &= x^i(\bar{x}^j) \quad i, j = 1, \dots, n\end{aligned}$$

(véase [24]).

1.7.2 Vectores contravariante y covariante

Las siguientes definiciones fueron tomadas de [24].

Se supone que en un sistema de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) hay n cantidades A^1, A^2, \dots, A^n relacionadas con otras n cantidades $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^n$ en otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ por las ecuaciones de transformación

$$\bar{A}^p = \sum_{q=1}^n \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q \quad p = 1, 2, \dots, n$$

que según las convenciones adoptadas podría escribirse como

$$\bar{A}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^q} A^q.$$

Entonces, éstas se llaman componentes de un *vector contravariante* o *tensor contravariante de primer rango o primer orden*.

Por otro lado, se supone que en un sistema de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) hay n cantidades A_1, A_2, \dots, A_n relacionadas con otras n cantidades $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ en otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ mediante las ecuaciones de transformación

$$\bar{A}_p = \sum_{q=1}^n \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q \quad p = 1, 2, \dots, n$$

o bien

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p} A_q.$$

Entonces, éstas reciben el nombre de *vector covariante* o *tensor covariante de primer rango o primer orden*.

Nótese que se usa un superíndice para indicar las componentes contravariantes, mientras que se emplea un subíndice para denotar las componentes covariantes; una excepción a esto ocurre en la notación para las coordenadas.

1.8 Sistemas de coordenadas: cartesianas y cilíndricas

Existen diversos sistemas de coordenadas especiales que son importantes en el análisis de fenómenos físicos, especialmente, coordenadas cartesianas, coordenadas

cilíndricas, y coordenadas esféricas. En esta sección se considerará el significado en el contexto de estudio de fluidos de los sistemas de coordenadas cartesianas y cilíndricas lo cual fue tomado de [23].

1.8.1 Sistema de coordenadas cartesianas

El sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, (x, y, z) , consiste de tres ejes mutuamente ortogonales, como se ilustra en la Figura 1.1. Cada punto en el espacio tiene un vector posición asociado que inicia en el origen común de los ejes cartesianos y finaliza en el punto. El punto es identificado por los valores de x , y y z , definidos como las proyecciones positivas o negativas del vector posición sobre los ejes correspondientes.

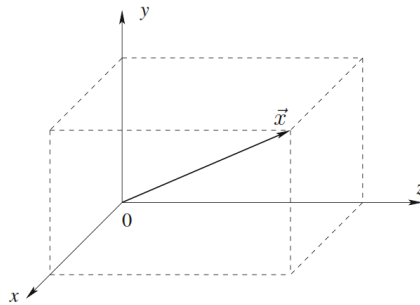


Figura 1.1: [Figura 1.3.1 de C. Pozrikidis, 2017, Springer] Tres ejes mutuamente ortogonales definen un sistema de coordenadas cartesianas, (x, y, z) . La flecha indica el vector posición correspondiente a un punto, \vec{x} .

En notación de vectores, las coordenadas cartesianas son expresadas por una tripleta ordenada

$$\vec{x} = (x, y, z),$$

donde x , y , y z toman valores en el rango $(-\infty, \infty)$. De acuerdo con esto, las coordenadas cartesianas de un punto tienen una interpretación dual: ellas representan una entidad geométrica asociada con el vector posición, y ellas también forman una tripleta ordenada de números reales.

Los tres vectores unitarios,

$$\vec{e}_x = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_y = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_z = (0, 0, 1),$$

apuntan en las direcciones positivas de los ejes x , y , o z . Los puntos finales de estos vectores están en los ejes x , y , o z . Se dice que los tres vectores \vec{e}_x , \vec{e}_y , y \vec{e}_z son vectores unitarios cartesianos mutuamente ortogonales.

Combinando estas definiciones, el vector posición se expresa en la forma

$$\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z.$$

En términos físicos, esta ecuación establece que para llegar al punto \vec{x} partiendo desde el origen, hay que moverse a lo largo de cada uno de los vectores unitarios \vec{e}_x , \vec{e}_y , y \vec{e}_z , por distancias respectivas iguales a x , y , y z unidades de longitud.

1.8.2 Sistema de coordenadas cilíndricas

Un punto en el espacio puede identificarse por los valores de una tripleta ordenada (r, θ, z) , como se ilustra en la Figura 1.2, donde

- r es la distancia de un punto de interés desde el eje z , tomando valores en el rango $[0, \infty)$.
- θ es el ángulo azimutal medido alrededor del eje z , tomando valores en el rango $[0, 2\pi)$. El valor $\theta = 0$ corresponde al primer y segundo cuadrante del plano zy , y el valor $\theta = \pi$ corresponde al tercer y cuarto cuadrante.
- z es la proyección del vector posición sobre la recta del eje z pasando a través de un origen designado, tomando valores en el rango $(-\infty, \infty)$.

Usando trigonometría elemental, se derivan relaciones entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas cilíndricas asociadas,

$$y = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta.$$

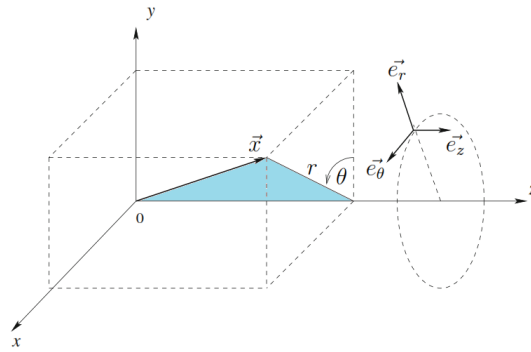


Figura 1.2: [Figura 1.3.2 de C. Pozrikidis, 2017, Springer] Ilustración de las coordenadas cartesianas y cilíndricas (r, θ, z) , definidas con respecto a las coordenadas cartesianas, (x, y, z) , donde r es la distancia desde el eje z .

Las relaciones inversas entre las coordenadas cilíndricas y las coordenadas cartesianas son

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arccos \frac{y}{r}.$$

Inmediatamente, se definen los vectores unitarios en este sistema. Se considera un punto arbitrario en el espacio y se definen tres vectores unitarios, denotados por \vec{e}_r , \vec{e}_θ , y \vec{e}_z , apuntando en la dirección del eje z , normal al eje z , y en la dirección de variación del ángulo azimutal θ , respectivamente, como se muestra en la figura (1.8.2). Nótese que la orientación de los vectores unitarios \vec{e}_r y \vec{e}_θ cambia con la posición en el espacio, mientras que la orientación del vector unitario \vec{e}_z es fija e independiente de la posición en el espacio.

En términos de los primeros dos vectores unitarios locales, \vec{e}_r y \vec{e}_z , el vector posición es dado por

$$\vec{x} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z. \quad (1.1)$$

La dependencia del vector posición con respecto al ángulo azimutal, θ , es mediada a través del vector unitario \vec{e}_r del lado derecho. La ausencia de \vec{e}_θ del lado derecho de (1.1) puede justificarse observando que la distancia desde el origen, expresada por el vector posición \vec{x} , es perpendicular al tercer vector unitario, \vec{e}_θ .

Usando trigonometría elemental, se derivan las relaciones entre los vectores unitarios cartesianos y los cilíndricos,

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_y + \sin \theta \vec{e}_x, \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_x.$$

Las relaciones inversas son

$$\vec{e}_y = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_x = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta.$$

1.9 Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos viscosos incompresibles

El tensor de esfuerzo es dado por $\mathbf{T} = -p\vec{I} + 2\mu\vec{D}$ (véase [14]) donde, para $\vec{V} = (u, v, w)$, en coordenadas cilíndricas, (r, θ, z) , es

$$\begin{aligned} e_{11} = e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, & e_{22} = e_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, & e_{33} = e_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{12} = e_{r\theta} &= \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & e_{23} = e_{\theta z} &= \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ e_{31} = e_{zr} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r}, \end{aligned}$$

y $e_{ij} = e_{ji}$.

La condición de incompresibilidad $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, conocida como la ecuación de continuidad, es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

Las ecuaciones de movimiento de Navier-Stokes son

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\nabla \phi + 2\mu(\nabla \cdot \mathbf{T}),$$

donde

$$\phi = p + \rho g r \sin \theta,$$

para el caso de cilindros horizontales, que es lo que nos interesa en este trabajo.

En este caso, t representa el tiempo, ρ la densidad, μ la viscosidad y $\vec{V} = (u, v, w)$ es el campo de velocidades.

Ignorando los efectos de la gravedad, las ecuaciones, en notación expandida, vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u - \frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v + \frac{uv}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho} \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{1.4}$$

representan el laplaciano y el gradiente en coordenadas cilíndricas, respectivamente.

1.10 Condiciones de frontera

Las ecuaciones gobernantes para los campos de velocidad y presión son ecuaciones en derivadas parciales que son aplicables en cada punto en un fluido que está siendo modelado como un continuo. Cuando ellas están involucradas en cualquier situación dada, se espera ver funciones arbitrarias o aparición de constantes en la solución. Para evaluar esto, se necesitan establecimientos adicionales sobre el campo de velocidad y posiblemente su gradiente en las fronteras naturales del dominio del flujo. Tales establecimientos se conocen como condiciones de frontera. Siguiendo a [23], antes de considerar estas condiciones de frontera, se hará una descripción breve, en el contexto de la cinemática, de los cuatro tipos principales de condiciones que se pueden encontrar en el mundo real.

1. *Límites sólidos impermeables*: los ejemplos incluyen la superficie de un cuerpo sólido rígido o flexible, como una antena de radio vibrante o un microorganismo que nada.

2. *Límites sólidos permeables*: los ejemplos incluyen la superficie de un medio poroso, como un lecho de roca o un tejido biológico compuesto por células separadas por huecos en los espacios intermedios.
3. *Interfaces afiladas entre fluidos inmiscibles*: los ejemplos incluyen la superficie libre del océano y la interfaz entre el aceite y el vinagre en un aderezo italiano para ensaladas.
4. *Interfaces difusas entre los fluidos miscibles*: los ejemplos incluyen el borde borroso de un río que desemboca en el océano y el borde ambiguo de un anillo de humo que se eleva en el aire en calma.

Se imponen diferentes condiciones de frontera en cada una de estas superficies de acuerdo con el contexto físico prevaleciente. En esta sección se consideran condiciones de frontera para un fluido en superficies sólidas y en la interfaz del fluido.

1.10.1 Superficies sólidas

Uno de los tipos más comunes de frontera a la que se expone una región de fluido, se conoce como la pared rígida impermeable. La **condición de impermeabilidad** de una pared indica que nada del fluido debería atravesarla. Si la velocidad con la cual se mueve la pared es \vec{U} y la velocidad de una partícula (del fluido) que toca la pared es $\vec{V} = (u, v, w)$, entonces esto significa que las componentes normales de estas dos velocidades deben ser iguales; así, se tiene que

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \tag{1.5}$$

donde \vec{n} es el vector unitario normal a la superficie de la frontera.

A menudo se escoge un marco de referencia en el cual las fronteras quedan en reposo, es decir, $\vec{U} = \vec{0}$, entonces esta condición de frontera se convierte en

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = 0.$$

En coordenadas cartesianas con y normal a la pared y, x y z en el plano tangencial local a la pared, se obtiene $v = 0$.

Otra condición proviene de la **condición de no resbalamiento** o **condición de adherencia**, que señala que en que no debe haber velocidad tangencial relativa entre una pared rígida y el fluido que entra en contacto con ella. Formalmente,

$$\vec{V} \times \vec{n} = \vec{U} \times \vec{n} \quad (1.6)$$

y cuando se escoge un marco de referencia para el cual la pared no se mueve; esto es, $\vec{U} = 0$, se tiene

$$\vec{V} \times \vec{n} \quad \text{ó} \quad u = w = 0.$$

Combinando las condiciones (1.5) y (1.6) resulta

$$\vec{V} = \vec{U}.$$

En coordenadas cartesianas y escogiendo un marco de referencia para el cual la pared no se mueve, se obtiene

$$u = v = w = 0. \quad (1.7)$$

La **condición de frontera total** se refiere a que no hay movimiento relativo entre una pared y el fluido próximo a ella.

1.10.2 Interfaces de fluidos

Aquí se supondrán superficies tridimensionales, $z = \zeta(x, y, t)$. Se consideran las siguientes condiciones:

1. **Cinemática:** Si la interfaz, $z = \zeta(x, y, t)$, está en movimiento, puede ser descrita definiendo $F(x, y, z, t) = 0$, donde t representa el tiempo, y F alguna función de tiempo y posición en coordenadas cartesianas, dígase, $F \equiv z - \zeta(x, y, t)$. Como $F = 0$ en la interfaz para todos los tiempos, la derivada con

respecto al tiempo siguiendo una partícula material en la interfaz (la derivada material) tiene que ser también cero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{DF}{Dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0 \\ &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{u} \cdot (-\zeta_x, -\zeta_y, 1) \\ &= -\frac{\partial \zeta}{\partial t} - u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w = 0.\end{aligned}$$

Así,

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

La condición cinemática indica que no hay formación de cavidades en la interfaz [14].

2. **Continuidad de las velocidades sobre ζ :** La continuidad de las velocidades en la interfaz entre dos fluidos se representa por

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2,$$

donde \vec{V}_1 representa la velocidad de un fluido y \vec{V}_2 representa la velocidad del otro fluido en la interfaz.

3. **Continuidad de los esfuerzos:** La dimensión de esfuerzo es fuerza por unidad de área; aquí se considera el balance del esfuerzo normal y el balance del esfuerzo tangencial.

- a) **Balance del esfuerzo normal:** El balance de los esfuerzos normales viene dado por:

$$[\vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}]_1^2 = -\sigma \nabla_s \cdot \vec{n},$$

o equivalentemente

$$[\vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}]_1^2 = -\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{sobre } z = \zeta(x, y, t)$$

donde γ es el coeficiente de tensión superficial, R_1^{-1} y R_2^{-1} son las curvaturas principales; R_1 y R_2 son los radios de las circunferencias circunscritas a la interfaz y $\bar{\sigma}$ es el tensor esfuerzo.

Los esfuerzos normales son las componentes normales de la fuerza superficial que actúa a través de un elemento de la superficie plana paralela a los planos coordenados. El salto en los esfuerzos normales que atraviesan la interfaz debe balancear la fuerza de curvatura por unidad de área. Se observa que una superficie con curvatura no nula expone un salto en los esfuerzos normales a través de la interfaz.

- b) **Balance del esfuerzo tangencial:** El balance de los esfuerzos tangenciales viene dado por

$$[\vec{t} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}]_1^2 = \nabla_s \sigma \cdot \vec{t} \text{ a lo largo de la superficie,}$$

donde $\underline{\underline{\sigma}}$ es el tensor esfuerzo, ∇_s es el operador gradiente de superficie, \vec{n} es el vector normal unitario y \vec{t} es el vector tangente unitario.

El lado izquierdo representa el salto en las componentes tangenciales del esfuerzo hidrodinámico en la interfaz, tiene sólo gradientes de velocidad, no hay presión; por lo cual si en el lado derecho se tiene un $\nabla_s \gamma$ no nulo en la interfaz del fluido, esto conducirá a movimiento. El lado derecho representa los esfuerzos tangenciales asociados con gradientes en γ , como podría resultar de gradientes en temperatura o composición química en la interfaz.

1.11 Surfactantes y sus efectos en la interfaz

“Surfactante” es un término utilizado para designar en forma abreviada los compuestos con actividad interfacial. Químicamente, los surfactantes se caracterizan por tener una estructura molecular que contiene un grupo que posee poca atracción, o antipatía por el solvente, conocido como grupo liofóbico, junto a otro grupo que tiene

fuerte atracción, o apetencia por el solvente, llamado el grupo liofílico. Si el solvente es el agua, estos grupos se conocen como las porciones hidrofobias e hidrofílicas del surfactante. Normalmente, el grupo hidrofóbico es una cadena de carbonos lineal o ramificada, mientras que la porción hidrofílica es un grupo con cierto carácter polar.

Muchas situaciones frecuentes en el ámbito industrial y la vida cotidiana, están gobernadas por la dinámica interfacial de películas líquidas. El flujo de fluidos en medios porosos (procesos de recuperación asistida de petróleo) y problemas asociados con flujos biológicos (cierre de vías aéreas pulmonares), son algunos ejemplos de dichas situaciones.

Los surfactantes tienen además, un efecto estabilizante porque reducen la velocidad de crecimiento de las perturbaciones y el tiempo de formación de puentes o tiempos de cierre.

