



UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

POLÍTROPAS RADIANTES EN SIMETRÍA ESFÉRICA
(Modalidad: Tesis de Grado)

ANDRÉS ALEJANDRO DOSIL RIVAS

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

CUMANÁ, 31 DE ENERO DE 2020



UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

POLÍTROPAS RADIANTES EN SIMETRÍA ESFÉRICA
(Modalidad: Tesis de Grado)

ANDRÉS ALEJANDRO DOSIL RIVAS

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA
OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN FÍSICA

CUMANÁ, 31 DE ENERO DE 2020

POLÍTROPAS RADIANTES EN SIMETRÍA ESFÉRICA

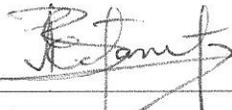
APROBADO POR:



Dr. Luis Castillo Brito
Asesor



Dr. Luis Araque Lameda
Jurado Principal



Dr. Ángel Betancourt Tineo
Jurado Principal

ÍNDICE

DEDICATORIA	IV
AGRADECIMIENTOS	V
RESUMEN	VI
INTRODUCCIÓN	1
1. ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN	5
1.1. La métrica de Bondi	7
1.2. El tensor de energía–momento	10
1.3. Ecuaciones de campo	15
2. ECUACIONES CINEMÁTICAS Y DINÁMICAS	19
2.1. Variables cinemáticas	19
2.2. Ecuaciones de conservación	23
3. ACOPLAMIENTO EN LA SUPERFICIE	26
3.1. Condiciones de acoplamiento	26
3.2. Ecuaciones en la superficie	28
4. POLÍTROPAS RADIANTES	32
4.1. Ecuación de estado Polítropa	32
4.2. Desarrollo hacia el origen	35
4.3. Solución estática	42
5. MODELO ADIABÁTICO	44
5.1. Ecuaciones cerca del origen	44
5.2. Desarrollo cerca de la superficie	46
CONCLUSIONES	49
BIBLIOGRAFÍA	51
HOJA DE METADATOS	53

A MIS PADRES

AGRADECIMIENTOS

Quiero hacer un merecido reconocimiento al Prof. Luis Castillo, cuya dedicación hizo posible la culminación de este trabajo. Agradezco especialmente el haberme brindado su apoyo constante, su orientación y su experiencia. ¡Muchas gracias!

RESUMEN

En el marco de la Teoría de la Relatividad General, se estudia la evolución de una distribución esférica de fluido radiante, la cual satisface una ecuación de estado polítropa. Se plantean las ecuaciones de campo de Einstein utilizando el esquema de Bondi, donde se expresan las variables físicas en términos de la velocidad de un observador comóvil con el fluido. Además, se determinan las expresiones de las variables cinemáticas y las ecuaciones de conservación del tensor de energía-momento. La frontera de la distribución material se acopla suavemente con la región exterior correspondiente al fluido nulo, mediante las condiciones de Darmois-Lichnerowicz que en este caso se reducen a la continuidad de la primera forma fundamental y de uno de los coeficientes de espín de Newman-Penrose. Una vez garantizado el acoplamiento, se encuentra una ecuación de Riccati para la velocidad del observador comóvil en la superficie cuando el fluido es libre de expansión. Seguidamente, para un caso no polítropo, adiabático y libre de deformaciones, se demuestra que la densidad superficial es proporcional a la densidad promedio. Posteriormente, la regularidad de las variables físicas en el origen se garantiza por medio de un desarrollo en series de potencias de la coordenada radial. De esta forma, se encuentra una ecuación de conservación, en función de las variables físicas, que generaliza la expresión presentada por Alvarado. Al aplicar la ecuación de estado polítropa en la implementación del desarrollo hacia el origen, se demuestra que la ecuación de conservación de una polítropa radiante coincide con la ecuación de conservación asociada a una esfera radiante en el límite post-cuasiestático. Luego, se integra la ecuación de equilibrio hidrodinámico para una polítropa en el caso estático. Finalmente, se plantea un modelo polítropo adiabático donde se estudió el comportamiento del sistema a través de desarrollos en series de potencias en torno al origen y a la superficie. En este caso se demuestra que la ausencia de flujo de radiación conduce a un comportamiento estático de la polítropa.

INTRODUCCIÓN

La Teoría de la Relatividad General es una teoría geométrica de la gravitación, donde el espacio y el tiempo son presentados como un único ente dinámico, denominado espaciotiempo cuatridimensional, desprovisto de rigidez, capaz de deformarse y tomar partido en los acontecimientos físicos. En este contexto, las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espaciotiempo y el contenido energético material. De acuerdo con el Principio de Equivalencia, un sistema de referencia no inercial es localmente equivalente a un campo gravitacional. De este modo la gravedad es explicada no como una fuerza física sino como un artificio del sistema de referencia, a diferencia de la teoría newtoniana, donde la gravedad se define como una fuerza que actúa a distancia.

En la actualidad, la Relatividad General ha superado con extraordinaria precisión todas las pruebas experimentales necesarias para su verificación, convirtiéndose así en la teoría de la gravitación por excelencia. Uno de los campos que se ha enriquecido desde que Albert Einstein publicara su Teoría de la Relatividad General en 1915 es el estudio de distribuciones estelares autogravitantes. Destacando en particular, el estudio de las estrellas compactas: enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros, cuyo origen y estructura se debe al colapso gravitacional.

