Saber, Universidad de Oriente, Venezuela.Vol. 20. Nº 2: 208-211. (2008)

LA MENOR SUMA DE GRADOS Y SUCESIONES POTENCIALMENTE P_k-BIPARTITAS GRÁFICAS

THE LEAST SUM OF DEGREES AND SUCCESIONS POTENTIALLY P_κ - BIPARTITE GRAPHICS

Rafael Rodríguez, Daniel Brito, Gladys Lárez

Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre, Escuela de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Cumaná.
rafaelrn@cantv.net; dbrito@sucre.udo.edu.ve; glarez@sucre.udo.edu.ve

RESUMEN

Un grafo bipartito balanceado tiene la propiedad P_k si contiene un subgrafo bipartito balanceado completo de orden $2k$. Una sucesión bipartita gráfica $\Pi = (\Pi_{V_1}, \Pi_{V_2})$ es potencialmente P_k-bipartita gráfica si tiene una realización con la propiedad P_k. Brito *et al.* (2001), conjeturaron dada la menor suma de grado $\sigma(k, 2n)$ tal que toda sucesión bipartita gráfica $\Pi = (\Pi_{V_1}, \Pi_{V_2})$, $\Pi_{V_1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\Pi_{V_2} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ con $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 1$ y $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 1$ y $\sigma(\Pi) \geq \sigma(k, 2n)$ es potencialmente P_k-bipartita gráfica, entonces $\sigma(k, 2n) = 2(k-1)(2n-k) + 2k$ y lo demostraron para $k = 2$ y 3. En este artículo se demuestra la conjetura para $k = 4$.

Palabras clave: Realización, bipartita, gráfica.

ABSTRACT

A balanced bipartite graph has the property P_k if it contains a complete balanced bipartite subgraph of order $2k$. A graphic bipartite succession $\Pi = (\Pi_{V_1}, \Pi_{V_2})$ is potentially P_k- bipartite graphic if it has a realization with the property P_k. Brito *et al.* (2001) conjectured that given the least sum of degrees $\sigma(k, 2n)$ such that all graphic bipartite succession $\Pi = (\Pi_{V_1}, \Pi_{V_2})$, $\Pi_{V_1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and $\Pi_{V_2} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ with $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 1$ and $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 1$, and $\sigma(\Pi) \geq \sigma(k, 2n)$ is potentially P_k- graphic bipartite, then $\sigma(k, 2n) = 2(k-1)(2n-k) + 2k$ and they demonstrated it for $k = 2$ and 3. In this article that conjecture is proved for $k = 4$.

Key words: Realization, bipartite, graphic.

INTRODUCCIÓN

Un grafo $G = (V, E)$ de orden $2n$ es un grafo bipartito balanceado si hay una partición de V en dos conjuntos V_1 y V_2 con $|V_1| = |V_2| = n$, tal que cada lado del grafo tiene un vértice extremo en V_1 y el otro en V_2 y se denota por $G = (V_1, V_2; E)$. El grado de un vértice x de un grafo G, es el número de lados incidentes con x y se denota por $d_G(x)$. Sea $G = (V_1, V_2; E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ con $V_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y $V_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$; y sean $a_i = d_G(x_i)$ y $b_i = d_G(y_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Una sucesión de enteros no negativos $\prod = (d_1, d_2, \ldots, d_n, d_{n+1}, \ldots, d_{2n})$ es una sucesión de grado bipartita, si $a_i = d_i$ y $b_i = d_{n+i}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Usaremos la notación $\prod(G) = (\prod_{V_1}, \prod_{V_2})$, donde $\prod_{V_1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\prod_{V_2} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Una sucesión $S = (S_1, S_2)$ es bipartita gráfica si existe un grafo bipartito G para el cual $\prod(G) = S$. El grafo resultante G, el cual en general no es único, se llama una realización de S.

Sea $\prod(G) = (\prod_{V_1}, \prod_{V_2})$ una sucesión bipartita gráfica, con $\prod_{V_1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\prod_{V_2} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Denotaremos por $\sigma(\prod_{V_1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $\sigma(\prod_{V_2}) = \sum_{i=1}^{n} b_i$, y $\sigma(\prod) = \sigma(\prod_{V_1}) + \sigma(\prod_{V_2})$ a la suma de grados de la sucesión.