De acuerdo a Rayleigh la inestabilidad es un fenómeno gobernado por fuerzas de tensión superficial, que produce el crecimiento de perturbaciones sobre interfases y películas de líquido, que evolucionan hacia estructuras más estables. En el caso de una película anular depositada en la pared interior de un capilar cilíndrico, se forman collares o lentes líquidos, dependiendo del espesor inicial de la película. Como en todo fenómeno capilar, las sustancias que modifican la tensión superficial de la interfaz -surfactantes- tendrán una enorme influencia sobre la evolución de la inestabilidad.

La inestabilidad de Rayleigh es un proceso que provoca el crecimiento de perturbaciones sobre la película, ya que se generan gradientes de presión en el líquido como consecuencia de las tensiones actuantes en la interfaz. De esta forma, la diferencia o salto de presión normal, la interfaz se compensa por la tensión superficial y la curvatura de la superficie, y los esfuerzos tangenciales por las tensiones de Marangoni que aparecen si hay tensioactivos presentes (surfactantes).

El efecto de Marangoni fue inicialmente preconcebido en 1855 por James Thomson cuando presentó un trabajo en una de las convenciones de la Asociación Británica en Glasgow, describiendo sus observaciones acerca del comportamiento que presentó el agua al colocarla en una gota de alcohol.

No fue sino hasta 1865 que Carlo Marangoni definió este fenómeno en términos de gradientes de tensión superficial, denominándose efecto de Marangoni.

Los surfactantes influyen en la dinámica interfacial de dos maneras; es decir, la mayoría de los tipos de surfactantes reducen la tensión interfacial y la presencia de un gradiente en la concentración del surfactante introduce la **fuerza de Marangoni**. Ésta es una fuerza a lo largo de la interfaz que se dirige de las regiones de alta concentración de surfactante (es decir, baja tensión superficial) a las regiones de baja concentración de surfactante (es decir, alta tensión superficial). En general, la fuerza de Marangoni actúa para oponerse a cualquier flujo externo el cual promueve aumento o exceso de surfactante en la interfaz.

Según Hsin-Hsen la inestabilidad se produce debido a que los gradientes de tensión superficial pueden producir fuerzas perpendiculares a la superficie o interfaz entre dos sustancias o fases provocando una inestabilidad que puede resultar en la transferencia de masa entre dos fases. Según Kaminsky la razón física de la inestabilidad es de presencia de fuerzas en la superficie o interfaz debido a los gradientes de tensión superficial, en virtud de que estos gradientes dependen de un valor local superficial de concentración de materia transferida a través de la interfaz, sea sustancias, calor, etc. Estas fuerzas superficiales son las responsables del establecimiento de una dinámica de equilibrio entre la transferencia y los procesos hidrodinámicos. Generalmente, este tipo de inestabilidad es resultado de la presencia de gradiente de concentración existentes entre las dos fases. A este fenómeno en particular se le conoce como efecto de Marangoni por gradientes de concentración.

1.12 Transformada de Fourier

Una serie de Fourier puede usarse algunas veces para representar una función dentro un intervalo. Si una función esta definida sobre toda la recta real, puede ser representarse con una serie Fourier si es periódica. Si no es periódica, entonces no puede representarse con una serie Fourier para todo x . Aun en este caso es posible

representar la función en términos de senos y cosenos, pero la serie de Fourier se convierte en una integral de Fourier.

Definición 1.12.1 (Transformada de Fourier,[6]). Una función $F(w)$ se denomina la transformada de Fourier de $f(x)$, si:

$$F(w) := \mathcal{F}\{f(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t) dt$$

existe.

Definición 1.12.2 (Transformada de inversa de Fourier,[6]). La transformada inversa de Fourier de $F(w)$ se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} F(t) dw$$

La transformada de Fourier de f es por lo tanto una función $\mathcal{F}\{f(t)\}$ de una nueva variable w . Esta función, evaluada en w , es $F(w)$. En este trabajo se denotará la transformada de Fourier con el símbolo $\widehat{}$.

1.13 Algunas propiedades de la transformada de Fourier

1. **Linealidad:** Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ entonces:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\} = \alpha \widehat{f(t)} + \beta \widehat{g(t)}$$

2. **Derivada en tiempo:** Sea $n \in \mathbb{N}$ y asumiendo que $f^{(n)}$ es continua a trozos y suponga que $\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(k)}(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f^{(k)}(t) = 0$, entonces

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (iw)^n \widehat{f(w)}$$

en particular

$$\mathcal{F}\{f'\} = iw \widehat{f(w)}$$

y

$$\mathcal{F}\{f''\} = -w^2 \widehat{f(w)}$$

1.14 La transformada de Fourier en varias variables

De acuerdo con [6], la teoría de las transformadas de Fourier en una variable simple puede extenderse a funciones de varias variables. Así, si $f(x, y)$ es una función de dos variables, la función $F(\xi, \eta)$ definida por

$$F(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy \quad (1.8)$$

es la transformada de Fourier bidimensional de $f(x, y)$. Siempre que la transformada inversa de Fourier en una variable simple pueda aplicarse dos veces, se tiene

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (1.9)$$

Una notación elegante puede ser usada si las variables son componentes de un vector; así, para una función $f(\vec{r})$ en n dimensiones, se escribe

$$F(\vec{k}) = \int f(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^n \vec{r}$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int F(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^n \vec{k}$$

Las siguientes propiedades para la transformada de Fourier en varias variables, las cuales pueden derivarse a través de manipulaciones formales, son paralelas a las de la transformada de Fourier de una variable.

$$F \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right] = -i\xi F(\xi, \eta)$$

y

$$F \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right] = -i\eta F(\xi, \eta)$$

proporcionando el importante resultado que,

$$F [\nabla^2 f(x, y)] = \omega^2 F(\xi, \eta)$$

donde $\omega^2 = \xi^2 + \eta^2$.

1.15 Aproximación asintótica

A continuación se presentan varias definiciones, tomadas de [20], que son útiles para presentar aproximaciones analíticas. Las funciones involucradas s y δ están definidas en un conjunto D tal que $\epsilon = 0$ es punto de acumulación de D .

Definición 1.15.1. *Se dice que $s(\epsilon)$ es una o chica de $\delta(\epsilon)$ cuando ϵ tiende a cero y se escribe*

$$s(\epsilon) = o(\delta(\epsilon)) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

si y sólo si para toda $\mu > 0$ se cumple $|s(\epsilon)| \leq \mu|\delta(\epsilon)|$ para todo $\epsilon \in D$ suficientemente cerca de cero.

Definición 1.15.2. *Se dice que $s(\epsilon)$ es despreciable frente a $\delta(\epsilon)$ cuando ϵ tiende a cero y se escribe*

$$s(\epsilon) \ll \delta(\epsilon) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

si y sólo si $s(\epsilon) = o(\delta(\epsilon))$ ($\epsilon \rightarrow 0$). Equivalentemente se dice que $\delta(\epsilon)$ es dominante frente a $s(\epsilon)$ y se escribe

$$\delta(\epsilon) \gg s(\epsilon) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

Las ideas de desprecio y dominación se refiere al comportamiento de la combinación lineal $c_1\delta(\epsilon) + c_2s(\epsilon)$ donde $c_1 \neq 0$ y c_2 son dos constante reales. Cuando ϵ tienda a cero, si $s(\epsilon) = o(\delta(\epsilon))$, esta combinación se comporta esencialmente como su primer término $c_1\delta(\epsilon)$, es decir, $c_1\delta(\epsilon) + c_2s(\epsilon) \approx c_1\delta(\epsilon)$ cuando ϵ tiende a cero.

Definición 1.15.3. *Se dice que $s(\epsilon)$ es una O grande de $\delta(\epsilon)$ cuando ϵ tiende a cero y se escribe*

$$s(\epsilon) = O(\delta(\epsilon)) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que $|s(\epsilon)| \leq C|\delta(\epsilon)|$ para todo $\epsilon \in D$ suficientemente cerca de cero.

Definición 1.15.4. Se dice que $s(\epsilon)$ es estrictamente del orden de $\delta(\epsilon)$ cuando ϵ tiende a cero y se escribe

$$s(\epsilon) = O_s(\delta(\epsilon)) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

si y sólo si $s(\epsilon) = O(\delta(\epsilon))$ y $s(\epsilon) \neq o(\delta(\epsilon))$.

Definición 1.15.5. Se dice que la sucesión de funciones $\{\delta_n\}_n$ es una sucesión asintótica cuando ϵ tiende a cero si y sólo si existe $\bar{\epsilon} > 0$ tal que $\delta_n \neq 0$ para todo $\epsilon \in (-\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}) \setminus \{0\}$ y todo n , y

$$\delta_{n+1}(\epsilon) = o(\delta_n(\epsilon)) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

para todo n

Por ejemplo, $\epsilon^{-1}, 1, \epsilon, \epsilon^2, \epsilon^3, \dots$ es una sucesión asintótica cuando ϵ tiende a cero.

Definición 1.15.6. Dadas una función s , una sucesión asintótica $\{\delta_n\}_n$ y una sucesión numérica $\{x_n\}_n$, se dice que $\sum_n x_n \delta_n(\epsilon)$ es una aproximación asintótica de s cuando ϵ tienda a cero y se escribe

$$s(\epsilon) \sim \sum_n x_n \delta_n(\epsilon) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

si y sólo si

$$s(\epsilon) = \sum_{n \leq m} x_n \delta_n(\epsilon) + o(\delta_m(\epsilon)) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

para todo m .

En lugar de “aproximación asintótica”, también se le llama “representación asintótica” o “expansión asintótica”. Las funciones δ_n de la sucesión asintótica se llaman *funciones de escala*. Lo común es usar aproximaciones asintóticas con muy pocos términos.

CAPÍTULO 2

MODELO FÍSICO-MATEMÁTICO

El objetivo principal de este capítulo se fundamentó en presentar el modelo físico matemático y además se determinan las ecuaciones gobernantes y condiciones de fronteras pertinentes a dicho modelo.

En esta investigación, el problema consiste de una película de fluido anular (denominada fluido 2) alrededor de un fluido central (denominado fluido 1) en un cilindro horizontal de longitud infinita, $-\infty < z < +\infty$, con las siguientes características: el fluido 1 tiene un espesor de radio R_1 , viscosidad μ_1 y densidad ρ_1 , mientras que el fluido 2 tiene viscosidad μ_2 , densidad ρ_2 y espesor $R_2 - R_1$, donde R_2 es el radio del tubo. El flujo es inducido por un gradiente de presión constante a lo largo del eje axial $\nabla p = -F\vec{e}_z$, donde $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ y $F \equiv |\nabla p| > 0$ es una constante. En la interfaz entre los dos fluidos hay presencia de surfactantes insolubles y se denota la concentración de surfactantes (en unidades de masa de surfactantes por unidad de área interfacial) por Γ^* .

A continuación se presentan las ecuaciones utilizadas para la solución del problema fluidodinámico en presencia de surfactantes insolubles.

2.1 Ecuaciones que rigen el problema matemático

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de este trabajo consiste en determinar las ecuaciones gobernantes de un flujo centro anular de espesor uniforme en el estado no perturbado el cual se encuentra en el interior de un tubo cilíndrico rodeado de una película de fluido anular.

Observación 2.1.1. *Todas las funciones que intervienen en este trabajo se suponen tan regulares como sea necesario para que los resultados presentados sean válidos.*

Se usarán coordenadas cilíndricas $\vec{x} = (r, \theta, z)$ con componentes de velocidad asociada $\vec{V}_1 = (u_1, v_1, w_1)$ para el fluido central y $\vec{V}_2 = (u_2, v_2, w_2)$ para la película

de fluido anular y se denotará la interfaz entre los fluidos por $r = S(z, \theta, t)$. Cada punto sobre la interfaz tiene como vector posición

$$x \equiv S\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

donde $\vec{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\vec{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$. Así, el vector \vec{x} se puede escribir en coordenadas cilíndricas como

$$\vec{x} \equiv (S, 0, z).$$

Como condición inicial que permita al sistema evolucionar a partir de su estado no perturbado se considera también que la interfaz se encuentra afectada por una perturbación sinusoidal de amplitud δ (adimensional) sobre la posición de la interfaz sin perturbar, que permita al sistema evolucionar a partir de su estado de equilibrio y, se define H en función de la posición de la interfaz, $h = h(z, \theta, t)$, la cual se encuentra parametrizada en función de su distancia con respecto a la pared del tubo, de la siguiente manera $H(z, t) = \frac{h(z, \theta, t)}{R_1}$, entonces la interfaz dimensional $S(z, \theta, t)$ puede escribirse como

$$S(z, \theta, t) = R_1(1 + \delta H) \tag{2.1}$$

Por otro lado, como la presencia de surfactantes disminuye la tensión interfacial. Se desea buscar una relación funcional entre la tensión interfacial, σ , y la concentración de surfactante insoluble, Γ , esta relación viene dada por la ecuación de estado de superficie de la tensión interfacial

$$\sigma \equiv \sigma(\Gamma) = \sigma_0 + \mathcal{R}T\Gamma_\infty \ln(1 - \Gamma), \tag{2.2}$$

donde σ_0 es la tensión interfacial de la interfaz limpia (sin surfactantes), \mathcal{R} es la constante de los gases ideales, T es la temperatura y Γ_∞ es la máxima capacidad de surfactantes que puede soportar la interfaz. La concentración de surfactantes insolubles adimensional está dada por $\Gamma = \frac{\Gamma^*}{\Gamma_\infty}$.

Para el análisis de los resultados será útil comprender cómo se relaciona la ecuación de estado (2.2) con su versión linealizada. Realizando una expansión de

$\ln(1 - \Gamma)$ en serie de McClaurin se obtiene la relación lineal entre la tensión interfacial σ y la concentración de surfactantes Γ expresada como sigue

$$\sigma(\Gamma) \cong \sigma_0(1 - \beta\Gamma) \quad (2.3)$$

donde $\beta = \frac{\mathcal{R}T\Gamma_\infty}{\sigma_0}$.

Para la evolución de la interfaz se comienza con las ecuaciones de Navier-Stokes (1.3) y de continuidad para flujos viscosos e incompresibles (1.2):

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\theta + wu_z) &= -p_r + \mu \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}v_\theta \right) + \rho \frac{v^2}{r} \\ \rho(v_t + uv_r + \frac{v}{r}v_\theta + wv_z) &= -\frac{p_\theta}{r} + \mu \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2}u_\theta \right) - \rho \frac{uv}{r} \\ \rho(w_t + ww_r + \frac{v}{r}w_\theta + ww_z) &= -p_z + \mu \nabla^2 w \\ \frac{1}{r}(ru)_r + \frac{1}{r}v_\theta + w_z &= 0 \end{aligned}$$

con viscosidad μ_1 , densidad ρ_1 y presión p_1 para el centro y viscosidad μ_2 , densidad ρ_2 y presión p_2 para la película.

2.2 Condiciones de frontera para el problema físico

Para completar el sistema de ecuaciones del modelo matemático se requiere de la condición de no deslizamiento en la pared del tubo (1.7), es decir, $\vec{V}_2 = 0$ para $r = R_2$, la continuidad de velocidad en la interfaz $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ cuando $r = S(z, \theta, t)$ y partiendo de la premisa de que el fluido no atraviesa la interfaz y ésta constituye una superficie material; se impone la condición cinemática en la interfaz $r = S(z, \theta, t)$

$$\frac{D(r - S(z, \theta, t))}{Dt} = 0.$$

Usando la definición de derivada total se tiene

$$\begin{aligned} \frac{D(r - S(z, \theta, t))}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(r - S(z, \theta, t)) + u \frac{\partial}{\partial r}(r - S(z, \theta, t)) + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(r - S(z, \theta, t)) \\ &+ w \frac{\partial}{\partial z}(r - S(z, \theta, t)) \\ &= -S_t + u - \frac{v}{r}S_\theta - wS_z = 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$u = S_t + \frac{v}{r}S_\theta + wS_z. \quad (2.4)$$

También se requiere un **balance de los esfuerzos normales**

$$[\underline{\vec{n}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\vec{n}}]_1^2 = \sigma(\nabla_s \cdot \underline{\vec{n}}),$$

y **balance de los esfuerzos tangenciales**

$$[\underline{\vec{t}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\vec{n}}]_1^2 = -\nabla_s \sigma \cdot \underline{\vec{t}},$$

donde $[\cdot]_1^2 = (\cdot)_2 - (\cdot)_1$, $\underline{\underline{T}}$ es el tensor esfuerzo, ∇_s es el operador gradiente de superficie, $\underline{\vec{n}}$ es el vector normal unitario en cada punto sobre la región 1 (centro) y $\underline{\vec{t}}$ es el vector tangente unitario.