La teoría de estructuras estelares, desde sus inicios, ha manejado modelos de distribuciones polítropas, caracterizados por su simplicidad y versatilidad. La polítropa representa una distribución de materia cuya entropía por partícula y composición química permanecen constantes. En el marco de la gravedad newtoniana, la ecuación de estado polítropa conduce a la ecuación de Lane–Emden, cuyas soluciones aportan información acerca de las propiedades físicas relevantes de

la distribución, como la densidad y presión centrales, la energía potencial, la masa, el radio de la estrella, entre otras [1].

Uno de los aspectos más llamativos de las distribuciones polítropas es la variedad de situaciones físicas que pueden modelarse variando los parámetros de la ecuación de estado [2]. Es por ello que la ecuación de estado polítropa ha llamado la atención en el estudio de interiores estelares en Relatividad General [3, 4], donde se debe suministrar información adicional a las ecuaciones de campo de Einstein a fin de resolver el sistema. El presente trabajo se enfocará en el colapso gravitacional de polítropas radiantes.

Una distribución estelar autogravitante mantiene su equilibrio hidrodinámico entre el campo gravitacional, que comprime el fluido hacia el centro de la estrella y la presión de radiación, debida a las reacciones de fusión termonuclear que tienen lugar en el interior de la estrella impulsando el fluido hacia el exterior. Esta compensación conduce a una ley de estabilidad dinámica que permite que la estrella, aún sometida a su propio campo gravitacional, pueda evolucionar durante millones de años.

El colapso gravitacional ocurre cuando la presión no es capaz de compensar la fuerza gravitacional, por lo que se pierde el equilibrio hidrodinámico y la estrella sucumbe sobre si misma por efecto de su propia gravedad. En general, el colapso gravitacional tiene cuatro posibles estados finales [5]: el primero es la detención del proceso para formar enanas blancas o estrellas de neutrones. En el segundo, si la evolución de la distribución no es estable, producto de una inestabilidad en su núcleo durante el colapso, explota generando una supernova. Otros cuerpos celestes con masas seis veces mayores a la del Sol terminan formando agujeros negros, con materia y radiación saliente durante el colapso, este corresponde al tercer estado. Mientras que el último estado corresponde a la formación de singularidades desnudas.

La principal aplicación de la ecuación de estado polítropa en la teoría de estructuras estelares consiste en modelar el comportamiento de enanas blancas y estrellas de neutrones [3]. Durante el proceso de formación de una enana blanca, la estrella colapsa en una estructura formada mayormente por núcleos de carbono, nitrógeno y oxígeno rodeados por una nube electrónica; la presión que mantiene la estrella no proviene de reacciones nucleares, sino que está asociada a la repulsión fermiónica, característica de los electrones, lo que origina que estos tengan cierta energía cinética. Una estrella de neutrones, por su parte, se compactifica incluso más que una enana blanca, de modo que los electrones son forzados a colapsar en el núcleo y reaccionan con los protones para formar neutrones; en este caso, la presión fermiónica se asocia a neutrones en lugar de electrones. Puesto que la ecuación de estado polítropa puede modelar un gas completamente degenerado, ya sea de electrones o neutrones, ha sido utilizada como base para el estudio de estrellas compactas tanto en esquemas numéricos [3], como analíticos [6].

Considerando la utilidad de la ecuación de estado polítropa, nos proponemos estudiar analíticamente, a través del software Maple, la evolución de una distribución polítropa, esféricamente simétrica, que pierde energía a través de un flujo de radiación de partículas sin masa, asociado a fotones y/o neutrinos; tomando como referencia los trabajos de Bondi [7], Herrera, Jiménez y Ruggeri [8], Siebel, Font y Papadopoulos [3] y Barreto, Castillo y Barrios [9, 10]. Para ello, se plantea la siguiente organización: en el capítulo uno se determinan las ecuaciones de campo de Einstein para una esfera de fluido radiante utilizando el esquema euleriano propuesto por Bondi, correspondiente a la transformación de un sistema localmente minkowskiano al sistema de radiación, permitiendo expresar la cuadrivelocidad en función de la velocidad de un observador comóvil. Una vez planteadas las ecuaciones de campo, en el segundo capítulo se obtienen las expresiones de las variables cinemáticas en coordenadas de radiación,

que serán utilizadas para aportar información adicional al sistema, seguidamente se escriben las ecuaciones dinámicas desprendidas de la ley de conservación de la materia y la energía.

En el tercer capítulo se estudian las condiciones de acoplamiento sobre la superficie que limita las dos regiones, la interior ocupada por el fluido y la exterior descrita por el espaciotiempo de Vaidya [11]. A partir de las condiciones de acoplamiento de Darmois–Lichnerowicz [12, 13], equivalentes a la continuidad de los coeficientes de espín de Newman–Penrose [14], se evita la aparición de comportamientos singulares de las variables físicas en la frontera. Posteriormente, en el capítulo cuatro se introduce la ecuación de estado polítropa y se garantiza la regularidad en el origen de la distribución mediante un desarrollo en serie de potencias de la coordenada radial, seguidamente se integra la ecuación de Tolman–Oppenheimer–Volkov considerando la ecuación de estado polítropa en el caso estático.

