

**UNIVERSIDAD DE ORIENTE**  
**NÚCLEO DE ANZOÁTEGUI**  
**ESCUELA DE INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS**  
**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA**  
**COMISIÓN DE TRABAJO DE GRADO**



**“OBTENCIÓN DEL FACTOR TEÓRICO DE  
CONCENTRACIÓN DE ESFUERZO EN ÁRBOLES CORTOS, CON  
RADIO DE ACUERDO SOMETIDOS A FLEXIÓN”**

**Antonio Alexander Martínez León**

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA  
OPTAR POR EL TÍTULO DE:**

**INGENIERO MECÁNICO**

**UNIVERSIDAD DE ORIENTE**  
**NÚCLEO DE ANZOÁTEGUI**  
**ESCUELA DE INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS**  
**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA**  
**COMISIÓN DE TRABAJO DE GRADO**



**“OBTENCIÓN DEL FACTOR TEÓRICO DE  
CONCENTRACIÓN DE ESFUERZO EN ÁRBOLES CORTOS, CON  
RADIO DE ACUERDO SOMETIDOS A FLEXIÓN”**

---

**Ing. Mecánico Nelson Jaimes MSc.**  
**Asesor Académico**

**Puerto la Cruz, Junio de 2004.**

UNIVERSIDAD DE ORIENTE  
NÚCLEO DE ANZOÁTEGUI  
ESCUELA DE INGENIERÍA Y CIENCIAS APLICADAS  
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA  
COMISIÓN DE TRABAJO DE GRADO



**“OBTENCIÓN DEL FACTOR TEÓRICO DE  
CONCENTRACIÓN DE ESFUERZO, EN ÁRBOLES CORTOS CON  
RADIO DE ACUERDO SOMETIDOS A FLEXIÓN”**

JURADO

El Jurado hace constar que asignó a ésta Tesis la calificación de:

---

**Ing. Mecánico Nelson Jaimes. MSc.**  
Asesor Académico

---

**Prof. Carmen García. MSc.**

**Jurado**

**Prof. Gaetano Sterlacci. MSc.**

**Jurado**

**Puerto La Cruz, Junio de 2004**

## **RESOLUCIÓN**

“Los trabajos de grado son de exclusiva propiedad de la universidad de oriente y sólo podran ser utilizados a otros fines con el consentimiento del consejo de núcleo respectivo, quien lo participara al consejo universitario”

## **DEDICATORIA**

Este trabajo de investigación se lo dedico en primer lugar a dios todo poderoso por acompañarme en todo momento. A mi papá Antonio José Martínez Rodríguez (Q.E.P.D.) por apoyarme siempre y creer en mi, a mi madre Encarnación León de Martínez por que sin su ayuda esto hoy no fuera una realidad y a mis dos hermanos Antonio Rafael Martínez y Wilfredo Martínez.

## **AGRADECIMIENTO**

En primer lugar quiero agradecerle a dios todo poderoso por haberme dado fuerza y no haber abandonado mi sueño. A mis padres Antonio José Rodríguez (Q.E.P.D.) y Encarnación León de Martínez Por haberme apoyado en todo momento. A mis dos hermanos Wilfredo Martínez y Rafael Martínez por creer en mi.

Un agradecimiento muy especial a mi segunda madre en P.L.C. Maritza la que me ayudo de todo corazón e igualmente a su familia Jonatan, Mari e Hildemaro.

A toda mi familia y muy especialmente a mi tia Celina y a mi tia Elide (mami) ya que siempre me dieron su apoyo y fuerza para no desmayar en el intento de conseguir mi meta.

A todos mis compañeros y amigos que me ayudaron y me apoyaron de una forma u otra durante toda mi carrera universitaria en los que puedo nombrar Pedro Reina, Carlos Cosola, Carlos Vásquez, Ángel López, Gabriel Álvarez-, Gustavo Suárez, Nelina Márquez, Lara Ordenel, Fátima Carolina, José Morales Aquiles Rosal, José Aguilera, Marjorie Pitarma, Richard Azuaje entre otros.

Al profesor Nelson Jaimes y su esposa Sra Margo por apoyarme y ayudarme en la culminación de mi tesis de grado, a el profesor Carlos Gómez por su valiosa colaboración a el profesor Nando Troyanni por aceptarme en el centro de métodos numéricos en ingeniería

## **RESUMEN**

En el presente trabajo se estudia el comportamiento del factor teórico de concentración de esfuerzo en árboles con radio de acuerdo, sometidos a flexión mediante el uso de los métodos numéricos. Mediante esta investigación se han conseguido resultados de los factores teóricos de concentración de esfuerzo para árboles con radio de acuerdo de distintas geometrías y longitudes, que son de suma importancia para las áreas de diseño mecánico y mecánica de los materiales. En este trabajo se confirma que la longitud es un parámetro de gran importancia en el valor del factor teórico de concentración de esfuerzo, demostrándose que existe una longitud crítica o de transición, longitud que marca el umbral de separación entre piezas cortas o de longitud finita y piezas largas o de longitud infinita.

## INDICE

RESOLUCIÓN.....	IV
DEDICATORIA.....	V
AGRADECIMIENTO.....	VI
RESUMEN.....	VII
INDICE .....	VIII
CAPITULO I.....	8
INTRODUCCIÓN.....	8
OBJETIVOS.....	10
Objetivo general .....	10
Objetivos específicos.....	10
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	12
CAPITULO II.....	14
RESUMEN DEL CONOCIMIENTO PREVIO.....	14
2.1. ANTECEDENTES.....	14
2.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	17
2.2.1 Algunas limitaciones importantes de la teoría de la flexión .....	17
2.2.2 Hipótesis de la teoría de la flexión .....	17
2.2.3 Esfuerzo normal debido a la flexión.....	18
2.2.4 Factores teóricos de concentración de esfuerzos.....	21
2.2.5 Método de los elementos finitos.....	21
2.2.6 Procedimiento general para el uso del método de los elementos finitos .....	22
2.2.7 Aspectos importantes del método de elementos finitos .....	23
CAPITULO III .....	24
DESARROLLO DEL TRABAJO.....	24
3.1 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA .....	24
3.2 CONSIDERACIONES GENERALES .....	24



3.3 CONSIDERACIONES ESPECÍFICAS .....	26
3.3.1 Variables consideradas en el estudio.....	26
3.3.2 Procedimiento para obtener el factor teórico de concentración de esfuerzo para árboles semi-infinitos .....	26
3.3.3 Procedimiento para obtener la longitud crítica o de transición.....	27
3.3.4 Procedimiento para obtener el factor teórico de concentración de esfuerzo en árboles cortos.....	27
3.4 Procedimiento para obtener el esfuerzo máximo mediante el uso del ansys. .....	28
Ejemplo de calculo .....	32
CAPITULO IV .....	36
4.1 Resultados .....	36
4.2 Análisis de resultados.....	41
4.3 Conclusiones .....	43
4.4 Recomendaciones.....	44
BIBLIOGRAFÍA.....	45
APÉNDICE A .....	48
APÉNDICE B.....	59

# CAPITULO I

## INTRODUCCIÓN

Los métodos para obtener la distribución de esfuerzos alterados o concentraciones de esfuerzo se estudian en la **“TEORÍA MATEMÁTICA DE LA ELASTICIDAD.”** Aún mediante estos métodos avanzados solo se pueden resolver los casos más sencillos. Las dificultades matemáticas llegan a ser demasiado grandes, ignorándose en consecuencia muchos problemas que son importantes. Para la resolución de problemas cuyo tratamiento matemático es muy complejo, se utilizan ampliamente procedimientos numéricos apropiados formulados con base en elementos finitos o en ecuaciones de diferencias finitas. Las computadoras digitales son indispensables en dichos trabajos. [1]

Es casi imposible diseñar una máquina sin que existan cambios en las secciones de sus componentes. En estas discontinuidades se ubican las zonas críticas en las que se incrementan los valores de los esfuerzos. Bien sea en máquinas, aparatos, estructuras o equipos, donde todos sus elementos están siendo sometidos a toda clase de esfuerzos, tales como los debidos a flexión, tracción, compresión y torsión, o una posible combinación de dos o más de ellos, es importante el estudio del comportamiento de dichos valores. [2].

En este trabajo de investigación se hace uso del software comercial de elementos finitos, ANSYS 5.4 el cual basa su estrategia de calculo por medio de los elementos finitos y con el se calculan los esfuerzos máximos en árboles sometidos a flexión pura variando sus dimensiones y radio de entalle entre otras características, para relaciones de  $D/d$ : 1,2; 1,05; y 1,01 siendo  $D$  el diámetro mayor del árbol y  $d$  el diámetro menor del

mismo. También se calculó la longitud de transición que es la separación que existe entre los árboles de longitud finita y semi infinita.

Los resultados se muestran en gráficos y en cuadros donde se presentan los porcentajes de diferencia entre las curvas de W. Pilkey y las construidas usando el software comercial. Este estudio se realizó en el centro de métodos numéricos en ingeniería, ubicado en el departamento de Mecánica en la Escuela de Ingeniería y Ciencias Aplicadas del Núcleo de Anzoátegui de la Universidad de Oriente.

En la bibliografía consultada [1,2,3,4,5,6,7,8] no se encontró indicio de algún trabajo donde se haya tomado en cuenta la longitud del árbol para obtener el factor teórico de concentración de esfuerzo en flexión. Los resultados que se presentan en los textos de Diseño Mecánico [2,3] y Mecánica de Materiales [1,4,5,6] con respecto a los concentradores de esfuerzo han sido tomados de la publicación de Peterson [7]. Esta investigación utilizó, entre otras, la publicación de Pilkey [8], por ser ésta la publicación más reciente acerca de los concentradores de esfuerzos.

## **OBJETIVOS**

### **Objetivo general**

Estudiar el comportamiento del factor teórico de concentración de esfuerzos en árboles circulares con radio de acuerdo para relaciones de  $D/d$  iguales a 1,2; 1,05 y 1,01 de longitud finita sometidos a flexión.

