



UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
NÚCLEO DE SUCRE  
ESCUELA DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

EVOLUCIÓN DE UN FLUIDO PERFECTO EN SIMETRÍA AXIAL  
Y DE REFLEXIÓN  
(Modalidad: Tesis de Grado)

XAVIER JACQUES FRANCOIS LAFORGUE MARÍN

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

CUMANÁ, 2013

EVOLUCIÓN DE UN FLUIDO PERFECTO EN SIMETRÍA AXIAL  
Y DE REFLEXIÓN

APROBADO POR:



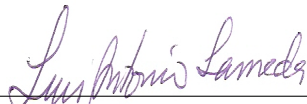
---

Dr. Luis Castillo Brito  
Asesor



---

Dr. Rodrigo Martínez Ordaz  
Jurado Principal



---

Dr. Luis Araque Lameda  
Jurado Principal

# ÍNDICE

DEDICATORIA	I
AGRADECIMIENTOS	II
LISTA DE TABLAS	III
RESUMEN	IV
INTRODUCCIÓN	1
1. ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN	6
1.1. El tensor de Ricci en función del contenido material . . . . .	7
1.2. El tensor de Ricci en función de las variables métricas . . . . .	14
1.3. Las ecuaciones de campo . . . . .	18
1.4. La ecuación de las ondas gravitacionales . . . . .	23
2. ECUACIONES CERCA DEL ORIGEN	25
3. ACOPLAMIENTO EN LA SUPERFICIE	33
4. DESARROLLO ASINTÓTICO	38
4.1. Desarrollo cerca del infinito . . . . .	40
CONCLUSIONES	44
BIBLIOGRAFÍA	45
HOJA DE METADATOS	46

*A MIS PADRES*

## AGRADECIMIENTOS

No puedo expresar cuán agradecido estoy con el Profesor Luis Castillo, cuyo apoyo, dedicación, guía y entusiasmo hicieron posible la realización de este trabajo y su culminación en tiempo récord. ¡Muchísimas gracias!

## LISTA DE TABLAS

1.1. Componentes del tensor de Ricci asociadas a las ecuaciones de campo propuestas. . . . .	19
--	----

## RESUMEN

Se estudia la evolución de un fluido perfecto con simetría axial y de reflexión utilizando el esquema de Bondi, donde se expresan las variables físicas en términos de la velocidad de un observador comóvil con el fluido. Para evitar la aparición de singularidades en algunos puntos del espaciotiempo, se garantiza la regularidad de las soluciones en el origen, en la superficie y en la zona de radiación. En el origen, la regularidad se determina a través del desarrollo en series de potencias positivas de la coordenada radial. En la frontera de la distribución material, se acopla suavemente la región que contiene al fluido con la región correspondiente al vacío mediante la continuidad de los coeficientes de espín del formalismo de Newman–Penrose. Posteriormente, la regularidad cerca del infinito se garantiza con el desarrollo en series de potencias negativas de la coordenada radial. En el origen, se encontró una cantidad conservada en función de variables físicas y potenciales gravitacionales asociados a la no esfericidad del sistema, también se obtuvo que en el centro del fluido el espaciotiempo no es conformemente plano y depende directamente de la no esfericidad del sistema. En la superficie, se determinó que la presión del fluido no es nula y depende explícitamente de la no esfericidad de la distribución material. En la zona de radiación, la pérdida de masa del sistema, por efecto de la radiación gravitacional, se expresa en términos de la función de información y, en el infinito, el espaciotiempo es asintóticamente plano.

# INTRODUCCIÓN

Einstein determinó en 1907, que localmente un sistema de referencia no inercial es equivalente a un campo gravitacional. A esta equivalencia la denominó “Principio de Equivalencia”, y fue una de las ideas que mantuvo en mente, hasta la formulación final de su teoría relativista de la gravitación en 1915. De este modo el Principio de Equivalencia establece que la gravedad no es una fuerza física, sino un artificio del sistema de referencia. Es decir, no solamente las velocidades, sino también las aceleraciones son relativas. Incluso, los efectos producidos por un campo gravitacional son los mismos que los producidos por un sistema acelerado. En este sentido, la Teoría de la Relatividad General es una teoría geométrica de la gravitación, donde las ecuaciones de campo de Einstein expresan la equivalencia entre la geometría del espaciotiempo y el contenido energético material. De acuerdo con la Teoría de la Relatividad General el espaciotiempo no está fijo, sino que es un ente dinámico, a diferencia de la Relatividad Especial donde el espaciotiempo está fijo y es determinado por la métrica de Minkowski.

En la actualidad, la Relatividad General ha pasado con extraordinaria precisión todas las pruebas experimentales [1] a las que se ha sometido, convirtiéndose así en la teoría de la gravitación por excelencia. Una de las predicciones de la Teoría de la Relatividad General, que no se ha podido comprobar directamente, es la radiación gravitacional. Las ondas gravitacionales son fluctuaciones muy débiles generadas en la curvatura del espaciotiempo que se propagan como una onda a la velocidad de la luz. Este fenómeno no ha sido confirmado en forma directa, a pesar de los enormes esfuerzos que se están realizando a nivel mundial. Sin embargo, se tienen algunas evidencias indirectas que confirman su existencia, como veremos en seguida.



En el año 1974 Joseph Taylor y Russell Hulse, encontraron que el período de rotación del púlsar binario (PSR1913+16) decrece progresivamente al perder energía por emisión de la radiación gravitacional, como lo predice la Teoría de la Relatividad General. Por tal motivo, Hulse y Taylor recibieron el Premio Nobel de Física en 1993. Más recientemente, en el año 2005, se descubrió un segundo púlsar binario (PSR J0737-3039) cuyo comportamiento confirma también las predicciones de la Teoría de la Relatividad General con respecto a la emisión de ondas gravitacionales.

Existe una gran diferencia entre las ondas electromagnéticas y las ondas gravitacionales, la primera diferencia que podemos considerar es que las frecuencias de las ondas gravitacionales son muy pequeñas (entre  $10^{-15} Hz$  y  $10^3 Hz$ ) comparadas con el espectro visible de la luz. El hecho de que las frecuencias de las ondas gravitacionales sean muy débiles hace extremadamente difícil su detección directa. La segunda diferencia es que la radiación electromagnética es fácilmente absorbida por la materia en general, esto implica que la información obtenida de las ondas electromagnéticas esté distorsionada debido a dicha interacción. Sin embargo, las ondas gravitacionales atraviesan la materia sin ser perturbadas. Por esta razón, si se lograran detectar directamente las ondas gravitacionales, obtendríamos información invaluable sobre nuestro universo.

La consideración matemática a realizar inicialmente cuando se estudia un sistema físico a través de la Teoría de la Relatividad General, es la de definir la métrica riemanniana para la situación particular. Existen varias métricas (creadas con componentes de simetría para hacer posible la solución de las usualmente complejas ecuaciones de campo de Einstein), definidas por los autores para diversas consideraciones, una de las más generales es la de Bondi para simetría axial y de reflexión. La simetría axial se refiere a la independencia de las variables métricas

y físicas con respecto al ángulo azimutal, y la simetría de reflexión implica que el cambio de  $\varphi$  por  $-\varphi$  deja invariante la métrica. Un caso particular de esta simetría, que vamos a considerar, es una distribución de materia esferoidal oblata [2]. Podemos decir, que un esferoide oblato es aquel producto del achatamiento de una esfera en los polos y el ensanchamiento en el ecuador. El contenido material estudiado usualmente, al cual se le aplicarán estos parámetros de simetría, teniendo en mente la obtención de las situaciones más generales posibles, es el fluido perfecto caracterizado completamente por la densidad de energía y la presión isotropa del sistema.

En el estudio de la evolución de un fluido perfecto hay aún mucho terreno inexplorado. Una discusión sobre los campos gravitacionales en el exterior de las distribuciones materiales en un espaciotiempo con simetría axial y de reflexión fue realizada por Bondi en 1962 [3], donde se determina de manera explícita la pérdida de masa por efecto de la radiación gravitacional. Si bien el estudio de distribuciones suficientemente generales es conveniente en la búsqueda de la comprensión de lo observado en la bóveda celeste, implica la resolución de ecuaciones cada vez más complejas; puede comentarse que, inicialmente, el propio Einstein dudó de la posibilidad de que pudieran encontrarse soluciones a sus ecuaciones recién planteadas.

En la búsqueda de generalidad, Herrera, Di Prisco y Martínez [4], estudian un sistema relativista perturbando su simetría esférica, así usando ecuaciones de campo con simetría axial y de reflexión. Esto permite estudiar la radiación gravitacional, puesto que por el teorema de Birkhoff [5] que reza: *un campo gravitacional esféricamente simétrico en un espaciotiempo vacío es estático y viene dado por la métrica de Schwarzschild*; siendo una consecuencia importante de esto que una distribución esférica, aún en el caso dinámico, no puede emitir ondas

gravitacionales. Con el mismo afán que obtuvieron de Einstein los investigadores de un campo recién nacido, nuestro objetivo es el de estudiar la evolución de un fluido perfecto en coordenadas de Bondi con simetría axial y de reflexión, tomando como referencia el trabajo realizado por Herrera, Di Prisco y Martínez [4], dando el siguiente paso en la inspección de estas distribuciones materiales con el rompimiento de la siempre interesante y ampliamente examinada simetría esférica.

A continuación, se estudia la evolución de un fluido perfecto con simetría axial y de reflexión, considerando la dinámica de todo el espaciotiempo, es decir, la región acotada por el fluido y el exterior correspondiente al vacío. Para garantizar la regularidad en todo el espaciotiempo se deben considerar ciertas condiciones cerca del centro de la distribución material, en la superficie del fluido y cerca del infinito, a través de las ecuaciones de campo de Einstein. En este sentido, se plantea la siguiente organización: en el capítulo uno se determinan las ecuaciones de campo para un fluido perfecto con simetría axial y de reflexión utilizando el esquema de Bondi ([6] y [4]), correspondiente a las transformaciones de un sistema minkowskiano al sistema de coordenadas de radiación, encontrando de esta forma las componentes de la cuadrivelocidad en función de la velocidad de un observador comóvil. Una vez planteadas las ecuaciones de campo, en el segundo capítulo se propone un desarrollo en serie de potencias de la coordenada radial alrededor del origen de todas las variables físicas y métricas con el propósito de obtener las condiciones de regularidad en dicha región, garantizando también la regularidad del invariante de Weyl.

Posteriormente, en el tercer capítulo se estudian las condiciones de acoplamiento en la superficie de un fluido perfecto, entre la región interior ocupada por la materia y la exterior correspondiente al vacío. El objetivo primordial de estas

condiciones es el de evitar cualquier comportamiento singular de las variables físicas sobre la hipersuperficie de la distribución de materia, con simetría axial y de reflexión. Estas condiciones de acoplamiento se obtienen a través de un conjunto de invariantes denominados coeficientes de espín, deducidos por Newman y Penrose en 1965 [7]. En el capítulo cuatro se plantea el desarrollo en serie de potencias negativas de la coordenada radial como lo propuso Bondi en 1962 [3] para garantizar la convergencia a un espaciotiempo minkowskiano y determinar la pérdida de masa, de la fuente, por efecto de la radiación gravitacional. Finalmente, presentamos las conclusiones.

# CAPÍTULO 1

## ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

De acuerdo con la Teoría de la Relatividad General, las ecuaciones de campo de Einstein relacionan el contenido de materia y energía con las propiedades geométricas del espaciotiempo cuatridimensional. Es decir, una ecuación que permita determinar las variables métricas a partir del contenido energético-material de forma que las soluciones constituyan los espaciotiempos físicamente posibles. Las ecuaciones de campo de Einstein vienen dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,  $R_{\mu\nu}$  es el tensor de Ricci,  $R$  es el escalar de Ricci ( $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ),  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $G$  es la constante universal de Newton o constante gravitacional,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento, el cual se definirá más adelante. El tensor de Einstein (1.1) es la única combinación posible del tensor de Ricci, el escalar de Ricci y el tensor métrico, con divergencia nula. En unidades geometrizadas, tanto la constante de gravitación como la velocidad de la luz se igualan a la unidad ( $G = c = 1$ ). Estas unidades adimensionales, permiten reescribir las ecuaciones de campo de Einstein (1.1), con índices que van de 0 a 3, como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Si se lee esta ecuación (1.2) de izquierda a derecha, indica cómo la curvatura del espaciotiempo determina el comportamiento dinámico de los sistemas físicos, caracterizados por su tensor de energía-momento. Leyendo de derecha a izquierda, es el contenido energético-material de una región dada el que determina la curvatura del espaciotiempo.