Para la evolución de la concentración de surfactantes, se inicia a partir de la ecuación de difusión-convección de transporte de surfactantes ([27])

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \nabla_s \Gamma + \nabla_s \cdot (\Gamma \underline{u}_s) - D_s \nabla_s^2 \Gamma + \Gamma \kappa \vec{V} \cdot \underline{\vec{n}} = 0,$$

donde \vec{x} es el vector posición de la interfaz, \underline{u}_s es la velocidad de la superficie en la interfaz, D_s es la constante de difusión de surfactantes interfacial y κ es la curvatura de la interfaz.

El vector \underline{u}_s sobre el plano tangente de la superficie S se define de la siguiente manera

$$\underline{u}_s = u^1 \vec{t}_1 + u^2 \vec{t}_2, \quad (2.5)$$

donde \vec{t}_1 y \vec{t}_2 son vectores básicos contravariantes de \underline{u}_s en cada punto de la superficie y u^1 y u^2 son las componentes de \underline{u}_s en la dirección de \vec{t}_1 y \vec{t}_2 , respectivamente.

Los vectores \vec{t}_1 y \vec{t}_2 vienen dados por las derivadas parciales del vector posición \vec{x} , esto es

$$\begin{aligned} \vec{t}_1(\theta, z) &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial z} = S' \vec{e}_r + \vec{e}_z = (S', 0, 1), \quad \text{con } S' = \frac{\partial S}{\partial z} \\ \vec{t}_2(\theta, z) &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \frac{\partial (S \vec{e}_r + z \vec{e}_z)}{\partial \theta} = S_\theta \vec{e}_r + S \vec{e}_\theta = (S_\theta, S, 0); \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\underline{u}_s &= u^1 \vec{t}_1 + u^2 \vec{t}_2 = u^1(S', 0, 1) + u^2(S_\theta, S, 0) \\ &= (S'u^1 + S_\theta u^2, Su^2, u^1).\end{aligned}$$

Para encontrar un vector normal unitario, \vec{n} , se introducen las componentes co-variantes, $h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}$, ([26]) del tensor métrico de superficie simétrico

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix},$$

definidas por

$$\begin{aligned}h_{11} &= \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_1 = (S', 0, 1) \cdot (S', 0, 1) = (S')^2 + 1 \\ h_{12} &= h_{21} = \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1 = (S_\theta, S, 0) \cdot (S', 0, 1) = S_\theta S' \\ h_{22} &= \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_2 = (S_\theta, S, 0) \cdot (S_\theta, S, 0) = S_\theta^2 + S^2.\end{aligned}$$

El determinante, $|h|$, del tensor métrico de superficie se determina usando la raíz cuadrada de la norma del producto vectorial $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2$. Éste último conduce a

$$|h| = h_{11}h_{22} - (h_{12})^2 = S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2.$$

Así, se obtiene el vector unitario normal a la superficie

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{|h|}} \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (-S, S_\theta, SS'). \quad (2.6)$$

El vector tangente unitario a la superficie, en la dirección axial, es dado por

$$\vec{t} = \frac{\vec{t}_1}{|\vec{t}_1|} = \frac{\vec{t}_1}{\sqrt{\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (S')^2}} (S', 0, 1). \quad (2.7)$$

A fin de calcular el operador gradiente de superficie, ∇_s , se definen los vectores básicos recíprocos, \vec{t}^1 y \vec{t}^2 , en términos de los vectores básicos contravariantes, \vec{t}_1 y \vec{t}_2 , como sigue

$$\begin{aligned}\vec{t}^1 &= \frac{-1}{\sqrt{|h|}} \vec{n} \times \vec{t}_2 = -\frac{1}{|h|} (\vec{t}_1 \times \vec{t}_2) \times \vec{t}_2 = \frac{1}{|h|} [(\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_2) \vec{t}_1 - (\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2) \vec{t}_2] \\ &= \frac{1}{|h|} (h_{22} \vec{t}_1 - h_{12} \vec{t}_2) = \frac{1}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} (S^2 S', -SS_\theta S', S^2 + S_\theta^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{t}^2 &= \frac{1}{\sqrt{|h|}} \vec{n} \times \vec{t}_1 = \frac{1}{|h|} (\vec{t}_1 \times \vec{t}_2) \times \vec{t}_1 = \frac{1}{|h|} [(\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_1) \vec{t}_2 - (\vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1) \vec{t}_1] \\
&= \frac{1}{|h|} (h_{11} \vec{t}_2 - h_{12} \vec{t}_1) = \frac{1}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} (S_\theta, S[(S')^2 + 1], -S_\theta S').
\end{aligned}$$

(Véase [26])

De la parametrización de la superficie, el operador gradiente de superficie, ∇_s , basado sobre vectores básicos recíprocos \vec{t}^1 y \vec{t}^2 , está dado por

$$\nabla_s \equiv \vec{t}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \vec{t}^2 \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Así, el gradiente de superficie de Γ queda expresado como

$$\nabla_s \Gamma = \frac{(S^2 S', -SS_\theta S', S^2 + S_\theta^2)}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{(S_\theta, S[(S')^2 + 1], -S_\theta S')}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}. \quad (2.8)$$

Se define un vector $\vec{\xi}(p, q)$ en su forma contravariante

$$\vec{\xi}(p, q) = \xi^1(p, q) \vec{t}_1 + \xi^2(p, q) \vec{t}_2 + \xi^3(p, q) \vec{n};$$

y la divergencia de $\vec{\xi}(p, q)$ viene dada por ([26])

$$\nabla_s \cdot \vec{\xi} = \frac{1}{\sqrt{|h|}} \left[\frac{\partial(\sqrt{|h|} \xi^1)}{\partial p} + \frac{\partial(\sqrt{|h|} \xi^2)}{\partial q} \right] + \xi^3 \kappa, \quad (2.9)$$

donde κ es el doble de la curvatura media de la interfaz. De (2.5), se tiene que $\underline{u}_s \Gamma = u^1 \Gamma \vec{t}_1 + u^2 \Gamma \vec{t}_2$, entonces la divergencia de \underline{u}_s es

$$\nabla \cdot (\underline{u}_s \Gamma) = \frac{1}{\sqrt{|h|}} \left[\frac{\partial(\sqrt{|h|} u^1 \Gamma)}{\partial z} + \frac{\partial(\sqrt{|h|} u^2 \Gamma)}{\partial \theta} \right], \quad (2.10)$$

y tomando el producto escalar de $\underline{u}_s \Gamma$ con \vec{t}^1 , se obtiene

$$\begin{aligned}
u^1 \Gamma = \underline{u}_s \Gamma \cdot \vec{t}^1 &= \frac{\Gamma}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \underline{u}_s \cdot \vec{t}^1 \\
&= \frac{\Gamma}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \underline{u}_s \cdot (S^2 S', -SS_\theta S', S^2 + S_\theta^2) \\
&= \frac{\Gamma}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} (S^2 S' u - SS_\theta S' v + (S^2 + S_\theta^2) w).
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Análogamente, tomando el producto escalar de $\underline{u}_s \Gamma$ con \vec{t}^2 , se tiene

$$\begin{aligned}
u^2 \Gamma = \underline{u}_s \Gamma \cdot \vec{t}^2 &= \frac{\Gamma}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \underline{u}_s \cdot \vec{t}^2 \\
&= \frac{\Gamma}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \underline{u}_s \cdot (S_\theta, S[(S')^2 + 1], -S_\theta S') \\
&= \frac{\Gamma}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} (S_\theta u + S[(S')^2 + 1]v - S_\theta S' w),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

sustituyendo (2.11) y (2.12) en (2.10) se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla_s \cdot (\underline{u}_s \Gamma) &= \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (S^2 S' u - S S_\theta S' v \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (S^2 + S_\theta^2) w) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (S_\theta u + S[(S')^2 + 1]v - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. S_\theta S' w) \right) \right].
\end{aligned}$$

El vector posición también satisface que

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = (S_t, 0, 0) \quad \text{donde} \quad S_t = \frac{\partial S}{\partial t},$$

el cual combinado con (2.8) resulta

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \cdot \nabla_s \Gamma &= (S_t, 0, 0) \cdot \left[\frac{(S^2 S', -S S_\theta S', S^2 + S_\theta^2)}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{(S_\theta, S[(S')^2 + 1], -S_\theta S')}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right] \\
&= \frac{S_t S' S^2}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + \frac{S_t S_\theta}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \\
&= \frac{S_t}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \left[S' S^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right]
\end{aligned}$$

En lo que sigue se calcula una expresión para $\nabla_s^2 \Gamma$, la cual se obtiene usando las definiciones de gradiente de superficie y divergencia de superficie, dadas

anteriormente. Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\nabla_s^2 \Gamma &\equiv \nabla_s \cdot (\nabla_s \Gamma) \\
&= \nabla_s \cdot \left\{ \frac{1}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \left[\left(S^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - S_\theta \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \vec{t}_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + S' \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \vec{t}_2 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

y aplicando la definición de divergencia (2.9) a (2.13) se tiene

$$\begin{aligned}
\nabla_s^2 \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left(S^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - S_\theta \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + S' \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene una expresión para el Laplaciano de superficie, ∇_s^2 , de la concentración de surfactantes Γ , como

$$\begin{aligned}
\nabla_s^2 \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left(S^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - S_\theta \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + S' \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

La curvatura, κ , dada en (2.9), es la divergencia de la superficie del vector normal unitario, es decir, $\kappa = \nabla_s \cdot \vec{n}$; y es dada por

$$\kappa = \nabla_s \cdot \vec{n} = \frac{SS_\theta[1 + (S')^2] + SS''(S^2 + S_\theta^2) - S^2[1 + (S')^2] - 2S_\theta^2 - 2SS_\theta S'(S')_\theta}{([S^2 + S_\theta^2 + S^2(S')^2]^{3/2})} \tag{2.14}$$

(véase [14]).

A continuación, se obtiene el último término de la ecuación de transporte de surfactantes como una función de la variable de la interfaz, S , y las componentes de velocidad, u , v y w .

$$\begin{aligned}
\kappa \vec{V} \cdot \vec{n} &= \frac{SS_\theta[1 + (S')^2] + SS''(S^2 + S_\theta^2) - S^2[1 + (S')^2] - 2S_\theta^2 - 2SS_\theta S'(S')_\theta}{([S^2 + S_\theta^2 + S^2(S')^2]^{3/2})} \\
&= (u, v, w) \cdot \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (-S, S_\theta, SS') \\
&= \frac{1}{(S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2)^2} [SS_\theta[1 + (S')^2] + SS''(S^2 + S_\theta^2) - S^2[1 + (S')^2] \\
&\quad - 2S_\theta^2 - 2SS_\theta S'(S')_\theta] (-Su + S_\theta v + SS'w).
\end{aligned}$$

Se introduce el tensor de esfuerzo para flujos incompresibles, $T \equiv T_{ij}$ en una versión equivalente a la dada por ([14]) de la siguiente manera

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (2.15)$$

donde los e_{ij} se definen como

$$\begin{aligned}
e_{11} = e_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{22} = e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad e_{33} = e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\
e_{12} = e_{r\theta} &= \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad e_{23} = e_{\theta z} = \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\
e_{31} = e_{zr} &= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r},
\end{aligned}$$

y $e_{ij} = e_{ji}$. La proyección de todos los $[e_{ij}]$ sobre el vector normal, \vec{n} , puede ser

expresada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
[e_{ij}] \cdot \vec{n} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \\
&\cdot \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \begin{bmatrix} -S \\ S_\theta \\ SS' \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left(-S \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) S_\theta + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) SS' - \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) S + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) S_\theta + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) SS', - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) S + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) S_\theta + SS' \frac{\partial w}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

La proyección aplicada al vector normal, \vec{n} , es $[\delta_{ij}] \cdot \vec{n} = \vec{n}$. Tomando el producto escalar entre el tensor esfuerzo (2.15) y el vector normal, considerando además la expresión anterior de la proyección de todos los $[e_{ij}]$ sobre el vector normal, la proyección del tensor, \underline{T} sobre el vector normal puede entonces ser escrita explícitamente como

$$\begin{aligned}
\underline{T} \cdot \vec{n} &= -p\delta_{ij} \cdot \vec{n} + 2\mu e_{ij} \cdot \vec{n} \\
&= -p\vec{n} + \frac{2\mu}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left(-S \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) S_\theta + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) SS', - \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) S + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) S_\theta + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right) SS', - \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) S + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) S_\theta + SS' \frac{\partial w}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Ahora se determinan las expresiones $\vec{n} \cdot \underline{T} \cdot \vec{n}$ y $\vec{t} \cdot \underline{T} \cdot \vec{n}$ las cuales se obtienen

tomando el producto escalar entre (2.6) con (2.16) y (2.7) con (2.16), respectivamente. Esto es,

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} &= \vec{n} \cdot (-p\vec{n}) + \frac{2\mu}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (-S, S_\theta, SS') \\
&\cdot \left(-S \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) S_\theta + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) SS', \right. \\
&- \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) S + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) S_\theta + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) SS', \\
&- \left. \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) S + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) S_\theta + SS' \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&= -p + \frac{2\mu}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \left[S^2 \frac{\partial u}{\partial r} - 2SS_\theta \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - 2S^2 S' \right. \\
&\left. \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2SS_\theta S' \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + S_\theta^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \right. \\
&\left. + S^2 (S')^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{t} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} &= \vec{t} \cdot (-p\vec{n}) + \frac{2\mu}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \frac{1}{\sqrt{(S')^2 + 1}} (-S', 0, 1) \\
&\cdot \left(-S \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) S_\theta + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) SS', \right. \\
&- \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) S + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) S_\theta + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) SS', \\
&- \left. \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) S + \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) S_\theta + SS' \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\mu}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \sqrt{(S')^2 + 1}} \left[2SS' \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + S \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right. \\
&\left. \left((S')^2 - 1 \right) + S_\theta \left(S' \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\nabla_s \cdot \vec{n} = \kappa$, usando la expresión de curvatura (2.14) sigue que

$$\sigma(\Gamma) \nabla_s \cdot \vec{n} = \frac{\sigma(\Gamma)}{[S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2]^{3/2}} \left\{ SS_{\theta\theta}((S')^2 + 1) + SS''(S^2 + S_\theta^2) - S^2((S')^2 + 1) - 2S_\theta^2 - 2SS_\theta S'(S')_\theta \right\}$$

y usando la definición de gradiente de superficie (2.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla_s \sigma \cdot \vec{t} &= \left[\frac{(S^2 S', -SS_\theta S', S^2 + S_\theta^2)}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{(S_\theta, S[(S')^2 + 1], -S_\theta S')}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] \\
&\cdot \frac{1}{\sqrt{(S')^2 + 1}} (S', 0, 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + (S')^2}} \frac{\partial \sigma}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando estos desarrollos se tiene que el balance de los esfuerzos normales es

$$\begin{aligned}
&\left\{ -p + \frac{2\mu_i}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \left[S^2 \frac{\partial u}{\partial r} - 2SS_\theta \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - 2S^2 S' \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2SS_\theta S' \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + S_\theta^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + S^2 (S')^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\}_1^2 \\
&= \frac{\sigma(\Gamma)}{[S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2]^{3/2}} \left\{ SS_{\theta\theta}((S')^2 + 1) + SS''(S^2 + S_\theta^2) - S^2((S')^2 + 1) \right. \\
&\quad \left. - 2S_\theta^2 - 2SS_\theta S'(S')_\theta \right\}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $i = 1, 2$, y el balance de los esfuerzos tangenciales es

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{\mu_i}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \sqrt{(S')^2 + 1}} \left[2SS' \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + S \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) ((S')^2 - 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + S_\theta \left(S' \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \right] \right\}_1^2 = -\frac{1}{\sqrt{1 + (S')^2}} \frac{\partial \sigma}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

donde $i = 1, 2$.