### **Objetivos específicos**

**1** Determinar por vía computacional el factor teórico de concentración de esfuerzos en árboles circulares con radio de acuerdo, de longitud semi-infinita, sometidos a flexión, utilizando el método de los elementos finitos.

**2** Establecer diferencias entre los valores del factor teórico de concentración de esfuerzos, existente en el texto de Pilkey [8] (Curvas de Leven and Hartman; Wilson y White) y los obtenidos por el método de elementos finitos, para árboles con radio de acuerdo y longitud semi-infinita, sometidos a flexión.

**3** Determinar la longitud de transición para la cual se define el umbral de separación entre árboles cortos y árboles de longitud semi-infinita, establecida por un porcentaje de diferencia cercano al 1% entre las magnitudes del factor teórico de concentración de esfuerzos.

**4** Determinar por vía computacional el factor teórico de concentración de esfuerzos en árboles circulares con radio de acuerdo, de longitud finita, sometidos a flexión, utilizando el método de los elementos finitos.

**5** Construir las nuevas curvas del factor teórico de concentración de esfuerzo para árboles con radio de acuerdo de longitud finita, sometidos a flexión

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Todo problema de diseño está sujeto a determinadas restricciones para su resolución. En una estructura o parte de una máquina que tenga una muesca, o cualquier cambio de sección transversal, el esfuerzo máximo ocurrirá en ese lugar y será mayor que el esfuerzo calculado con las fórmulas elementales basadas en suposiciones simplificadas acerca de la distribución de esfuerzo. [3]

En las referencias consultadas [1,4,5,6] para el estudio de la distribución de esfuerzos en las secciones críticas, se encontró que el factor teórico de concentración de esfuerzo depende tanto de la geometría del elemento como del tipo de carga [4].

Estudios realizados por Barre de Saint-Venant famoso Matemático y experto en Elasticidad, (1797-1886) establecen que: “el esfuerzo máximo disminuye con rapidez conforme nos alejamos del punto de aplicación de la carga” [5], es decir, como la deformación está relacionada con el esfuerzo, podemos establecer que éste se distribuirá más uniformemente a través de la sección transversal si la sección se toma cada vez más lejos del punto en que se aplica la carga externa [6]. Haciendo uso de este enunciado, se está realizando un estudio que es de suma importancia, como lo es el comportamiento del factor teórico de concentración esfuerzo al variar la longitud del elemento para obtener los nuevos valores de  $K_t$ .

Por medio del presente trabajo se busca precisar los valores del factor teórico de concentración de esfuerzo en árboles con radio de acuerdo sometidos a flexión ( ver Figura 1.1 ), para las relaciones  $D/d$  iguales a 1,2 ; 1,05 y 1,01, variando el parámetro  $r/d$  desde 0,001 hasta 0,3, donde  $r$  es el radio del entalle y  $d$  es el diámetro menor del árbol. En la figura 1.1 se puede observar que  $L$  es la longitud del árbol y  $M$  es el momento flector al que esta siendo sometido.

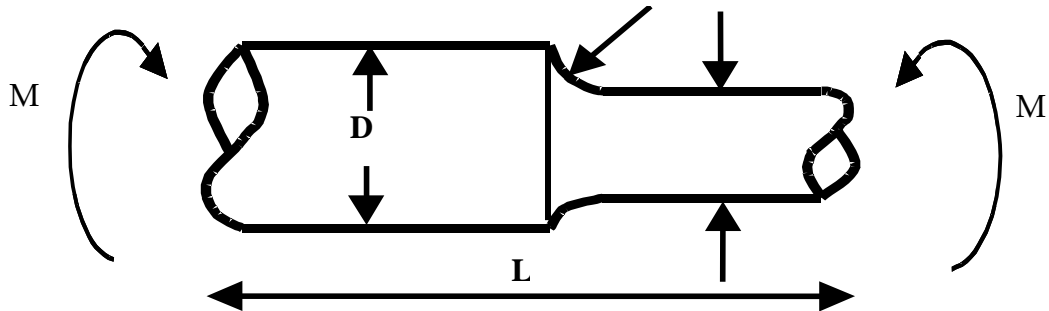


Figura 1.1. Árbol con radio de acuerdo y sus distintos

En recientes investigaciones, [9,10,11] se ha demostrado que la longitud de la pieza es un parámetro que influye de una manera directa en el factor teórico de concentración de esfuerzos.

La publicación más reciente acerca de los concentradores de esfuerzo es la de Pilkey [8]. Ésta contiene curvas de factores teóricos de concentración de esfuerzo para árboles de longitud semi-infinita, las cuales se utilizarán como medio comparativo con las obtenidas en este trabajo, además en la presente investigación se determina la longitud de transición ( $L_t$ ), “parámetro hasta hoy desconocido,” el cual marca el umbral de separación entre árboles considerados largos o semi-infinitos y árboles cortos. Una vez conocida la longitud de transición para cada una de las relaciones  $D/d$  estudiadas, se procede a calcular los nuevos valores del factor teórico de concentración de esfuerzo para barras consideradas cortas ( $L/D < L_t$ ).

## **CAPITULO II**

### **RESUMEN DEL CONOCIMIENTO PREVIO**

#### **2.1. ANTECEDENTES**

Continuando con la línea de investigación, de los factores teóricos de concentración de esfuerzo que se está realizando en el centro de métodos numéricos en ingeniería, éste es el segundo trabajo de grado donde se trabaja con árboles sometidos a flexión ya que el primer trabajo de grado lo realizó Aquiles Rosal para relaciones de  $D/d = 1,5; 2; \text{ y } 3$ .

Entre los trabajos realizados en esta área se han estudiados diferentes geometrías sometidas a diversas clases de esfuerzo tales como placa corta rectangular sometidas a flexión, probeta de sección circular con ranura en forma de U de longitud corta y sometidas a tensión, placas planas cortas con asiento plano y radio de acuerdo sometidas a flexión, placas cortas y planas con dos agujeros alineados y sometidas a tracción entre otras.

La bibliografía que se menciona a continuación, fue consultada para documentar la investigación a realizar y de ésta se obtuvo información a través de la cual se continuará una línea de investigación de importancia en campos de la Ingeniería Mecánica, como son la mecánica de los materiales y el diseño mecánico .

[8] Pilkey W., "Peterson's Stress Concentration Factors", John Wiley & Son, New York. Recopilación general donde se publican los factores teóricos de concentración de esfuerzo para diversas geometrías y cargas



[9] Fuentes L., "Determinación del factor teórico de concentración de esfuerzo en una placa corta rectangular, con filetes de hombro de relación  $D/d=1,05$  sometida a flexión " Trabajo de grado. Departamento de Mecánica. Escuela de Ingeniería y Ciencias Aplicadas. UDO, Puerto la Cruz - Venezuela (2000).

[10] Morillo C., "Estudio de la influencia de las condiciones de borde sobre el factor teórico de concentración de esfuerzo en placas planas con ranuras tipo "u" opuestas y en placas planas con filetes de hombros salientes, sometidas a tracción". En este trabajo de investigación se estudia el efecto de la distribución y el punto de aplicación de las cargas en relación con la longitud de la placa, sobre el factor teórico de concentración de esfuerzo en placas con filetes de hombros y ranuras tipo U opuestas, utilizando diferentes configuraciones geométricas.

[11]. Mogollón Y., "Obtención del factor de concentración de esfuerzo en placas cortas con filetes de hombros sometidas a flexión con una relación  $D/d=2$ ", Trabajo de grado. Departamento de Mecánica. Escuela de Ingeniería y Ciencias Aplicadas. UDO, Puerto la Cruz - Venezuela (1999).

[12] Troyani, N –Sterlacci, G- Gomes, C. "Simultaneous Considerations of Length and Boundary Conditions on Theoretical Stress Concentration factors" Aceptado para publicación en el internacional journal of fatigue, 2003

[13] Troyani, N –Sterlacci, G- Gomes, C. " Theoretical Stress Concentration factor for Short Rectangular plates With Centered Circular Holes" Aceptado para publicación en el journal of Mechacical Desing, ASME 2001

[14] Troyani, N.- Marin, A. – Garcia, H – Rodriguez, F – Gomes, C. “ Theoretical Stress Concentration factor for Short Rectangular Plates Subjected to uniform tension”  
Aceptado para publicacion en el Journal Strein analysis. 2003.

## 2.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.2.1 Algunas limitaciones importantes de la teoría de la flexión

Se supondrá que todas las fuerzas ejercidas sobre un elemento son constantes y se aplican en equilibrio.

Los elementos se consideran estables bajo la acción de las cargas o fuerzas aplicadas [1] .

### 2.2.2 Hipótesis de la teoría de la flexión

El material es homogéneo y obedece a la ley de Hooke.

Los esfuerzos están comprendidos dentro del límite elástico.

Cada una de las capas que se consideran formando el material tiene libertad para alargarse y contraerse longitudinal y lateralmente por la acción del esfuerzo como si estuviera separada de las demás capas.

Los módulos de elasticidad a la tracción (tensión) y a compresión son iguales.

Las secciones transversales originalmente planas siguen siendo planas después de la flexión. [15]

Combinando las hipótesis precedentes se obtiene la base para establecer la teoría de la flexión para el caso *elástico*. En una sección transversal de una viga, los esfuerzos que resultan de la flexión varían linealmente en relación con las distancias respectivas desde el eje neutro.