En el quinto capítulo se propone un modelo de polítropa adiabática, es decir, sin flujo de radiación. En este caso se analiza el comportamiento de la distribución utilizando desarrollos en serie de potencias cerca del origen y cerca de la superficie del fluido. Finalmente se presentan las conclusiones.

CAPÍTULO 1

ECUACIONES DE CAMPO DE EINSTEIN

En el contexto de la Teoría de la Relatividad General, las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espaciotiempo con la materia y la energía presente en el mismo. En otras palabras, estas ecuaciones permiten determinar las variables métricas a partir del contenido energético-material de tal forma que las soluciones definan espaciotiempos físicamente aceptables. Las ecuaciones de campo vienen dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci o escalar de curvatura, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, G es la constante de gravitación universal, c es la velocidad de la luz en el vacío y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento. $G_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ son tensores simétricos cuyos índices van de 0 a 3. Cabe destacar que el tensor de Einstein es la única combinación posible entre el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor métrico que comparte las mismas propiedades de conservación y simetría del tensor de energía-momento. Es común escribir la ecuación (1.1) en unidades geometrizadas, igualando la constante de gravitación universal y la velocidad de la luz a uno ($G = c = 1$), tal que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Leyendo la ecuación (1.2) de izquierda a derecha, expresa cómo el comportamiento

dinámico de los sistemas físicos depende de la curvatura del espaciotiempo. En cambio, leyendo de derecha a izquierda, es el contenido energético–material el que determina cómo el espaciotiempo se curva. En palabras de John Wheeler [16] “la materia le dice al espaciotiempo cómo curvarse y el espaciotiempo le dice a la materia cómo moverse”.

El escalar de Ricci o escalar de curvatura se obtiene de la contracción del tensor de Ricci con el tensor métrico

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

donde se ha omitido el símbolo de sumatoria de acuerdo al convenio de sumación propuesto por Einstein en 1916, según el cual, cuando se tienen índices iguales, se supone una suma desde 0 hasta 3 sobre dichos índices.

El tensor de energía–momento es el objeto matemático que contiene las contribuciones de todos los tipos de energía presentes en la distribución de materia. En particular, el tensor de energía–momento para un fluido radiante describe un medio material con densidad de energía y presión isotrópica en el que además existe un flujo radial de partículas sin masa asociado a fotones y/o neutrinos, el cual es característico de la evolución de estrellas masivas [15]. Este tensor se expresa

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu - p g_{\mu\nu} + \epsilon k_\mu k_\nu, \quad (1.4)$$

donde ρ es la densidad total de energía del fluido, p es la presión radial, en este caso todas las componentes de la presión son iguales a la presión radial, U_μ es la forma covariante de la cuadrivelocidad $U^\nu \equiv dx^\nu/ds$, ϵ corresponde al flujo de radiación y k_μ es un vector nulo ($k_\mu k^\mu = 0$).

Las expresiones (1.1–1.4) son ecuaciones tensoriales que no dependen de algún

sistema de coordenadas en particular, esto garantiza la validez de las mismas para todos los observadores posibles.

1.1. La métrica de Bondi

En un espacio riemanniano, se denomina métrica al elemento de línea ds^2 que conecta dos puntos infinitesimalmente próximos de un sistema de coordenadas x^μ , en el cual existe una relación entre la métrica y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que viene dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.5)$$

Se pueden escribir de forma explícita las ecuaciones de campo (1.2), partiendo de la métrica de Bondi [7] con simetría esférica, definida por

$$ds^2 = e^{2\beta} \left(\frac{V}{r} du^2 + 2du dr \right) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.6)$$

siendo β y V las variables métricas dependientes de u y r . Aquí, $u = x^0$ es una coordenada tipo tiempo, $r = x^1$ es una coordenada nula ($g_{11} = 0$), $\theta = x^2$ y $\phi = x^3$ son las coordenadas angulares habituales. El correspondiente tensor métrico covariante es entonces

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{V}{r} e^{2\beta} & e^{2\beta} & 0 & 0 \\ e^{2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

cuyo determinante viene dado por

$$g = -e^{4\beta} r^4 \sin^2 \theta, \quad (1.8)$$

y, en forma contravariante, el tensor métrico se expresa como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ e^{-2\beta} & -\frac{V}{r}e^{-2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Para escribir las ecuaciones de campo de Einstein, en primer lugar se calculan los símbolos de Christoffel de segunda especie, definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\alpha\nu,\mu} + g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\mu\nu,\alpha}), \quad (1.10)$$

donde la coma como subíndice denota la derivada parcial con respecto a las coordenadas indicadas ($g_{\alpha\nu,\mu} \equiv \partial g_{\alpha\nu}/\partial x^{\mu}$). Los símbolos de Christoffel diferentes

de cero para la métrica (1.6) son

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= 2\beta_{,u} - \frac{1}{2r} \left(2\beta_{,r}V + V_{,r} - \frac{V}{r} \right), & \Gamma_{22}^1 &= -Ve^{-2\beta}, \\
\Gamma_{22}^0 &= re^{-2\beta}, & \Gamma_{33}^1 &= -Ve^{-2\beta} \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{33}^0 &= re^{-2\beta} \sin^2 \theta, & \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{V}{2r^2} \left(\frac{rV_{,u}}{V} - 2r\beta_{,u} + V_{,r} + 2\beta_{,r}V - \frac{V}{r} \right), & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2} \sin(2\theta), \\
\Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2r} \left(2\beta_{,r}V + V_{,r} - \frac{V}{r} \right), & \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{11}^1 &= 2\beta_{,r}, & \Gamma_{32}^3 &= \cot \theta.
\end{aligned}$$