La ecuación de transporte de surfactantes insolubles es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= \frac{S_t}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \left[S' S^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \\
&\quad \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (S^2 S' u - S S_\theta S' v + (S^2 + S_\theta^2) w) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (S_\theta u + S[(S')^2 + 1] v - S_\theta S' w) \right) \right] \\
&= D_s \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left(S^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. S_\theta \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. S' \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \right) \right] + \frac{\Gamma}{(S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2)^2} [S S_\theta [1 + (S')^2] \\
&\quad + S S'' (S^2 + S_\theta^2) - S^2 [1 + (S')^2] - 2 S_\theta^2 - 2 S S_\theta S' (S')_\theta] \\
&\quad (-S u + S_\theta v + S S' w) = 0. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3

DERIVACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EVOLUCIÓN

En este capítulo se presentan en su forma no dimensional las ecuaciones gobernantes del problema y las condiciones de frontera, que se determinaron en el capítulo anterior. A partir de éstas se calcula la solución del estado básico, se realiza un análisis asintótico del problema y se derivan las ecuaciones de evolución de la interfaz y de transporte de surfactantes.

3.1 Variables adimensionales

Para estudiar en forma sistemática las ecuaciones que modelan el problema, es necesario expresarlas en forma no dimensional. De este modo, la disparidad de las escalas se manifiesta en la existencia de números no dimensionales pequeños o grandes según el caso. Para ello, se selecciona como longitud característica el radio R_1 . Las velocidades se expresan en forma no dimensional considerando la velocidad a lo largo del eje del cilindro W_0 , el tiempo por R_1/W_0 , la tensión interfacial por la tensión interfacial σ_0 en ausencia de surfactantes (la cual se conoce como la tensión interfacial ‘limpia’) y la presión por $\rho_1 W_0^2$ (donde ρ_1 es la densidad del fluido 1).

Ahora, se escriben las ecuaciones no dimensional del modelo. Para las ecuaciones de Navier-Stokes el proceso de adimensionalización introduce el **número de Reynolds** (Re_i), $i = 1$ para el fluido del centro e $i = 2$ para la película, definido por $Re_i = \frac{\rho_i W_0 R_1}{\mu_i}$ correspondiendo a la importancia relativa de las fuerzas inerciales y viscosas actuando por unidad de volumen del fluido i . También aparece la razón de densidad $\xi_i = \frac{\rho_1}{\rho_i}$. La adimensionalización de la ecuación de transporte de surfactantes produce el **número de Peclet** Pe el cual define la razón de transporte entre convección y difusión y es dado por $Pe = \frac{W_0 R_1}{D_s}$. En el balance de esfuerzos normales, la adimensionalización da un **parámetro de tensión superficial** $J = \frac{\sigma_0 R_1}{\rho_1 \nu_1^2}$. El **número capilar** (Ca) y el **radio de viscosidad** m surgen en la adi-

mensionalización del balance de esfuerzos tangenciales. El número capilar es dado por $Ca = \frac{\mu_1 W_0}{\sigma_0}$. Éste mide la razón relativa entre la velocidad del flujo básico y la velocidad capilar. La razón de viscosidad es dada por $m = \frac{\mu_2}{\mu_1}$, la razón de la viscosidad de la película respecto a la viscosidad del fluido del centro. Note que el número capilar puede ser expresado en términos de Re_1 y J como $Ca = \frac{Re_1}{J}$ y la razón de viscosidad en términos de Re_1 y Re_2 como $m = \frac{Re_1}{\xi_2 Re_2}$.

A menos que se diga lo contrario, se usará la misma notación para variables dimensionales y adimensionales. Las ecuaciones adimensionales de Navier-Stokes y de continuidad vienen dadas por

$$(u_i)_t + u_i(u_i)_r + \frac{v_i}{r}(u_i)_\theta + w_i(u_i)_z = -\xi_i(p_i)_r + \frac{v_i^2}{r} + \frac{1}{Re_i} \left(\nabla^2 u_i - \frac{u_i}{r^2} - \frac{2}{r^2}(v_i)_\theta \right) \quad (3.1)$$

$$(v_i)_t + u_i(v_i)_r + \frac{v_i}{r}(v_i)_\theta + w_i(v_i)_z = -\xi_i \frac{(p_i)_\theta}{r} - \frac{u_i v_i}{r} + \frac{1}{Re_i} \left(\nabla^2 v_i - \frac{v_i}{r^2} + \frac{2}{r^2}(u_i)_\theta \right) \quad (3.2)$$

$$(w_i)_t + u_i(w_i)_r + \frac{v_i}{r}(w_i)_\theta + w_i(w_i)_z = -\xi_i(p_i)_z + \frac{1}{Re_i} \nabla^2 w_i \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{r}(ru_i)_r + \frac{1}{r}(v_i)_\theta + (w_i)_z = 0 \quad (3.4)$$

donde $i = 1, 2$ corresponde al centro y a la película, respectivamente.

Aplicando el mismo proceso y usando (2.3), se obtiene para el balance de los esfuerzos normales (2.18),

$$\left\{ -p \left\{ S^2 [(S')^2 + 1] + S_\theta^2 \right\} + \frac{2}{\xi_i Re_i} \left[S^2 \frac{\partial u}{\partial r} - 2SS_\theta \left(\frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - 2S^2 S' \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2SS_\theta S' \left(\frac{1}{2r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + S_\theta^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) + S^2 (S')^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \right\}_1^2 = \frac{J(1 - \beta\Gamma)}{Re_1^2} \cdot \frac{1}{[S^2 [(S')^2 + 1] + S_\theta^2]^{1/2}} \left\{ SS_{\theta\theta} ((S')^2 + 1) + SS'' (S^2 + S_\theta^2) - S^2 ((S')^2 + 1) - 2S_\theta^2 - 2SS_\theta S' (S')_\theta \right\} \quad (3.5)$$

donde J es el **parámetro de tensión superficial** y Ca es el **número Capilar**.
Para el balance de los esfuerzos tangenciales (2.19), se tiene

$$\begin{aligned} & \left\{ m_i \left[2SS' \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) + S \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) ((S')^2 - 1) \right. \right. \\ & \left. \left. + S_\theta \left(S' \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \right] \right\}_1^2 = \frac{\beta \Gamma_z}{Ca} \sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $m_1 = 1$, $m_2 = m$; y $m = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ es la razón de las viscosidades.

La condición cinemática (2.4) adimensionalizada, es

$$u = S_t + \frac{v}{r} S_\theta + w S_z, \quad (3.7)$$

la condición de no deslizamiento en las paredes del tubo queda expresada como:

$$u_2 = v_2 = w_2 = 0, \quad \text{en } r = \frac{R_2}{R_1} \quad (3.8)$$

y la continuidad de velocidades como

$$\{u_i\}_1^2 = 0, \quad \{u_i\}_1^2 = 0, \quad \{v_i\}_1^2 = 0 \quad \text{sobre } r = S(z, \theta, t). \quad (3.9)$$

La ecuación de transporte de surfactantes (2.20) en su forma no dimensional,
es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} & - \frac{S_t}{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2} \left[S' S^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \\ & \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (S^2 S' u - S S_\theta S' v + (S^2 + S_\theta^2) w) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} (S_\theta u + S[(S')^2 + 1] v - S_\theta S' w) \right) \right] \\ & - \frac{1}{Pe} \frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left(S^2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. S_\theta \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2}} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + S' \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(S' \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} - S_\theta \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \Bigg] + \frac{\Gamma}{(S^2[(S')^2 + 1] + S_\theta^2)^2} [SS_{\theta\theta}[1 + (S')^2] \\
& + SS''(S^2 + S_\theta^2) - S^2[1 + (S')^2] - 2S_\theta^2 - 2SS_\theta S'(S')_\theta] \\
& (-Su + S_\theta v + SS'w) = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2 Solución del estado básico

Para realizar un análisis de estabilidad se comienza por encontrar la solución del flujo en el estado básico conducido por un gradiente de presión constante a lo largo del eje axial del cilindro de izquierda a derecha, definido en el Capítulo 2 como $\nabla p = -F\vec{e}_z$, donde $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ y $F \equiv |\nabla p| > 0$, cuya forma no dimensional es $\nabla p = p_z = -\frac{FR_1}{\rho_1 W_0^2} \vec{e}_z$. En el estado básico (estacionario) $w_{it} = 0$, $u_i = v_i = 0$, $\vec{V}_\theta = 0$, $w_{i,r} \neq 0$, la distribución de surfactantes es constante $\Gamma = \Gamma_0$ y la interfaz no dimensional es $S = 1$, es decir, sin perturbación respecto del estado básico.

Sustituyendo estas condiciones en las ecuaciones de Navier-Stokes (3.1) y (3.2) se tiene, respectivamente, de manera directa que $-(p_i)_r = 0$ y $-(p_i)_\theta = 0$. Por tanto p_i no es función ni de r ni de θ .

De la ecuación de continuidad (3.4) $(w_i)_z = 0$. Por otro lado, de la ecuación de Navier-Stokes (3.3) se desprende que

$$(p_i)_z = \frac{1}{\xi_i Re_i} \nabla^2 w_i. \tag{3.11}$$

Ahora, de la ecuación de transporte de surfactantes (3.10) como $\Gamma = \Gamma_0$ es una constante, $S = 1$ y con las condiciones dadas para el estado básico se tiene de manera inmediata que Γ satisface esta ecuación ya que $\Gamma_z = \Gamma_\theta = \Gamma_t = 0$ y $S' = S_\theta = 0$. En el balance de los esfuerzos tangenciales (3.6) como $S = 1$, $S' = S_\theta = 0$, $u_i = v_i = 0$, $(w_i)_z = 0$, $\Gamma = \Gamma_0$, $\Gamma_z = 0$ se tiene

$$\left| m_2 w_{2,r} - m_1 w_{1,r} \right|_{r=1} = 0.$$

Como $m_1 = 1$, $m_2 = m = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{Re_1}{\xi_2 Re_2}$, multiplicando por $\xi_2 Re_2$, la expresión anterior

se puede escribir como

$$Re_1 w_{2r} \Big|_{r=1} = \xi_2 Re_2 w_{1r} \Big|_{r=1}. \quad (3.12)$$

Sustituyendo $p_z = -\frac{FR_1}{\rho_1 W_0^2}$ en (3.11), y considerando el laplaciano (∇^2) en coordenadas cilíndricas (1.4) se tiene

$$-\frac{FR_1}{\rho_1 W_0^2} = \frac{1}{\xi_i Re_i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w_i}{\partial r} \right),$$

pues, $(w_i)_z = (w_i)_\theta = 0$. Sustituyendo $Re_i = \frac{\rho_i W_0 R_1}{\mu_i}$ en la expresión anterior e integrando con respecto a r , luego, dividiendo por r e integrando nuevamente con respecto a r , se obtiene

$$w_i = -\frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_i W_0} r^2 + A_i \ln(r) + B_i, \quad (3.13)$$

donde $i = 1$ corresponde al centro e $i = 2$ a la película.

Como la velocidad del centro, w_1 , debe ser acotada, cuando r se aproxima al eje axial; es decir, cuando $r \rightarrow 0$, y como la expresión

$$w_1 = -\frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_1 W_0} r^2 + A_1 \ln(r) + B_1$$

tiende a infinito cuando $r \rightarrow 0$, debido a que $\lim_{r \rightarrow 0} \ln r = \infty$, entonces $A_1 = 0$; y de la ecuación (3.12) obtenida del balance de los esfuerzos tangenciales se tiene que

$$-\frac{1}{2} \frac{FR_1^2 Re_1}{\mu_2 W_0} + \frac{1}{2} \frac{FR_1^2 \xi_2 Re_2}{\mu_1 W_0} = A_2 Re_1$$

de ahí que $A_2 = 0$. Ahora, de la condición de no deslizamiento en las paredes del tubo (3.8); es decir, $w_2 \Big|_{r=a} = 0$ cuando $a = \frac{R_2}{R_1}$, resulta

$$0 = -\frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2 W_0} a^2 + B_2 \implies B_2 = \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2 W_0} a^2$$

y de la continuidad de la velocidad axial en la interfaz; es decir, $w_1 \Big|_{r=1} = w_2 \Big|_{r=1}$ se tiene

$$-\frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_1 W_0} + B_1 = -\frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2 W_0} + \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2 W_0} a^2,$$

sigue que,

$$B_1 = \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_1 W_0} - \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2 W_0} (1 - a^2).$$

Ahora, sustituyendo las expresiones encontradas para A_1 , A_2 , B_1 y B_2 en (3.13), se tiene que las velocidades w_1 y w_2 en forma explícita son

$$w_1 = -\frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_1 W_0} (r^2 - 1) - \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2 W_0} (1 - a^2), \quad (3.14)$$

$$w_2 = -\frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2 W_0} (r^2 - a^2). \quad (3.15)$$

Por otro lado, la velocidad de la interfaz w_1 evaluada en $r = 0$ es igual a la velocidad central W_0 , la cual se sabe de la adimensionalización que es $w_1(r = 0) = 1$. Por lo tanto,

$$1 = \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_1 W_0} - \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2 W_0} (1 - a^2) \implies W_0 = \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_1} - \frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2} (1 - a^2)$$

$$W_0 = \frac{FR_1^2}{4\mu_1\mu_2} [\mu_2 - \mu_1 + \mu_1 a^2] = \frac{FR_1^2}{4\mu_2} \left[\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 + a^2 \right];$$

como $m = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ entonces, la expresión final para W_0 es

$$W_0 = \frac{FR_1^2}{4\mu_2} [a^2 + m - 1]. \quad (3.16)$$

Sustituyendo W_0 dado en (3.16) en las expresiones (3.14) y (3.15) se tiene

$$w_1 = \frac{-mr^2 + m + a^2 - 1}{a^2 + m - 1} = \frac{a^2 + m - 1 - mr^2}{a^2 + m - 1}$$

lo que se puede expresar como

$$w_1 = 1 - \frac{mr^2}{a^2 + m - 1}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (3.17)$$

y

$$w_2 = -\frac{1}{4} \frac{FR_1^2}{\mu_2} \frac{4\mu_2}{FR_1^2 [a^2 + m - 1]} (r^2 - a^2) = -\frac{r^2 - a^2}{a^2 + m - 1}, \quad (3.18)$$

$1 \leq r \leq a$, donde $a = \frac{R_2}{R_1}$ y $m = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Del balance de los esfuerzos normales (3.5) se encuentra la diferencia de presiones

$$-p_2 + p_1 = -\frac{J(1 - \beta\Gamma_0)}{Re_1^2}, \quad (3.19)$$

donde p_1 y p_2 son las presiones básicas del centro y la película, respectivamente.

3.3 Derivación de las ecuaciones de evolución

En el proceso no dimensional del estado no perturbado, el valor del radio central es uno, y la distancia de la pared a la interfaz es $\epsilon = a - 1$ donde $a = \frac{R_2}{R_1}$ (ver figura 3.1). Se considera $\epsilon \ll 1$ y la distribución de surfactantes $\Gamma = \Gamma(z, \theta, t)$. Se permite que la interfaz se deforme a alturas de orden δ , donde $\delta \ll \epsilon$. La interfaz perturbada, entonces, viene dada por $S(z, \theta, t) = 1 + \delta H(z, \theta, t)$.

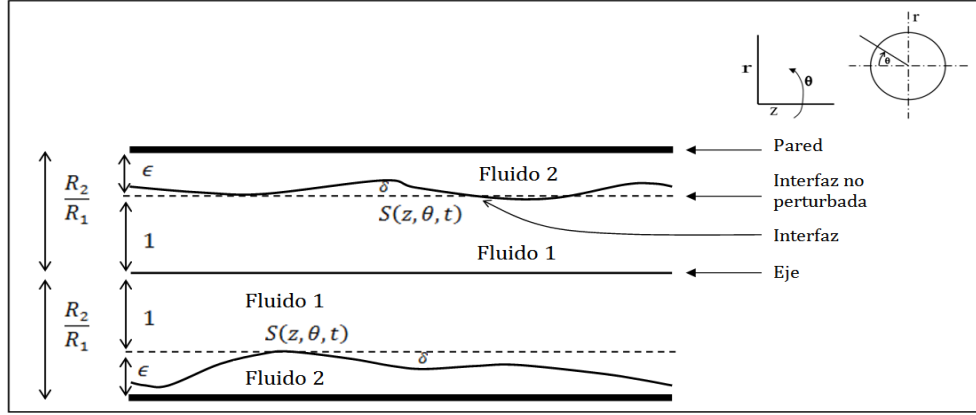


Figura 3.1: Representación esquemática de un corte transversal a lo largo del eje axial en el ángulo θ , donde se muestran las variables en su forma no dimensional del flujo en estudio.