Debe quedar bien claro que los esfuerzos actúan en dirección normal a la sección transversal de una viga. Son el resultado del alargamiento o acortamiento axial de las diversas fibras de la viga. Su variación lineal desde el eje neutro se debe a la variación

lineal de las deformaciones y a la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación. La distancia a las diversas fibras de la viga se mide verticalmente desde el eje neutro.[1]

### 2.2.3 Esfuerzo normal debido a la flexión

Se considera ahora un segmento de viga bajo la acción de un momento flexionante positivo  $M$ , en el mismo plano longitudinal de la viga, como se ve en la figura 2.1

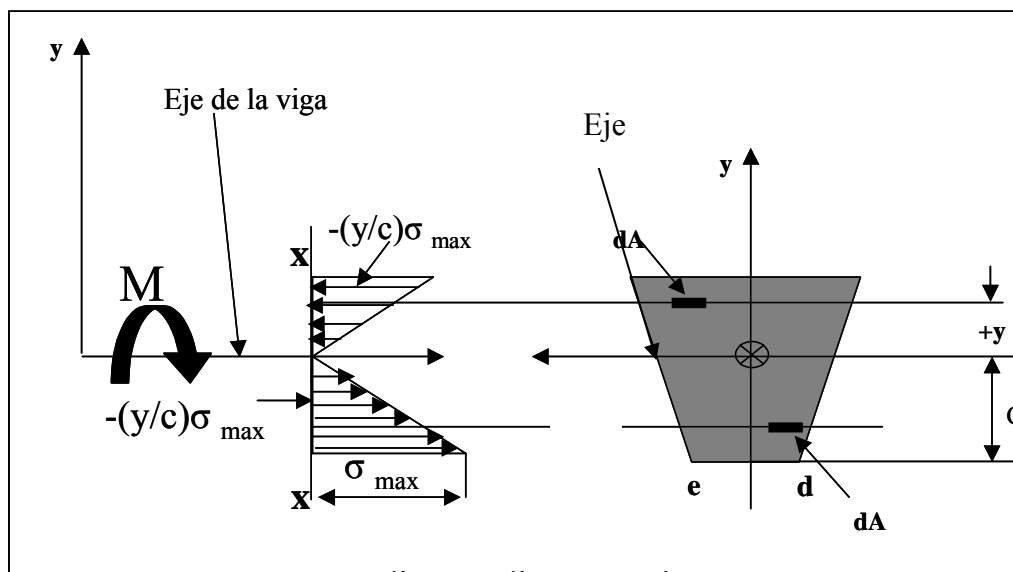


FIG. 2.1 VIGA SOMETIDA A FLEXION

En la sección X-X este momento aplicado es resistido por esfuerzos que varían linealmente desde el eje neutro. Los esfuerzos más intensos ocurren en los puntos más alejados del eje neutro. En el caso de la viga indicada, esto ocurre a lo largo de la línea ed, este esfuerzo, que es un esfuerzo normal, se designa por  $\sigma_{\max}$ . Cualquier otro esfuerzo normal que actúe sobre la sección transversal se relaciona con ese esfuerzo por una razón o cociente de las distancias al eje neutro. Por lo tanto, en un área infinitesimal  $dA$  a una distancia  $y$  desde el eje neutro, el esfuerzo será  $-(y/c)\sigma_{\max}$ , donde la distancia  $c$  se mide desde el eje mencionado hasta la fibra más alejada de la viga, el signo se invierte automáticamente cuando  $y$  se mide hacia abajo del eje neutro. Este cambio de

signo corresponde a la inversión en el esfuerzo al pasar de la compresión a la tensión. En consecuencia, la expresión  $-(y/c) \sigma_{\max}$ , es una expresión general para el esfuerzo normal en cualquier área infinitesimal de la sección de la viga a una distancia  $y$  desde el eje neutro.

Puesto que el segmento de la viga mostrado en la figura 2.1 debe estar en equilibrio, la suma de todas las fuerzas en la dirección X, que se toma horizontalmente, debe anularse, es decir,  $\Sigma F_x = 0$ .

$$\text{Componentes x: } \int \sigma dA = 0 \quad (\text{Ec.2.1})$$

$$\text{Momentos con respecto al eje y: } \int z \sigma_x dA = 0 \quad (\text{Ec 2.2})$$

$$\text{Momentos con respecto al eje z: } \int (-y \sigma_x dA) = M \quad (\text{Ec.2.3})$$

Por consiguiente, como el segmento de la viga resiste solo un par de fuerzas, la suma (o integral) de todas las fuerzas que se ejercen en la sección transversal de la viga debe ser igual a cero como lo muestra la siguiente ecuación.

$$\int_A \left( -\frac{y}{c} \sigma_{\max} \right) dA = 0 \quad (\text{Ec. 2.4})$$

Donde el subíndice A de la integral indica que la suma se debe efectuar sobre el área transversal total de la viga. Sin embargo, en una sección particular,  $\sigma_{\max}$ , y  $c$  son constantes, así que la integral se puede escribir de nuevo como:

$$-\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A y dA = 0 \quad (\text{Ec. 2.5})$$

Ya que en una viga esforzada ni  $c$  ni  $\sigma_{\max}$ , pueden ser cero, se deduce que  $\int_A y \, dA = 0$ . De modo que la distancia desde el eje neutro hasta el centroide del área debe ser igual a cero y el eje neutro pasará por el centroide del área transversal de la viga. Por lo tanto, el eje neutro se podrá determinar rápida y fácilmente para cualquier viga hallando simplemente el centroide del área transversal.

El momento aplicado externo  $M$  es equilibrado por el momento inducido interno debido a los esfuerzos por flexión que se desarrollan en la sección. Dicho momento interno se determina sumando las fuerzas que actúan sobre áreas infinitesimales  $dA$  multiplicadas por sus respectivos brazos de momentos a partir del eje neutro. Al formular matemáticamente estos enunciados se obtiene la siguiente igualdad:

$$M = -\frac{\sigma_{\max}}{c} \int_A Y^2 \, dA \quad (\text{Ec 2.6})$$

La integral  $\int_A y^2 \, dA$  depende solo de las propiedades geométricas del área transversal. En mecánica esta cantidad lleva el nombre de momento de inercia (o momento de segundo orden) del área de la sección respecto del eje centroidal, cuando  $y$  se mide desde tal eje. Es una constante definida para un área en particular y se designa por  $I$ . Con esta notación la expresión anterior se puede escribir en forma más compacta como[1]:

$$\sigma_{\max} = -\frac{M * c}{I} \quad (\text{Ec. 2.7})$$

### 2.2.4 Factores teóricos de concentración de esfuerzos

El grado de concentración de esfuerzo se suele indicar por un factor o coeficiente de concentración de esfuerzo. Este puede ser determinado por un análisis teórico o por vía experimental y se le llama factor teórico de concentración de esfuerzo  $K_t$ , que es la razón del esfuerzo local máximo dividido por un esfuerzo nominal calculado  $\sigma_0$ . Así, el esfuerzo máximo teórico debido a alguna discontinuidad en la sección se determina a través de la siguiente ecuación:

$$\sigma_{\max} = K_t * \sigma_0 \quad (\text{Ec. 2.8})$$

Es necesario reconocer que en realidad la expresión 2.5 representa una definición de  $K_t$ .

Como los cambios de sección y las discontinuidades se pueden producir en general, de maneras muy diversas, no siempre es posible hallar un factor teórico de concentración de esfuerzo que sea aplicable al caso objeto del proyecto. Así, es esencial poner en juego las facultades del buen juicio al mismo tiempo que se efectúan los cálculos. En la elección del valor de  $K_t$  hay que consignar siempre el método de cálculo del esfuerzo nominal  $\sigma_0$ .

### 2.2.5 Método de los elementos finitos

Descripción del Método de los Elementos Finitos.

Durante la descripción, evaluación y resolución de sistemas, el hombre a menudo se encuentra con problemas complejos. En consecuencia se vio en la necesidad de encontrar la manera de solucionar estos problemas, y para tal fin pensó en que si era muy difícil encontrar la función que representara un sistema continuo, entonces la solución aproximada era un modelo discreto, (sistema de componentes finitos bien definidos) de este sistema, compuesto por un conjunto de funciones continuas definidas sobre sub-sistemas del modelo discreto; es decir, dividir una estructura cualquiera en

sistemas equivalentes de pequeñas unidades y estudiar cada una de ellas para un ensamble posterior con la finalidad de recobrar una aproximación de la estructura original.

En esencia el método de los elementos finitos consiste en separar los sistemas en componentes individuales o elementos, cuyo comportamiento puede conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes. [16]

Según Zienkiewicz [16], “el método de los elementos finitos es un procedimiento general de discretización de los problemas continuos planteado por expresiones definidas matemáticamente”, entendiéndose por discretización, como ya se mencionara, la división del dominio del sistema en sub-regiones o elementos. Estos elementos se consideran que a su vez están interconectados mediante juntas llamadas nodos o puntos nodales y las funciones que aproximan la función real de cada elemento reciben el nombre de funciones de desplazamiento o modelos de desplazamientos.

El modelo de desplazamiento puede ser expresado en varias formas simples, tanto en forma de funciones polinómicas como trigonométricas. Las funciones polinómicas han sido usadas mayormente en aplicaciones de este método, por la relativa facilidad que ofrecen en operaciones matemáticas [17].

### **2.2.6 Procedimiento general para el uso del método de los elementos finitos**

Discretizar el continuo, es decir, dividir el sistema en elementos finitos mediante líneas interconectadas con un número discreto de puntos (nodos).

Tomar un conjunto de funciones que definan una aproximación a los desplazamientos de los nodos dentro de cada elemento.



Especificaciones de borde o frontera, se deben definir las condiciones externas que actúan sobre el continuo en estudio.

Ensamblaje del conjunto de funciones, determinando un sistema de fuerzas concentradas en los nodos.

Resolución del sistema de ecuaciones, es decir, hallar la solución del sistema de ecuaciones algebraicas que representan el continuo.

### **2.2.7 Aspectos importantes del método de elementos finitos**

Discretización en el MEF.