Una vez obtenidos los símbolos de Christoffel, el siguiente paso consiste en determinar las componentes del tensor de Ricci en términos de las variables métricas; este tensor se construye utilizando los símbolos de Christoffel y sus derivadas de acuerdo a la expresión

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\alpha}^{\alpha}. \quad (1.11)$$

Por tanto, las componentes no nulas del tensor de Ricci están dadas por

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{2V\beta_{,ur}}{r} - \frac{VV_{,r}\beta_{,r}}{r^2} - \frac{V^2\beta_{,r}}{r^3} - \frac{\beta_{,rr}V^2}{r^2} - \frac{VV_{,rr}}{2r^2} - \frac{V_{,u} - 2\beta_{,u}V}{r^2}, \\
R_{01} &= 2\beta_{,ur} - \frac{2\beta_{,r}V_{,r} + 2\beta_{,rr}V + V_{,rr}}{2r} - \frac{V\beta_{,r}}{r^2}, \\
R_{11} &= -\frac{4\beta_{,r}}{r}, \\
R_{22} &= V_{,r}e^{-2\beta} - 1, \\
R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22}.
\end{aligned} \quad (1.12)$$

De esta forma, las ecuaciones de campo (1.2) quedan escritas como

$$\begin{aligned}
8\pi T_{00} &= \frac{V_{,u} - 2\beta_{,u}V}{r^2} - \frac{V}{r^3}(e^{2\beta} - V_{,r} + 2\beta_{,r}V), \\
8\pi T_{01} &= \frac{1}{r^2}(e^{2\beta} - V_{,r} + 2\beta_{,r}V), \\
8\pi T_{11} &= \frac{4\beta_{,r}}{r}, \\
8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 &= e^{-2\beta} \left\{ 2\beta_{,ur} - \frac{1}{2r^2} [rV_{,rr} - 2\beta_{,r}V + 2r(\beta_{,rr}V + \beta_{,r}V_{,r})] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Las expresiones (1.13) son la forma más general de las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica de Bondi con simetría esférica, dichas expresiones constituyen un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, de segundo orden, no lineales y acopladas. El próximo paso para estudiar la evolución de una distribución esférica de fluido radiante consiste en introducir las componentes del tensor de energía–momento, expresadas en coordenadas de radiación, en el lado izquierdo de (1.13).

1.2. El tensor de energía–momento

Con el propósito de darle un significado físico al tensor de energía–momento en coordenadas de radiación, siguiendo el esquema euleriano propuesto por Bondi [7], se introduce la métrica de Minkowski en coordenadas rectangulares, definida por

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1.14}$$

Hermann Minkowski presentó su métrica en 1908 [17], introduciendo por primera vez la noción de espaciotiempo y aportando así una descripción geométrica de

los fenómenos observados en la recién nacida Relatividad Especial de Albert Einstein, quien más adelante se inspiraría en la visión de Minkowski para expresar matemáticamente las ideas que dieron lugar a la Relatividad General.

La métrica de Minkowski define un espacio plano de cuatro dimensiones, donde todas las líneas geodésicas son rectas, siendo este el caso más sencillo de un espaciotiempo relativista. Cuando se consideran regiones pequeñas de un espaciotiempo general, donde las variaciones de curvatura son despreciables, la descripción de la física en dicha región se obtiene de la aproximación al espaciotiempo minkowskiano, como veremos enseguida.

De acuerdo al esquema de Bondi, en cada punto del espaciotiempo, se pueden definir las transformaciones locales del sistema de coordenadas de radiación al sistema minkowskiano, a través de [7]

$$\begin{aligned}
 dt &= e^{\beta} \left[\left(\frac{V}{r} \right)^{\frac{1}{2}} du + \left(\frac{r}{V} \right)^{\frac{1}{2}} dr \right], \\
 dx &= e^{\beta} \left(\frac{r}{V} \right)^{\frac{1}{2}} dr, \\
 dy &= r d\theta, \\
 dz &= r \operatorname{sen} \theta d\phi,
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

donde las variables métricas β y V se consideran constantes debido al carácter local de la transformación. Evidentemente, las coordenadas minkowskianas (1.15) satisfacen la métrica de Bondi (1.6), por medio de (1.14).