Para que el sistema mantenga estabilidad, a continuación, se presentan una serie de deducciones para determinar cómo es el orden de la velocidad radial (del fluido 2) con respecto a los órdenes de las velocidades axiales y azimutales (del fluido 2). Además, el orden de la presión que ejerce el fluido 2 con respecto al orden de la presión del fluido 1. Para esto, se introduce una variable local en la región de la película dada por $r = a - \epsilon y$, donde $y = 0$ en la pared del tubo y $1 - \frac{\delta}{\epsilon} H(z, \theta, t)$ en la interfaz, luego

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.20)$$

Aplicando (3.20) a la ecuación de continuidad para la película (3.4) y susti-

tuyendo $r = a - \epsilon y$, se obtiene

$$-\frac{1}{\epsilon(a - \epsilon y)} \frac{\partial}{\partial y} [(a - \epsilon y)u_2] + \frac{1}{a - \epsilon y} \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$$

y balanceando los términos para pequeños valores de ϵ el orden de $a - \epsilon y$ (en símbolos $O(a - \epsilon y)$) es aproximadamente el orden de a (en símbolos $O(a)$), donde O denota el orden, así que

$$-O\left(\frac{1}{\epsilon}u_2\right) + O(v_2) + O(w_2) = 0;$$

por lo tanto, $O(u_2) = \epsilon[O(v_2) + O(w_2)]$. De igual forma, considerando la ecuación de continuidad en el centro, y suponiendo que r , θ y z son de orden 1 ($O_s(1)$), se tiene que $O(u_1) = O(v_1) + O(w_1)$. Ahora, supóngase que $p_i = \bar{p}_i + \tilde{p}_i$, $i = 1, 2$ donde \bar{p}_i , representan las presiones en el estado básico y \tilde{p}_i , representan las perturbaciones. Supóngase, además, que $(\bar{p}_2)_z$ es de orden uno, entonces, de la ecuación de Navier-Stokes (3.3) para la película, se tiene que

$$\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial z} = \frac{1}{\xi_2 Re_2 \epsilon^2} O(w_2). \quad (3.21)$$

De igual forma, para la ecuación de Navier-Stokes (3.3) en el fluido del centro; suponiendo que $(\bar{p}_1)_z$ es de orden uno y que el número de Reynold Re_1 es tal que $\frac{1}{Re_1} \gg \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} = O_s(1)$ y como $O(u_1) = O(v_1) + O(w_1)$ resulta

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} = \frac{1}{Re_1} O(w_1).$$

De la continuidad de la velocidad axial en la interfaz; es decir, $\{w_i\}_1^2 = 0$ sobre $r = S(z, \theta, t)$, se tiene que $w_1 = w_2$; luego para el caso cuando m es de orden uno ($m \sim O(1)$) y considerando (3.21) se obtiene con $\epsilon \ll 1$ que

$$O\left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z}\right) = \frac{1}{Re_1} O(w_2) \ll \frac{O(w_2)}{\epsilon^2 Re_1} = \frac{Re_2 O(w_2)}{Re_2 \epsilon^2 Re_1} = \frac{O(w_2)}{\xi_2 m \epsilon^2 Re_2} = O\left(\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial z}\right).$$

Ahora, se considera la condición cinemática (3.7) usando las variables de la película, esto es,

$$u_2 = S_t + \frac{v_2}{r} S_\theta + w_2 S_z = S_t + \frac{v_2}{a - \epsilon y} S_\theta + (\bar{w}_2 + \tilde{w}_2) S_z, \quad (3.22)$$

donde \bar{w}_2 y \tilde{w}_2 representan la velocidades de la película en el estado básico y perturbado, respectivamente. Se trata de balancear todos los términos de la condición cinemática dada anteriormente. Previamente se dedujo que u_2 es de orden $\epsilon[O(v_2) + O(w_2)]$; además, S_t es de orden δ por el orden del tiempo de escala t , y el factor $(\bar{w}_2 + \tilde{w}_2)S_z$ es de $O(\epsilon\delta)$, pues por (3.18) se tiene que

$$\bar{w}_2 \Big|_{r=1+\delta H} = -\frac{1 + 2\delta H + \delta^2 H^2 - a^2}{m + 2\epsilon + \epsilon^2} = \frac{(2 + \epsilon)\epsilon - 2\delta H - \delta^2 H^2}{m + 2\epsilon + \epsilon^2};$$

luego,

$$\bar{w}_2 \Big|_{r=1+\delta H} \sim \frac{(2 + \epsilon)\epsilon}{m + 2\epsilon + \epsilon^2} - \frac{2\delta H}{m + 2\epsilon + \epsilon^2} = w_{2\epsilon} - w_{2\delta} = O(\epsilon) \quad (3.23)$$

donde

$$w_{2\epsilon} = \frac{(2 + \epsilon)\epsilon}{m + 2\epsilon + \epsilon^2} \sim \frac{(2 + \epsilon)\epsilon}{m} \quad (3.24)$$

$$w_{2\delta} = -\frac{2\delta H}{m + 2\epsilon + \epsilon^2} \sim -\frac{2\delta H}{m}, \quad (3.25)$$

esto ocurre porque $m = O_s(1)$ y $\epsilon \ll 1$; es decir, el término $2\epsilon + \epsilon^2$ es despreciable con respecto a m .

Como $w_2 \sim \xi_2 Re_2 \epsilon^2 p_2 \ll \epsilon$, retomando la condición cinemática, queda

$$\epsilon O(v_2) + O(\epsilon^2) \sim O(t) \cdot O(\delta) + O(v_2) \cdot O(\delta) + \epsilon O(\delta).$$

Se observa que hay balanceo si $v_2 \sim O(\epsilon)$ y $\delta = \epsilon$. De este modo, $O(u_2) = \epsilon[O(v_2) + O(w_2)]$ implica que $u_2 = O(\epsilon^2)$. Además, balanceando $O(\epsilon^2)$ con el orden δ por el orden de escala de tiempo t , es decir, $O(\epsilon^2) \sim O(\delta) \cdot O(t)$, se define una nueva variable τ de tal forma que $\tau = \epsilon t$. Luego,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (3.26)$$

Ahora, del balance de los esfuerzos normales (3.5), utilizando la diferencia entre las presiones básicas (3.19) y considerando (2.1) adimensionalizada, es decir, $S(z, \theta, t) = 1 + \delta H(z, \theta, t)$, además, siendo $\{\vec{V}\}_1^2 = 0$ sobre $r = S(z, \theta, t)$ y suponiendo

que tanto δH_θ y δH_z son de orden δ se encuentra una expresión explícita para el orden de $(\tilde{p}_2)_z$ que no depende de la velocidad w_2 ; así

$$\tilde{p}_2 \sim \frac{J\epsilon}{Re_1^2}.$$

Puesto que $w_2 \sim \xi_2 Re_2 \epsilon^2 \tilde{p}_2$, sigue de lo anterior que

$$w_2 \sim \xi_2 Re_2 \epsilon^2 \cdot \frac{J\epsilon}{Re_1^2} \sim Re_1 \frac{\epsilon^3 J}{Re_1^2} = \frac{\epsilon^3 J}{Re_1} \ll \epsilon. \quad (3.27)$$

Para asegurar la continuidad de las velocidades en la interfaz, se debe conseguir la contribución del fluido central en la interfaz. En tal caso, se evalúan las velocidades básicas w_1 y w_2 en la interfaz perturbada, $r = S = 1 + \epsilon H$ y se considera su diferencia, esto es

$$w_1 - w_2 = 1 - \frac{mr^2}{a^2 + m - 1} + \frac{r^2 - a^2}{a^2 + m - 1} = \frac{(m-1)(1-r^2)}{a^2 + m - 1}$$

y

$$(w_1 - w_2) \Big|_{r=1+\epsilon H} = \frac{m-1}{a^2 + m - 1} (-2\epsilon H - \epsilon^2 H^2).$$

Como $m \sim O(1)$, $a \sim O(1)$, $H \sim O(\delta) = O(\epsilon)$, la expresión $\frac{m-1}{a^2+m-1} \sim O(1)$ y $-2\epsilon H - \epsilon^2 H^2 = O(\epsilon)$ se tiene que

$$(w_1 - w_2) \Big|_{r=1+\epsilon H} = O(\epsilon).$$

De (3.27) se observa que $w_2 \sim \frac{\epsilon^3 J}{Re_1} \ll \epsilon$, y como $(w_1 - w_2) \Big|_{r=1+\epsilon H} = O(\epsilon)$, entonces la contribución del centro debe ser $O(\epsilon)$, para poder garantizar la continuidad de las velocidades en la interfaz.

De acuerdo a lo anterior, se pueden considerar varios regímenes. Uno es cuando la película y el centro están desacoplados; es decir, la contribución de la película domina sobre la contribución del centro. Otro es cuando la película y el centro están acoplados; es decir, la contribución de la película y el centro están balanceadas. En este trabajo, sólo se considerará el caso acoplado por considerarse el más interesante para este estudio.

3.3.1 Película y centro acoplados

Para lograr un balance entre las contribuciones del centro y la película debe ocurrir que $w_{2r} \sim \epsilon$; es decir, w_{2r} representa la contribución de la película y ϵ representa la contribución del centro y deben estar equilibradas. Pero $w_{2r} = -\frac{1}{\epsilon}w_{2y}$, así

$$-\frac{1}{\epsilon} \frac{\epsilon^3 J}{Re_1} \sim \epsilon \implies \epsilon J \sim Re_1. \quad (3.28)$$

Si se considera $J = O_s(1)$ y $Re_1 = O_s(\epsilon)$, al sustituir estas condiciones en (3.27) se tiene que

$$w_2 \sim \epsilon^2.$$

Falta ahora, determinar los órdenes de u_1 y v_1 . De la ecuación de Navier-Stokes azimutal para el centro, suponiendo $(\bar{p}_1)_\theta$ de orden 1, se deduce que

$$p_1 \sim \frac{1}{Re_1} O(v_1).$$

De esto último y del hecho que $(p_1)_z \sim \frac{1}{Re_1} O(w_1)$ y $w_1 \sim \epsilon$ sigue que $O(v_1) = O(w_1) = \epsilon$. Puesto que $O(u_1) = O(v_1) + O(w_1)$ se tiene finalmente que

$$O(u_1) = O(v_1) = O(w_1) = \epsilon.$$

Luego el sistema para la película viene dado por

$$u_2 = \epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3) \quad (3.29)$$

$$v_2 = \epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2) \quad (3.30)$$

$$w_2 = \bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3) \quad (3.31)$$

$$p_2 = \bar{p}_2 + \check{p}_2 + \frac{1}{\epsilon} \tilde{p}_2 + \dots \sim \frac{1}{\epsilon} \tilde{p}_2 \quad (3.32)$$

y para el centro viene dado por

$$u_1 = \epsilon \tilde{u}_1 + O(\epsilon^2) \quad (3.33)$$

$$v_1 = \epsilon \tilde{v}_1 + O(\epsilon^2) \quad (3.34)$$

$$w_1 = \bar{w}_1 + \epsilon \tilde{w}_1 + O(\epsilon^2) \quad (3.35)$$

$$p_1 = \bar{p}_1 + \check{p}_1 + \epsilon \tilde{p}_1 + \dots, \quad (3.36)$$

donde \bar{w}_2 es la velocidad básica en la película y \bar{w}_1 es la velocidad básica en el centro.

Considerando las expresiones (3.23), (3.24), (3.25) y evaluando la velocidad básica \bar{w}_2 en la interfaz $r = 1 + \epsilon H$, resulta

$$\bar{w}_2 \Big|_{r=1+\epsilon H} \sim \frac{(2+\epsilon)\epsilon}{m+2\epsilon+\epsilon^2} - \frac{2\epsilon H}{m+2\epsilon+\epsilon^2} \sim \frac{(2+\epsilon)\epsilon}{m} - \frac{2\epsilon H}{m} \quad (3.37)$$

De (3.17) se obtiene que w_1 evaluado en la interfaz $r = 1 + \epsilon H$ es

$$\bar{w}_1 \Big|_{r=1+\epsilon H} = \frac{(2+\epsilon)\epsilon - 2m\epsilon H - O(\epsilon^2)}{m+2\epsilon+\epsilon^2};$$

luego,

$$\bar{w}_1 \Big|_{r=1+\epsilon H} \sim \frac{(2+\epsilon)\epsilon}{m+2\epsilon+\epsilon^2} - \frac{2m\epsilon H}{m+2\epsilon+\epsilon^2} \sim \frac{(2+\epsilon)\epsilon}{m} - 2\epsilon H. \quad (3.38)$$

Usando la condición de continuidad de las velocidades axiales en la interfaz (3.9); es decir, $w_1 = w_2$, se tiene

$$\bar{w}_1 \Big|_{r=1+\epsilon H} + \epsilon \tilde{w}_1 + O(\epsilon^2) = \bar{w}_2 \Big|_{r=1+\epsilon H} + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3).$$

Sustituyendo (3.37) y (3.38) en la ecuación anterior, simplificando por ϵ y cancelando algunos términos, se tiene que

$$-2H + \tilde{w}_1 + O(\epsilon) = -\frac{2H}{m} + \epsilon \tilde{w}_2;$$

despreciando los términos de orden ϵ y despejando \tilde{w}_1 , se obtiene que

$$\tilde{w}_1 = 2H \left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Ahora, se considera la continuidad de las velocidades azimutales en la interfaz, es decir, $v_1 = v_2$ en $r = 1 + \epsilon H$. Por consiguiente

$$\epsilon \tilde{v}_1 + O(\epsilon^2) = \epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2) \implies \tilde{v}_1 + O(\epsilon) = \tilde{v}_2 + O(\epsilon)$$

y despreciando los términos de orden menor o igual a ϵ se concluye que

$$\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2.$$

Asimismo, se considera la continuidad de las velocidades radiales en la interfaz; es decir, $u_1 = u_2$, así

$$\epsilon \tilde{u}_1 + O(\epsilon^2) = \epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3) \implies \tilde{u}_1 + O(\epsilon) = \epsilon \tilde{u}_2 + O(\epsilon^2)$$

y despreciando los términos de orden menor o igual a ϵ se concluye que $\tilde{u}_1 = 0$. Por lo tanto, de la continuidad de las velocidades axiales, $\{\vec{V}\}_1^2 = 0$ en la interfaz $r = 1$, se concluye que

$$\tilde{w}_1|_{r=1} = 2H \left(1 - \frac{1}{m}\right) \quad , \quad \tilde{v}_1|_{r=1} = \tilde{v}_2|_{r=1} \quad \text{y} \quad \tilde{u}_1|_{r=1} = 0. \quad (3.39)$$

Ahora se busca la ecuación de evolución de la interfaz. Sustituyendo u_2 , v_2 , w_2 y p_2 dados en (3.29), (3.30), (3.31) y (3.32) respectivamente, en la ecuación de Navier-Stokes (3.3), se tiene

$$\begin{aligned} (w_2)_t - \frac{1}{\epsilon}(\epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3))(\bar{w}_{2_y} + \epsilon^2 \tilde{w}_{2_y} + O(\epsilon^3)) + \frac{\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)}{a - \epsilon y}(\bar{w}_{2_\theta} + \epsilon^2 \tilde{w}_{2_\theta} + O(\epsilon^3)) \\ + (\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3))(\bar{w}_{2_z} + \epsilon^2 \tilde{w}_{2_z} + O(\epsilon^3)) = -\xi_2 \bar{p}_{2_z} - \xi_2 \check{p}_{2_z} - \frac{\xi_2}{\epsilon} \check{p}_{2_z} \\ + \frac{1}{Re_2} \nabla^2 (\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2) \end{aligned}$$

considerando que \bar{w}_2 no depende ni de θ ni de z y sustituyendo la ecuación (3.11), de la presión en el estado básico, \bar{p}_{2_z} , y simplificando algunos términos resulta

$$\begin{aligned} (w_2)_t - (\epsilon \tilde{u}_2 + O(\epsilon^2))(\bar{w}_{2_y} + \epsilon^2 \tilde{w}_{2_y} + O(\epsilon^3)) + \frac{\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)}{a - \epsilon y}(\epsilon^2 \tilde{w}_{2_\theta} + O(\epsilon^3)) \\ + (\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3))(\epsilon^2 \tilde{w}_{2_z} + O(\epsilon^3)) = -\xi_2 \frac{1}{\xi_2 Re_2} \nabla^2 \bar{w}_2 - \xi_2 \check{p}_{2_z} - \frac{\xi_2}{\epsilon} \check{p}_{2_z} \\ + \frac{1}{Re_2} \nabla^2 \bar{w}_2 + \frac{\epsilon}{Re_2} \left[-\frac{\tilde{w}_{2_y}}{a - \epsilon y} + \frac{1}{\epsilon} \tilde{w}_{2_{yy}} + \frac{\epsilon}{(a - \epsilon y)^2} \tilde{w}_{2_{\theta\theta}} + \epsilon \tilde{w}_{2_{zz}} \right] \end{aligned}$$

multiplicando y dividiendo por Re_1 y utilizando el hecho de que $\tau = \epsilon t$

$$\begin{aligned} \epsilon (w_2)_\tau - (\epsilon \tilde{u}_2 + O(\epsilon^2))(\bar{w}_{2_y} + \epsilon^2 \tilde{w}_{2_y} + O(\epsilon^3)) + \frac{\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)}{a - \epsilon y}(\epsilon^2 \tilde{w}_{2_\theta} + O(\epsilon^3)) \\ + (\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3))(\epsilon^2 \tilde{w}_{2_z} + O(\epsilon^3)) = -\xi_2 \check{p}_{2_z} - \frac{\xi_2}{\epsilon} \check{p}_{2_z} \\ + \frac{\epsilon}{Re_2} \frac{Re_1}{Re_1} \left[-\frac{\tilde{w}_{2_y}}{a - \epsilon y} + \frac{1}{\epsilon} \tilde{w}_{2_{yy}} + \frac{\epsilon}{(a - \epsilon y)^2} \tilde{w}_{2_{\theta\theta}} + \epsilon \tilde{w}_{2_{zz}} \right] \end{aligned}$$