El punto de arranque del método de los elementos finitos (MEF) es la subdivisión del dominio en sub-dominios pequeños llamados elementos. Aunque los elementos no necesitan ser triángulos, esas subdivisiones se llaman triangulaciones. Un elemento es descrito por vértices y puntos que se llaman nodos. La malla del MEF es constituida por los nodos y los elementos.

En cada elemento la solución buscada es aproximada por un polinomio de orden  $n$ . La aproximación se calcula en los nodos de los elementos que son suficientes para representar la aproximación en la pieza. El problema es encontrar los valores de la aproximación de la solución a los nodos de la malla del MEF de la ecuación diferencial parcial dada. [16]

## **CAPITULO III**

### **DESARROLLO DEL TRABAJO**

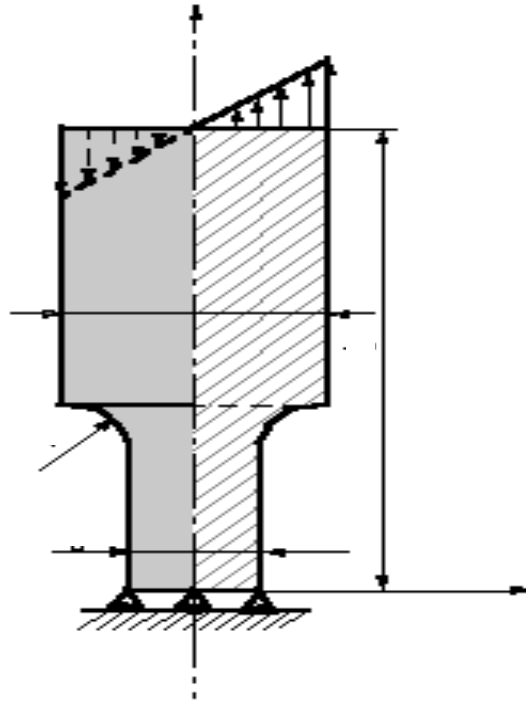
#### **3.1 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA**

La fase inicial del trabajo correspondió a la recopilación bibliográfica de información relacionada con el tema desarrollado, para ello fue necesario analizar y estudiar los trabajos de investigación ya mencionados.

#### **3.2 CONSIDERACIONES GENERALES**

La investigación se basa fundamentalmente en la determinación del factor teórico de concentración de esfuerzo en árboles de sección transversal circular con radio de acuerdo, utilizando relaciones geométricas  $D/d$  iguales a 1,2; 1,05; y 1,01 sometidos a flexión. Haciendo uso de la axilsimetría geométrica y simetría de carga del sistema, podemos reducir el mismo definiendo tan sólo la sección de revolución, sujeta a una tracción superficial tipo rampa en uno de sus extremos (extremo de mayor sección circular), y desplazamiento restringido en el otro, lo cual nos permite ahorrar considerablemente costo y tiempo de cálculo.

En la figura 3.1 se aprecia el modelo en estudio con sus respectivas condiciones de borde.



**Figura 3.1 Árbol de sección circular donde se muestran las condiciones de borde**

Haciendo uso de los elementos finitos por medio del software ANSYS versión 5.4., se determinan los esfuerzos máximos para árboles de longitud semi infinita, luego se calcula el esfuerzo nominal en la zona de menor área empleando la ecuación 2.7, para finalmente, mediante el uso de la ecuación 2.8, determinar el factor teórico de concentración de esfuerzo. Conocidos estos valores para las diferentes relaciones  $D/d$  consideradas en el estudio, se procede a determinar la longitud de transición o longitud crítica. Una vez conocida la longitud de transición, se determinan los valores del factor teórico de concentración de esfuerzo para árboles considerados cortos, es decir, árboles con relación  $L/D$  menor que la longitud de transición.

### **3.3 CONSIDERACIONES ESPECÍFICAS**

#### **3.3.1 Variables consideradas en el estudio**

En forma general, el factor teórico de concentración de esfuerzo se va a calcular para relaciones  $D/d$  iguales a 1,2 ; 1,05 y 1,01. El parámetro  $r/d$  varia desde 0,001 hasta 0,3 para cada relación  $D/d$ . En esta investigación se fijó un valor de  $L/D$  igual a 6 ( $L \gg D$ ) para el cálculo de árboles de longitud semi infinita.

#### **3.3.2 Procedimiento para obtener el factor teórico de concentración de esfuerzo para árboles semi-infinitos**

Se fija el valor de  $L/D$  previamente establecido ( $L/D=6$ )

Se selecciona una de las relaciones  $D/d$  consideradas.

Para una relación  $r/d$  específica, se crea el modelo y se señalan sus condiciones de borde, se malla, se refina y se invoca la solución para obtener el esfuerzo máximo correspondiente. Se repite este procedimiento para los diferentes  $r/d$  considerados en el rango.

Haciendo uso de la ecuación 2.8 se calcula el factor teórico de concentración de esfuerzo para los distintos valores de  $r/d$

Se construye la curva del FTCE en función de  $r/d$  para el valor seleccionado de  $D/d$ .

Se repiten los pasos desde b hasta e para cada una de las relaciones  $D/d$  en estudio.

### 3.3.3 Procedimiento para obtener la longitud crítica o de transición

Se toma un valor de  $D/d$ .

Para un valor específico de  $r/d$  se disminuye el valor de  $L/D$  a partir de la longitud semi-infinita considerada.

Se realiza el modelo, se determina el esfuerzo máximo y se calcula el FTCE.

Se compara este valor del FTCE con el obtenido para árboles semi-infinitos de la misma relación y cuando la diferencia porcentual entre ellos este comprendida en el rango  $1 \pm 0,02$ , se toma el valor de  $L/D$  como la longitud de transición. Si la diferencia porcentual entre los valores del FTCE no se encuentra en el rango prefijado, se continúa disminuyendo la longitud del elemento y se repite el procedimiento hasta conseguirlo, y el valor correspondiente de  $L/D$  será la longitud de transición para la geometría estudiada.

Se repiten los pasos desde b hasta d para los diferentes valores de  $r/d$ .

Se grafica la curva de longitud de transición en función de  $r/d$  para el valor fijado  $D/d$

Se repiten los pasos desde a hasta e para cada relación  $D/d$  en estudio

### 3.3.4 Procedimiento para obtener el factor teórico de concentración de esfuerzo en árboles cortos

Se toma un valor de  $D/d$

Se selecciona un valor de  $L/D$  menor que la longitud de transición.

Se calcula el esfuerzo máximo para cada  $r/d$  y se determina el factor teórico de concentración de esfuerzo

Se grafica la curva del factor teórico de concentración de esfuerzo Vs  $r/d$  para el valor fijado  $D/d$

Se repiten los pasos desde a hasta d para cada valor de L/D considerado

Se repiten los pasos desde a hasta e para cada relación D/d en estudio.

### 3.4 Procedimiento para obtener el esfuerzo máximo mediante el uso del ansys.

A continuación se describen los pasos necesarios para el uso del programa computacional Ansys versión 5.4

Inicialmente en preferences (preferencias) se indica que se va a realizar un estudio estructural estático.

Seguidamente se indican las propiedades mecánicas del material en estudio tales como el modulo de young (E) y la relación de poisson ( $\nu$ ).

Se selecciona apropiadamente el elemento con el que se trabajará, para el caso particular en estudio, se eligió el elemento axi-armónico PLANE 83 de 8 nodos.

Para realizar el modelo se crean los puntos claves (Keypoints), los cuales serán unidos mediante líneas y arcos que delimitarán el área en estudio. Vale destacar que en este trabajo sólo se modela la sección de revolución de la pieza estudiada.

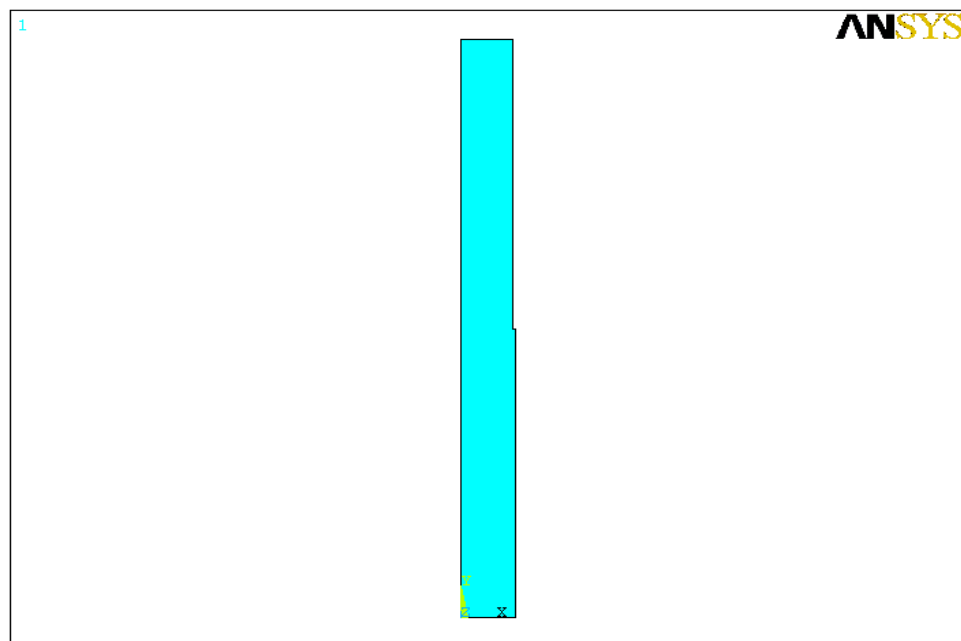


Figura 3.2 creación de la pieza en estudio

Para la generación de la malla se emplea el comando denominado “size ctrls”, el cual permite dividir las líneas que delimitan el modelo en segmentos que pueden tener igual o distinta magnitud. Como en el estudio presente se conoce de antemano que el esfuerzo máximo se genera en la zona del entalle, este conocimiento nos obliga a realizar un mallado “más fino” en dicha zona, por lo tanto, haciendo uso del mencionado comando, se trabaja de manera que los segmentos en que se divide cada línea sean menores a medida que dicha línea se acerque al entalle.