Para un observador comóvil con el fluido, moviéndose con velocidad ω respecto al sistema minkowskiano en la dirección de x , el contenido físico consiste en un fluido con densidad $\hat{\rho}$, presión isotropa \hat{p} , densidad de energía de radiación isotropa $3\hat{\sigma}$ con

presión de radiación $\hat{\sigma}$ y densidad de energía no polarizada $\hat{\epsilon}$ viajando en la dirección radial. El tensor de energía–momento covariante visto por este observador comóvil es

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \hat{\rho} + 3\hat{\sigma} + \hat{\epsilon} & -\hat{\epsilon} & 0 & 0 \\ -\hat{\epsilon} & \hat{p} + \hat{\sigma} + \hat{\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{p} + \hat{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{p} + \hat{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Las componentes de este tensor de energía–momento comóvil se pueden expresar en el sistema de referencia minkowskiano mediante una transformación de Lorentz de la forma

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} \hat{T}_{\alpha\beta}, \quad (1.17)$$

donde Λ_{μ}^{α} es el tensor de transformación de Lorentz, definido por

$$\Lambda_{\mu}^{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda\omega & 0 & 0 \\ -\lambda\omega & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

siendo λ , el factor de Lorentz: $\lambda = (1 - \omega^2/c^2)^{-1/2}$, que se escribe en unidades geometrizadas como

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}}. \quad (1.19)$$

De la transformación (1.17), se obtienen las siguientes componentes en el sistema

minkowskiano

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{00} &= \frac{\rho + p\omega^2}{1 - \omega^2} + \epsilon, \\
\tilde{T}_{01} &= \frac{\rho - p\omega}{1 + \omega}, \\
\tilde{T}_{11} &= \left(\frac{1 - \omega}{1 + \omega} \right) (\rho + p), \\
\tilde{T}_2^2 &= \tilde{T}_3^3 = -p,
\end{aligned} \tag{1.20}$$

donde $\rho = \hat{\rho} + 3\hat{\sigma}$, $p = \hat{p} + \hat{\sigma}$ y $\epsilon = \hat{\epsilon}(1 + \omega)/(1 - \omega)$. Ahora se determinan las componentes del tensor de energía-momento en coordenadas de Bondi a través de la ley de transformación de los tensores covariantes:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{T}_{\alpha\beta}. \tag{1.21}$$

Resumiendo, el esquema de Bondi consiste en introducir los efectos de la velocidad del observador comóvil sobre las variables físicas haciendo una transformación del sistema comóvil al minkowskiano, para luego introducir los efectos de los potenciales gravitacionales mediante una transformación del sistema minkowskiano al de radiación. Las componentes covariantes del tensor de energía-momento se pueden escribir en coordenadas de Bondi como sigue

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{e^{2\beta}V}{r} \left(\frac{\rho + p\omega^2}{1 - \omega^2} + \epsilon \right), \\
T_{01} &= e^{2\beta} \left(\frac{\rho - p\omega}{1 + \omega} \right), \\
T_{11} &= \frac{e^{2\beta}r}{V} \left(\frac{1 - \omega}{1 + \omega} \right) (\rho + p), \\
T_{22} &= \frac{T_{33}}{\text{sen}^2 \theta} = r^2 p.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

En forma contravariante,

$$\begin{aligned}
 T^{00} &= \frac{e^{-2\beta} r}{V} \left(\frac{1-\omega}{1+\omega} \right) (\rho + p), \\
 T^{01} &= e^{-2\beta} \left(\frac{\rho\omega - p}{1+\omega} \right), \\
 T^{11} &= \frac{e^{-2\beta} V}{r} \left(\frac{\rho\omega^2 + p}{1-\omega^2} + \epsilon \right), \\
 T^{22} &= \text{sen}^2 \theta T^{33} = \frac{p}{r^2}.
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

En el sistema comóvil, la cuadrivelocidad viene dada por

$$\hat{U}_\mu = (1, 0, 0, 0), \tag{1.24}$$

transformando esta expresión al sistema minkowskiano, se tiene

$$\tilde{U}_\mu = \Lambda_\mu^\alpha \hat{U}_\alpha = \lambda(1, -\omega, 0, 0), \tag{1.25}$$

luego, la transformación al sistema de radiación se obtiene a partir de

$$U_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \tilde{U}_\alpha, \tag{1.26}$$

de esta forma se determinan explícitamente las componentes de la cuadrivelocidad en coordenadas de radiación, cuyas expresiones covariantes y contravariantes son las siguientes

$$U_\mu = e^\beta \left[\sqrt{\frac{V}{r(1-\omega^2)}}, \sqrt{\frac{r}{V} \left(\frac{1-\omega}{1+\omega} \right)}, 0, 0 \right], \tag{1.27}$$

$$U^\mu = e^{-\beta} \left[\sqrt{\frac{r}{V}} \left(\frac{1-\omega}{1+\omega} \right), \omega \sqrt{\frac{V}{r(1-\omega^2)}}, 0, 0 \right], \quad (1.28)$$

y las componentes del vector nulo, en coordenadas de radiación de Bondi, vienen dadas por [18]

$$k_\mu = \left(e^\beta \sqrt{\frac{V}{r}}, 0, 0, 0 \right), \quad (1.29)$$

$$k^\mu = \left(0, e^{-\beta} \sqrt{\frac{V}{r}}, 0, 0 \right). \quad (1.30)$$

Como se mencionó anteriormente (1.15), la velocidad del observador comóvil se expresa en el sistema minkowskiano como

$$\omega = \frac{dx}{dt}, \quad (1.31)$$

esta expresión, en conjunto con las ecuaciones de transformación (1.15), permite definir la velocidad material en el sistema de coordenadas de radiación

$$v = \frac{V\omega}{r(1-\omega)} = \frac{U^1}{U^0}, \quad (1.32)$$

donde $v \equiv dr/du$. Este procedimiento permite escribir las ecuaciones de campo en términos de la velocidad del observador comóvil, como se verá enseguida.