### 1.1. El tensor de Ricci en función del contenido material

El tensor de energía–momento contiene las contribuciones de todos los tipos de energías presentes en la distribución de materia. En particular, el tensor de energía–momento de un fluido perfecto se puede expresar

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

donde  $\rho$  es la densidad de energía del fluido,  $P$  es la presión del fluido y  $U_\mu$  es la forma covariante de la cuadrivelocidad  $U^\mu \equiv dx^\mu/ds$  definida por  $U_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu$ , en la cual se usa el convenio de sumación de Einstein (1916), es decir, cuando se tienen dos índices iguales se supone una suma desde 0 hasta 3. En general, la densidad de energía se descompone como  $\rho = \rho_o (1 + \epsilon)$ , donde  $\rho_o$  es la densidad de energía en reposo y  $\epsilon$  es la energía interna del sistema.

La ley de conservación del tensor de energía–momento de un fluido perfecto se obtiene a través de la nulidad de su divergencia, es decir,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , donde  $\nabla_\mu$  denota la derivada covariante con respecto a las coordenadas  $x^\mu$ . Esta ley conduce a las siguientes ecuaciones de conservación

$$(\rho + P)U^\mu \nabla_\mu U^\nu - (g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu) \nabla_\mu P = 0 \quad (1.4)$$

$$U^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + P) \nabla_\mu U^\mu = 0 \quad (1.5)$$

donde (1.4) es un vector contravariante conocido comúnmente como la ecuación de Euler relativista. La expresión (1.5) es una ecuación escalar y representa la conservación de la masa y la energía del sistema.

Ahora, si se expresa el escalar de Ricci en función de estas variables físicas  $\rho$  y  $P$ ,

las ecuaciones de campo de Einstein (1.2) también se pueden reescribir como

$$R_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} + 4\pi(\rho - 3P)g_{\mu\nu} = -4\pi[2(\rho + P)U_\mu U_\nu - (\rho - P)g_{\mu\nu}] \quad (1.6)$$

Toda la materia se considera contenida en el tubo mundo cuando se estudian sistemas astrofísicos aislados, por lo que no se toma en cuenta la influencia de los campos gravitacionales que distribuciones lejanas de materia pudieran producir. En ausencia de materia las ecuaciones de campo se reducen a:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.7)$$

Con el propósito de estudiar la evolución de un fluido perfecto axialmente simétrico e invariante con respecto a la inversión del ángulo azimutal, primero se determinan las ecuaciones de campo (1.2) de forma explícita, utilizando la métrica de Bondi [3] con simetría axial y de reflexión definida por

$$ds^2 = \left( \frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right) du^2 + 2e^{2\beta} du dr + 2Ur^2 e^{2\gamma} du d\theta - r^2 (e^{2\gamma} d\theta^2 + e^{-2\gamma} \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.8)$$

donde las variables métricas  $V$ ,  $\beta$ ,  $U$  y  $\gamma$  sólo dependen de  $u$ ,  $r$  y  $\theta$ . Aquí,  $u = x^0$  es una coordenada tipo tiempo,  $r = x^1$  es una coordenada nula ( $g_{rr} = 0$ ),  $\theta = x^2$  y  $\varphi = x^3$  son las coordenadas angulares usuales. Estas funciones métricas se pueden interpretar físicamente de la siguiente forma:

- $\gamma$  define la geometría conforme de las superficies  $du = dr = 0$  y representa el único grado de libertad para la radiación gravitacional. El gradiente  $\gamma_{,r}$  está relacionado con la cizalladura sobre la hipersuperficie nula.
- $\beta$  mide el corrimiento hacia el rojo entre un sistema de referencia asintótico y

el origen, es decir, mide la expansión de los rayos de luz cuando se propagan desde el origen.

- $V$  es el equivalente al potencial newtoniano y su desarrollo asintótico contiene la masa total del sistema.
- $U$  para  $r$  constante mide el desplazamiento en dirección angular entre una hipersuperficie y otra.

De esta forma se puede escribir el tensor métrico covariante, contravariante y su determinante como sigue

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2r^2e^{2\gamma} & e^{2\beta} & Ur^2e^{2\gamma} & 0 \\ e^{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ Ur^2e^{2\gamma} & 0 & -r^2e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2e^{-2\gamma}\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ e^{-2\beta} & -Ve^{-2\beta}r^{-1} & Ue^{-2\beta} & 0 \\ 0 & Ue^{-2\beta} & -e^{-2\gamma}r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2\gamma}r^{-2}\text{sen}^{-2}\theta \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$g = -r^4e^{4\beta}\text{sen}^2\theta$$

En particular, la métrica de Bondi para simetría axial y de reflexión se reduce a la simetría esférica cuando se anulan las variables métricas  $U$  y  $\gamma$ , mientras se hacen independientes de  $\theta$  las funciones  $\beta$  y  $V$ , en este caso la métrica se expresa

$$ds_e^2 = \frac{V}{r}e^{2\beta}du^2 + 2e^{2\beta}du\,dr - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\,d\varphi^2) \quad (1.10)$$



Como se ha mencionado anteriormente, la distribución de materia consiste en un fluido perfecto, con simetría axial y de reflexión, caracterizado por una densidad de energía  $\rho$  y una presión  $P$ . Para un observador comóvil con la materia, moviéndose con respecto a un sistema localmente minkowskiano, el tensor de energía–momento (1.3) covariante se escribe

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

La métrica de Minkowski describe el caso más sencillo del espaciotiempo relativista, introducido por Hermann Minkowski en 1908, físicamente representa un espacio de cuatro dimensiones plano, donde las curvas geodésicas, que describen la trayectoria más corta entre dos puntos, son líneas rectas. En coordenadas rectangulares, la métrica de Minkowski se define como

$$ds^2 = (d\bar{x}^0)^2 - (d\bar{x}^1)^2 - (d\bar{x}^2)^2 - (d\bar{x}^3)^2 \quad (1.12)$$

Para hallar el significado físico de las componentes del tensor de energía–momento  $\tilde{T}_{\mu\nu}$  en coordenadas de radiación de Bondi y determinar la cuadrivelocidad  $U_\mu$  de forma explícita, se utiliza el esquema propuesto por Bondi [6]. Para ello, se introducen las coordenadas locales de Minkowski  $(\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$  de la siguiente forma [9]

$$\begin{aligned} d\bar{x}^0 &= A du + B dr + C d\theta, & d\bar{x}^1 &= B dr + C d\theta \\ d\bar{x}^2 &= F d\theta, & d\bar{x}^3 &= G d\varphi \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde los coeficientes  $A, B, C, F$  y  $G$  se especifican de tal manera que reproduzcan

la métrica de Bondi, con simetría axial y de reflexión (1.8), explícitamente

$$\begin{aligned}
A &= \left( \frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right)^{1/2}, & B &= e^{2\beta} \left( \frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right)^{-1/2} \\
C &= U r^2 e^{2\gamma} \left( \frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right)^{-1/2}, & F &= r e^\gamma, & G &= r e^{-\gamma} \sin \theta
\end{aligned} \tag{1.14}$$

De acuerdo con el esquema de Bondi [6], el observador comóvil es aquel que se mueve con el fluido con una velocidad  $v = \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$  respecto al sistema localmente minkowskiano. En este caso, las transformaciones de Lorentz del sistema comóvil al minkowskiano, están dadas por

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \lambda & -w_1 \lambda & -w_2 \lambda & 0 \\ -w_1 \lambda & 1 + (\lambda - 1) w_1^2 / v^2 & (\lambda - 1) w_1 w_2 / v^2 & 0 \\ -w_2 \lambda & (\lambda - 1) w_1 w_2 / v^2 & 1 + (\lambda - 1) w_2^2 / v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

donde  $\Lambda_\mu^\nu$  es el tensor de transformación de Lorentz,  $w_1 \equiv d\bar{x}^1/d\bar{x}^0$  y  $w_2 \equiv d\bar{x}^2/d\bar{x}^0$  son las componentes de la velocidad a lo largo de los ejes  $\bar{x}^1$  y  $\bar{x}^2$ , respectivamente; y  $\lambda$  es el factor de las transformaciones de Lorentz utilizado en la relatividad especial:  $\lambda = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  que, por usar unidades geometrizadas, y teniendo  $v^2 = w_1^2 + w_2^2$ , se expresa como:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - w_1^2 - w_2^2}} \tag{1.16}$$

La transformación del sistema comóvil al minkowskiano se determina a través de

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \tilde{T}_{\alpha\beta} \tag{1.17}$$

y la transformación del sistema minkowskiano al sistema de coordenadas de Bondi

se obtiene mediante las leyes de transformación de los tensores

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} \bar{T}_{\alpha\beta} \quad (1.18)$$

La transformación del sistema comóvil al minkowskiano, describe los efectos de la velocidad del observador comóvil sobre las variables físicas. En cambio, la transformación del sistema minkowskiano al de radiación determina los efectos de los potenciales gravitacionales sobre las variables físicas. Bajo estas transformaciones, las componentes no nulas del tensor de energía–momento (1.3) se expresan

$$\begin{aligned} T_{00} &= [\lambda^2 (\rho + P) - P] A^2 \\ T_{01} &= [\lambda^2 (\rho + P) (1 - w_1) - P] AB \\ T_{02} &= \lambda^2 (\rho + P) [(1 - w_1) AC - w_2 AF] - PAC \\ T_{11} &= \lambda^2 (\rho + P) (1 - w_1)^2 B^2 \\ T_{12} &= \lambda^2 (\rho + P) (1 - w_1) [(1 - w_1) BC - w_2 BF] \\ T_{22} &= \lambda^2 (\rho + P) [(1 - w_1) C - w_2 F]^2 + PF^2 \\ T_{33} &= PG^2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por analogía a la interpretación física de las componentes del tensor de energía–momento para un observador comóvil con el fluido, se puede asignar significado físico a las componentes del  $T^{\mu\nu}$  en coordenadas de radiación de Bondi [6]:

- $T^{00}$  es la densidad de energía con respecto al referencial de Bondi.
- $T^{0i}$  representa el flujo de energía en la dirección  $i$ .
- $T^{ij}$  representa el flujo de la componente  $i$  del momento en la dirección  $j$ .
- $T^{ii}$  son las presiones anisótropas con respecto al referencial de Bondi.

donde  $i$  y  $j$  van de 1 a 3. En el sistema minkowskiano, la cuadrivelocidad del sistema comóvil se escribe [4]

$$\bar{U}^\mu = \lambda(1, w_1, w_2, 0) \quad (1.20)$$

A partir de estos resultados, y usando las transformaciones de coordenadas (1.13) en la expresión

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{U}^\alpha, \quad (1.21)$$

se pueden determinar las componentes de la cuadrivelocidad, de forma contravariante y covariante, en coordenadas de radiación de Bondi

$$\begin{aligned} U^\mu &= \lambda \left[ \frac{1 - w_1}{A}, \frac{w_1 F - w_2 C}{BF}, \frac{w_2}{F}, 0 \right] \\ U_\mu &= \lambda [A, (1 - w_1) B, (1 - w_1) C - w_2 F, 0] \end{aligned} \quad (1.22)$$

y luego, las componentes de la velocidad del observador comóvil con respecto al observador minkowskiano se expresan

$$\begin{aligned} w_1 &\equiv \frac{d\bar{x}^1}{d\bar{x}^0} = \frac{B dr + C d\theta}{A du + B dr + C d\theta} \\ w_2 &\equiv \frac{d\bar{x}^2}{d\bar{x}^0} = \frac{F d\theta}{A du + B dr + C d\theta} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ahora, las velocidades materiales en el sistema de coordenadas de radiación toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{dr}{du} &= \frac{w_1 F - w_2 C}{1 - w_1} \frac{A}{BF} \\ \frac{d\theta}{du} &= \frac{w_2}{1 - w_1} \frac{A}{F} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Finalmente, las ecuaciones de campo de Einstein (1.6) se pueden escribir

explícitamente en términos de las variables físicas como:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -4\pi A^2 [2\lambda^2 (\rho + P) - (\rho - P)] \\
R_{01} &= -4\pi AB [2\lambda^2 (\rho + P) (1 - w_1) - (\rho - P)] \\
R_{02} &= -4\pi A \{2\lambda^2 (\rho + P) [(1 - w_1) C - w_2 F] - (\rho - P) C\} \\
R_{11} &= -8\pi B^2 \lambda^2 (\rho + P) (1 - w_1)^2 \\
R_{12} &= -8\pi B \lambda^2 (\rho + P) (1 - w_1) [(1 - w_1) C - w_2 F] \\
R_{22} &= -4\pi \{2\lambda^2 (\rho + P) [(1 - w_1) C - w_2 F]^2 + (\rho - P) F^2\} \\
R_{33} &= -4\pi G^2 (\rho - P)
\end{aligned} \tag{1.25}$$

## 1.2. El tensor de Ricci en función de las variables métricas

Para determinar las componentes del tensor de Ricci, primero se deben encontrar los símbolos de Christoffel definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (g_{\alpha\nu, \mu} + g_{\mu\alpha, \nu} - g_{\mu\nu, \alpha}) \tag{1.26}$$

donde la coma como subíndice denota la derivada parcial con respecto a las coordenadas indicadas.