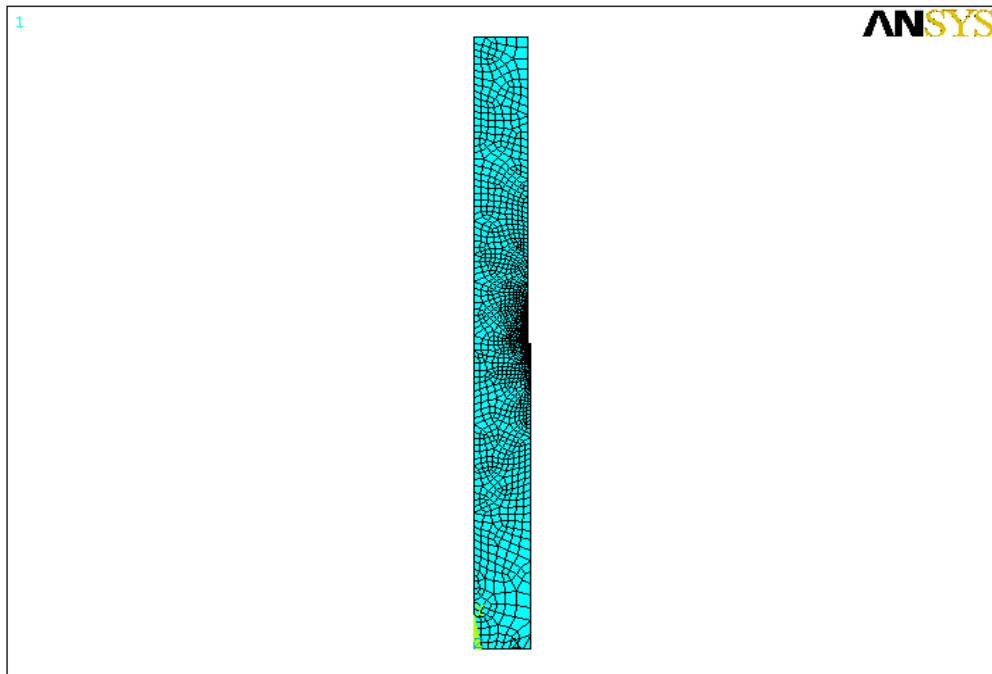


Figura 3.3 Pieza en estudio con la malla ya generada

Se establecen las condiciones de borde correspondiente carga y restricción en el desplazamiento correspondiente al modelo que se va a simular

Haciendo uso del comando “solutions” se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas obtenidas.

Mediante el comando “plot results” (plotear resultados) en el “General Postproc” (post-procesador general), se colocan en pantalla los resultados numéricos que se consideran para la determinación del FTCE (ver figura 3.4). En esta investigación el esfuerzo principal  $S_1$  determinado para cada caso, se toma como el esfuerzo máximo a utilizar en la ecuación 2.8 para determinar el FTCE.

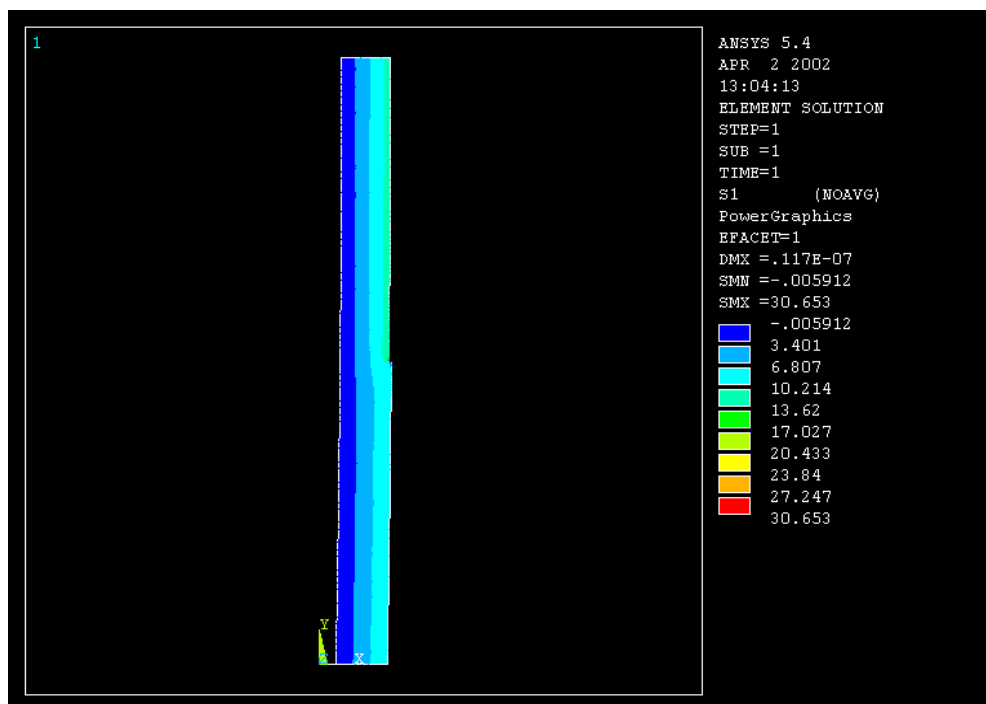


Figura 3.4 visualización de los resultados



El criterio de convergencia utilizado para darle validez a la solución numérica obtenida, es que la misma no debe variar, aún cuando se mejore el refinado de la malla. Así mismo, debe verificarse la convergencia de los resultados mediante la obtención de valores iguales de esfuerzo alrededor de la zona crítica, como se aprecia en la figura 3.5, que conserven un adecuado número de cifras significativas.

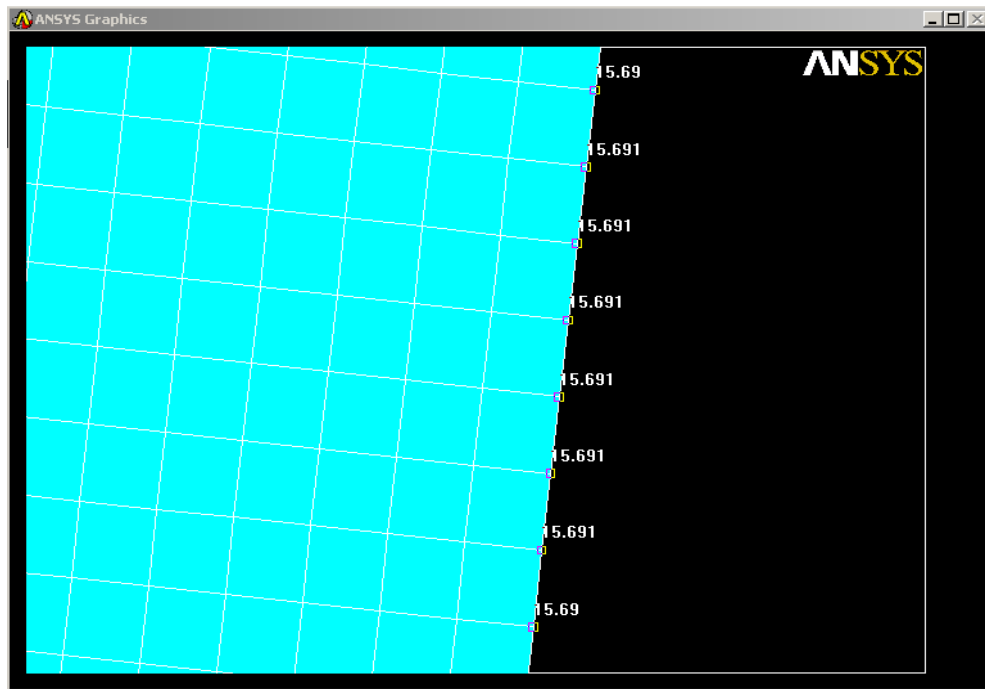


figura 3.5 calidad de solución numérica

### Ejemplo de calculo

Para calcular el valor de  $K_t$  se utiliza la siguiente expresión:

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad \text{(Ec.2.8)}$$

El valor del esfuerzo máximo se calcula por medio del programa ANSYS 5.4 .

El esfuerzo nominal se calcula haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{M * C}{I} \quad \text{(Ec.}$$

2.7)

Para la determinación del momento flexionante (M) podemos apoyarnos en las figuras 3.6 a 3.8 y seguir la siguiente analogía