Sea $\lambda = \frac{Re_1}{\epsilon}$, como $Re_1 = O_s(\epsilon)$, entonces $\lambda = O_s(1)$ y además como $m = \frac{Re_1}{\xi_2 Re_2} = O_s(1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \epsilon(w_2)_\tau - \epsilon \tilde{u}_2 \bar{w}_{2y} - \epsilon^3 \tilde{u}_2 \tilde{w}_{2y} + \frac{1}{a - \epsilon y} (\epsilon^3 \tilde{v}_2 \tilde{w}_{2\theta} + O(\epsilon^4)) + \epsilon^2 \bar{w}_2 \tilde{w}_{2z} + O(\epsilon^3) = \\ & -\xi_2 \tilde{p}_{2z} - \frac{\xi_2}{\epsilon} \tilde{p}_{2z} - \xi_2 \epsilon \tilde{p}_{2z} + \xi_2 \frac{m}{\lambda} \left[-\frac{\tilde{w}_{2y}}{a - \epsilon y} + \frac{1}{\epsilon} \tilde{w}_{2yy} + \frac{\epsilon}{(a - \epsilon y)^2} \tilde{w}_{2\theta\theta} + \epsilon \tilde{w}_{2zz} \right] \end{aligned}$$

ahora, como m y λ son de orden $O(1)$, entonces $\frac{m}{\lambda}$ es de orden $O(1)$. También se observa que el orden más grande es $O(\frac{1}{\epsilon})$, luego las expresiones con orden menor que $\frac{1}{\epsilon}$ son despreciables; por lo tanto,

$$\tilde{p}_{2z} = \frac{m}{\lambda} \tilde{w}_{2yy}. \quad (3.40)$$

De la misma manera, sustituyendo u_2 , v_2 , w_2 y p_2 dados en (3.29), (3.30), (3.31) y (3.32), respectivamente, pero en la ecuación de Navier-Stokes (3.1), resulta

$$\tilde{p}_{2y} = 0.$$

Lo anterior expresa que \tilde{p}_2 no depende de y ; despejando \tilde{w}_{2yy} de (3.40) en integrando dos veces con respecto a y se tiene

$$\tilde{w}_2 = \frac{\lambda}{m} \left(\frac{1}{2} \tilde{p}_{2z} y^2 + C(z, \theta, t) y + D(z, \theta, t) \right).$$

Utilizando la condición de no deslizamiento en las paredes del tubo (3.8); es decir, $\tilde{w}_2 = 0$ en $r = a$, la cual es equivalente a $\tilde{w}_2(z, \theta, t) = 0$ en $y = 0$, pues $r = a - \epsilon y$, se tiene

$$0 = \frac{\lambda}{m} \left(\frac{1}{2} \tilde{p}_{2z} \cdot 0 + C(z, \theta, t) \cdot 0 + D(z, \theta, t) \right) \implies D(z, \theta, t) = 0;$$

por lo tanto,

$$\tilde{w}_2 = \frac{\lambda}{m} \left(\frac{1}{2} \tilde{p}_{2z} y^2 + C(z, \theta, t) y \right). \quad (3.41)$$

Nuevamente, como se procedió con las ecuaciones de Navier-Stokes (3.3) y (3.1), se tiene para la variable azimutal que

$$\tilde{v}_{2yy} = 0,$$

lo que implica integrando dos veces con respecto a y que

$$\tilde{v}_2 = E(z, \theta, t)y + F(z, \theta, t).$$

De nuevo, usando la condición de no deslizamiento en las paredes del tubo (3.8); en este caso, $\tilde{v}_2 = 0$ en $r = a$, equivalente a $\tilde{v}_2(z, \theta, t) = 0$ en $y = 0$, se obtiene

$$\tilde{v}_2 = E(z, \theta, t)y \quad (3.42)$$

Sustituyendo las velocidades u_2 , v_2 y w_2 expresadas en (3.29), (3.30) y (3.31) respectivamente, en la ecuación de continuidad (3.4), y considerando $\bar{w}_{2z} = 0$, resulta

$$\frac{\epsilon^2 \tilde{u}_2}{a - \epsilon y} - \epsilon \tilde{u}_{2y} + \frac{\epsilon \tilde{v}_{2\theta}}{a - \epsilon y} + \epsilon^2 \tilde{w}_{2z} + O(\epsilon^3) = 0;$$

como $a - \epsilon y \sim a = O_s(1)$, se observa que el mayor orden es ϵ , el cual se encuentra en el segundo y tercer término; luego, las expresiones de órdenes mayores que ϵ^2 se desprecian; de modo que se tiene

$$\tilde{u}_{2y} = \frac{1}{a} \tilde{v}_{2\theta}.$$

Derivando \tilde{v}_2 dada en (3.42) con respecto a θ , se consigue la siguiente expresión para \tilde{u}_{2y}

$$\tilde{u}_{2y} = \frac{1}{a} \tilde{v}_{2\theta} = \frac{E_\theta(z, \theta, t)}{a} y,$$

así, integrando \tilde{u}_{2y} con respecto a y , se obtiene

$$\tilde{u}_2 = \frac{E_\theta(z, \theta, t)}{2a} y^2 + G(z, \theta, t);$$

y utilizando la condición de no deslizamiento en las paredes del tubo $\tilde{u}_2(z, \theta, t) = 0$ en $y = 0$, resulta

$$0 = \frac{E_\theta(z, \theta, t)}{2a} \cdot 0 + G(z, \theta, t) \implies G(z, \theta, t) = 0,$$

con lo cual se concluye que

$$\tilde{u}_2 = \frac{E_\theta(z, \theta, t)}{2a} y^2. \quad (3.43)$$

Ahora, sustituyendo (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), (3.33), (3.34), (3.35), (3.36) y $S = 1 + \epsilon H$ en el balance de los esfuerzos normales (3.5) se tiene

$$\begin{aligned}
& (-\bar{p}_2 - \frac{1}{\epsilon}\check{p}_2 - \check{p}_2)(1 + 2\epsilon H + O(\epsilon^2)) + \frac{2}{\xi_2 Re_2} \left[(1 + 2\epsilon H) \cdot -\frac{1}{\epsilon}(\epsilon^2 \tilde{u}_{2y}) - (1 + \epsilon H)\epsilon H_\theta \right. \\
& \left(-\frac{1}{\epsilon}(\epsilon \tilde{v}_{2y}) - \frac{\epsilon \tilde{v}_2}{a - \epsilon y} + \frac{\epsilon^2 \tilde{u}_{2\theta}}{a - \epsilon y} \right) - (1 + 2\epsilon H)\epsilon H_z \left(\epsilon^2 \tilde{u}_{2z} - \frac{1}{\epsilon}(\bar{w}_{2y} + \epsilon^2 \tilde{w}_{2y}) \right) + \\
& \left. (1 + \epsilon H)\epsilon H_\theta \epsilon H_z \left(\frac{\epsilon^2 \tilde{w}_{2\theta}}{a - \epsilon y} + \epsilon \tilde{v}_{2z} \right) + \epsilon^2 H_\theta^2 \left(\frac{\epsilon \tilde{v}_{2\theta}}{a - \epsilon y} + \frac{\epsilon^2 \tilde{u}_2}{a - \epsilon y} \right) + (1 + 2\epsilon H)\epsilon^2 H_z^2 \epsilon^2 \tilde{w}_{2z} \right] \\
& + (\bar{p}_1 + \check{p}_1 + \epsilon \check{p}_1)(1 + 2\epsilon H + O(\epsilon^2)) - \frac{2}{\xi_1 Re_1} \left[(1 + 2\epsilon H) \cdot \epsilon \tilde{u}_{1r} \right) - (1 + \epsilon H)\epsilon H_\theta \\
& \left(\epsilon \tilde{v}_{1r} - \frac{\epsilon \tilde{v}_1}{r} + \frac{\epsilon \tilde{u}_{1\theta}}{r} \right) - (1 + 2\epsilon H)\epsilon H_z (\epsilon \tilde{u}_{1z} + \bar{w}_{1r} + \epsilon \tilde{w}_{1r}) + (1 + \epsilon H)\epsilon H_\theta \epsilon H_z \\
& \left(\frac{\epsilon \tilde{w}_{1\theta}}{r} + \epsilon \tilde{v}_{1z} \right) + \epsilon^2 H_\theta^2 \left(\frac{\epsilon \tilde{v}_{1\theta}}{r} + \frac{\epsilon \tilde{u}_1}{r} \right) + (1 + 2\epsilon H)\epsilon^2 H_z^2 \epsilon \tilde{w}_{1z} \left. \right] + \frac{2}{Re_1} [\epsilon^2 \tilde{w}_{1r} + \epsilon^2 \tilde{u}_{1r}] \\
& = \frac{J[1 - \beta\Gamma]}{Re_1^2} \left\{ \epsilon^2 H_{zz} - \frac{1 + \epsilon^4 H_z^2}{1 + \epsilon^2 H} \right\} [1 + \epsilon^4 H_z^2]^{-1/2}
\end{aligned}$$

Como en casos anteriores, en vista de que $\epsilon \ll 1$, entonces $1 + \epsilon^4 H_z^2 = 1 + O(\epsilon^4) \sim 1$. También se considera la serie de Taylor de $\frac{1}{1 + \epsilon^2 H}$ alrededor de $H = 0$, como $1 + \epsilon^2 H = 1 - \epsilon^2 H + \epsilon^4 H^2 + \dots \sim 1 - \epsilon^2 H + O(\epsilon^4)$ y además $\bar{w}_{2z} = 0$, luego

$$\begin{aligned}
& \bar{p}_2 + \check{p}_2 + \epsilon \check{p}_2 - \frac{2}{Re_2} [\epsilon^7 \tilde{w}_{2z} H_z^2 - \epsilon^6 \tilde{u}_{2z} H_z - \epsilon^2 \bar{w}_{2r} H_z - \epsilon^5 \tilde{w}_{2r} H_z + \epsilon^4 \tilde{u}_{2r}] \\
& - \bar{p}_1 - \epsilon \check{p}_1 + \frac{2}{Re_1} [\epsilon^6 \tilde{w}_{1z} H_z^2 - \epsilon^4 \tilde{u}_{1z} H_z - \epsilon^2 \bar{w}_{1r} H_z + \epsilon^2 \tilde{w}_{1r} + \epsilon^2 \tilde{u}_{1r}] \\
& = \frac{J[1 - \beta C_g \Gamma]}{Re_1^2} (\epsilon^2 H_{zz} - 1 + \epsilon^2 H + O(\epsilon^4)). \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Por otro lado, derivando (3.17) y (3.18) con respecto a r , se tiene

$$\bar{w}_{1r} = -\frac{2mr}{a^2 + m - 1} \quad \text{y} \quad m\bar{w}_{2r} = -\frac{m}{\epsilon}\bar{w}_{2y} = -\frac{2mr}{a^2 + m - 1};$$

así,

$$-\frac{m}{\epsilon}\bar{w}_{2y} - \bar{w}_{1r} = 0. \tag{3.45}$$

Re-arreglando algunos términos, de (3.44), considerando $m = \frac{Re_1}{Re_2} = O_s(1)$, $\lambda = \frac{Re_1}{\epsilon} = O_s(1)$, (3.19) y suponiendo que $\beta C_g \ll \epsilon \ll 1$; observando que los términos

de orden ϵ son despreciables ante los de orden uno, y utilizando (3.45) se concluye que

$$\tilde{p}_2 = \frac{J}{\lambda^2} (H_{zz} + H_{\theta\theta} + H). \quad (3.46)$$

Considerando ahora la ecuación de continuidad para el centro (3.4), sustituyendo (3.33), (3.34) y (3.35), y como $\bar{w}_{1z} = 0$, se obtiene luego de hacer un análisis de los órdenes,

$$\frac{1}{r}(r\tilde{u}_1)_r + \frac{1}{r}\tilde{v}_{1\theta} + \tilde{w}_{1z} = 0. \quad (3.47)$$

De la condición cinemática (3.22), sustituyendo (3.29), (3.30), (3.31) y además tomando en cuenta que $\tau = \epsilon t$, resulta

$$\epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3) = \epsilon^2 H_\tau + \frac{\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)}{a - \epsilon y} \epsilon H_\theta + (\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3)) \epsilon H_z.$$

Considerando (3.37); es decir, \bar{w}_2 evaluado en la interfaz $r = 1 + \epsilon H$, se obtiene después de cancelar algunos términos despreciables y simplificando

$$\tilde{u}_2 = H_\tau + \frac{\tilde{v}_2}{a} H_\theta + \frac{H_z}{m} - \frac{2HH_z}{m}. \quad (3.48)$$

Si ahora se sustituyen las expresiones (3.42) y (3.43) en (3.48) se obtiene

$$\frac{E_\theta(z, \theta, t)}{2a} = H_\tau + \frac{E(z, \theta, t)}{a} H_\theta + \frac{H_z}{m} - \frac{2HH_z}{m}.$$

la cual puede reescribirse como una ecuación diferencial lineal de primer orden con función incógnita $E(z, \theta, t)$ de la siguiente manera

$$E_\theta(z, \theta, t) - 2H_\theta E(z, \theta, t) = 2a \left(H_\tau + \frac{H_z}{m} - \frac{2HH_z}{m} \right).$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene

$$E(z, \theta, t) = 2ae^{2H(z, \theta, t)} \int_0^{2\pi} \left(H_\tau + \frac{H_z}{m} - \frac{2HH_z}{m} \right) e^{-2H(z, \theta, t)} d\theta.$$

Con esto se tiene la **ecuación de evolución de la interfaz**.