Obtener los símbolos de Christoffel para la métrica de Bondi con simetría axial y de reflexión requiere de numerosos cálculos realizados con Maple, luego de los cuales se pueden escribir los 20 no nulos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= 2\beta_{,u} - \frac{V_{,r}}{2r} - \frac{\beta_{,r}V}{r} + \frac{V}{2r^2} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U \left( U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r} U \right) \\
\Gamma_{02}^0 &= \beta_{,\theta} - r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left( \frac{U_{,r}}{2} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r} U \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^0 &= r e^{2(\gamma-\beta)} (1 + r\gamma_{,r}) \\
\Gamma_{33}^0 &= r e^{-2(\gamma+\beta)} \text{sen}^2 \theta (1 - r\gamma_{,r}) \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{V_{,u}}{2r} - \frac{\beta_{,u}V}{r} - \frac{V^2}{2r^3} + \frac{VV_{,r}}{2r^2} + \frac{\beta_{,r}V^2}{r^2} - \frac{UV_{,\theta}}{2r} - \frac{\beta_{,\theta}UV}{r} \\
&\quad + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ U^2 \left( U_{,\theta} + \gamma_{,\theta}U - \frac{V}{r^2} - \frac{\gamma_{,r}V}{r} + \gamma_{,u} \right) - \frac{UU_{,r}V}{r} \right] \\
\Gamma_{01}^1 &= \frac{V_{,r}}{2r} - \frac{V}{2r^2} + \frac{\beta_{,r}V}{r} - \beta_{,\theta}U - \frac{1}{2} r^2 e^{2(\gamma-\beta)} UU_{,r} \\
\Gamma_{02}^1 &= \frac{V_{,\theta}}{2r} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ U \left( \frac{V}{r^2} + \frac{\gamma_{,r}V}{r} - \gamma_{,u} - U_{,\theta} - \gamma_{,\theta}U \right) + \frac{U_{,r}V}{2r} \right] \\
\Gamma_{11}^1 &= 2\beta_{,r} \\
\Gamma_{12}^1 &= \beta_{,\theta} + \frac{1}{2} r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U_{,r} \\
\Gamma_{22}^1 &= r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left( \gamma_{,u} + U_{,\theta} + \gamma_{,\theta}U - \frac{V}{r^2} - \frac{\gamma_{,r}V}{r} \right) \\
\Gamma_{33}^1 &= r^2 \text{sen}^2 \theta e^{-2(\gamma+\beta)} \left( -\gamma_{,u} + U \cot \theta - \gamma_{,\theta}U - \frac{V}{r^2} + \frac{\gamma_{,r}V}{r} \right) \\
\Gamma_{00}^2 &= -U_{,u} + U \left( 2\beta_{,u} - 2\gamma_{,u} - U_{,\theta} - \gamma_{,\theta}U + \frac{V}{2r^2} - \frac{V_{,r}}{2r} - \frac{\beta_{,r}V}{r} \right) \\
&\quad + e^{2(\beta-\gamma)} \frac{V_{,\theta} + 2\beta_{,\theta}V}{2r^3} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U^2 \left( U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r}U \right) \\
\Gamma_{01}^2 &= -\frac{1}{2} U_{,r} - \frac{U}{r} - \gamma_{,r}U + \frac{\beta_{,\theta}}{r^2} e^{2(\beta-\gamma)} \\
\Gamma_{02}^2 &= \gamma_{,u} + \beta_{,\theta}U - r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U \left( \frac{1}{2} U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r}U \right) \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} + \gamma_{,r} \\
\Gamma_{22}^2 &= \gamma_{,\theta} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U \left( \frac{1}{r} + \gamma_{,r} \right) \\
\Gamma_{33}^2 &= r^2 \text{sen}^2 \theta e^{-2(\gamma+\beta)} U \left( \frac{1}{r} - \gamma_{,r} \right) - e^{-4\gamma} \text{sen}^2 \theta (\cot \theta - \gamma_{,\theta}) \\
\Gamma_{03}^3 &= -\gamma_{,u} \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} - \gamma_{,r} \\
\Gamma_{23}^3 &= \cot \theta - \gamma_{,\theta}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

El tensor de Ricci se define a través de los símbolos de Christoffel de la siguiente manera

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\alpha} \quad (1.28)$$

así, a través de extensas manipulaciones simbólicas, realizadas con Maple, se pueden obtener sus componentes no nulas:

$$\begin{aligned}
R_{00} = & \frac{2\beta_{,ur}V}{r} - \frac{VV_{,rr}}{2r^2} - \frac{\beta_{,rr}V^2}{r^2} - \frac{\beta_{,r}V^2}{r^3} - \frac{\beta_{,r}VV_{,r}}{r^2} - \frac{V_{,u} - 2\beta_{,u}V}{r^2} \\
& + \frac{2\beta_{,r\theta}UV + \beta_{,\theta}U_{,r}V + \beta_{,r}U_{,\theta}V + 2\beta_{,r}UV_{,\theta}}{r^2} + \frac{2\beta_{,\theta}UV}{r^2} \\
& - \frac{U_{,\theta}V}{2r^2} + \frac{U_{,\theta}V_{,r}}{2r} - \frac{2UV_{,\theta}}{r^2} - \frac{U_{,r}V_{,\theta}}{2r} - \frac{2\gamma_{,r}UV_{,\theta}}{r} - 2\beta_{,u\theta}U \\
& - 2\beta_{,u}U_{,\theta} + 2\gamma_{,u\theta}U + 2\gamma_{,u}U_{,\theta} + U_{,u\theta} + UU_{,\theta\theta} + U^2_{,\theta} \\
& + 2(\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})UU_{,\theta} + \frac{UV_{,r\theta}}{r} + (2\beta^2_{,\theta} - 2\beta_{,\theta}\gamma_{,\theta} + \gamma_{,\theta\theta})U^2 + 2\gamma^2_{,u} \\
& - \cot\theta \left( 2\beta_{,u}U - 2\gamma_{,u}U - U_{,u} - UU_{,\theta} - \gamma_{,\theta}U^2 + \frac{UV}{2r^2} - \frac{UV_{,r}}{2r} \right. \\
& \left. - \frac{\beta_{,r}UV}{r} \right) + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ -UU_{,ur} - 2 \left( \gamma_{,ur} + \frac{\gamma_{,u}}{r} \right) U^2 \right. \\
& - 2(\gamma_{,u} - \beta_{,u})UU_{,r} - 2U^2U_{,r\theta} - 2UU_{,r}U_{,\theta} - 2\gamma_{,r\theta}U^3 \\
& - \frac{2\gamma_{,\theta}U^3}{r} - 3\gamma_{,\theta}U^2U_{,r} + 2\beta_{,\theta}U^2U_{,r} + \frac{UU_{,rr}V}{r} + \frac{4UU_{,r}V}{r^2} \\
& + 2(\gamma_{,r} - \beta_{,r}) \frac{UU_{,r}V}{r} + \frac{\gamma_{,rr}U^2V}{r} + \frac{\gamma_{,r}U^2V_{,r}}{r} + \frac{\gamma_{,r}U^2V}{r^2} \\
& - \frac{3U^2U_{,\theta}}{r} - \gamma_{,r}U^2U_{,\theta} + \frac{U^2V_{,r}}{r^2} + \frac{U^2_{,r}V}{2r} \\
& \left. - U^2 \left( U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r}U \right) \cot\theta \right] + \frac{1}{2}r^4 e^{4(\gamma-\beta)} U^2 U^2_{,r} \\
& - \frac{1}{2r^3} e^{2(\beta-\gamma)} [V_{,\theta\theta} + 2\beta_{,\theta\theta}V + (2\beta_{,\theta} - 2\gamma_{,\theta} + \cot\theta)(V_{,\theta} + 2\beta_{,\theta}V)]
\end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}
R_{01} = & 2rUU_{,r}e^{2(\gamma-\beta)} - r^2\beta_{,r}UU_{,r}e^{2(\gamma-\beta)} + r^2\gamma_{,r}UU_{,r}e^{2(\gamma-\beta)} \\
& + \frac{1}{2}r^2UU_{,rr}e^{2(\gamma-\beta)} + U\beta_{,r\theta} + U\gamma_{,r\theta} + 2\frac{U\beta_{,\theta}}{r} + U\gamma_{,r}\cot\theta \\
& + \frac{1}{2}r^2U_{,r}^2e^{2(\gamma-\beta)} + \frac{1}{2}U_{,r\theta} + \frac{U_{,\theta}}{r} + \frac{U\cot\theta}{r} - \frac{\beta_{,\theta\theta}e^{2(\beta-\gamma)}}{r^2} \\
& - 2\frac{\beta_{,\theta}^2e^{2(\beta-\gamma)}}{r^2} + 2\frac{\gamma_{,\theta}\beta_{,\theta}e^{2(\beta-\gamma)}}{r^2} + U_{,\theta}\gamma_{,r} + 2\beta_{,ur} - \frac{V_{,rr}}{2r} \\
& - \frac{V\beta_{,rr}}{r} - \frac{V_{,r}\beta_{,r}}{r} + U_{,r}\beta_{,\theta} + 2\gamma_{,r}\gamma_{,u} - \frac{\beta_{,\theta}e^{2(\beta-\gamma)}\cot\theta}{r^2} \\
& - \frac{V\beta_{,r}}{r^2} + \frac{1}{2}U_{,r}\cot\theta
\end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}
R_{02} = & \beta_{,u\theta} - \gamma_{,u\theta} + 2\gamma_{,u}\gamma_{,\theta} - 2\gamma_{,u}\cot\theta - U(\beta_{,\theta\theta} + 2\beta_{,\theta}^2 - 2\beta_{,\theta}\gamma_{,\theta} \\
& + \beta_{,\theta}\cot\theta) - \frac{V_{,r\theta}}{2r} + \frac{V_{,\theta}}{2r^2} + (\gamma_{,r} - \beta_{,r})\frac{V_{,\theta}}{r} + r^2e^{2(\gamma-\beta)}\left[\frac{3}{2}UU_{,r\theta} \right. \\
& + \frac{3UU_{,\theta}}{r} + 2U\left(\gamma_{,ur} + \frac{\gamma_{,u}}{r}\right) + \frac{1}{2}U_{,ur} + 2\gamma_{,r\theta}U^2 + (\gamma_{,u} - \beta_{,u})U_{,r} \\
& + \gamma_{,r}UU_{,\theta} + (2\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})UU_{,r} + U_{,r}U_{,\theta} - \frac{U_{,rr}V}{2r} \\
& - \frac{UV_{,r} + 2U_{,r}V}{r^2} - \frac{\gamma_{,rr}UV + (\gamma_{,r} - \beta_{,r})U_{,r}V + \gamma_{,r}UV_{,r}}{r} \\
& \left. - \frac{\gamma_{,r}UV}{r^2} + \frac{2\gamma_{,\theta}U^2}{r} + U\left(\frac{1}{2}U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r}U\right)\cot\theta\right] \\
& - \frac{1}{2}r^4e^{4(\gamma-\beta)}UU_{,r}^2
\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$R_{11} = -4\left(\beta_{,r} - \frac{1}{2}r\gamma_{,r}^2\right)r^{-1} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
R_{12} = & -2rU_{,r}e^{2(\gamma-\beta)} - r^2U_{,r}(\gamma_{,r} - \beta_{,r})e^{2(\gamma-\beta)} - \frac{1}{2}r^2U_{,rr}e^{2(\gamma-\beta)} \\
& + \beta_{,r\theta} - \gamma_{,r\theta} + 2\gamma_{,r}\gamma_{,\theta} - 2\beta_{,\theta}r^{-1} - 2\gamma_{,r}\cot\theta
\end{aligned} \tag{1.33}$$



$$\begin{aligned}
R_{22} = & e^{2(\gamma-\beta)} \left[ V_{,r} + \frac{1}{2} r^4 U_{,r}^2 e^{2(\gamma-\beta)} - r^2 U_{,r\theta} - 3r U_{,\theta} - rU \cot \theta \right. \\
& - 2r (r\gamma)_{,ur} + r\gamma_{,r} V_{,r} + (r\gamma_{,rr} + \gamma_{,r}) V - r^2 U_{,\theta} \gamma_{,r} - r^2 \gamma_{,\theta} U_{,r} \\
& \left. - 2r^2 \gamma_{,r\theta} U - 2r \gamma_{,\theta} U - r^2 \gamma_{,r} U \cot \theta \right] - 1 - 3\gamma_{,\theta} \cot \theta - \gamma_{,\theta\theta} \\
& + 2\beta_{,\theta\theta} + 2\beta_{,\theta}^2 + 2\gamma_{,\theta} (\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} = & e^{-2(\gamma+\beta)} \sin^2 \theta \left\{ 2r (r\gamma)_{,ur} + (1 - r\gamma_{,r}) V_{,r} - (r\gamma_{,rr} + \gamma_{,r}) V \right. \\
& - r (1 - r\gamma_{,r}) U_{,\theta} - r^2 (\cot \theta - \gamma_{,\theta}) U_{,r} \\
& + r (2r\gamma_{,r\theta} + 2\gamma_{,\theta} + r\gamma_{,r} \cot \theta - 3 \cot \theta) U \\
& \left. + e^{2(\beta-\gamma)} [-1 - (3\gamma_{,\theta} - 2\beta_{,\theta}) \cot \theta - \gamma_{,\theta\theta} + 2\gamma_{,\theta} (\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})] \right\}
\end{aligned} \tag{1.35}$$

De esta manera, se encuentran siete componentes no nulas del tensor de Ricci, las cuales permiten escribir las ecuaciones de campo de Einstein como se muestra a continuación.