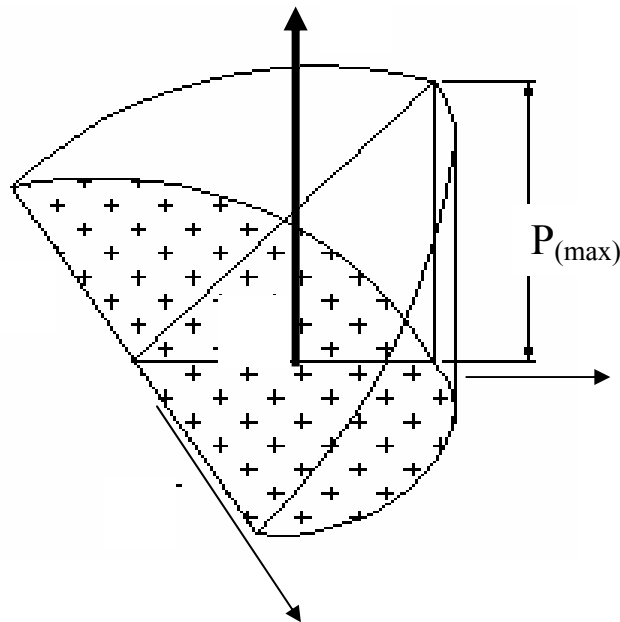
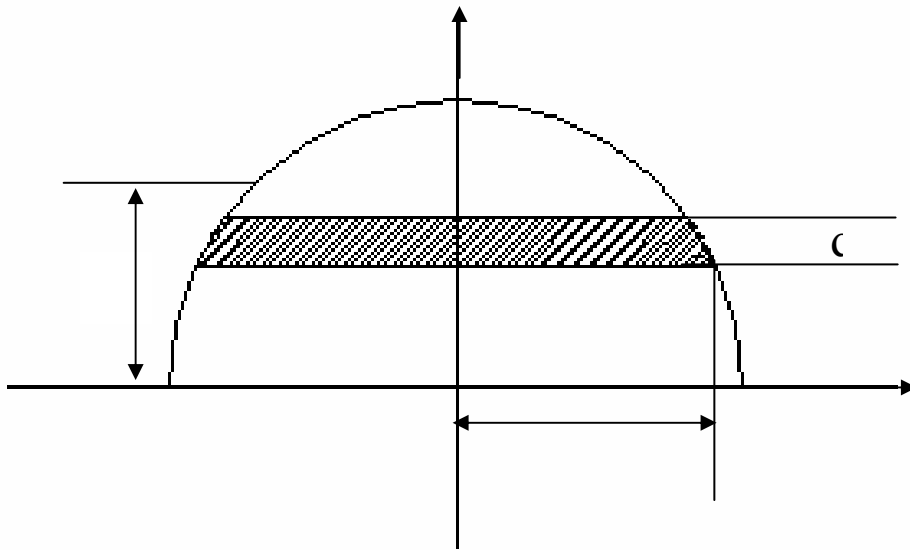


Figura 3.6 forma geométrica de la carga aplicada en el plano xy

La carga total o resultante ( R ) se ubica en el centroide como se muestra en la figura 3.5 y viene dada por la siguiente la expresión de matemática:

$$R = \int f(x,y) dA, \quad R = \int P(x,y) dA \quad (\text{Ec. 3.1})$$



**Figura 3.7 figura resultante en el plano xy**

Sustituyendo las variables correspondiente en la ecuacion 3.1 y multiplicando R por la distancia al centroide ( $\tilde{y}$ ) resultando la siguiente ecuacion

$$R\tilde{y} = \int y^* P(x,y) 2x dy \quad (\text{Ec. 3.2})$$

De la ecuación de la circunferencia  $X^2 + Y^2 = r^2$  se despeja el valor de x para ser sustituido en la ecuación 3.3 resultando

$$R\tilde{y} = 2 \int y^* P(x,y) \sqrt{r^2 - y^2} dy \quad (\text{Ec. 3.3})$$

En donde P es la carga aplicada y P es función de Y  $P(y)$

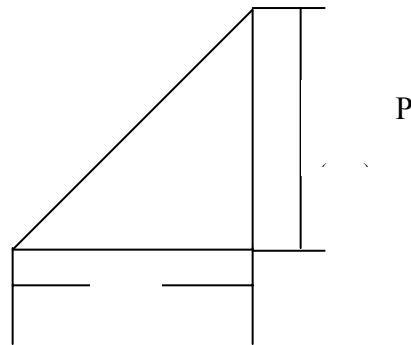


Figura 3.8 carga (**P**) en función de Y

De la figura 3.7 se calcula la pendiente de la recta para formar la ecuación de la recta de la carga (P) en función de Y resultando la ecuación  $P = mY$ .

$$P(y) = \left( \frac{P_{(\max)}}{r} \right) * y \quad (\text{Ec. 3.4})$$

Escogiendo la relación  $D/d = 1,2$  para ejemplificar el calculo siendo  $d= 1$ ; mientras que la carga máxima  $P_{(\max)} = 10$  y  $D = 1,2$  con el radio  $r = 0,6$ . Sustituyendo estos valores en la ecuación 3.4 resulta.

$$P(y) = 16,67y$$

Obtenido el valor de la ecuación 3.4 y sustituyéndolo en la ecuación 3.5 e integrando de 0 hasta r se obtiene el valor numérico del momento.

$$R\tilde{y}=2 \int_0^{1,2} y * 16,67y \sqrt{0,36 - y^2} dy \quad (\text{Ec. 3.5})$$

El momento al que esta siendo sometido la pieza se obtiene de la siguiente expresión

$$M = R\tilde{y} * 2 \quad (\text{Ec. 3.6})$$

La ecuación del momento de inercia para la pieza en estudio es la siguiente

$$I_x = I_y = \frac{\pi * r^4}{4} \quad (\text{Ec. 3.7})$$

la variable C de la ecuación 2.7 es la distancia que existe entre el eje neutro y la fibra mas alejada en este caso en particular el radio de la pieza. Sustituyendo cada parámetro en la ecuación 3.2 esta resulta de la siguiente forma:

$$\sigma_{nom} = \frac{M * 4}{\pi * r^3} \quad (\text{Ec. 3.8})$$

## CAPITULO IV

### 4.1 Resultados

Tabla 4-1: Valores de los factores teóricos de concentración de esfuerzo para la relación  $D/d = 1,2$  y  $L/D = 6$  de un árbol sometido a flexión.

r/d	ANSYS	PILKEY	% de diferencia
0,01	3,6950	3,8	- 2,7608
0,02	2,8513	2,67	6,7904
0,03	2,4729	2,3	7,5216
0,04	2,2461	2,13	5,2784
0,05	2,0913	2	4,5667
0,06	1,9769	1,91	3,5029
0,07	1,8881	1,84	2,6150
0,10	1,7075	1,7	0,4429
0,15	1,5393	1,53	0,6135
0,20	1,4415	1,44	0,1049
0,25	1,3743	1,4	- 1,8306
0,30	1,3279	1,36	- 2,3565

Tabla 4-2: Valores de los factores teóricos de concentración de esfuerzo para la relación  $D/d = 1,05$  y  $L/D = 6$  de un árbol sometido a flexión.

r/d	ANSYS	PILKEY	% de diferencia
0,005	3,3473	3,44	- 2,6922
0,01	2,6447	2,5	5,7900
0,02	2,1447	2,06	4,1120
0,03	1,9207	1,86	3,2676
0,04	1,7871	1,74	2,7084
0,05	1,6957	1,65	2,7711
0,06	1,6282	1,58	3,0538
0,07	1,5758	1,54	2,3309
0,10	1,4692	1,48	- 0,7296
0,15	1,3691	*****	*****
0,20	1,3098	*****	*****
0,25	1,2695	*****	*****
0,30	1,2399	*****	*****

Tabla 4-3: Valores de los factores teóricos de concentración de esfuerzo para la relación  $D/d = 1,01$  y  $L/D = 6$  de un árbol sometido a flexión.

r/d	ANSYS	PILKEY	% de diferencia
0,005	2,1307	2,19	- 2,7036
0,01	1,7956	1,7	5,6241
0,02	1,5572	1,46	5,2188
0,03	1,4514	1,36	6,7208
0,04	1,3885	1,31	5,9985
0,05	1,3455	1,28	5,1224
0,06	1,3140	1,26	3,9401
0,07	1,2829	1,25	2,9589
0,10	1,2390	1,23	0,1092
0,15	1,1920	*****	*****
0,20	1,1639	*****	*****
0,25	1,1448	*****	*****
0,30	1,1308	*****	*****



Tabla 4-4: Datos para la construcción de la curva de longitud de transición para la relación  $D/d = 1,2$  de un árbol sometido a flexión.

RELACION $r/d$	LONGITUD DE TRANSICIÓN $L/D$
<b>0,01</b>	<b>0,833</b>
<b>0,05</b>	<b>0,72</b>
<b>0,10</b>	<b>0,68</b>
<b>0,15</b>	<b>0,65</b>
<b>0,20</b>	<b>0,63</b>
<b>0,25</b>	<b>0,62</b>
<b>0,30</b>	<b>0,59</b>

Tabla 4-5: Datos para la construcción de la curva de longitud de transición para la relación  $D/d = 1,05$  de un árbol sometido a flexión.

RELACION $r/d$	LONGITUD DE TRANSICIÓN $L/D$
<b>0,01</b>	<b>0,53</b>
<b>0,05</b>	<b>0,50</b>
<b>0,10</b>	<b>0,49</b>
<b>0,15</b>	<b>0,48</b>
<b>0,20</b>	<b>0,47</b>
<b>0,25</b>	<b>0,47</b>
<b>0,30</b>	<b>0,47</b>

Tabla 4-6: Datos para la construcción de la curva de longitud de transición para la relación  $D/d = 1,01$  de un árbol sometido a flexión.

<b>RELACIÓN r/d</b>	<b>LONGITUD DE TRANSICIÓN L/D</b>
<b>0,01</b>	<b>0,3</b>
<b>0,05</b>	<b>0,29</b>
<b>0,10</b>	<b>0,29</b>
<b>0,15</b>	<b>0,29</b>
<b>0,20</b>	<b>0,29</b>
<b>0,25</b>	<b>0,29</b>
<b>0,30</b>	<b>0,29</b>

## 4.2 Análisis de resultados

Los resultados obtenidos en este estudio para las diferentes relaciones geométricas utilizadas, se presentan en tablas y gráficos.

En los gráficos 4-1, 4-2 y 4-3 se contrastan las curvas del FTCE en función de la relación  $r/d$  que se encuentran en la referencia [8] (Pilkey), con las obtenidas en esta investigación (MEF), para las relaciones  $D/d$  igual a 1,2; 1,05 y 1,01 respectivamente. En forma general, puede decirse que el comportamiento o tendencia de los valores del FTCE es similar en ambas curvas para cada una de las relaciones estudiadas, encontrándose que la diferencia porcentual mayor entre ellas es igual a 7,52, la cual ocurre para la relación  $D/d = 1,2$  en  $r/d = 0,03$  (ver tabla 4.1). También puede observarse que tan sólo en el rango comprendido entre  $0,21 < r/d < 0,3$ , para la relación  $D/d = 1,2$  la curva referenciada en [8] está por encima de la encontrada en este trabajo.