Un grafo bipartito balanceado tiene la propiedad P_k si contiene un subgrafo bipartito balanceado completo de orden $2k$. Una sucesión bipartita gráfica $\prod = (\prod_{V_1}, \prod_{V_2})$ es potencialmente P_k-bipartita gráfica si tiene una realización con la propiedad P_k.

Brito *et al.* (2001), conjeturaron dada la menor suma de grado $\sigma(k, 2n)$ tal que toda sucesión bipartita gráfica $\prod = (\prod_{V_1}, \prod_{V_2})$, $\prod_{V_1} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\prod_{V_2} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ con $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 1$ y $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 1$, y $\sigma(\prod) \geq \sigma(k, 2n)$ es potencialmente P_k-bipartita gráfica, entonces $\sigma(k, 2n) = 2(k-1)(2n-k) + 2k$ y lo demostraron para $k = 2$ y 3.

Recibido: junio 2006. Aprobado: noviembre 2007.
Versión final: noviembre 2007

Teorema A. Si $n \geq 2$, entonces $\sigma(2,2n) = 4n$, excepto cuando $\prod_{V_1} = \prod_{V_2} = (2, 2, 2)$.

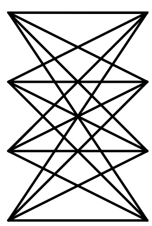
Teorema B. Si $n \geq 3$, entonces $\sigma(3,2n) = 4n$, excepto cuando $\prod_{V_1} = \prod_{V_2} = (4, 3, 3, 3)$.

En este artículo se prueba la conjetura para $k = 4$, demostrando el siguiente resultado: Si $n \geq 4$, entonces $\sigma(4, 2n) = 12n$-16**.**

RESULTADO

Teorema: Sea $G = (V_1, V_2; E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$, si $n \geq 4$, dada la menor suma de grado $\sigma(4, 2n)$ tal que toda sucesión bipartita gráfica $\prod = (\prod_{V_1}, \prod_{V_2})$, $\prod_{V_1} = (a_1, a_2,..., a_n)$ y $\prod_{V_2} = (b_1, b_2,..., b_n)$ con $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq 1$ y $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n \geq 1$, y $\sigma(\prod) \geq \sigma(4, 2n)$ es potencialmente P_4-bipartita gráfica, entonces $\sigma(4, 2n) = 12n$-16.

Prueba: Si $n = 4$, entonces $\sigma(4, 8) = 32$ y de la definición de sucesión de grado bipartita se deduce que la única posibilidad para $\prod$ es $\prod_{V_1} = \prod_{V_2} = (4, 4, 4, 4)$, cuya única realización es $K_{4,4}$ (Figura 1).



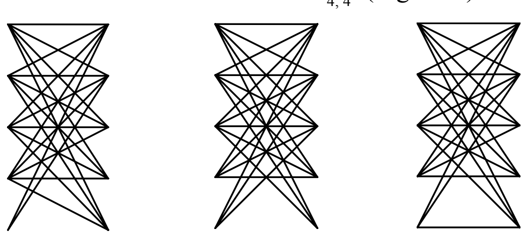
$\prod$ es $\prod_{V_1} = \prod_{V_2} = (4, 4, 4, 4) = K_{4,4}$

Figura 1. Realizaciones de $\prod$ para $n = 4$

Si $n = 5$, entonces $\sigma(4, 10) = 44$, de manera que $\sigma(\prod_{V_1}) = \sigma(\prod_{V_2}) = 22$, y las posibilidades para $\prod$ son:

$$\prod_{V_1} = (5, 5, 5, 5, 2) \text{ y } \prod_{V_2} = (5, 5, 4, 4, 4)$$
$$\prod_{V_1} = \prod_{V_2} = (5, 5, 5, 4, 3)$$
$$\prod_{V_1} = (5, 5, 5, 4, 3) \text{ y } \prod_{V_2} = (5, 5, 4, 4, 4)$$

cuyas realizaciones contienen a $K_{4,4}$. (Figura 2).



a) $\prod_{V_1}$=(5, 5, 5, 5, 2) $\prod_{V_2}$ = (5, 5, 4, 4, 4)   b) $\prod_{V_1} = \prod_{V_2}$=(5, 5, 5, 4, 3)   c) $\prod_{V_1}$=(5, 5, 5, 4, 3) $\prod_{V_2}$ = (5, 5, 4, 4, 4)

Figura 2. Realizaciones de $\prod$ para $n = 5$.