### 1.3. Las ecuaciones de campo

Las siete ecuaciones de campo se pueden construir usando las siete componentes no nulas del tensor de Ricci (1.29–1.35). Se establecen ciertas combinaciones de las componentes de este tensor para introducir algunas simplificaciones en las ecuaciones de campo, para luego presentar la equivalencia entre las expresiones en función de variables físicas y en función de variables métricas y sus derivadas. Explícitamente, las ecuaciones de Einstein y sus expresiones asociadas se escriben a continuación en la tabla 1.1.

Ahora, introduciendo las componentes del tensor de Ricci ya obtenidas, en sus

Tabla 1.1: Componentes del tensor de Ricci asociadas a las ecuaciones de campo propuestas.

---

Primera	$R_{11}$
Segunda	$-R_{12}/r^2$
Tercera	$(R_{22}e^{2(\beta-\gamma)} + R_{33}e^{2(\beta+\gamma)} \text{sen}^{-2} \theta) / r^2$
Cuarta	$R_{33}e^{2(\beta+\gamma)}r^{-2} \text{sen}^{-2} \theta$
Quinta	$R_{00}$
Sexta	$R_{02}/r^2$
Séptima	$R_{01}$

---

dos versiones, en términos de las variables físicas y en función de las variables métricas y sus derivadas, se pueden escribir cada una de las ecuaciones de campo de Einstein como siguen:

Primera,

$$-\frac{8\pi e^{4\beta}\lambda^2(\rho+P)(1-w_1)^2}{\left(\frac{V}{r}e^{2\beta}-U^2r^2e^{2\gamma}\right)} = -\frac{4}{r}\left(\beta_{,r}-\frac{1}{2}r\gamma_{,r}^2\right) \quad (1.36)$$

segunda,

$$\begin{aligned} & \frac{8\pi e^{2\beta}\lambda^2(\rho+P)(1-w_1)}{\left(\frac{V}{r}e^{2\beta}-U^2r^2e^{2\gamma}\right)} \left[ (1-w_1)Ue^{2\gamma} - \frac{w_2}{r}e^\gamma \left(\frac{V}{r}e^{2\beta}-U^2r^2e^{2\gamma}\right)^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \left[ 2rU_{,r}e^{2(\gamma-\beta)} + r^2U_{,r}(\gamma_{,r}-\beta_{,r})e^{2(\gamma-\beta)} + \frac{1}{2}r^2U_{,rr}e^{2(\gamma-\beta)} \right. \\ & \quad \left. -\beta_{,r\theta} + \gamma_{,r\theta} - 2\gamma_{,r}\gamma_{,\theta} + 2\frac{\beta_{,\theta}}{r} + 2\gamma_{,r}\cot\theta \right] \quad (1.37) \end{aligned}$$

tercera,

$$\begin{aligned}
& - \frac{8\pi e^{2(\beta-\gamma)}}{\left(\frac{V}{r}e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma}\right)} \left\{ \lambda^2 (\rho + P) \left[ (1 - w_1) U r e^{2\gamma} \right. \right. \\
& \left. \left. - w_2 e^\gamma \left( \frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right)^{1/2} \right]^2 + (\rho - P) e^{2\gamma} \left( \frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right) \right\} \\
& = \frac{1}{r^2} \left\{ 2V_{,r} + \frac{1}{2} r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_{,r}^2 - r^2 U_{,r\theta} - 4r U_{,\theta} - r^2 U_{,r} \cot \theta - 4r U \cot \theta \right. \\
& \quad \left. + 2e^{2(\beta-\gamma)} [-1 - (3\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta}) \cot \theta - \gamma_{,\theta\theta} + \beta_{,\theta\theta} + (\beta_{,\theta})^2 \right. \\
& \quad \left. + 2\gamma_{,\theta} (\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta}) \right\} \tag{1.38}
\end{aligned}$$

cuarta,

$$\begin{aligned}
-4\pi e^{2\beta} (\rho - P) & = \frac{1}{r^2} \{ 2r (\gamma_{,u} + r\gamma_{,ur}) + (1 - r\gamma_{,r}) V_{,r} - (r\gamma_{,rr} + \gamma_{,r}) V \\
& \quad - r (1 - r\gamma_{,r}) U_{,\theta} - r^2 (\cot \theta - \gamma_{,\theta}) U_{,r} \\
& \quad + r (2r\gamma_{,r\theta} + 2\gamma_{,\theta} + r\gamma_{,r} \cot \theta - 3 \cot \theta) U \\
& \quad + e^{2(\beta-\gamma)} [-1 - (3\gamma_{,\theta} - 2\beta_{,\theta}) \cot \theta - \gamma_{,\theta\theta} \\
& \quad + 2\gamma_{,\theta} (\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})] \} \tag{1.39}
\end{aligned}$$

quinta,

$$\begin{aligned}
& -4\pi \left( \frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right) [2\lambda^2(\rho + P) - (\rho - P)] \\
& = \frac{2\beta_{,ur}V}{r} - \frac{VV_{,rr}}{2r^2} - \frac{\beta_{,rr}V^2}{r^2} - \frac{\beta_{,r}V^2}{r^3} - \frac{\beta_{,r}VV_{,r}}{r^2} - \frac{V_{,u} - 2\beta_{,u}V}{r^2} \\
& + \frac{2\beta_{,r\theta}UV + \beta_{,\theta}U_{,r}V + \beta_{,r}U_{,\theta}V + 2\beta_{,r}UV_{,\theta}}{r} + \frac{2\beta_{,\theta}UV}{r^2} - \frac{U_{,\theta}V}{2r^2} \\
& + \frac{U_{,\theta}V_{,r}}{2r} - \frac{2UV_{,\theta}}{r^2} - \frac{U_{,r}V_{,\theta}}{2r} - \frac{2\gamma_{,r}UV_{,\theta}}{r} - 2\beta_{,u\theta}U - 2\beta_{,u}U_{,\theta} \\
& + 2\gamma_{,u\theta}U + 2\gamma_{,u}U_{,\theta} + U_{,u\theta} + UU_{,\theta\theta} + U_{,\theta}^2 + 2(\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})UU_{,\theta} \\
& + \frac{UV_{,r\theta}}{r} + (2\beta_{,\theta}^2 - 2\beta_{,\theta}\gamma_{,\theta} + \gamma_{,\theta\theta})U^2 + 2\gamma_{,u}^2 - \cot\theta \left( 2\beta_{,u}U \right. \\
& \left. - 2\gamma_{,u}U - U_{,u} - UU_{,\theta} - \gamma_{,\theta}U^2 + \frac{UV}{2r^2} - \frac{UV_{,r}}{2r} - \frac{\beta_{,r}UV}{r} \right) \tag{1.40} \\
& + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ -UU_{,ur} - 2 \left( \gamma_{,ur} + \frac{\gamma_{,u}}{r} \right) U^2 - 2(\gamma_{,u} - \beta_{,u})UU_{,r} \right. \\
& - 2U^2U_{,r\theta} - 2UU_{,r}U_{,\theta} - 2\gamma_{,r\theta}U^3 - \frac{2\gamma_{,\theta}U^3}{r} - 3\gamma_{,\theta}U^2U_{,r} \\
& + 2\beta_{,\theta}U^2U_{,r} + \frac{UU_{,rr}V}{r} + \frac{4UU_{,r}V}{r^2} + 2(\gamma_{,r} - \beta_{,r}) \frac{UU_{,r}V}{r} \\
& + \frac{\gamma_{,rr}U^2V}{r} + \frac{\gamma_{,r}U^2V_{,r}}{r} + \frac{\gamma_{,r}U^2V}{r^2} - \frac{3U^2U_{,\theta}}{r} - \gamma_{,r}U^2U_{,\theta} + \frac{U^2V_{,r}}{r^2} \\
& \left. + \frac{U_{,r}^2V}{2r} - U^2 \left( U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r}U \right) \cot\theta \right] + \frac{1}{2}r^4 e^{4(\gamma-\beta)} U^2 U_{,r}^2 \\
& - \frac{1}{2r^3} e^{2(\beta-\gamma)} [V_{,\theta\theta} + 2\beta_{,\theta\theta}V + (2\beta_{,\theta} - 2\gamma_{,\theta} + \cot\theta)(V_{,\theta} + 2\beta_{,\theta}V)]
\end{aligned}$$

sexta,

$$\begin{aligned}
& -4\pi e^\gamma \left\{ 2\lambda^2(\rho + P) \left[ (1 - w_1) U e^\gamma - \frac{w_2}{r} \left( \frac{V}{r} e^{2\beta} - U^2 r^2 e^{2\gamma} \right)^{1/2} \right] \right. \\
& \left. - (\rho - P) U e^\gamma \right\} \\
& = \frac{1}{r^2} \left\{ \beta_{,u\theta} - \gamma_{,u\theta} + 2\gamma_{,u}\gamma_{,\theta} - 2\gamma_{,u} \cot \theta - U (\beta_{,\theta\theta} + 2\beta_{,\theta}^2 - 2\beta_{,\theta}\gamma_{,\theta} \right. \\
& \quad + \beta_{,\theta} \cot \theta) - \frac{V_{,r\theta}}{2r} + \frac{V_{,\theta}}{2r^2} + (\gamma_{,r} - \beta_{,r}) \frac{V_{,\theta}}{r} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ \frac{3}{2} U U_{,r\theta} \right. \\
& \quad + \frac{3U U_{,\theta}}{r} + 2U \left( \gamma_{,ur} + \frac{\gamma_{,u}}{r} \right) + \frac{1}{2} U_{,ur} + 2\gamma_{,r\theta} U^2 + (\gamma_{,u} - \beta_{,u}) U_{,r} \\
& \quad + \gamma_{,r} U U_{,\theta} + (2\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta}) U U_{,r} + U_{,r} U_{,\theta} - \frac{U_{,rr} V}{2r} - \frac{U V_{,r} + 2U_{,r} V}{r^2} \\
& \quad - \frac{\gamma_{,rr} U V + (\gamma_{,r} - \beta_{,r}) U_{,r} V + \gamma_{,r} U V_{,r}}{r} - \frac{\gamma_{,r} U V}{r^2} + \frac{2\gamma_{,\theta} U^2}{r} \\
& \quad \left. + U \left( \frac{1}{2} U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r} U \right) \cot \theta \right] - \frac{1}{2} r^4 e^{4(\gamma-\beta)} U U_{,r}^2 \left. \right\} \quad (1.41)
\end{aligned}$$

y séptima,

$$\begin{aligned}
& -4\pi e^{2\beta} [2\lambda^2(\rho + P)(1 - w_1) - (\rho - P)] \\
& = 2r U U_{,r} e^{2(\gamma-\beta)} - r^2 \beta_{,r} U U_{,r} e^{2(\gamma-\beta)} + r^2 \gamma_{,r} U U_{,r} e^{2(\gamma-\beta)} \\
& \quad + \frac{1}{2} r^2 U U_{,rr} e^{2(\gamma-\beta)} + U \beta_{,r\theta} + U \gamma_{,r\theta} + 2 \frac{U \beta_{,\theta}}{r} + U \gamma_{,r} \cot \theta \\
& \quad + \frac{1}{2} r^2 U_{,r}^2 e^{2(\gamma-\beta)} + \frac{1}{2} U_{,r\theta} + \frac{U_{,\theta}}{r} + \frac{U \cot \theta}{r} - \frac{\beta_{,\theta\theta} e^{2(\beta-\gamma)}}{r^2} \\
& \quad - 2 \frac{\beta_{,\theta}^2 e^{2(\beta-\gamma)}}{r^2} + 2 \frac{\gamma_{,\theta} \beta_{,\theta} e^{2(\beta-\gamma)}}{r^2} + U_{,\theta} \gamma_{,r} + 2\beta_{,ur} - \frac{V_{,rr}}{2r} - \frac{V \beta_{,rr}}{r} \\
& \quad - \frac{V_{,r} \beta_{,r}}{r} + U_{,r} \beta_{,\theta} + 2\gamma_{,r} \gamma_{,u} - \frac{\beta_{,\theta} e^{2(\beta-\gamma)} \cot \theta}{r^2} - \frac{V \beta_{,r}}{r^2} + \frac{1}{2} U_{,r} \cot \theta \quad (1.42)
\end{aligned}$$

donde, en el vacío, de la primera a la cuarta ecuación corresponden a las ecuaciones principales que estructuró Bondi [3] en 1962, la quinta y sexta son las ecuaciones suplementarias y la séptima es la ecuación trivial. De acuerdo a la estructura de

las ecuaciones de campo se puede observar fácilmente que  $\gamma$  debe ser proporcional a  $\sin^2 \theta$  y  $U$  a  $\sin \theta$  para garantizar la regularidad de las soluciones en los polos, es decir, en  $\theta = 0$  y en  $\theta = \pi$ . También se puede observar que las ecuaciones de campo representan un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales y acopladas. Por estas razones es prácticamente imposible encontrar una solución analítica a este sistema.