Por otro lado, a fin de encontrar el valor del parámetro $C(z, \theta, t)$, el cual se encuentra presente en las expresiones de las velocidades y las presiones, se comienza sustituyendo (3.29), (3.31), (3.32), (3.33), (3.35) y (3.36) en el balance de los esfuerzos tangenciales en la interfaz $r = S = 1$; es decir, con $y = 1$, y aplicando (3.20) para la película, se tiene

$$\begin{aligned}
-\epsilon^2 m \tilde{u}_{2z} + \frac{m}{\epsilon} \bar{w}_{2y} + \epsilon m \tilde{w}_{2y} + \frac{1}{a - \epsilon} \epsilon^2 \tilde{w}_{2\theta} + \epsilon \tilde{v}_{2z} + \epsilon \tilde{u}_{1z} & \quad (3.49) \\
+ \bar{w}_{1r} + \epsilon \tilde{w}_{1r} - \epsilon \tilde{w}_{1\theta} - \epsilon \tilde{v}_{1z} & = \frac{\beta \Gamma_z}{Ca}.
\end{aligned}$$

Utilizando la expresión (3.45) y considerando los términos de orden ϵ^2 despreciables, la ecuación (3.49) se reduce a

$$\epsilon m \tilde{w}_{2y} + \epsilon \tilde{v}_{2z} + \epsilon \tilde{u}_{1z} + \epsilon \tilde{w}_{1r} - \epsilon \tilde{w}_{1\theta} - \epsilon \tilde{v}_{1z} = \frac{\beta \Gamma_z}{Ca}.$$

Derivando una sola vez con respecto a y a la ecuación (3.41) y luego evaluando ésta en $y = 1$, y por otro lado considerando (3.39), es decir, $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$ en $r = S = 1$, entonces la expresión anterior se transforma en

$$\lambda (\tilde{p}_{2z} + C(z, \theta, t)) + \tilde{u}_{1z}(1, z, \theta, t) + \tilde{w}_{1r}(1, z, \theta, t) - \tilde{w}_{1\theta}(1, z, \theta, t) = \frac{\beta \Gamma_z}{\epsilon Ca}. \quad (3.50)$$

Ahora, se introduce una nueva función escalar, φ , dada como

$$\tilde{u}_1 = -\frac{1}{r}(\varphi_z + \varphi_\theta) \quad , \quad \tilde{v}_1 = \varphi_r - \varphi_z \quad \text{y} \quad \tilde{w}_1 = \frac{1}{r}(\varphi_r + \varphi_\theta). \quad (3.51)$$

Se puede observar que (3.51) satisface la ecuación de continuidad (3.47). En efecto,

$$\frac{1}{r}(r\tilde{u}_1)_r + \frac{1}{r}\tilde{v}_{1\theta} + \tilde{w}_{1z} = -\frac{1}{r}\varphi_{zr} - \frac{1}{r}\varphi_{\theta r} + \frac{1}{r}\varphi_{\theta r} - \frac{1}{r}\varphi_{\theta z} + \frac{1}{r}\varphi_{zr} + \frac{1}{r}\varphi_{\theta z} = 0.$$

Además, si se le aplica la transformada de Fourier, (1.8), a (3.51), se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_1 e^{-i(az+b\theta)} dz d\theta = -\frac{i}{r}(a+b)\hat{\varphi}$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_1 e^{-i(az+b\theta)} dz d\theta = \frac{1}{r}\hat{\varphi}_r + \frac{ib}{r}\hat{\varphi};$$

luego,

$$\hat{\varphi} = \frac{ir}{a+b} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_1 e^{-i(az+b\theta)} dz d\theta.$$

Evaluando $\hat{\varphi}$ y $\hat{\varphi}_r$ en la interfaz $r = 1$, y usando la condición (3.39), se tiene

$$\hat{\varphi}(r = 1) = \frac{i}{a+b} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_1|_{r=1} e^{-i(az+b\theta)} dz d\theta = 0$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_r(r = 1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_1|_{r=1} e^{-i(az+b\theta)} dz d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) H e^{-i(az+b\theta)} dz d\theta \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H e^{-i(az+b\theta)} dz d\theta = 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) \hat{H}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.51) en (3.50) y evaluado en $y = r = 1$ se tiene

$$\lambda \tilde{p}_{2z} + \lambda C(z, \theta, t) - \varphi_{zz} - \varphi_{\theta z} - \varphi_r - \varphi_{\theta} + \varphi_{rr} - \varphi_{\theta\theta} = \frac{\beta \Gamma_z}{\epsilon C a},$$

por (3.28), el número capilar es de orden ϵ . Ahora, supóngase que $C a = \epsilon \overline{C a}$ donde $\overline{C a} \sim O(1)$. Sustituyendo esto en lo anterior y omitiendo el símbolo \sim , se tiene

$$\lambda \tilde{p}_{2z} + \lambda C(z, \theta, t) - \varphi_{zz} - \varphi_{\theta z} - \varphi_r - \varphi_{\theta} + \varphi_{rr} - \varphi_{\theta\theta} = \frac{\beta \Gamma_z}{\epsilon^2 C a}. \quad (3.52)$$

Para mantener los efectos de Marangoni la contribución del centro ($O(\epsilon)$) debe estar balanceada con el término del balance de los esfuerzos tangenciales, esto es, con $\frac{\beta}{C a}$; así, $\epsilon \sim \frac{\beta}{C a}$ y como el número capilar es de orden ϵ , se tiene que $\beta \sim \epsilon^2$, lo cual es consistente con (3.52). Considerando $\beta = \epsilon^2 \beta_0$ y sustituyendo esto y la derivada con respecto a z de (3.46) en (3.52), resulta

$$\frac{J}{\lambda} (H_{zz} + H_{\theta\theta} + H)_z + \lambda C(z, \theta, t) - \varphi_{zz} - \varphi_{\theta z} - \varphi_r - \varphi_{\theta} + \varphi_{rr} - \varphi_{\theta\theta} = \frac{\beta_0 \Gamma_z}{C a}.$$

Aplicando (1.8) a la expresión anterior, se tiene

$$\frac{iaJ}{\lambda} (H_{zz} + \widehat{H_{\theta\theta}} + H) + \lambda \hat{C} + a^2 \hat{\varphi} + ab \hat{\varphi} + b^2 \hat{\varphi} + \hat{\varphi}_{rr} - \hat{\varphi}_r - ib \hat{\varphi} = \frac{ia \beta_0 \hat{\Gamma}}{C a},$$

donde el símbolo $\hat{\cdot}$ denota a la transformada de Fourier.

Despejando \hat{C} , se obtiene

$$\hat{C} = -\frac{iaJ}{\lambda^2}(H_{zz} + \widehat{H_{\theta\theta}} + H) - \frac{a^2}{\lambda}\hat{\phi} - \frac{ab}{\lambda}\hat{\phi} - \frac{b^2}{\lambda}\hat{\phi} - \frac{1}{\lambda}\hat{\phi}_{rr} + \frac{1}{\lambda}\hat{\phi}_r + \frac{ib}{\lambda}\hat{\phi} - \frac{ia\beta_0\hat{\Gamma}}{\lambda Ca}.$$

Evalutando la expresión anterior en $r = 1$ queda

$$\hat{C} = -\frac{iaJ}{\lambda^2}(H_{zz} + \widehat{H_{\theta\theta}} + H) - \frac{1}{\lambda}\hat{\phi}_{rr} + \frac{2}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\hat{H} - \frac{ia\beta_0\hat{\Gamma}}{\lambda Ca}.$$

Ahora, sustituyendo (3.33), (3.34), (3.35) y (3.36) en la ecuación de Navier-Stokes (3.1), teniendo en cuenta que \bar{p} no es función de r y despreciando los términos de órdenes menores o iguales a ϵ resulta

$$\lambda\tilde{p}_{1,r} = \nabla^2\tilde{u}_1 - \frac{\tilde{u}_1}{r^2} - \frac{2}{r^2}\tilde{v}_{1\theta} = \frac{1}{r}\tilde{u}_{1,r} + \tilde{u}_{1,rr} + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{1,\theta\theta} + \tilde{u}_{1,zz} - \frac{\tilde{u}_1}{r^2} - \frac{2}{r^2}\tilde{v}_{1\theta}.$$

Derivando la ecuación de continuidad (3.4) con respecto a r , da

$$-\frac{\tilde{u}_1}{r^2} + \frac{1}{r}\tilde{u}_{1,r} + \tilde{u}_{1,rr} - \frac{1}{r^2}\tilde{v}_{1\theta} + \frac{1}{r}\tilde{v}_{1,\theta r} + \tilde{w}_{1,zr} = 0.$$

De aquí que, la expresión para $\lambda\tilde{p}_{1,r}$ se reduce a

$$\lambda\tilde{p}_{1,r} = \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{1,\theta\theta} + \tilde{u}_{1,zz} - \frac{1}{r^2}\tilde{v}_{1\theta} - \frac{1}{r}\tilde{v}_{1,\theta r} - \tilde{w}_{1,zr}$$

y derivando lo anterior con respecto a z , se obtiene

$$\lambda\tilde{p}_{1,rz} = \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{1,\theta\theta z} + \tilde{u}_{1,zzz} - \frac{1}{r^2}\tilde{v}_{1,\theta z} - \frac{1}{r}\tilde{v}_{1,\theta rz} - \tilde{w}_{1,zrz} \quad (3.53)$$

Por otro lado, sustituyendo (3.33), (3.34), (3.35) y (3.36) en la ecuación de Navier-Stokes (3.3), y considerando que $\bar{w}_{1,z} = 0$ y sustituyendo la presión en el estado básico para el centro (3.11), simplificando y teniendo en cuenta que $\lambda = \frac{Re_1}{\epsilon} = O_s(1)$; y despreciando los términos de órdenes menores e iguales a ϵ , considerando el Laplaciano de \tilde{w}_1 , resulta

$$\lambda\tilde{p}_{1,z} = \nabla^2\tilde{w}_1 = \frac{1}{r}\tilde{w}_{1,r} + \tilde{w}_{1,rr} + \frac{1}{r}\tilde{w}_{1,\theta\theta} + \tilde{w}_{1,zz}.$$

Se deriva la expresión anterior con respecto a r para obtener

$$\lambda \tilde{p}_{1_{zr}} = -\frac{1}{r^2} \tilde{w}_{1_r} + \frac{1}{r} \tilde{w}_{1_{rr}} + \tilde{w}_{1_{rrr}} - \frac{2}{r^3} \tilde{w}_{1_{\theta\theta}} + \frac{1}{r^2} \tilde{w}_{1_{\theta\theta r}} + \tilde{w}_{1_{z zr}}. \quad (3.54)$$

Igualando (3.53) con (3.54)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \tilde{u}_{1_{\theta\theta z}} + \tilde{u}_{1_{zzz}} - \frac{1}{r^2} \tilde{v}_{1_{\theta z}} - \frac{1}{r} \tilde{v}_{1_{\theta rz}} - \tilde{w}_{1_{z rz}} &= -\frac{1}{r^2} \tilde{w}_{1_r} + \frac{1}{r} \tilde{w}_{1_{rr}} + \tilde{w}_{1_{rrr}} - \frac{2}{r^3} \tilde{w}_{1_{\theta\theta}} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \tilde{w}_{1_{\theta\theta r}} + \tilde{w}_{1_{z zr}}. \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo (3.51) en lo anterior conlleva a

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \varphi_{rrrr} &- \frac{2}{r^2} \varphi_{rrr} + \frac{3}{r^3} \varphi_{rr} - \frac{3}{r^4} \varphi_r - \frac{2}{r^2} \varphi_{rzz} + \frac{2}{r} \varphi_{rrzz} + \frac{1}{r} \varphi_{zzzz} + \frac{1}{r} \varphi_{rr\theta z} + \frac{1}{r^3} \varphi_{\theta\theta zz} \\ &+ \frac{1}{r^3} \varphi_{\theta\theta\theta z} + \frac{1}{r} \varphi_{\theta zzz} + \frac{1}{r} \varphi_{rrr\theta} + \frac{1}{r^3} \varphi_{rr\theta\theta} + \frac{1}{r^3} \varphi_{r\theta\theta\theta} + \frac{1}{r} \varphi_{r\theta zz} + \frac{1}{r^2} \varphi_{r\theta z} \\ &- \frac{3}{r^2} \varphi_{\theta zz} - \frac{2}{r^2} \varphi_{rr\theta} - \frac{3}{r^4} \varphi_{r\theta\theta} - \frac{3}{r^4} \varphi_{\theta\theta\theta} + \frac{3}{r^3} \varphi_{r\theta} - \frac{3}{r^4} \varphi_{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Con la solución de esta EDP lineal de cuarto orden se obtiene la expresión para $\hat{C}(z, \theta, t)$. (Buscar una solución exacta de esta EDP queda como un problema abierto para una futura investigación). A futuro, para hacer un análisis de estabilidad en la parte numérica, se necesita tener una solución de esta ecuación, tal vez a través de métodos numéricos, pero para el propósito de este trabajo no es necesario hacerlo.

Para encontrar la ecuación de evolución de la concentración del surfactante insoluble para el modelo de este trabajo, primero se reescribe la ecuación (3.10) de

la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\Gamma_t &= \frac{S_t}{1 + (S')^2 + \left(\frac{S_\theta}{S}\right)^2} \left[S' \Gamma_z + \frac{S_\theta}{S^2} \Gamma_\theta \right] + \frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{1 + (S')^2 + \left(\frac{S_\theta}{S}\right)^2}} \\
&\quad \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S} \frac{\Gamma}{\sqrt{1 + (S')^2 + \left(\frac{S_\theta}{S}\right)^2}} \left(S^2 S' u - S S_\theta S' v + (S^2 + S_\theta^2) w \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{S} \frac{\Gamma}{\sqrt{1 + (S')^2 + \left(\frac{S_\theta}{S}\right)^2}} \left(S_\theta u + S[(S')^2 + 1]v - S_\theta S' w \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{Pe} \frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{1 + (S')^2 + \left(\frac{S_\theta}{S}\right)^2}} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{1 + (S')^2 + \left(\frac{S_\theta}{S}\right)^2}} \left(S^2 \Gamma_z - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. S_\theta (S' \Gamma_\theta - S_\theta \Gamma_z) \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{S} \frac{1}{\sqrt{1 + (S')^2 + \left(\frac{S_\theta}{S}\right)^2}} \left(\Gamma_\theta + S' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (S' \Gamma_\theta - S_\theta \Gamma_z) \right) \right) \right] + \frac{1}{S^2} \frac{\Gamma}{1 + (S')^2 + \left(\frac{S_\theta}{S}\right)^2} \left[\frac{1}{S} S_{\theta\theta} [1 + (S')^2] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{S} S'' (S^2 + S_\theta^2) - [1 + (S')^2] - \frac{2}{S} S_\theta^2 - 2 S S_\theta S' (S')_\theta \right] \\
&\quad (-Su + S_\theta v + S S' w) = 0. \tag{3.55}
\end{aligned}$$

Luego, se sustituyen las ecuaciones (3.29), (3.30) y (3.31) en (3.55), usando el hecho de que $S(z, \theta, t) = 1 + \epsilon H(z, \theta, t)$. De esta manera, se tiene

$$\Gamma_t = \frac{\epsilon H_t}{1 + \epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1 + \epsilon H}\right)^2} \left[\epsilon H_z \Gamma_z + \frac{\epsilon H_\theta}{(1 + \epsilon H)^2} \Gamma_\theta \right] + \frac{1}{1 + \epsilon H} \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1 + \epsilon H}\right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{1+\epsilon H} \frac{\Gamma}{\sqrt{1+\epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1+\epsilon H}\right)^2}} \left((1+\epsilon H)^2 \epsilon H_z [\epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3)] - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (1+\epsilon H) \epsilon H_\theta \epsilon H_z [\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)] + \left((1+\epsilon H)^2 + \epsilon^2 H_\theta^2 \right) [\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3)] \right) \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{1+\epsilon H} \frac{\Gamma}{\sqrt{1+\epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1+\epsilon H}\right)^2}} \left(\epsilon H_\theta [\epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3)] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (1+\epsilon H) [\epsilon^2 H_z^2 + 1] [\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)] - \epsilon H_\theta \epsilon H_z [\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3)] \right) \right) \right] \\
& - \frac{1}{Pe} \frac{1}{1+\epsilon H} \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1+\epsilon H}\right)^2}} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{1+\epsilon H} \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1+\epsilon H}\right)^2}} \right. \right. \\
& \left. \left. \left((1+\epsilon H)^2 \Gamma_z - \epsilon H_\theta (\epsilon H_z \Gamma_\theta - \epsilon H_\theta \Gamma_z) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{1+\epsilon H} \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1+\epsilon H}\right)^2}} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. (\Gamma_\theta + \epsilon H_z (\epsilon H_z \Gamma_\theta - \epsilon H_\theta \Gamma_z)) \right) \right] + \frac{1}{(1+\epsilon H)^2} \frac{\Gamma}{\left(1+\epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1+\epsilon H}\right)^2\right)^2} \\
& \left[\frac{1}{1+\epsilon H} \epsilon H_{\theta\theta} [1+\epsilon^2 H_z^2] + \frac{1}{1+\epsilon H} \epsilon H_{zz} \left((1+\epsilon H)^2 + \epsilon^2 H_\theta^2 \right) - [1+\epsilon^2 H_z^2] - \right. \\
& \left. \frac{2}{1+\epsilon H} \epsilon^2 H_\theta^2 - 2(1+\epsilon H) \epsilon H_\theta \epsilon H_z \epsilon H_{\theta z} \right] \left(- (1+\epsilon H) [\epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3)] + \right. \\
& \left. \epsilon H_\theta [\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)] + (1+\epsilon H) \epsilon H_z [\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3)] \right) = 0.
\end{aligned}$$