Para $n \geq 6$, la prueba se hace por inducción sobre n. Si $n = 6$, entonces $\sigma(4, 12) = 56$, luego $\sigma(\prod_{V_1}) = \sigma(\prod_{V_2}) \geq 28$, consideremos solo la igualdad puesto que si hay más lados se garantiza con mayor rapidez la existencia de $K_{4,4}$. Supongamos entonces que $\sigma(\prod_{V_1}) = \sigma(\prod_{V_2}) = 28$, las posibilidades de distribuir 28 en 6 términos mayores o iguales que 1, para $\prod_{V_1}$ y $\prod_{V_2}$ son: (6, 6, 6, 6, 3, 1), (6, 6, 6, 6, 2, 2) (6, 6, 6, 5, 4, 1) (6, 6, 6, 5, 3, 2) (6, 6, 6, 4, 4, 2) (6, 6, 6, 4, 3, 3) (6, 6, 5, 5, 5, 1) (6, 6, 5, 5, 4, 2) (6, 6, 5, 5, 3, 3) (6, 6, 5, 4, 4, 3) (6, 6, 4, 4, 4, 4) (6, 5, 5, 5, 5, 2) (6, 5, 5, 5, 4, 3) (6, 5, 5, 4, 4, 4) (5, 5, 5, 5, 5, 3) (5, 5, 5, 5, 4, 4). En cada una de las combinaciones no simétricas que son sucesiones bipartitas gráficas se verifica la propiedad P_4. En las Figuras 3 – 18 se muestran algunas de ellas.

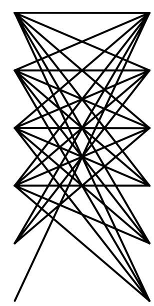


Figura 3. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}$ = (6, 6, 6, 6, 3, 1) y $\prod_{V_2}$ = (6, 5, 5, 4, 4, 4)

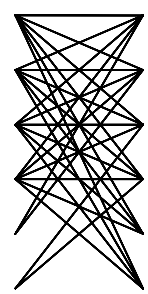


Figura 4. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}$ = (6, 6, 6, 6, 2, 2) y $\prod_{V_2}$ = (5, 5, 5, 5, 4, 4)

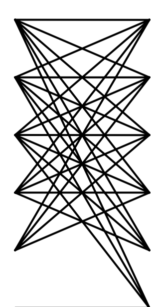


Figura 5. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}$ = (6, 6, 6, 5, 4, 1) y $\prod_{V_2}$ = (5, 5, 5, 5, 4, 4)

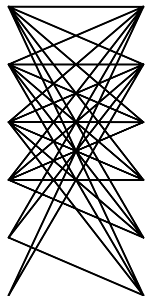


Figura 6. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}=(6,6,6,5,3,2)$ y $\prod_{V_2}=(6,6,4,4,4,4)$

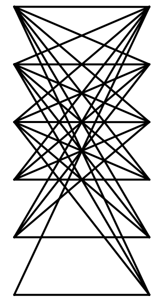


Figura 7. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}=(6,6,6,4,4,2)$ y $\prod_{V_2}=(6,5,5,4,4,4)$

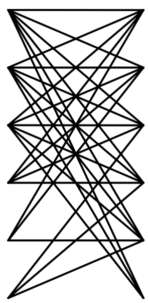


Figura 8. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}=(6,6,6,4,3,3)$ y $\prod_{V_2}=(5,5,5,5,5,3)$

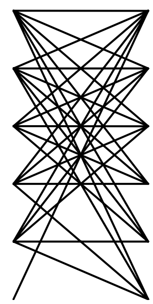


Figura 9. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}=(6,6,5,5,5,1)$ y $\prod_{V_2}=(5,5,5,5,4,4)$

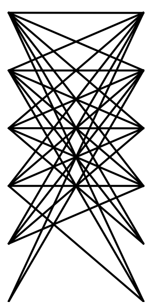


Figura 10. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}=(6,6,5,5,4,2)$ y $\prod_{V_2}=(6,6,5,5,3,3)$