#### 1.4. La ecuación de las ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales son fluctuaciones del espaciotiempo que se propagan a la velocidad de la luz. Su existencia se conoce teóricamente desde 1918 cuando Einstein linealizó las ecuaciones de campo y encontró una ecuación de onda, asociada a la emisión de radiación gravitacional.

La ecuación de onda generalizada para un espaciotiempo Riemanniano es

$$\square\psi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi \quad (1.43)$$

mientras que en el minkowskiano se reduce a la bien conocida expresión

$$\square\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (1.44)$$

que puede naturalmente escribirse en cualquier sistema de coordenadas. Para la métrica de Bondi con simetría axial y de reflexión se obtiene la ecuación de onda no homogénea

$$\begin{aligned} r^2 e^{2\beta}\square\psi = & 2r (r\psi)_{,ur} + (-rV\psi_{,r} + r^2U\psi_{,\theta})_{,r} \\ & + \frac{1}{\sin\theta} [\sin\theta (r^2U\psi_{,r} - e^{2(\beta-\gamma)}\psi_{,\theta})]_{,\theta} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Como se puede observar, esta expresión se encuentra contenida en la cuarta ecuación de campo de Einstein (1.35), donde el comportamiento ondulatorio queda determinado para  $\gamma$  de la siguiente forma

$$r^2 e^{2\beta} \square \gamma = -4\pi r^2 e^{2\beta} (\rho - P) - V_{,r} + rU_{,\theta} + r^2 U_{,r} \cot \theta + 3rU \cot \theta + e^{2(\beta-\gamma)} [1 - 2(\beta_{,\theta} - \gamma_{,\theta}) \cot \theta] \quad (1.46)$$

Obteniéndose que las distribuciones de materia con simetría axial y de reflexión generan ondas gravitacionales, que dependen explícitamente de la variable métrica  $\gamma$ , como se puede observar en la ecuación de onda no homogénea (1.46).

## CAPÍTULO 2 ECUACIONES CERCA DEL ORIGEN

Con el propósito de estudiar la evolución de un fluido perfecto completamente regular en el origen, se hace un desarrollo en serie de potencias de  $r$  alrededor de  $r = 0$ . En este sentido, para simplificar el sistema de ecuaciones en el centro de la distribución de materia, conviene hacer el siguiente cambio de variable:

$$V = (r - 2m) e^{2\beta} \quad (2.1)$$

donde  $m = m(u, r, \theta)$  representa una generalización de la función de masa de Misner–Sharp para simetría axial y de reflexión [10].

En la implementación del desarrollo en el origen se escriben cada una de las variables, tanto físicas como métricas, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma(u, r, \theta) &= \gamma_0(u, \theta) + \gamma_1(u, \theta)r + \gamma_2(u, \theta)r^2 + \gamma_3(u, \theta)r^3 + \dots \\ \beta(u, r, \theta) &= \beta_0(u, \theta) + \beta_1(u, \theta)r + \beta_2(u, \theta)r^2 + \beta_3(u, \theta)r^3 + \dots \\ U(u, r, \theta) &= U_0(u, \theta) + U_1(u, \theta)r + U_2(u, \theta)r^2 + U_3(u, \theta)r^3 + \dots \\ m(u, r, \theta) &= m_1(u, \theta)r + m_2(u, \theta)r^2 + m_3(u, \theta)r^3 + m_4(u, \theta)r^4 + \dots \\ \rho(u, r, \theta) &= \rho_0(u) + \rho_1(u, \theta)r + \rho_2(u, \theta)r^2 + \rho_3(u, \theta)r^3 + \dots \\ P(u, r, \theta) &= P_0(u) + P_1(u, \theta)r + P_2(u, \theta)r^2 + P_3(u, \theta)r^3 + \dots \\ w_1(u, r, \theta) &= X_1(u, \theta)r + X_2(u, \theta)r^2 + X_3(u, \theta)r^3 + X_4(u, \theta)r^4 + \dots \\ w_2(u, r, \theta) &= Y_1(u, \theta)r + Y_2(u, \theta)r^2 + Y_3(u, \theta)r^3 + Y_4(u, \theta)r^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nótese que  $m_0$ ,  $X_0$  y  $Y_0$  son nulos. De ser  $m_0 \neq 0$ , introduciría una singularidad en la métrica,  $X_0 \neq 0$  y  $Y_0 \neq 0$  romperían la simetría del sistema. Se requiere que  $\rho_0$  y  $P_0$  sean sólo funciones de  $u$ , puesto que estas representan la densidad de energía



y la presión del sistema evaluadas en  $r = 0$  donde la situación no es diferente de un punto, o una esfera de radio 0, haciendo inadmisibles una dependencia angular.

Se puede distinguir entre singularidades físicas y singularidades de coordenadas mediante los invariantes de curvatura. En una singularidad de coordenadas el espaciotiempo es siempre regular, debido a que la singularidad es sólo un artificio de las coordenadas utilizadas en la definición de la métrica. Sin embargo, en una singularidad física, la curvatura del espaciotiempo diverge donde el campo gravitacional se hace infinitamente fuerte. Cuando se estudia la evolución de un fluido, los invariantes de curvatura relevantes son el invariante de Ricci y el invariante de Weyl. En particular, la regularidad del invariante de Ricci para un fluido perfecto

$$\mathcal{R} = R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 64\pi^2 (\rho^2 + 3P^2) \quad (2.3)$$

requiere que las variables físicas  $\rho$  y  $P$  sean regulares en el centro del fluido.

Luego, escribiendo las ecuaciones de campo en forma de series, se tienen potencias negativas y positivas de  $r$ . Los coeficientes de las  $r$  con potencias negativas deben ser nulos, construyéndose para cada una de las ecuaciones que vienen a ser condiciones de regularidad en el origen del sistema. Los coeficientes de la serie de potencias positivas resultante deben cumplir determinadas ecuaciones, que relacionan las variables métricas y las físicas.

De las condiciones de regularidad de las ecuaciones se determina que:

$$\beta_0 = \beta_0(u), \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0 \quad (2.4)$$

Antes de escribir las ecuaciones correspondientes a los primeros coeficientes de la

series, consideremos el invariante de Weyl. El tensor de Weyl se construye con

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{2}{N-2} (g_{\mu[\alpha}R_{\beta]\nu} - g_{\nu[\alpha}R_{\beta]\mu}) + \frac{2}{(N-1)(N-2)} Rg_{\mu[\alpha}g_{\beta]\nu} \quad (2.5)$$

donde el corchete indica la antisimetrización de los índices respectivos. El tensor de Weyl se encuentra definido únicamente para dimensiones mayores a 3 ( $N > 3$ ), en dos y tres dimensiones se anula, estableciendo que estos espacios son conformemente planos. El invariante del tensor de Weyl está dado por

$$\mathcal{C} = C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (2.6)$$

Por su extensión no se escribirá en este texto, pero si se efectúa el desarrollo de las variables en él, se pueden obtener cuatro condiciones que deben cumplir las variables métricas para garantizar la regularidad del invariante de Weyl cerca del origen, estas condiciones requieren que:

$$m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad U_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0 \quad (2.7)$$

Estos resultados corresponden a un sistema local de Fermi en el origen cuando  $\beta_0 = 0$ .

Utilizando estas condiciones se pueden escribir los coeficientes de los desarrollos de las variables métricas y físicas, obteniéndose el siguiente sistema:

### **Coefficiente de $r^0$ . Primera ecuación**

$$-8\beta_2 + 8\pi(\rho_0 + P_0) = 0 \quad (2.8)$$

**Coefficiente de  $r^1$ . Primera ecuación**

$$-12\beta_3 + 8\pi(\rho_1 + P_1) - 16\pi(\rho_0 + P_0)X_1 = 0 \quad (2.9)$$

**Condición de regularidad. Segunda ecuación**

$$2\gamma_{2,\theta} + 4\gamma_2 \cot \theta + 2U_1 e^{-2\beta_0} = 0 \quad (2.10)$$

**Coefficiente de  $r^0$ . Segunda ecuación**

$$-\beta_{3,\theta} + 3\gamma_{3,\theta} + 6\gamma_3 \cot \theta + 5U_2 e^{-2\beta_0} + 8\pi(\rho_0 + P_0)Y_1 = 0 \quad (2.11)$$

**Coefficiente de  $r^0$ . Tercera ecuación**

$$\begin{aligned} &4\gamma_2 - 2\gamma_{2,\theta\theta} - 6\gamma_{2,\theta} \cot \theta + 8\beta_2 - 12m_3 + 8\pi(\rho_0 - P_0) \\ &- 5(U_{1,\theta} + U_1 \cot \theta) e^{-2\beta_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Coefficiente de  $r^1$ . Tercera ecuación**

$$\begin{aligned} &-4\pi(\rho_1 - P_1) - 2\gamma_3 + \gamma_{3,\theta\theta} + 3\gamma_{3,\theta} \cot \theta - \beta_{3,\theta\theta} - \beta_{3,\theta} \cot \theta - 6\beta_3 \\ &+ 8m_4 + 3(U_{2,\theta} + U_2 \cot \theta) e^{-2\beta_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

**Coefficiente de  $r^0$ . Cuarta ecuación**

$$\begin{aligned} &4\gamma_2 + \gamma_{2,\theta\theta} + 3\gamma_{2,\theta} \cot \theta - 4\beta_2 + 6m_3 - 4\pi(\rho_0 - P_0) \\ &+ (U_{1,\theta} + 4U_1 \cot \theta) e^{-2\beta_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

**Coefficiente de  $r^1$ . Cuarta ecuación**

$$\begin{aligned} &-2\beta_{3,\theta} \cot \theta - 6\beta_3 + 8m_4 + 10\gamma_3 + \gamma_{3,\theta\theta} + 3\gamma_{3,\theta} \cot \theta - 4\pi(\rho_1 - P_1) \\ &+ (5U_2 \cot \theta + U_{2,\theta}) e^{-2\beta_0} - 6\gamma_{2,u} e^{-2\beta_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

**Coefficiente de  $r^0$ . Quinta ecuación**

$$-6m_3 - m_{3,\theta\theta} - m_{3,\theta} \cot \theta + 12\beta_2 - 4\pi(\rho_0 + 3P_0) = 0 \quad (2.16)$$

**Coefficiente de  $r^1$ . Quinta ecuación**

$$\begin{aligned} & (4\beta_{2,u} + 2m_{3,u}) e^{-2\beta_0} + [(U_{1,\theta} + U_1 \cot \theta) e^{-2\beta_0}]_{,u} e^{-2\beta_0} + 4\pi(\rho_1 + 3P_1) \\ & - 2\beta_{3,\theta\theta} - 24\beta_3 + m_{4,\theta} \cot \theta - 2\beta_{3,\theta} \cot \theta + 12m_4 + m_{4,\theta\theta} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

**Condición de regularidad. Sexta ecuación**

$$2(m_{3,\theta} - \beta_{2,\theta}) - 3U_1 e^{-2\beta_0} = 0 \quad (2.18)$$

**Coefficiente de  $r^0$ . Sexta ecuación**

$$\begin{aligned} & 2(\gamma_{2,\theta} + 2\gamma_2 \cot \theta - \beta_{2,\theta})_{,u} e^{-2\beta_0} - (U_1 e^{-2\beta_0})_{,u} e^{-2\beta_0} \\ & + 12U_2 e^{-2\beta_0} - 6(m_{4,\theta} - \beta_{3,\theta}) + 16\pi(\rho_0 + P_0) Y_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Coefficiente de  $r^0$ . Séptima ecuación**

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}(U_{1,\theta} + U_1 \cot \theta) e^{-2\beta_0} + 6m_3 - 12\beta_2 - \beta_{2,\theta\theta} - \beta_{2,\theta} \cot \theta \\ & + 4\pi(\rho_0 + 3P_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Coefficiente de  $r^1$ . Séptima ecuación**

$$\begin{aligned} & -2(U_{2,\theta} + U_2 \cot \theta) e^{-2\beta_0} - 4\beta_{2,u} e^{-2\beta_0} + \beta_{3,\theta\theta} + 24\beta_3 + \beta_{3,\theta} \cot \theta \\ & - 12m_4 - 4\pi(\rho_1 + 3P_1) + 8\pi(\rho_0 + P_0) X_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Resolviendo este sistema (2.8–2.21) para el caso con ausencia de materia, es decir, con  $\rho = 0$  y  $P = 0$ , se consigue que todas las variables métricas pueden escribirse en función de  $\gamma$ , por esto, a fin de proporcionar soluciones, se requiere especificar

$\gamma$  inicialmente. Como se mencionó anteriormente, por condición de regularidad en los polos,  $\gamma$  debe ser proporcional a  $\text{sen}^2 \theta$ , por lo que se elige para la variable  $\gamma$  la expresión más simple posible haciendo:

$$\gamma = (ar^2 + br^3 + \dots) \text{sen}^2 \theta \quad (2.22)$$

con  $a = a(u)$  y  $b = b(u)$ .