Respecto a los gráficos 4-2 y 4-3 es importante reseñar que el rango de estudio de las curvas obtenidas en este trabajo para las relaciones  $D/d$  igual a 1,05 y 1,01 se incrementó hasta  $r/d = 0,3$ ; rango que para las curvas respectivas en la referencia [8] sólo va desde cero hasta  $r/d = 0,1$ .

En el gráfico N° 4-4 se muestran las tres curvas del FTCE en función de  $r/d$  para longitudes semi-infinitas obtenidas en este trabajo para las relaciones  $D/d$  igual a 1,2; 1,05 y 1,01. En el mismo se observa claramente que para toda relación  $D/d$  el FTCE aumenta a medida que la relación  $r/d$  se hace más pequeña; así mismo, para todo  $r/d$  el FTCE aumenta al aumentar la relación  $D/d$ .

Los gráficos 4-5, 4-6 y 4-7 muestran la longitud de transición en función de  $r/d$  para las relaciones  $D/d$  igual a 1,2; 1,05 y 1,01 respectivamente. Al agrupar estas tres curvas en un solo gráfico (gráfico 4.8) se puede observar claramente que a mayor  $D/d$

mayor es la longitud de transición y que la misma disminuye a medida que aumenta la relación  $r/d$  para las relaciones  $D/d$  igual a 1,2 y 1,05, ya que para la relación  $D/d = 1,01$  la longitud de transición disminuye tan sólo en el intervalo que va desde  $r/d = 0$  hasta  $r/d = 0,05$ , y a partir de este valor hasta  $r/d = 0,3$ , la misma permanece constante.

En los gráficos 4-9, 4-10 y 4-11 se muestran las curvas del FTCE en función de  $r/d$  correspondientes a las relaciones  $D/d$  igual a 1,2; 1,05 y 1,01 respectivamente, y en cada una de ellas se encuentra la curva correspondiente al elemento considerado largo o semi-infinito y otras curvas para la misma relación  $D/d$  pero para relaciones  $L/D$  menores que la longitud de transición; es decir, curvas para elementos cortos. En cada una de ellas puede apreciarse que a medida que disminuye la relación  $L/D$ , el FTCE experimenta un aumento en su valor, aumento que se hace más notorio a medida que  $D/d$  también aumenta.

El incremento en el factor teórico de concentración de esfuerzo se debe a que las, líneas de fuerza originadas como consecuencia de la aplicación de una carga externa y que se desplazan de un extremo a otro del elemento, deben reordenarse al aproximarse al cambio de sección. Dicho reordenamiento ocurre de manera gradual cuando las líneas cuentan con el espacio necesario para tal fin, condición esta que se ve favorecida para piezas largas o semi infinitas; sin embargo cuando la pieza es corta se reduce el espacio para el mencionado reordenamiento por lo que las líneas se distorsionan y agrupan en mayor medida en la zona próxima al entalle, incrementando por ende los valores de  $K_t$ . Vale destacar que la magnitud de  $K_t$  se incrementó hasta en un 33,79%, como consecuencia directa de la reducción en la relación de la longitud, esto si comparamos la curva  $L/D$  menor ( $L/D = 0,3$ ) y la semi infinita ( $L/D = 6$ ) para la relación  $D/d = 1,2$

### 4.3 Conclusiones

La comparación de las curvas obtenidas en este trabajo para longitudes semi-infinitas con las presentadas en la referencia [8], nos permite interpretar, debido a su gran similitud, que estas últimas también fueron realizadas para longitudes semi-infinitas.

Las pequeñas diferencias porcentuales existentes entre las curvas obtenidas en este trabajo para longitudes semi-infinitas y las referenciadas en [8] pueden ser atribuidas a la diferencia entre los métodos utilizados para su obtención en cada caso.

La similitud entre las curvas ya expresada en 1, es indicio cierto de la validez del método utilizado en el presente trabajo.

Las curvas que dan la longitud de transición en función de la relación  $r/d$  para cada una de las relaciones  $D/d$  estudiadas representan un valioso aporte a la mecánica estructural y al diseño de elementos de máquinas, y obligan en lo adelante, a investigar con sumo cuidado si el elemento a diseñar puede considerarse semi-infinito o es un elemento corto, para entonces determinar su FTCE en la gráfica correspondiente.

Indudablemente que la conclusión más importante que nos deja la presente investigación es el hecho de que, sin lugar a dudas, la longitud del elemento a estudiar desempeña un papel muy importante en la consecución del factor teórico de concentración de esfuerzo.

En función de los distintos parámetros adimensionales utilizados, podemos decir que el FTCE, para todo  $r/d$  aumenta al aumentar  $D/d$ ; para todo  $D/d$  disminuye al aumentar  $r/d$  y que para todo  $r/d$  y  $D/d$  aumenta al disminuir  $L/D$ .

#### **4.4 Recomendaciones**

Realizar el mismo estudio con otros tipos de carga.

Realizar este mismo estudio para elementos mecánicos anisotrópicos.

Utilizar los resultados de esta investigación para realizar cálculos de diseño mecánicos, ya que los nuevos factores de concentración de esfuerzo influyen en la vida útil de las piezas.

Mencionar los trabajos realizados con anticipación en el centro de métodos numéricos en ingeniería.

## BIBLIOGRAFÍA

[1]. Popov E., **“Introducción a la Mecánica de Sólidos”**, Limusa S.A, 4ta Edición, México (1993).

[2]. Shigley J. y Mischke Ch., **“Diseño en Ingeniería Mecánica”**, McGraw-Hill, 4ta edición, México (1990).

[3]. Faires V., **“Diseño de Elementos de Máquinas”**, Limusa Noriega Editores., México (1998).

[4]. Beer F. y Johnston E., **“Mecánica de Materiales”**, McGrawHill, 2da Edición, Colombia (1995).

[5] Timoshenko G., **“Mecánica de Materiales”**, Iberoamérica, 4da Edición, México (1999).

[6] Hibbeler R., **“Mecánica de Materiales”**. , Prentice Hall 3ª edición, México (1998)

[7] Peterson, R. E; **“Stress Concentration Factors”**, John Wiley and Sons, INC; Nueva York, 1974.

[8]. Pilkey W., **“Peterson’s Stress Concentration Factors”**, A Wiley-interscience Publication, 2da Edicion. New York 1997.

[9] Fuentes L., **“Determinación del factor de concentración de esfuerzo en una placa corta rectangular, con filetes de hombro de relación  $D/d=1,05$  sometida a flexión”**, Trabajo de grado. Departamento de Mecánica.

Escuela de Ingeniería y Ciencias Aplicadas. UDO, Puerto la Cruz - Venezuela (2000).

[10]. MORILLO C., **“Estudio de la influencia de las condiciones de borde sobre el factor teórico de concentración de esfuerzo en placas planas con ranuras tipo “u” opuestas y en placas planas con filetes de hombros salientes, sometidas a tracción”**, Trabajo de grado. Departamento de Mecánica. Escuela de Ingeniería y Ciencias Aplicadas. UDO, Puerto la Cruz – Venezuela, Marzo (2001).

[11]. Mogollón Y., **“Obtención del factor de concentración de esfuerzo en placas cortas con filetes de hombros sometidas a flexión con una relación  $D/d=2$ ”**, Trabajo de grado. Departamento de Mecánica. Escuela de Ingeniería y Ciencias Aplicadas. UDO, Puerto la Cruz - Venezuela (1999).

[12] **Troyani, N –Sterlacci, G- Gomes, C.** “Simultaneous Considerations of Length and Boundary Conditions on Theoretical Stress Concentration factors” **Aceptado para la publicación en el internacional journal of fatigue, 2003**

[13] **Troyani, N –Sterlacci, G- Gomes, C.** “ Theoretical Stress Concentration factor for Short Rectangular plates With Centered Circular Holes” **Aceptado para la publicación en el journal of Mechacical Desing, ASME 2001**

[14] **Troyani, N.- Marin, A. – Garcia, H – Rodriguez, F – Gomes, C.** “ Theoretical Stress Concentration factor for Short Rectangular Plates Subjected to uniform tension” **Aceptado para publicación en el Journal Strein analysis. 2003**



[15]. Eugene A. Avallone y Theodore Baumister III. , **“Manual del Ingeniero Mecanico Marks”** ”, tomo1 McGrawHill, 9<sup>na</sup> Edición, Mexico.

[16]. Zienkiewicz O., **“El Método de los Elementos Finitos”**, Reverté S.A., España (1980).

[17]. Desai & Abel., **“Introduction to the Finite Element Method”**, Van Nostrand Reinhold Company, (1972).