1.3. Ecuaciones de campo

Antes de escribir las ecuaciones de campo, expresaremos la variable V en términos de la función de masa de Misner–Sharp [19], que en simetría esférica está bien definida

por medio de

$$V = e^{2\beta}(r - 2\tilde{m}), \quad (1.33)$$

donde \tilde{m} es una función de u y r que coincide con la masa de Schwarzschild en el caso estático.

Finalmente, introduciendo las componentes del tensor de energía–momento (1.22) en las expresiones (1.13) y utilizando (1.33), las ecuaciones de campo de Einstein se escriben como

$$\frac{\rho + p\omega^2}{1 - \omega^2} + \epsilon = \frac{1}{4\pi r} \left(\frac{\tilde{m}_{,r}}{r} - \frac{\tilde{m}_{,u}e^{-2\beta}}{r - 2\tilde{m}} \right), \quad (1.34)$$

$$\frac{\rho - p\omega}{1 + \omega} = \frac{\tilde{m}_{,r}}{4\pi r^2}, \quad (1.35)$$

$$\left(\frac{1 - \omega}{1 + \omega} \right) (\rho + p) = \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r} \right) \frac{\beta_{,r}}{2\pi r}, \quad (1.36)$$

$$p = -\frac{\beta_{,ur}e^{-2\beta}}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r} \right) \left(2\beta_{,rr} + 4\beta_{,r}^2 - \frac{\beta_{,r}}{r} \right) + \frac{3\beta_{,r}(1 - 2\tilde{m}_{,r}) - \tilde{m}_{,rr}}{8\pi r}. \quad (1.37)$$

Para una esfera de fluido radiante, las ecuaciones de campo de Einstein constituyen un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales con seis variables: $\tilde{m}(u, r)$, $\beta(u, r)$, $\rho(u, r)$, $p(u, r)$, $\omega(u, r)$, y $\epsilon(u, r)$. En el caso estático, donde $\omega = \epsilon = 0$ y todas las variables son independientes de la coordenada temporal, las ecuaciones de campo se reducen a un sistema de tres ecuaciones con cuatro variables: $\tilde{m}(r)$, $\beta(r)$, $\rho(r)$ y $p(r)$.

En el caso dinámico, se pueden definir las variables efectivas [8] por medio de

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho - p\omega}{1 + \omega}, \quad (1.38)$$

$$\tilde{p} = \frac{p - \rho\omega}{1 + \omega}, \quad (1.39)$$

siendo $\tilde{\rho}$ la densidad efectiva y \tilde{p} la presión efectiva, las cuales coinciden con las variables físicas ρ y p en el límite estático. Las ecuaciones de campo pueden reescribirse, en función de las variables efectivas, de la siguiente manera

$$\frac{\omega}{(1 - \omega)^2}(\tilde{\rho} + \tilde{p}) + \epsilon = -\frac{\tilde{m}_{,u}e^{-2\beta}}{4\pi r(r - 2\tilde{m})}, \quad (1.40)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{m}_{,r}}{4\pi r^2}, \quad (1.41)$$

$$\tilde{\rho} + \tilde{p} = \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r}\right) \frac{\beta_{,r}}{2\pi r}, \quad (1.42)$$

$$p = -\frac{\beta_{,ur}e^{-2\beta}}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r}\right) \left(2\beta_{,rr} + 4\beta_{,r}^2 - \frac{\beta_{,r}}{r}\right) + \frac{3\beta_{,r}(1 - 2\tilde{m}_{,r}) - \tilde{m}_{,rr}}{8\pi r}. \quad (1.43)$$

Si se conocen las variables métricas \tilde{m} y β , se determina de inmediato la densidad efectiva $\tilde{\rho}$, la presión efectiva \tilde{p} y la presión radial p utilizando las ecuaciones (1.41), (1.42) y (1.43), respectivamente. Luego, las variables físicas ρ , ω y ϵ , se obtienen por

medio de los siguientes despejes algebraicos

$$\rho = \tilde{\rho} + p - \tilde{p}, \quad (1.44)$$

$$\omega = \frac{\rho - \tilde{\rho}}{\tilde{\rho} + p} = \frac{p - \tilde{p}}{\tilde{\rho} + p}, \quad (1.45)$$

$$\epsilon = -\frac{\tilde{m}_{,u}e^{-2\beta}}{4\pi r(r - 2\tilde{m})} - \frac{\omega}{(1 - \omega)^2}(\tilde{\rho} + \tilde{p}). \quad (1.46)$$

En otras palabras, al conocer las variables métricas, las variables físicas quedan completamente determinadas a través de las ecuaciones de campo.

Por otro lado, la variación absoluta de la función de masa \tilde{m} con respecto a la coordenada temporal se expresa como

$$\dot{\tilde{m}} = \tilde{m}_{,u} + v \tilde{m}_{,r}, \quad (1.47)$$

donde el punto denota la derivada total con respecto a u ($\dot{\tilde{m}} \equiv d\tilde{m}/du$). Utilizando (1.32) y (1.34), escribimos esta expresión (1.47) de forma explícita como

$$\dot{\tilde{m}} = -4\pi r^2 e^{2\beta} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r}\right) \left(\frac{p\omega}{1 - \omega} + \epsilon\right). \quad (1.48)$$

Así se muestra cómo la presión radial y el flujo de radiación realizan un trabajo sobre una esfera comóvil con el fluido, cambiando su función de masa.