Considerando la serie de MacClaurin de $\frac{1}{(1+\epsilon H)^2}$ y $\frac{1}{(1+\epsilon H)^2}$ hasta el orden ϵ , se tiene, respectivamente, que $\frac{1}{1+\epsilon H} = 1 - \epsilon H + \dots$ y $\frac{1}{(1+\epsilon H)^2} = 1 - 2\epsilon H + \dots$. Así, el término $\left(\frac{\epsilon H_\theta}{1+\epsilon H}\right)^2$ es aproximadamente igual a $\epsilon^2 H_\theta^2 (1 - 2\epsilon H) = \epsilon^2 H_\theta^2 - 2\epsilon^3 H H_\theta^2$. Por otra parte, la serie de MacClaurin de $\frac{1}{1+\epsilon^2 H_z^2 + \epsilon^2 H_\theta^2 - 2\epsilon^3 H H_\theta^2} = 1 - \epsilon^2 H_z^2 - \epsilon^2 H_\theta^2 + 2\epsilon^3 H H_\theta^2 + \dots$ y la de $\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 H_z^2 + \left(\frac{\epsilon H_\theta}{1+\epsilon H}\right)^2}} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2}\epsilon^2 H_\theta^2 + \epsilon^3 H H_\theta^2 + \dots$. Sustituyendo esto en lo anterior conlleva a,

$$\begin{aligned}
\Gamma_t &= \epsilon H_t (1 - \epsilon^2 H_z^2 - \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3)) \left[\epsilon H_z \Gamma_z + \epsilon H_\theta (1 - 2\epsilon H + O(\epsilon^2)) \Gamma_\theta \right] + \\
& (1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left((1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \right. \right. \\
& \Gamma \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) \right) \left((1 + 2\epsilon H + \epsilon^2 H^2) \epsilon H_z [\epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3)] \right. \\
& \left. \left. - (1 + \epsilon H) \epsilon^2 H_\theta H_z [\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)] + \left(1 + 2\epsilon H + \epsilon^2 H^2 + \epsilon^2 H_\theta^2 \right) [\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + O(\epsilon^3)] \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \Gamma \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) \right) \right. \\
& \left. \left(\epsilon H_\theta [\epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3)] + (1 + \epsilon H) [\epsilon^2 H_z^2 + 1] [\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)] - \epsilon^2 H_\theta H_z [\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 \right. \right. \\
& \left. \left. + O(\epsilon^3)] \right) \right) \left. \right] - \frac{1}{Pe} (1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) \right) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\right. \right. \\
& (1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) \right) \left((1 + 2\epsilon H + \epsilon^2 H^2) \Gamma_z \right. \\
& \left. \left. - \epsilon^2 H_\theta H_z \Gamma_\theta + \epsilon^2 H_\theta^2 \Gamma_z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_\theta^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + O(\epsilon^3) \right) \left(\Gamma_\theta + \epsilon H_z (\epsilon H_z \Gamma_\theta - \epsilon H_\theta \Gamma_z) \right) \right] + (1 - 2\epsilon H + O(\epsilon^2)) \Gamma \left(1 - 2\epsilon^2 H_z^2 \right. \\
& \left. - 2\epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) \right) \left[(1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \epsilon H_{\theta\theta} [1 + \epsilon^2 H_z^2] + (1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \right. \\
& \left. \epsilon H_{zz} (1 + 2\epsilon H + \epsilon^2 H^2 + \epsilon^2 H_\theta^2) - [1 + \epsilon^2 H_z^2] - 2(1 - \epsilon H + O(\epsilon^2)) \epsilon^2 H_\theta^2 \right. \\
& \left. - 2(1 + \epsilon H) \epsilon H_\theta \epsilon H_z \epsilon H_{\theta z} \right] \left(- (1 + \epsilon H) [\epsilon^2 \tilde{u}_2 + O(\epsilon^3)] + \epsilon H_\theta [\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)] + \right. \\
& \left. (1 + \epsilon H) \epsilon H_z [\bar{w}_2 + \epsilon^2 \tilde{w}_2 + O(\epsilon^3)] \right) = 0.
\end{aligned}$$

Debido a que $\epsilon \ll 1$, las expresiones $1 - \epsilon^2 H_z^2 - \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3)$, $1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3)$ y $1 - 2\epsilon^2 H_z^2 - 2\epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3)$ son de orden uno, porque los términos $\epsilon^2 H_z^2$ y $\epsilon^2 H_\theta^2$ son de $O(\epsilon^2)$, así $1 - \epsilon^2 H_z^2 - \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) = 1 + O(\epsilon^2) \sim 1$, $1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_z^2 - \frac{1}{2} \epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) = 1 + O(\epsilon^2) \sim 1$ y $1 - 2\epsilon^2 H_z^2 - 2\epsilon^2 H_\theta^2 + O(\epsilon^3) = 1 + O(\epsilon^2) \sim 1$. Con esto en consideración, se tiene que la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned}
\Gamma_t & - \epsilon^2 H_t \left[H_z \Gamma_z + H_\theta \Gamma_\theta - 2\epsilon H H_\theta \Gamma_\theta \right] + (1 - \epsilon H) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left((1 - \epsilon H) \Gamma [\bar{w}_2 + O(\epsilon)] \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1 - \epsilon H) \Gamma [\epsilon \tilde{v}_2 + O(\epsilon^2)] + O(\epsilon^2) \right) \right] - \frac{1}{Pe} (1 - \epsilon H) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left((1 - \epsilon H) \right. \right. \\
& \left. \left. (\Gamma_z + O(\epsilon)) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left((1 - \epsilon H) (\Gamma_\theta + O(\epsilon^2)) \right) \right] + (1 - 2\epsilon H) \Gamma \\
& \left[\epsilon H_{\theta\theta} + \epsilon H_{zz} + O(\epsilon^2) \right] \left(\epsilon H_z \bar{w}_2 + O(\epsilon^2) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Despreciando los términos de orden mayor o igual que ϵ , da

$$\Gamma_t + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \bar{w}_2 \right] - \frac{1}{Pe} \left[\Gamma_{zz} + \Gamma_{\theta\theta} \right] = 0$$

Sustituyendo la velocidad básica \bar{w}_2 evaluada en la interfaz $r = S = 1 + \epsilon H$, la ecuación anterior se transforma en

$$\Gamma_t + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \left(\frac{(2 + \epsilon)\epsilon}{m} - \frac{2\epsilon H}{m} \right) \right] - \frac{1}{Pe} \left[\Gamma_{zz} + \Gamma_{\theta\theta} \right] = 0.$$

Ahora, se supone que $Pe \sim O(1/\epsilon)$; así $Pe = \frac{\tilde{P}e}{\epsilon}$, donde $\tilde{P}e = O(1)$. Sustituyendo el número de Peclet, omitiendo el símbolo \sim y además, reescribiendo el segundo término en esta última ecuación y aplicando (3.26), se obtiene

$$\epsilon \Gamma_\tau + \frac{(2 + \epsilon)\epsilon}{m} \Gamma_z - \frac{2\epsilon}{m} (H\Gamma)_z - \frac{\epsilon}{Pe} \left[\Gamma_{zz} + \Gamma_{\theta\theta} \right] = 0.$$

Por lo tanto, la **ecuación de evolución de la concentración de surfactantes** es

$$\Gamma_\tau + \frac{2}{m} \Gamma_z - \frac{2}{m} (H\Gamma)_z - \frac{1}{Pe} \left[\Gamma_{zz} + \Gamma_{\theta\theta} \right] = 0.$$

CONCLUSIONES

En este trabajo se abordó el problema de derivar un modelo matemático para la resolución de un flujo centro-anular confinado en tuberías horizontales con surfactantes insolubles distribuidos uniformemente en la interfaz entre los dos fluidos con densidades distintas. A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes en tubos cilíndricos, el problema para dos fluidos no axisimétricos se formuló de modo general y para las perturbaciones interfaciales no axisimétricas arbitrarias de orden ϵ , donde ϵ es el grosor de la película. Los surfactantes insolubles están presentes en la interfaz afilada que separa las dos fases, y el flujo es impulsado por un gradiente de presión axial constante que produce un estado no perturbado de un núcleo perfectamente cilíndrico lubricado por un anillo de espesor uniforme. En el estado base, la concentración uniforme de surfactante, implicó una tensión superficial uniforme y esto resultó en un flujo continuo de Poiseuille por partes.

También se introdujo un pequeño parámetro, ϵ , que es igual a la relación entre el grosor del anillo no perturbado y el radio del núcleo no perturbado. Se utilizaron las expansiones asintóticas para derivar un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas que, en términos escalados, representan la evolución de la amplitud interfacial que separa los fluidos del núcleo y la película, y la evolución de la concentración de surfactantes interfacial.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Astudillo, F. 2007. *Un modelo matemático para un flujo centro-anular con surfactantes insolubles distribuidos no uniformemente en la interfaz entre los dos fluidos*. Trabajo de Grado. Universidad de Oriente, Venezuela.
- [2] Astudillo, F. 2011. *Estabilidad interfacial no lineal de flujos centro anulares con surfactantes solubles*. Tesis de Maestría en Matemáticas. Postgrado en Matemáticas, Universidad de Oriente, Venezuela.
- [3] Batchelor, G. K. *An introduction to fluid dynamics*, (1999). New York, U.S.A.
- [4] Bear, J. 1988. *Dynamics of fluids in porous media*. Dover Publications, Inc.
- [5] Coward, A., Papageorgiou, D. y Smyrlis, Y. 1995. Nonlinear stability of oscillatory core-annular flows: A generalized Kuramoto-Sivashinsky equation with time-periodic coefficient. *Z. Angew Mathematics Physics*, **46**, 1-39.
- [6] Davies, B. 2002. *Integral Transforms and Their Applications*. Third Edition. Springer-Verlag. New York.
- [7] Evans, L. 2010. *Partial Differential Equations*. Second Edition. American Mathematical Society.
- [8] Gerhart, P., Gross, R. y Hochstein, J. 1995. *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*. Segunda edición. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. Delaware.
- [9] Haberman, William L., John, James E. A. 1980. *Introduction to fluid mechanics*. Second edition. Prentice-Hall. New Jersey.
- [10] Hammond, P. 1983. Nonlinear adjustment of a thin annular film of viscous fluid surrounding at thread of another within a circular cylinder pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, **137**, 363-384.

- [11] Hu, H. y Joseph, D. 1989. Lubricated pipelining: Stability of core-annular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **205**, 359-396.
- [12] Hughes, W. y Brighton, J. 1999. *Fluid Dynamics*. Third Edition, Schaum's Outlines Series, McGraw-Hill Companies, Inc. U.S.A.
- [13] Joseph, D., Renardy, M. y Renardy, Y. 1984. Instability of the flow of immiscible liquids with different viscosities in a pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, **141**, 309-317.
- [14] Joseph, D. y Renardy, Y. 1993. *Fundamentals of Two-Fluid Dynamics. Part I: Mathematical Theory and Applications*. Springer-Verlag. New York.
- [15] Kas-Danouche, S. y Astudillo, F. 2014. *Introducción a Mecánica de Fluidos y Modelación*. Ediciones IVIC. Caracas.
- [16] Kas-Danouche, S. 2002. *Nonlinear interfacial stability of core-annular film flows in the presence of surfactants*. PhD Dissertation. Department of Mathematical Sciences, Institute of Technology and Rutgers, The State University of New Jersey, Newark.
- [17] Kas-Danouche, S. 2004. A mathematical model for core-annular flows with surfactants. *Divulgaciones Matemáticas*, **12(2)** , 117-138.
- [18] Kas-Danouche, S. 2007. A mathematical model for core-annular fluids with surfactants. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, **XIV(1 y 2)**, 27-39.
- [19] Kerchman, V. 1995. Strongly nonlinear interfacial dynamics in core-annular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, **290**, 131-166.
- [20] Laforgue, Jacques. 2003. *Métodos de perturbación para ecuaciones algebraicas y Diferenciales*. IV TForMa, Asociación Matemática Venezolana.

- [21] Lugo, A. 2009. *Rutas a caos en un flujo centro-anular con surfactantes insolubles*. Tesis de Maestría en Matemáticas. Postgrado en Matemáticas, Universidad de Oriente, Venezuela.
- [22] Papageorgiou, D., Maldarelli, C. y Rumschitzki, D. 1990. Nonlinear interfacial stability of core-annular film flows. *Physics of Fluid*, **2**, 340-352.
- [23] Pozrikidis, C. 2017. *Fluid Dynamics*. Third Edition. Springer. New York.
- [24] Spiegel, M., Lipschutz, S. y Spellman, D. 2009. *Análisis Vectorial*. Segunda edición. McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- [25] Streeter, Victor L., Wylie, E. Benjamin y Bedford, Keith W. 1999. *Mecánica de Fluidos*. Novena edición. McGraw-Hill, Santafé de Bogotá.
- [26] Wheeler, A. A. y McFadden, G. B. 1994. *A ξ -vector formulation of anisotropic phase-field models: 3-D asymptotics*. Tech. Rep. NISTIR 5505, U. S. Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology.
- [27] Wong, H., Rumschitzki, D. y Maldarelli C. 1996. On the surfactant mass balance at a deforming fluid interface. *Physics of Fluids*, **8**, 3203-3204.

HOJA DE METADATOS

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 1/6

Título	UN MODELO MATEMÁTICO PARA UN FLUJO CENTRO-ANULAR CON SURFACTANTES INSOLUBLES DISTRIBUIDOS UNIFORMEMENTE EN LA INTERFAZ ENTRE LOS DOS FLUÍDOS CON DENSIDADES DISTINTAS CONFINADO EN TUBERÍAS HORIZONTALES
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Rojas S., Moisés D.	CVLAC	24.691.979
	e-mail	rojasmois022@gmail.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Modelo matemático
Flujo centro-anular
Surfactante

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 2/6

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias	Matemáticas

Resumen (abstract):

En este trabajo, se presenta la derivación de un modelo matemático para un flujo centro-anular confinado en tuberías horizontales con surfactantes insolubles distribuidos uniformemente en la interfaz entre los dos fluidos con densidades distintas. Dicho flujo se considera dependiente de la variable azimutal. Para modelar la evolución de la interfaz, se utilizan las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad. Se requiere la condición de no deslizamiento en las paredes del tubo, la continuidad de velocidades en la interfaz y la condición cinemática. Además, se considera el balance de los esfuerzos normales y el balance de los esfuerzos tangenciales. Para modelar la distribución de surfactantes insolubles se considera la ecuación de transporte. Usando expansiones asintóticas, se deriva un sistema de dos ecuaciones integro-diferenciales no lineales acopladas.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Astudillo, Franklin	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input checked="" type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	16 703 685
	e-mail	hoffman732@gmail.com
	e-mail	
Laforgue, Jacques	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	13 498 503
	e-mail	laforgue007@gmail.com
	e-mail	
Argüello, René	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	16 879 360
	e-mail	rarguell007@yahoo.com
	e-mail	
	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año Mes Día

2019	12	12
------	----	----

Lenguaje: spa

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
TESIS-Maestria-Moises.pdf	Application/pdf

Alcance:

Espacial: _____ Nacional _____

Temporal: _____ Temporal _____

Título o Grado asociado con el trabajo:

_____ Magister Scientiarum en Matemáticas _____

Nivel Asociado con el Trabajo: _____ Maestría _____

Área de Estudio: _____ Matemáticas Aplicadas _____

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

_____ Universidad de Oriente _____

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 5/6



UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CUN°0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda **"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009"**.

Leído el oficio SIBI - 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
SISTEMA DE BIBLIOTECA
RECIBIDO POR Mazzeley
FECHA 5/8/09 HORA 5:30

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

JUAN A. BOLANOS CUNTELO
Secretario



C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/maruja

Apartado Correos 094 / Telfa: 4008042 - 4008044 / 8008045 Telefax: 4008043 / Cumaná - Venezuela

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 6/6

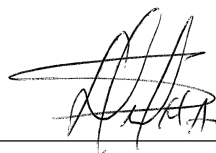
Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009):

“Los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo del Núcleo respectivo, quién deberá participarlo previamente al Consejo Universitario, para su autorización.”



Licdo. Moisés Rojas

Autor



Dr. Franklin Astudillo

Tutor