La simplicidad en  $\gamma$  será necesaria para poder obtener resultados en el caso más general con materia. Ahora, escribiendo las soluciones del sistema en el vacío:

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= a \text{sen}^2 \theta \\ \gamma_3 &= b \text{sen}^2 \theta \\ \beta_2 &= 0 \\ \beta_3 &= 0 \\ U_1 &= -4ae^{2\beta_0} \text{sen} \theta \cos \theta \\ U_2 &= -\frac{12}{5}be^{2\beta_0} \text{sen} \theta \cos \theta \\ m_3 &= -a(3\text{sen}^2 \theta - 2) \\ m_4 &= -\frac{2}{5}b(3\text{sen}^2 \theta - 2) \\ b &= \frac{5}{6}a_{,u}e^{-2\beta_0} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Una vez se conoce el sistema en el vacío se facilita la visualización del sistema considerando fluido perfecto, además, las constantes de integración, imposibles de determinar de otra manera, se hacen coincidir con las soluciones para el vacío. Se obtiene entonces para el sistema caracterizado por un fluido perfecto, usando la misma expresión para  $\gamma$  que en el caso anterior, todas las variables en función de

$\gamma$ ,  $\rho_0$ ,  $P_0$  y  $Y_1$ :

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= a \operatorname{sen}^2 \theta \\
\gamma_3 &= b \operatorname{sen}^2 \theta \\
\beta_2 &= \pi (\rho_0 + P_0) \\
\beta_3 &= \frac{1}{3} \left[ 5\pi (\rho_0 + 3P_0)_{,u} e^{-2\beta_0} \operatorname{sen}^2 \theta - 16\pi (\rho_0 + P_0) \int Y_1 d\theta \right] \\
U_1 &= -4a e^{2\beta_0} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
U_2 &= -\frac{12}{5} b e^{2\beta_0} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
&\quad + \frac{2\pi}{3} \left[ (\rho_0 + 3P_0)_{,u} \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 4(\rho_0 + P_0) Y_1 \right] \\
m_3 &= -a (3 \operatorname{sen}^2 \theta - 2) + \frac{4}{3} \pi \rho_0 \\
m_4 &= -\frac{2}{5} b (3 \operatorname{sen}^2 \theta - 2) + 2\pi (\rho_0 + 3P_0)_{,u} e^{-2\beta_0} \operatorname{sen}^2 \theta \\
&\quad - 8\pi (\rho_0 + P_0) \int Y_1 d\theta \\
\rho_1 &= \frac{1}{6} (\rho_0 + 3P_0)_{,u} e^{-2\beta_0} (15 \operatorname{sen}^2 \theta - 4) + P_{0,u} e^{-2\beta_0} \\
&\quad - \frac{2}{3} (\rho_0 + P_0) \left( Y_{1,\theta} + Y_1 \cot \theta + 12 \int Y_1 d\theta \right) \\
P_1 &= P_{0,u} e^{-2\beta_0} \\
X_1 &= -\frac{1}{3} \left( \frac{\rho_{0,u} e^{-2\beta_0}}{\rho_0 + P_0} + Y_{1,\theta} + Y_1 \cot \theta \right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

y

$$5\pi (\rho_0 + 3P_0)_{,u} e^{-2\beta_0} = 18b - 15a_{,u} e^{-2\beta_0} \tag{2.25}$$

La última expresión constituye una ecuación de estado de un fluido perfecto en el origen del sistema de coordenadas para simetría axial y de reflexión, ésta se corresponde con el resultado para simetría esférica, donde  $\rho_0 + 3P_0$  es una constante [8], ya que  $a$  y  $b$  son funciones asociadas a la no esfericidad del sistema. De acuerdo a la interpretación de Winicour, dicha constante puede estar relacionada con una

de las cantidades conservadas de Newman–Penrose [11], propuestas en 1965, cuyo significado físico no se ha podido establecer en su totalidad. En un caso más general, para simetría axial y de reflexión (2.25), se consigue la siguiente cantidad conservada:

$$\pi (\rho_0 + 3P_0) + 3a - \frac{18}{5} \int b e^{2\beta_0} du = \text{constante} \quad (2.26)$$

La ecuación (2.25) también está acorde con el resultado para el vacío [12], donde se obtiene  $b = (5/6) a_{,u} e^{-2\beta_0}$  cuando  $\rho_0 = 0$  y  $P_0 = 0$ .

Cuando se usan estos resultados en el desarrollo del invariante de Weyl  $\mathcal{C}$  en potencias de  $r$  resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = & 192a^2 + 32a \left\{ 12a_{,u} + \frac{5}{3}\pi (\rho_0 + 3P_0)_{,u} (6 \cos^2 \theta + 5 - 3 \cos^4 \theta) \right. \\ & + 4\pi (1 - 3 \cos^2 \theta) P_{0,u} - 8\pi (\rho_0 + P_0) e^{2\beta_0} \left[ \left( \cos^2 \theta - \frac{2}{3} \right) Y_{1,\theta} \right. \\ & \left. \left. - \left( 4 \cos^2 \theta - \frac{13}{3} \right) Y_1 \cot \theta - (3 \cos^2 \theta - 1) \int Y_1 d\theta \right] \right\} r + \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

El término independiente del desarrollo del invariante de Weyl es, luego de sustituir las variables determinadas, igual a  $192a^2$ , esto implica que el espaciotiempo no es conformemente plano en el origen del sistema. Este resultado puede contrastarse con el caso de la simetría esférica, donde se obtiene  $\mathcal{C}|_{r=0} = 0$ , teniendo un espacio conformemente plano en el origen para esta situación [8]. Los resultados para cada simetría son consistentes entre sí, puesto que la no nulidad del primer término del invariante depende únicamente de la no esfericidad del sistema, evidenciada por el potencial gravitacional  $\gamma$ .

## CAPÍTULO 3

### ACOPLAMIENTO EN LA SUPERFICIE

Se estudia un espaciotiempo dividido en dos regiones: una interior que contiene el fluido material y una exterior correspondiente al vacío, estas regiones están separadas por la hipersuperficie  $S$ , que limita la distribución de materia y que se denomina superficie de acoplamiento.

La solución interna y la solución externa se acoplan en la superficie del fluido, las propiedades que deben satisfacer las soluciones sobre la superficie se denominan condiciones de acoplamiento. Estas condiciones se obtienen cuando se acopla la solución interior, correspondiente a una distribución de materia localizada, con el campo gravitacional exterior creado por dicha distribución. Además, las condiciones de acoplamiento en la superficie tienen como finalidad evitar la aparición de comportamientos singulares en las variables físicas sobre la superficie de separación.

Inicialmente las condiciones de acoplamiento fueron definidas por Darmois [13]. Según el enfoque de Darmois, la condición necesaria y suficiente para el acoplamiento de dos regiones del espaciotiempo sobre una hipersuperficie, es que tanto la métrica inducida sobre ella, conocida como primera forma fundamental, como la derivada covariante del tensor normal proyectada sobre esta hipersuperficie, conocida como segunda forma fundamental, sean continuas a través de ella.

Posteriormente, Lichnerowicz [14] propuso ciertas condiciones de acoplamiento alternativas, cuya equivalencia con las condiciones de Darmois fue demostrada luego por Bonnor y Vickers [15].



Para integrar las ecuaciones de campo en la superficie de la distribución, acoplamos la solución interior con la exterior en  $r = R$  a través de las condiciones de Darmois–Lichnerowicz. En la región interior la métrica está dada por (1.8), para la región exterior, denotada por el subíndice  $e$ , se tiene la métrica de Bondi exterior

$$ds_e^2 = \left( \frac{V_e}{r} e^{2\beta_e} - U_e^2 r^2 e^{2\gamma_e} \right) du^2 + 2e^{2\beta_e} du dr + 2U_e r^2 e^{2\gamma_e} du d\theta - r^2 (e^{2\gamma_e} d\theta^2 + e^{-2\gamma_e} \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.1)$$

Ahora, para acoplar la métrica interior y la exterior sobre la hipersuperficie  $S$ , se exige la continuidad de la primera forma fundamental a través de  $r = R(u, \theta)$ , donde  $r = R(u, \theta)$  es la ecuación de la superficie de acoplamiento. Esto resulta equivalente a la continuidad de las funciones  $V(u, r, \theta)$ ,  $\beta(u, r, \theta)$ ,  $U(u, r, \theta)$  y  $\gamma(u, r, \theta)$  en la frontera

$$\begin{aligned} V|_S &= V_e|_S, & \beta|_S &= \beta_e|_S \\ U|_S &= U_e|_S, & \gamma|_S &= \gamma_e|_S \end{aligned} \quad (3.2)$$

con la notación

$$f(u, r, \theta)|_S = f(u, R, \theta) \quad (3.3)$$

Las condiciones de Darmois–Lichnerowicz demandan además la continuidad de la segunda forma fundamental, que también puede ser obtenida a través de la continuidad de los coeficientes de espín [16]. Los coeficientes de espín son doce cantidades invariantes, es decir, independientes del sistema de coordenadas, que se obtienen del formalismo de Newman–Penrose [7].

Mediante el esquema de Herrera–Jiménez [16], las ecuaciones en la superficie quedan determinadas por la continuidad de los coeficientes de espín, que para

simetría axial y de reflexión están dados por [17]:

$$\begin{aligned}
C_\kappa = C_\epsilon &= 0, & C_\rho &= -\frac{e^{-2\beta}}{r}, & C_\sigma &= -e^{-2\beta}\gamma_{,r} \\
C_\gamma &= \frac{e^{-2\beta}}{2} \left[ \left( \frac{Ve^{2\beta}}{2r} \right)_{,r} - (e^{2\beta})_{,u} - U(e^{2\beta})_{,\theta} \right] \\
C_\alpha &= \frac{1}{4} \left[ \frac{re^{\gamma-2\beta}}{\sqrt{2}} U_{,r} - \frac{\sqrt{2}e^{-\gamma}}{r} \beta_{,\theta} - \frac{\sqrt{2}e^{-\gamma}}{r} (\cot\theta - \gamma_{,\theta}) \right] \\
C_\beta &= \frac{1}{4} \left[ \frac{re^{\gamma-2\beta}}{\sqrt{2}} U_{,r} - \frac{\sqrt{2}e^{-\gamma}}{r} (\beta_{,\theta} + \gamma_{,\theta} - \cot\theta) \right] \\
C_\tau &= \frac{e^{-2\beta}}{2\sqrt{2}} \left[ re^\gamma U_{,r} - \frac{2e^{-\gamma+2\beta}}{r} \beta_{,\theta} \right] \\
C_\pi &= \frac{e^{-2\beta}}{2\sqrt{2}} \left[ re^\gamma U_{,r} + \frac{2e^{-\gamma+2\beta}}{r} \beta_{,\theta} \right] \\
C_\lambda &= U \left[ \gamma_{,\theta} - \frac{\cot\theta}{2} \right] + \gamma_{,u} + \frac{1}{2} \left[ U_{,\theta} - \frac{V}{r} \gamma_{,r} \right] \\
C_\mu &= \frac{U}{2} \cot\theta - \frac{V}{2r^2} + \frac{U_{,\theta}}{2} \\
C_\nu &= \frac{e^{2\beta-\gamma} V_{,\theta}}{2\sqrt{2}r^2}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando la continuidad de la primera y segunda forma fundamental se obtiene:

$$\begin{aligned}
\gamma_{,r}|_S &= \gamma_{e,r}|_S & U_{,r}|_S &= U_{e,r}|_S & \gamma_{,\theta}|_S &= \gamma_{e,\theta}|_S \\
U_{,\theta}|_S &= U_{e,\theta}|_S & \beta_{,\theta}|_S &= \beta_{e,\theta}|_S & V_{,\theta}|_S &= V_{e,\theta}|_S \\
\gamma_{,u}|_S &= \gamma_{e,u}|_S \\
\left( \frac{Ve^{2\beta}}{2r} \right)_{,r}|_S - (e^{2\beta})_{,u}|_S &= \left( \frac{Ve^{2\beta_e}}{2r} \right)_{,r}|_S - (e^{2\beta_e})_{,u}|_S
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde la continuidad de los coeficientes de espín exige la continuidad de  $\gamma$  en todas sus primeras derivadas parciales a través de la superficie, que  $U$  sea continua en sus derivadas parciales en  $r$  y  $\theta$ ,  $\beta$  y  $V$  continuas sólo en sus derivadas parciales con respecto a  $\theta$ . También, se encuentra una ecuación que relaciona las derivadas

parciales de  $V$  y  $\beta$  con respecto a  $r$  y de la función  $\beta$  con respecto a  $u$  en la superficie

$$\frac{1}{4r} (2V_{,r} - 2V_{e,r}) \Big|_S + \frac{V}{r} (\beta_{,r} - \beta_{e,r}) \Big|_S = 2(\beta_{,u} - \beta_{e,u}) \Big|_S \quad (3.6)$$