CAPÍTULO 2

ECUACIONES CINEMÁTICAS Y DINÁMICAS

2.1. Variables cinemáticas

Los observadores fundamentales en el espaciotiempo están caracterizados por medio de la cuadvirvelocidad U^μ y las curvas integrales $x^\mu = x^\mu(s)$ de ese campo vectorial corresponden a las líneas de mundo o geodésicas, las cuales representan la trayectoria más corta entre dos puntos; como es bien sabido, en el espacio euclidiano, las líneas geodésicas son siempre rectas, no así en espacios de Riemann con curvatura. Aparte de las líneas geodésicas, se puede caracterizar el fluido radiante a través de ciertos parámetros que describen el comportamiento cinemático de un elemento de volumen. Estos parámetros son conocidos como variables cinemáticas y se obtienen a partir de la descomposición irreducible de la derivada covariante de la cuadvirvelocidad en su forma covariante, esto es [16]

$$U_{\mu;\nu} = \frac{\Theta}{3}h_{\mu\nu} + a_\mu U_\nu + \sigma_{\mu\nu} + w_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde el punto y coma (;) representa la derivada covariante, Θ es el escalar de expansión, $h_{\mu\nu}$ es el tensor de proyección ortogonal a la cuadvirvelocidad y su contracción es igual a tres ($h^\mu_\mu = 3$), a_μ es la cuadvirvelocidad, $\sigma_{\mu\nu}$ es el tensor de deformaciones o cizalladura y $w_{\mu\nu}$ es el tensor de vorticidad. Estas cantidades

vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\Theta &= U^\mu_{;\mu}, \\
h_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu, \\
a_\mu &= U^\alpha U_{\mu;\alpha}, \\
\sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (h_\nu^\alpha U_{\mu;\alpha} + h_\mu^\alpha U_{\nu;\alpha}) - \frac{\Theta}{3} h_{\mu\nu}, \\
w_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (h_\nu^\alpha U_{\mu;\alpha} - h_\mu^\alpha U_{\nu;\alpha}),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

donde

$$a_\mu U^\mu = h_{\mu\nu} U^\mu = \sigma_{\mu\nu} U^\mu = w_{\mu\nu} U^\mu = 0, \tag{2.3}$$

mientras que sus invariantes se obtienen de las siguientes contracciones

$$\begin{aligned}
a^2 &= -a^\mu a_\mu, \\
\sigma^2 &= -\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \\
w^2 &= -\frac{1}{2} w^{\mu\nu} w_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

En general, los invariantes de las cantidades cinemáticas permiten caracterizar cualquier fluido en base a lo siguiente: la distribución de materia es libre de expansión cuando $\Theta = 0$, se considera inercial cuando $a = 0$, si $\sigma = 0$ se dice que el fluido es libre de cizalladura y solo puede expandirse o contraerse, si $w = 0$ se tiene un medio irrotacional. En este sentido, se puede resumir el significado físico de las variables cinemáticas como sigue

- Θ describe el cambio isótropo de volumen de los elementos de fluido.
- a_μ determina la diferencia entre la evolución de las líneas universales y la

evolución de las geodésicas.

- σ define la deformación de los elementos de fluido en las direcciones dadas por sus autovalores, sin variaciones de volumen.
- w determina la rotación de los elementos de fluido, a volumen constante, alrededor de un eje definido por sus autovalores.

Para la métrica de Bondi en coordenadas de radiación, las variables cinemáticas se expresan de manera explícita como se muestra a continuación.

El escalar de expansión puede escribirse como

$$\Theta = U^0 \tilde{\Theta}, \quad (2.5)$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta} = & \frac{1}{1 - \omega^2} \left[\frac{V\omega_{,r}}{r(1 - \omega)} - \omega_{,u} \right] - \frac{e^{2\beta}}{r} \left(\frac{\omega}{1 - \omega} \right) \left(\frac{\tilde{m}}{r} - \tilde{m}_{,r} \right) \\ & + 2v \left(\frac{1}{r} + \beta_{,r} \right) + \frac{\tilde{m}_{,u}}{r - 2\tilde{m}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

La cuadriaceleración y su invariante vienen dados por

$$a_\mu = a_1(-v, 1, 0, 0), \quad (2.7)$$

$$a = a_1 \sqrt{e^{-2\beta} + 2v \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r} \right)}, \quad (2.8)$$

donde

$$a_1 = \frac{1}{1+\omega} \left\{ \frac{1}{r-2\tilde{m}} \left[\frac{r(1-\omega)\tilde{m}_{,u}}{V} - \left(\frac{\tilde{m}}{r} - \tilde{m}_{,r} \right) \right] - \frac{\omega_{,u}}{V(1+\omega)} - \frac{\omega\omega_{,r}}{1-\omega^2} - 2\beta_{,r} \right\}. \quad (2.9)$$

El tensor de proyección, en su forma mixta, se escribe en términos de las componentes de la cuadrivelocidad como

$$h_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} U_1 U^1 & -U_1 U^0 & 0 & 0 \\ -U_0 U^1 & U_0 U^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Por otro lado, las componentes del tensor de deformaciones o cizalladura son las siguientes