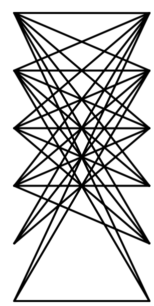


Figura 11. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}=(6,6,5,5,3,3)$ y $\prod_{V_2}=(6,6,5,4,4,3)$

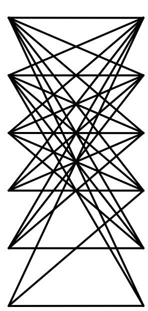


Figura 12. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}=(6,6,5,4,4,3)$ y $\prod_{V_2}=(6,5,5,5,4,3)$

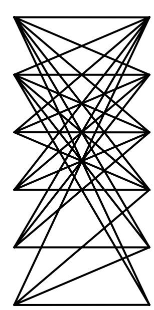


Figura 13. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1}=(6,6,4,4,4,4)$ y $\prod_{V_2}=(6,5,5,5,4,3)$

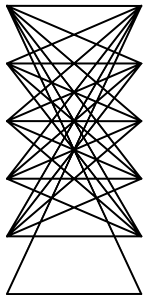


Figura 14. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1} = (6, 5, 5, 5, 5, 2)$ y $\prod_{V_2} = (6, 5, 5, 5, 5, 2)$

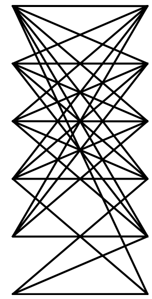


Figura 15. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1} = (6, 5, 5, 5, 4, 3)$ y $\prod_{V_2} = (5, 5, 5, 5, 5, 3)$

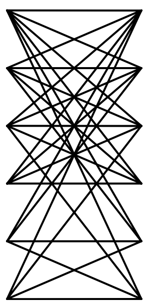


Figura 16. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1} = (6, 5, 5, 4, 4, 4)$ y $\prod_{V_2} = (6, 5, 5, 4, 4, 4)$

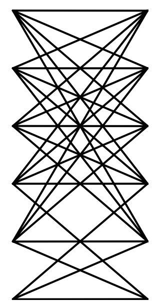


Figura 17. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1} = (5, 5, 5, 5, 5, 3)$ y $\prod_{V_2} = (5, 5, 5, 5, 5, 3)$

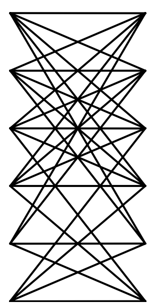


Figura 18. Realización de $\prod$ con $\prod_{V_1} = \prod_{V_2} = (5, 5, 5, 5, 4, 4)$

Supongamos ahora que el teorema es cierto para $n=p$. Esto es, para cualquier sucesión bipartita gráfica $\prod = (\prod_{V_1}, \prod_{V_2})$, con $\prod_{V_1} = (a_1, a_2,..., a_n)$ y $\prod_{V_2} = (b_1, b_2,..., b_n)$ tal que $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_p \geq 1$ y $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_p \geq 1$ y $\sigma(\prod) \geq 12p\text{-}16$, entonces $\prod$ tiene una realización que contiene a $K_{4,4}$.

Probaremos que es cierto para $n = p + 1$. Sean $\prod_{V_1} = (a_1, a_2,..., a_p, a_{p+1})$ y $\prod_{V_2} = (b_1, b_2,..., b_p, b_{p+1})$ tal que $\sigma(\prod_{V_1}) = \sigma(\prod_{V_2}) = 6p\text{-}2$. Al distribuir $6p\text{-}2$ en $p + 1$ términos decrecientes tal que $a_1, b_1 \leq p + 1$, se tiene que $a_{p+1}, b_{p+1} \leq 6$. En consecuencia $\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=1}^{p} b_i \geq 12p\text{-}16$, y la hipótesis inductiva garantiza la existencia de $K_{4,4}$ en alguna realización de $\prod$.

Por lo tanto, si $\sigma(\prod) \geq 12p\text{-}4$, se tendrá más lados y así se garantiza con más razón la existencia de $K_{4,4}$ en alguna realización de $\prod$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BONDY, J. A.; MURTY, U. 1976. Graphs Theory with Application. North Holland. New York.

BRITO, D.; LÁREZ, G.; MAGO, P. 2001. La Menor Suma de Grados que Conduce a Sucesiones Potencialmente P_k-Bipartitas Gráficas. Pro-Mathematica 29-30: 81-91.