Considerando el desarrollo de  $\beta$  en la superficie alrededor de  $r = R$

$$\beta = \beta|_S + \beta_{,r}|_S (r - R) + \dots \quad (3.7)$$

se tiene

$$(\beta|_S)_{,u} = \beta_{,u}|_S + \beta_{,r}|_S R_{,u} \quad (3.8)$$

por lo que

$$(\beta_{,u} - \beta_{e,u}) \Big|_S = (\beta_{e,r} - \beta_{,r}) \Big|_S R_{,u} \quad (3.9)$$

Ahora, usando (3.9), la primera y tercera ecuación de campo, (1.36) y (1.38), se puede reescribir la ecuación sobre la superficie (3.6) como

$$\begin{aligned} & - \frac{2\pi}{r} \{ (\rho + P) [(v_1)^2 (2r^2 R_{,u} + rV) - (v_2)^2 e^{2(\beta-\gamma)}] + r^2 (\rho - P) e^{2\beta} \} \Big|_S \\ & = \frac{r}{4} (U_{,r\theta} - U_{e,r\theta}) \Big|_S - \frac{8e^{2(\beta-\gamma)}}{r} (-\gamma_{,\theta\theta} + \gamma_{e,\theta\theta} + \beta_{,\theta\theta} - \beta_{e,\theta\theta}) \Big|_S \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se puede escribir sin equivocación alguna

$$\frac{dr}{du} \Big|_S = R_{,u} + \left( \frac{dr}{du} \Big|_S - R_{,u} \right) \quad (3.11)$$

con lo que

$$R_{,u} = \frac{w_1}{1-w_1} A^2 e^{-2\beta} - \frac{w_2}{1-w_1} A \left[ \frac{1}{re^\gamma} \left( \frac{dr}{du} \Big|_S - R_{,u} \right) + Ure^\gamma \right] \quad (3.12)$$

Expresando las componentes de la cuadrivelocidad (1.22) y las velocidades

materiales (1.24) se llega a

$$P|_S = \frac{\beta_{,r} - \beta_{e,r}}{2\pi r e^{4\beta}} \left( \frac{d\theta}{du} \right) \left( \frac{dr}{du} \Big|_S - R_{,u} \right) \Big|_S + \frac{e^{-2\beta}}{16\pi} (U_{,r\theta} - U_{e,r\theta}) \Big|_S - \frac{2e^{-2\gamma}}{\pi r^2} (-\gamma_{,\theta\theta} + \gamma_{e,\theta\theta} + \beta_{,\theta\theta} - \beta_{e,\theta\theta}) \Big|_S \quad (3.13)$$

En particular, a partir de la ecuación (1.24), si se considera la siguiente relación en la superficie de separación

$$\frac{dr}{du} \Big|_S = \frac{dR}{du} = \frac{w_1 F - w_2 C}{1 - w_1} \frac{A}{BF} \Big|_S \quad (3.14)$$

se puede reescribir la ecuación (3.13) como

$$P|_S = \frac{\beta_{,r} - \beta_{e,r}}{2\pi r e^{4\beta}} R_{,\theta} \left( \frac{d\theta}{du} \right)^2 \Big|_S + \frac{e^{-2\beta}}{16\pi} (U_{,r\theta} - U_{e,r\theta}) \Big|_S - \frac{2e^{-2\gamma}}{\pi r^2} (-\gamma_{,\theta\theta} + \gamma_{e,\theta\theta} + \beta_{,\theta\theta} - \beta_{e,\theta\theta}) \Big|_S \quad (3.15)$$

de la última expresión se puede notar que la presión en la superficie del fluido, en general, no es nula sino que presenta una discontinuidad en  $r = R(u, \theta)$ , garantizándose la regularidad de las variables físicas en la superficie del fluido gracias a las condiciones dadas en (3.5).  $P|_S$  se diferencia del caso esférico, en el cual es bien sabido que la presión en la superficie de un fluido perfecto siempre se anula [6], debido a la dependencia exclusiva de derivadas en  $\theta$ , las cuales representan la desviación respecto al modelo esférico. Nótese que las variables del lado derecho de la ecuación (3.15) dependen de la no esfericidad del sistema, dado que en el caso esférico son exactamente cero.

## CAPÍTULO 4 DESARROLLO ASINTÓTICO

Para completar el estudio de la evolución del fluido perfecto, es necesario asegurar que el espaciotiempo sea regular también fuera de la distribución de materia, cerca del infinito, donde la métrica (3.1) describe el espaciotiempo exterior vacío y las ecuaciones de campo a considerar, usando el esquema propuesto por Bondi [3] que las clasifica en 4 ecuaciones principales, 2 suplementarias y 1 trivial, se reducen a

Principales:

$$0 = \beta_{,r} - \frac{1}{2} r \gamma_{,r}^2 \quad (4.1)$$

$$0 = 2r U_{,r} e^{2(\gamma-\beta)} + r^2 U_{,r} (\gamma_{,r} - \beta_{,r}) e^{2(\gamma-\beta)} + \frac{1}{2} r^2 U_{,rr} e^{2(\gamma-\beta)} - \beta_{,r\theta} + \gamma_{,r\theta} - 2\gamma_{,r} \gamma_{,\theta} + 2 \frac{\beta_{,\theta}}{r} + 2\gamma_{,r} \cot \theta \quad (4.2)$$

$$0 = 2V_{,r} + \frac{1}{2} r^4 e^{2(\gamma-\beta)} (U_{,r})^2 - r^2 U_{,r\theta} - 4r U_{,\theta} - r^2 U_{,r} \cot \theta - 4r U \cot \theta + 2e^{2(\beta-\gamma)} [-1 - (3\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta}) \cot \theta - \gamma_{,\theta\theta} + \beta_{,\theta\theta} + (\beta_{,\theta})^2 + 2\gamma_{,\theta} (\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})] \quad (4.3)$$

$$0 = 2r (\gamma_{,u} + r\gamma_{,ur}) + (1 - r\gamma_{,r}) V_{,r} - (r\gamma_{,rr} + \gamma_{,r}) V - r (1 - r\gamma_{,r}) U_{,\theta} - r^2 (\cot \theta - \gamma_{,\theta}) U_{,r} + r (2r\gamma_{,r\theta} + 2\gamma_{,\theta} + r\gamma_{,r} \cot \theta - 3 \cot \theta) U + e^{2(\beta-\gamma)} [-1 - (3\gamma_{,\theta} - 2\beta_{,\theta}) \cot \theta - \gamma_{,\theta\theta} + 2\gamma_{,\theta} (\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})] \quad (4.4)$$

y suplementarias:

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{2\beta_{,ur}V}{r} - \frac{VV_{,rr}}{2r^2} - \frac{\beta_{,rr}V^2}{r^2} - \frac{\beta_{,r}V^2}{r^3} - \frac{\beta_{,r}VV_{,r}}{r^2} - \frac{V_{,u} - 2\beta_{,u}V}{r^2} \\
& + \frac{2\beta_{,r\theta}UV + \beta_{,\theta}U_{,r}V + \beta_{,r}U_{,\theta}V + 2\beta_{,r}UV_{,\theta}}{r} + \frac{2\beta_{,\theta}UV}{r^2} - \frac{U_{,\theta}V}{2r^2} \\
& + \frac{U_{,\theta}V_{,r}}{2r} - \frac{2UV_{,\theta}}{r^2} - \frac{U_{,r}V_{,\theta}}{2r} - \frac{2\gamma_{,r}UV_{,\theta}}{r} - 2\beta_{,u\theta}U - 2\beta_{,u}U_{,\theta} \\
& + 2\gamma_{,u\theta}U + 2\gamma_{,u}U_{,\theta} + U_{,u\theta} + UU_{,\theta\theta} + U^2_{,\theta} + 2(\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})UU_{,\theta} \\
& + \frac{UV_{,r\theta}}{r} + (2\beta^2_{,\theta} - 2\beta_{,\theta}\gamma_{,\theta} + \gamma_{,\theta\theta})U^2 + 2\gamma^2_{,u} - \cot\theta \left( 2\beta_{,u}U \right. \\
& \left. - 2\gamma_{,u}U - U_{,u} - UU_{,\theta} - \gamma_{,\theta}U^2 + \frac{UV}{2r^2} - \frac{UV_{,r}}{2r} - \frac{\beta_{,r}UV}{r} \right) \\
& + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ -UU_{,ur} - 2 \left( \gamma_{,ur} + \frac{\gamma_{,u}}{r} \right) U^2 - 2(\gamma_{,u} - \beta_{,u})UU_{,r} \right. \\
& \left. - 2U^2U_{,r\theta} - 2UU_{,r}U_{,\theta} - 2\gamma_{,r\theta}U^3 - \frac{2\gamma_{,\theta}U^3}{r} - 3\gamma_{,\theta}U^2U_{,r} \right. \\
& \left. + 2\beta_{,\theta}U^2U_{,r} + \frac{UU_{,rr}V}{r} + \frac{4UU_{,r}V}{r^2} + 2(\gamma_{,r} - \beta_{,r}) \frac{UU_{,r}V}{r} \right. \\
& \left. + \frac{\gamma_{,rr}U^2V}{r} + \frac{\gamma_{,r}U^2V_{,r}}{r} + \frac{\gamma_{,r}U^2V}{r^2} - \frac{3U^2U_{,\theta}}{r} - \gamma_{,r}U^2U_{,\theta} + \frac{U^2V_{,r}}{r^2} \right. \\
& \left. + \frac{U^2_{,r}V}{2r} - U^2 \left( U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r}U \right) \cot\theta \right] + \frac{1}{2}r^4 e^{4(\gamma-\beta)} U^2 U^2_{,r} \\
& - \frac{1}{2r^3} e^{2(\beta-\gamma)} [V_{,\theta\theta} + 2\beta_{,\theta\theta}V + (2\beta_{,\theta} - 2\gamma_{,\theta} + \cot\theta)(V_{,\theta} + 2\beta_{,\theta}V)]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \beta_{,u\theta} - \gamma_{,u\theta} + 2\gamma_{,u}\gamma_{,\theta} - 2\gamma_{,u}\cot\theta - U(\beta_{,\theta\theta} + 2\beta^2_{,\theta} - 2\beta_{,\theta}\gamma_{,\theta} \\
& + \beta_{,\theta}\cot\theta) - \frac{V_{,r\theta}}{2r} + \frac{V_{,\theta}}{2r^2} + (\gamma_{,r} - \beta_{,r}) \frac{V_{,\theta}}{r} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ \frac{3}{2}UU_{,r\theta} \right. \\
& \left. + \frac{3UU_{,\theta}}{r} + 2U \left( \gamma_{,ur} + \frac{\gamma_{,u}}{r} \right) + \frac{1}{2}U_{,ur} + 2\gamma_{,r\theta}U^2 + (\gamma_{,u} - \beta_{,u})U_{,r} \right. \\
& \left. + \gamma_{,r}UU_{,\theta} + (2\gamma_{,\theta} - \beta_{,\theta})UU_{,r} + U_{,r}U_{,\theta} - \frac{U_{,rr}V}{2r} - \frac{UV_{,r} + 2U_{,r}V}{r^2} \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_{,rr}UV + (\gamma_{,r} - \beta_{,r})U_{,r}V + \gamma_{,r}UV_{,r}}{r} - \frac{\gamma_{,r}UV}{r^2} + \frac{2\gamma_{,\theta}U^2}{r} \right. \\
& \left. + U \left( \frac{1}{2}U_{,r} + \frac{U}{r} + \gamma_{,r}U \right) \cot\theta \right] - \frac{1}{2}r^4 e^{4(\gamma-\beta)} UU^2_{,r}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Bondi [3] escribe las ecuaciones principales (4.1–4.4) de modo que se encuentren jerarquizadas. Si se observan las ecuaciones principales puede notarse que: si se especifica  $\gamma$  para algún valor de  $u$ , se puede integrar  $\beta$  de (4.1), introduciendo  $\gamma$  y  $\beta$  en (4.2) se obtiene  $U$ , con  $\gamma$ ,  $\beta$  y  $U$  se determina  $V$  de (4.3), y (4.4) es una ecuación dinámica que permite evolucionar  $\gamma$  en  $u$ , conocida como la ecuación de evolución.