## APÉNDICE A

(TABLAS DONDE SE PRESENTAN LAS DIFERENCIAS PORCENTUALES DE LOS VALORES DE  $K_t$  ENTRE LONGITUDES FINITAS Y SEMI-INFINITAS)

Tabla A1 Donde se presentan los valores del  $K_t$  para  
una relación de  $L/D = 0.8$  y  $D/d = 1,2$

$r/d$	$K_t$	Esfuerzo Máximo
0,01	3,769	65,121
0,02	2,905	50,195
0,03	2,516	43,475
0,04	2,283	39,455
0,05	2,123	36,693
0,06	2,006	34,663
0,07	1,914	33,077
0,10	1,727	29,848
0,15	1,553	26,847
0,20	1,452	25,089
0,25	1,383	23,910
0,30	1,334	23,051

Tabla A2 Donde se presentan los valores del Kt para  
una relación de  $L/D = 0.6$  y  $D/d = 1,2$

<b>r/d</b>	<b>Kt</b>	<b>Esfuerzo Máximo</b>
0,01	3,964	68,501
0,02	3,045	52,625
0,03	2,632	45,479
0,04	2,383	41,183
0,05	2,212	38,230
0,06	2,085	36,039
0,07	1,987	34,331
0,10	1,783	30,822
0,15	1,595	27,571
0,20	1,486	25,679
0,25	1,413	24,414
0,30	1,359	23,493

Tabla A3 Donde se presentan los valores del  $K_t$  para  
una relación de  $L/D = 0.4$  y  $D/d = 1,2$

$r/d$	$K_t$	Esfuerzo Máximo
0,01	4,643	80,225
0,02	3,538	61,143
0,03	3,040	52,524
0,04	2,738	47,309
0,05	2,529	43,701
0,06	2,373	41,004
0,07	2,250	38,883
0,10	1,994	34,467
0,15	1,758	30,386
0,20	1,624	28,068
0,25	1,535	26,536
0,30	1,471	25,421

Tabla A4 Donde se presentan los valores del  $K_t$  para  
una relación de  $L/D = 0.3$  y  $D/d = 1,2$

<b>r/d</b>	<b><math>K_t</math></b>	<b>Esfuerzo Máximo</b>
0,01	4,943	85,132
0,02	3,757	64,711
0,03	3,222	55,497
0,04	2,898	49,908
0,05	2,673	46,034
0,06	2,504	43,132
0,07	2,371	40,843
0,10	2,093	36,055
0,15	1,837	31,647
0,20	1,693	29,169
0,25	1,599	27,539
0,30	1,530	26,357

Tabla A5 Diferencia porcentual entre validación y curvas cortas del factor teórico de concentración de esfuerzo para la relación  $D/d = 1,2$

r/d	L/D			
	6 y 0,8	6 y 0,6	6 y 0,4	6 y 0,3
0,01	2,0065	7,3010	25,6657	33,7935
0,02	1,8939	6,8267	24,1179	31,7957
0,03	1,7530	6,4433	22,9321	30,3204
0,04	1,6698	6,1226	21,9084	29,0313
0,05	1,5526	5,8064	20,9481	27,8267
0,06	1,4873	5,5160	20,0527	26,7011
0,07	1,3978	5,2420	19,1962	25,6190
0,10	1,1762	4,4778	16,8333	22,6207
0,15	0,9437	3,6659	14,2502	19,3854
0,20	0,7388	3,1078	12,7002	17,5087
0,25	0,6948	2,8174	11,7540	16,3620
0,30	0,4707	2,3972	10,8006	15,2606

Tabla A6 Donde se presentan los valores del Kt para  
una relación de  $L/D = 0.6$  y  $D/d = 1,05$

<b>r/d</b>	<b>Kt</b>	<b>Esfuerzo Máximo</b>
0,01	2,665	30,851
0,02	2,158	24,986
0,03	1,932	22,369
0,04	1,797	20,806
0,05	1,705	19,738
0,06	1,637	18,951
0,07	1,584	18,338
0,10	1,476	17,091
0,15	1,375	15,922
0,20	1,315	15,230
0,25	1,275	14,760
0,30	1,245	14,413

Tabla A7 Donde se presentan los valores del Kt para  
una relación de  $L/D = 0.4$  y  $D/d = 1,05$

<b>r/d</b>	<b>Kt</b>	<b>Esfuerzo Máximo</b>
0,01	2,736	31,676
0,02	2,213	25,621
0,03	1,979	22,911
0,04	1,839	21,294
0,05	1,744	20,190
0,06	1,673	19,376
0,07	1,619	18,744
0,10	1,508	17,457
0,15	1,403	16,251
0,20	1,342	15,535
0,25	1,299	15,047
0,30	1,269	14,691



Tabla A8 Donde se presentan los valores del  $K_t$  para  
una relación de  $L/D = 0.3$  y  $D/d = 1,05$

$r/d$	$K_t$	Esfuerzo Máximo
0,01	2,823	32,677
0,02	2,280	26,394
0,03	2,036	23,573
0,04	1,891	21,893
0,05	1,792	20,749
0,06	1,719	19,904
0,07	1,662	19,248
0,10	1,547	17,916
0,15	1,440	16,668
0,20	1,376	15,928
0,25	1,332	15,423
0,30	1,300	15,055

Tabla A9 diferencia porcentual entre validación y curvas cortas del factor teórico de concentración de esfuerzo para la relación  $D/d = 1,05$

r/d	L/D		
	6 y 0,6	6 y 0,4	6 y 0,3
0,01	0,7774	3,4723	6,7422
0,02	0,6485	3,2064	6,3202
0,03	0,6117	3,0495	6,0270
0,04	0,5801	2,9391	5,8348
0,05	0,5604	2,8632	5,7112
0,06	0,5518	2,8068	5,6083
0,07	0,5317	2,7575	5,5205
0,10	0,4998	2,6520	5,3510
0,15	0,4669	2,5429	5,1741
0,20	0,4551	2,4668	5,0590
0,25	0,4423	2,3953	4,9540
0,30	0,4250	2,3620	4,8982

Tabla A8 Donde se presentan los valores del Kt para  
una relación de  $L/D = 0.4$  y  $D/d = 1,01$

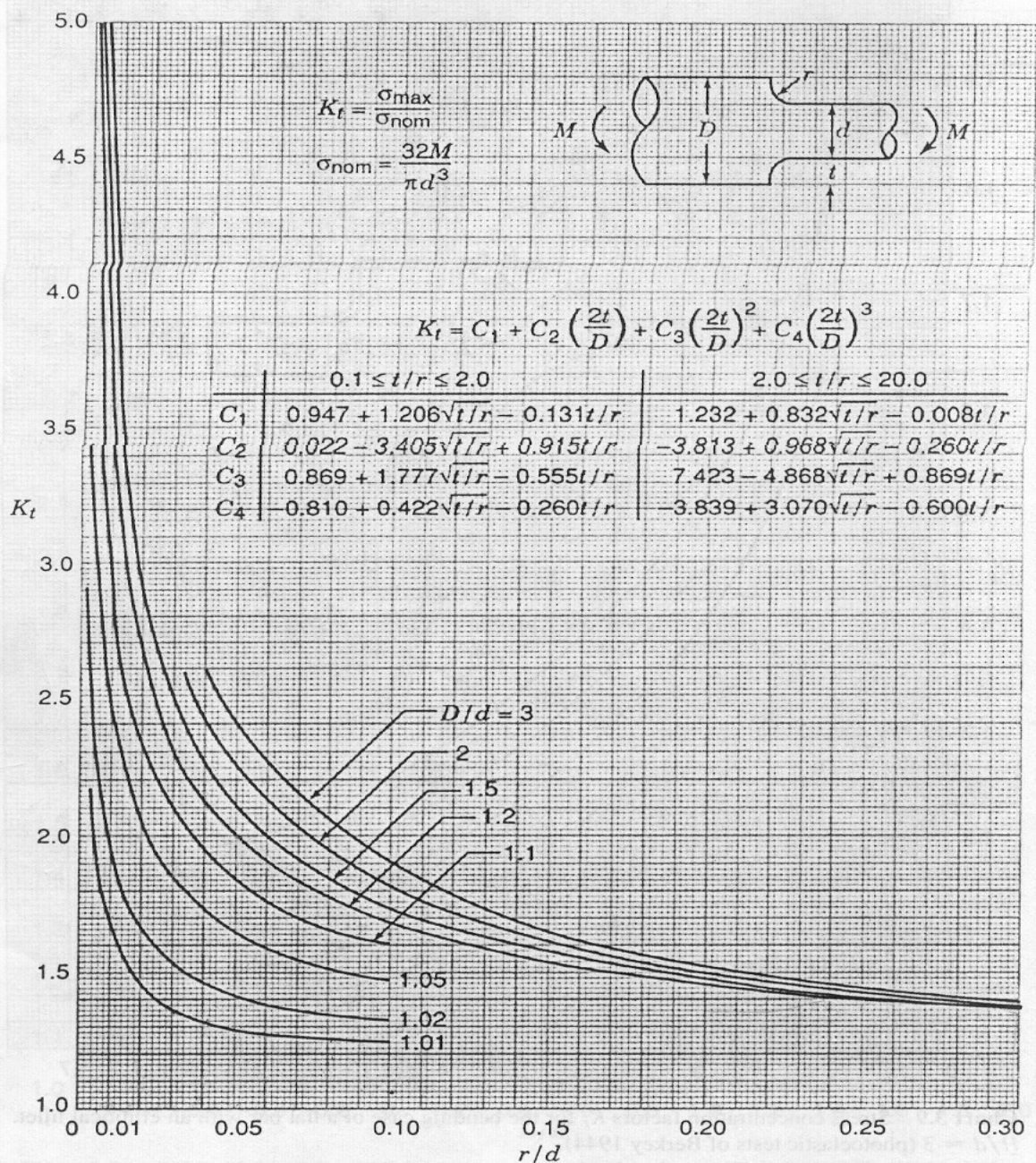
<b>r/d</b>	<b>Kt</b>	<b>Esfuerzo Máximo</b>
0,01	1,803	18,574
0,02	1,563	16,107
0,03	1,457	15,014
0,04	1,394	14,361
0,05	1,351	13,917
0,06	1,319	13,589
0,07	1,294	13,334
0,10	1,244	12,814
0,15	1,196	12,327
0,20	1,168	12,037
0,25	1,149	11,840
0,30	1,135	11,964

Tabla A9 Diferencia porcentual entre validación y curvas cortas del factor teórico de concentración de esfuerzo para la relación  $D/d = 1,05$

r/d	L/D
	6 y 0,1
0,01	0,438
0,02	0,430
0,03	0,441
0,04	0,419
0,05	0,425
0,06	0,413
0,07	0,421
0,10	0,415
0,15	0,407
0,20	0,408
0,25	0,415
0,30	0,403

## APÉNDICE B

( Graficas del texto guia)



**Chart 3.10** Stress concentration factors  $K_t$  for bending of a stepped bar of circular cross section with a shoulder fillet (based on photoelastic tests of Leven and Hartman 1951; Wilson and White 1973).