#### 4.1. Desarrollo cerca del infinito

De acuerdo con el esquema de Bondi [3], se especifica el desarrollo asintótico de  $\gamma$  como una serie de potencias negativas en  $r$ , de manera que el espaciotiempo sea plano en el infinito, de la forma

$$\gamma = cr^{-1} + \left(C - \frac{1}{6}c^3\right)r^{-3} + \dots \quad (4.7)$$

donde se anuló el término proporcional a  $r^{-2}$  puesto que introduce términos logarítmicos en las variables métricas, que generan singularidades en el espaciotiempo. Utilizando esta expresión de  $\gamma$  (4.7) en la ecuación (4.1) se obtiene

$$\beta = -\frac{1}{4}c^2r^{-2} - \frac{1}{4}\left(3cC - \frac{1}{2}c^4\right)r^{-4} + \dots \quad (4.8)$$

donde se anula la función de integración a fin de mantener un espaciotiempo minkowskiano en el infinito. Siguiendo el procedimiento indicado, y fijando las funciones de integración de forma que se asegure la obtención de la métrica de Minkowski con el desarrollo asintótico de (3.1), con (4.2) y (4.3) se determina

$$\begin{aligned} U = & -(c_{,\theta} + 2c \cot \theta)r^{-2} + [2N(u, \theta) + 3cc_{,\theta} + 4c^2 \cot \theta]r^{-3} \\ & + \frac{1}{2}(3C_{,\theta} + 6C \cot \theta - 6cN - 8c^2c_{,\theta} - 8c^3 \cot \theta)r^{-4} + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
V = & r - 2M(u, \theta) - \left[ N_{,\theta} + N \cot \theta - (c_{,\theta})^2 - 4cc_{,\theta} \cot \theta \right. \\
& \left. - \frac{1}{2}c^2 (1 + 8 \cot^2 \theta) \right] r^{-1} \\
& - \frac{1}{2} \{ C_{,\theta\theta} + 3C_{,\theta} \cot \theta - 2C + 6N (c_{,\theta} + 2c \cot \theta) \\
& + 8c [(c_{,\theta})^2 + 3cc_{,\theta} + 2c^2 \cot \theta] \} r^{-2} + \dots
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Usando estas expresiones (4.7–4.10) en las ecuaciones restantes, la ecuación de evolución (4.4) queda expresada como

$$4C_{,u} = 2c^2c_{,u} + 2cM + N \cot \theta - N_{,\theta} \tag{4.11}$$

y las ecuaciones suplementarias se reducen a

$$M_{,u} = - (c_{,u})^2 + \frac{1}{2} (c_{,\theta\theta} + 3c_{,\theta} \cot \theta - 2c)_{,u} \tag{4.12}$$

$$-3N_{,u} = M_{,\theta} + 3cc_{,u\theta} + 4cc_{,u} \cot \theta + c_{,u}c_{,\theta} \tag{4.13}$$

Mediante la inspección de la ecuación (4.10), se puede extraer que  $M(u, \theta)$  es una expresión generalizada para la masa de Schwarzschild, que Bondi llama “aspecto de masa” [3]. Así, la masa de la fuente se define como la integral promedio del aspecto de masa a través de una superficie esférica de radio  $R_e$ , donde el radio de la esfera de integración es mucho mayor que el radio de la distribución de materia, es decir,  $R_e \gg R$

$$m(u) = \frac{1}{4\pi R_e^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} M(u, \theta) R_e^2 \sin^2 \theta d\theta \tag{4.14}$$

con lo que se puede obtener la masa de la fuente como función de  $u$  de la forma

$$m(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi M(u, \theta) \sin \theta d\theta \tag{4.15}$$



y usando (4.12) se verifica que

$$m_{,u} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi c^2_{,u} \sin \theta d\theta \quad (4.16)$$

Esta expresión describe la pérdida de masa de la distribución de materia por efecto de radiación gravitacional, tal como lo predijo Einstein cuando postuló la Teoría de la Relatividad General. Bondi [3] fue el primero en obtener una expresión matemática que describe la pérdida de masa de una fuente material debido a la emisión de ondas gravitacionales.

Con el propósito de encontrar una interpretación física a los resultados obtenidos, se considera el caso particular cuando  $c$  es sólo función de  $\theta$ . En este caso, cuando se integra el sistema de ecuaciones (4.11–4.13) se encuentra que las variables  $M$ ,  $N$  y  $C$  también deben ser independientes de la coordenada temporal  $u$  para evitar singularidades en el tiempo. Explícitamente, quedan determinadas por

$$M = \text{constante} \quad (4.17)$$

$$N = \sin \theta \left( D + 2M \int \frac{c}{\sin \theta} d\theta \right) \quad (4.18)$$

$$C = C(\theta) \quad (4.19)$$

donde  $D$  es una constante de integración.

Dado que  $M$  es una constante se obtiene que la masa del sistema también permanece constante, es decir,

$$m = M = \text{constante} \quad (4.20)$$

Se puede observar de estas expresiones que si  $c$  es independiente del tiempo

entonces no hay emisión de radiación gravitacional, y por tanto la masa de la fuente permanece constante. Luego se demuestra, que si  $c$  es independiente de  $u$ , el sistema debe ser estático para evitar la aparición de funciones que diverjan en el tiempo. De acuerdo con estos resultados se puede concluir que la función  $c$  determina completamente la evolución del sistema en la zona de radiación, por esta razón, Bondi [3], denominó el término  $c_{,u}$  como “función de información” (*news*). Teorema: “*Hay pérdida de masa si y sólo si hay función de información*” [1].

Utilizando el desarrollo en serie de potencias negativas en  $r$  de la variable métrica  $V/r$  (4.10) cuando  $c = 0$ , Bondi [3] encuentra que  $M = m$ ,  $N = D \sin \theta$  y  $C = Q \sin^2 \theta/2$ , cuyas expresiones se pueden interpretar físicamente de la siguiente forma:  $m$  representa el momento monopolar,  $D$  es el momento dipolar y  $Q$  es el momento cuadrupolar.

Por otra parte, cuando se aplica el desarrollo de potencias negativas en  $r$ , se obtiene que en el infinito el invariante de Weyl es cero, lo que implica que el espaciotiempo es conformemente plano, lo cual es consistente con el desarrollo propuesto por Bondi que garantiza que el espaciotiempo sea asintóticamente plano en el infinito.

## CONCLUSIONES

En el centro de una distribución de materia con simetría axial y de reflexión se obtiene una cantidad conservada que depende de las variables físicas, asociadas a un fluido perfecto, y a los potenciales gravitacionales asociados a la no esfericidad del sistema. Esto concuerda con el resultado obtenido para el caso esférico donde la cantidad conservada se puede expresar sólo en términos de variables físicas. También se encuentra que en el centro de la distribución material el espaciotiempo no es conformemente plano y depende directamente de la no esfericidad del fluido.

En la superficie de un fluido perfecto con simetría axial y de reflexión se tiene que, en general, la presión no es nula y depende directamente de la no esfericidad del sistema. Además, se encuentra que todas las primeras derivadas parciales de la variable métrica  $\gamma$  son continuas a través de la superficie, al igual que las primeras derivadas parciales de  $U$  con respecto a  $r$  y  $\theta$ , mientras que las funciones  $\beta$  y  $V$  son continuas sólo en sus primeras derivadas parciales con respecto a  $\theta$ . Por otro lado, la continuidad de la segunda forma fundamental queda expresada en términos de las primeras derivadas parciales de  $V$  y  $\beta$ , con respecto a  $r$ , y de la variable  $\beta$  con respecto a  $u$  en la superficie de acoplamiento.

En la zona de radiación se verifican los resultados obtenidos por Bondi en 1962, cuando se anula la función de información el sistema es estático y, por lo tanto, no hay pérdida de masa por efecto de la radiación gravitacional.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] d’Inverno, R. 1992. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press. New York.
- [2] Isaacson, R.; Welling, J. y Winicour, J. 1983. Null cone computation of gravitational radiation. *J. Math. Phys.*, **24**, 1824–1834.
- [3] Bondi, H.; van der Burg, M. y Metzner, A. 1962. Gravitational waves in general relativity VII. Waves from axi-symmetric isolated systems. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **269**, 21–52.
- [4] Herrera, L.; Di Prisco, A. y Martínez, J. 1998. Breakdown of the linear approximation in the perturbative analysis of heat conduction in relativistic systems. *Phys. Lett. A*, **243**, 7–12.
- [5] Birkhoff, G. y Langer, R. 1923. *Relativity and modern physics*. Harvard University Press. Cambridge.
- [6] Bondi, H. 1964. The Contraction of Gravitating Spheres. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **281**, 39–48.
- [7] Newman, E. y Penrose, R. 1962. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, **3**, 566–578.
- [8] Barreto, W.; Castillo, L. and Barrios, E. 2009. Central equation of state in spherical characteristic evolutions. *Phys. Rev. D*, **80**, 1–4.
- [9] Herrera, L. y Varela, V. 1997. Transverse cracking of self-gravitating bodies induced by axially symmetric perturbations. *Phys. Lett. A*, **226**, 143–149.
- [10] Misner, C. y Sharp, D. 1964. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Phys. Rev.*, **136**, 571–576.
- [11] Winicour, J. 2012. Characteristic evolution and matching. *Living Rev. Rel.*, **15**, 2. [Artículo en línea] <http://livingreviews.org/lrr-2012-2> (17/02/2013).
- [12] Gómez, R.; Papadopoulos, P. and Winicour, J. 1994. Null cone evolution of axisymmetric vacuum space-times. *J. Math. Phys.*, **35**, 4184–4204.
- [13] Darmois, G. 1927. *Memorial des sciences mathématique: fascicule XXV: les équations de la gravitation einsteinienne*. Gauthier-Villars. París.
- [14] Lichnerowicz, A. 1955. *Théories relativistes de la gravitation et de l’Électromagnétisme*. Masson. París.
- [15] Bonnor, W. y Vickers, P. 1981. Junction conditions in general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, **13**, 29–36.
- [16] Herrera, L. y Jiménez, J. 1983. Junction condition and the propagation of isometries in general relativity. *Phys. Rev. D*, **28**, 2987–2994.
- [17] Herrera, L. y Jiménez, J. 1986. Axially symmetric gravitational radiation from isolated sources and the deviation from spherical symmetry. *J. Math. Phys.* **27**, 2097–2104.

## HOJA DE METADATOS

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/6

Título	Evolución de un Fluido Perfecto en Simetría Axial y de Reflexión
Subtítulo	

### Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Laforgue M., Xavier J. F.	CVLAC	20.346.624
	e-mail	xavierjimmys@gmail.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

### Palabras o frases claves:

Evolución de un fluido perfecto, simetría axial y de reflexión, esquema de Bondi, cantidad conservada.

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/6

### Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias	Física

### Resumen (abstract):

Se estudia la evolución de un fluido perfecto con simetría axial y de reflexión utilizando el esquema de Bondi, donde se expresan las variables físicas en términos de la velocidad de un observador comóvil con el fluido. Para evitar la aparición de singularidades en algunos puntos del espaciotiempo, se garantiza la regularidad de las soluciones en el origen, en la superficie y en la zona de radiación. En el origen, la regularidad se determina a través del desarrollo en series de potencias positivas de la coordenada radial. En la frontera de la distribución material, se acopla suavemente la región que contiene al fluido con la región correspondiente al vacío mediante la continuidad de los coeficientes de espín del formalismo de Newman–Penrose. Posteriormente, la regularidad cerca del infinito se garantiza con el desarrollo en series de potencias negativas de la coordenada radial. En el origen, se encontró una cantidad conservada en función de variables físicas y potenciales gravitacionales asociados a la no esfericidad del sistema, también se obtuvo que en el centro del fluido el espaciotiempo no es conformemente plano y depende directamente de la no esfericidad del sistema. En la superficie, se determinó que la presión del fluido no es nula y depende explícitamente de la no esfericidad de la distribución material. En la zona de radiación, la pérdida de masa del sistema, por efecto de la radiación gravitacional, se expresa en términos de la función de información y, en el infinito, el espaciotiempo es asintóticamente plano.

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6

### Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Castillo Brito, Luis	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input checked="" type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	8.647.592
	e-mail	lucasti@ula.ve
	e-mail	
Martínez Ordaz, Rodrigo	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	4.187.417
	e-mail	yigo54@cantv.net
	e-mail	
Araque Lameda, Luis	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	2.728.346
	e-mail	aralameda@gmail.com
	e-mail	
	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

### Fecha de discusión y aprobación:

Año Mes Día

2013	03	13
------	----	----

Lenguaje: SPA



## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6

### Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
tesis-laforquex.pdf	Application/pdf

### Alcance:

Espacial: Nacional

Temporal: Temporal

Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciado en Física

Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciado

Área de Estudio: Física

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

UNIVERSIDAD DE ORIENTE

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/6



UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
CONSEJO UNIVERSITARIO  
RECTORADO

CUN°0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano  
**Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ**  
Vicerrector Académico  
Universidad de Oriente  
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda **"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009"**.

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

UNIVERSIDAD DE ORIENTE	
SISTEMA DE BIBLIOTECA	
RECIBIDO POR	<i>Mazley</i>
FECHA	5/8/09
HORA	5:30

Cordialmente,

**JUAN A. BOLANOS CUNVELO**  
Secretario


C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/maruja

Apartado Correos 094 / Telfs: 4008042 - 4008044 / 8008045 Telefax: 4008043 / Cumaná - Venezuela

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 6/6

**Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009):** “Los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo del Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario, para su autorización.”



---

Br. Xavier J. F. Laforgue M.  
Autor



---

Dr. Luis E. Castillo B.  
Asesor