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{U^0 \omega}{1+\omega} \left\{ \frac{1}{1-\omega^2} \left[\omega_{,u} - \frac{V\omega_{,r}}{r(1-\omega)} \right] - \frac{\tilde{m}_{,u}}{2(r-2\tilde{m})} \right. \\ &\quad \left. - 2v\beta_{,r} + \left(\frac{2-\omega}{1-\omega} \right) \left(\frac{\tilde{m}}{r} - \tilde{m}_{,r} \right) \right\} + \frac{\Theta(U_1)^2}{3}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\sigma_{00} = v^2 \sigma_{11}, \quad (2.12)$$

$$\sigma_{10} = -v \sigma_{11}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\Theta r^2}{3}, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{33} = \frac{\Theta r^2 \text{sen}^2 \theta}{3}, \quad (2.15)$$

mientras que su invariante puede escribirse como

$$\sigma = U^0 \tilde{\sigma}, \quad (2.16)$$

donde

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\tilde{\Theta} - \frac{3v}{r} \right). \quad (2.17)$$

Y para las componentes del tensor de vorticidad se tiene $w_{\mu\nu} = 0$, siendo este un resultado estándar en simetría esférica [20].

2.2. Ecuaciones de conservación

La ley de conservación del tensor de energía-momento (1.4) se obtiene a través de la nulidad de su divergencia, la cual está definida como la contracción de su derivada covariante con respecto a las coordenadas x^μ , es decir

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (2.18)$$

Las ecuaciones de conservación que se desprenden de (2.18), son las siguientes

$$(\rho + p) U^\mu U^\nu{}_{;\mu} + (U^\mu U^\nu - g^{\mu\nu}) p_{;\mu} = 0, \quad (2.19)$$

$$\rho_{;\mu} U^\mu + (\rho + p) U^\mu{}_{;\mu} + (\epsilon k^\mu k^\nu)_{;\mu} U_\nu = 0, \quad (2.20)$$

que pueden reescribirse en términos de las variables cinemáticas como

$$(\rho + p) a^\nu - h^{\mu\nu} p_{;\mu} = 0, \quad (2.21)$$

$$U^0 \dot{\rho} + (\rho + p)\Theta + (\epsilon k^\mu k^\nu)_{;\mu} U_\nu = 0. \quad (2.22)$$

La expresión (2.21) es un vector contravariante conocido como la ecuación de Euler relativista, mientras que (2.22) es una ecuación escalar que describe la conservación de la masa y la energía del sistema.

Es destacable el hecho de que las ecuaciones de movimiento (2.21–2.22) no son independientes de las ecuaciones de campo (1.34–1.37) debido a que la distribución material es la fuente del campo gravitacional y el campo gravitacional a su vez es responsable del movimiento de la materia. Una sinergia que, como se explicó anteriormente, se ve reflejada en las ecuaciones de campo de Einstein; en este sentido, no es de extrañar que la información presente en (2.18) se encuentre ya contenida en (1.2), sin embargo la forma explícita de (2.18) resulta más útil que las propias ecuaciones de campo en muchos casos, ya sea para integrar el sistema o bien para darle una interpretación física. En particular, la componente

$$T_1^\mu{}_{;\mu} = 0, \quad (2.23)$$

conduce a la bien conocida ecuación de Tolman–Oppenheimer–Volkov (TOV), que puede expresarse de la siguiente forma para una distribución material dinámica con simetría esférica [8]

$$\tilde{p}_{,r} + \frac{\tilde{\rho} + \tilde{p}}{1 - 2\tilde{m}/r} \left(4\pi r p + \frac{\tilde{m}}{r^2} \right) = H(u, r), \quad (2.24)$$

donde la función dinámica $H(u, r)$ viene dada por

$$H(u, r) = \frac{2}{r}(p - \tilde{p}) - e^{2\beta} \left(\frac{\tilde{\rho} + \tilde{p}}{1 - 2\tilde{m}/r} \right)_{,u}. \quad (2.25)$$

Se puede observar que la función $H(u, r)$ es exactamente igual a cero en el caso estático. La ecuación (2.24) constituye la condición de equilibrio hidrodinámico durante la evolución del fluido, por lo que será de utilidad en capítulos posteriores.

CAPÍTULO 3

ACOPLAMIENTO EN LA SUPERFICIE

Se estudia un espaciotiempo dividido en dos regiones: una región interior que contiene el fluido y otra exterior correspondiente al espaciotiempo de Vaidya [11], separadas por la hipersuperficie de acoplamiento que limita la distribución de materia. Las condiciones de acoplamiento estudiadas en este capítulo tienen como propósito evitar la aparición de comportamientos singulares de las variables físicas en la superficie, además se presentará el conjunto de ecuaciones que describen la evolución de la superficie móvil.

3.1. Condiciones de acoplamiento

Para integrar las ecuaciones de campo en la superficie del fluido, se acopla la solución interior con la exterior en la hipersuperficie $r = a(u) = A(u)$ (se utiliza a ó A indiferentemente) que separa el espaciotiempo en dos regiones: la región interior ($0 \leq r \leq A$), definida por la métrica de Bondi (1.6), y la región exterior ($r \geq A$), descrita por la métrica de Vaidya [11] en coordenadas de radiación

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 + 2du dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.1)$$

Darmois [12] fue el primero en establecer las condiciones de acoplamiento de manera rigurosa, de acuerdo a su planteamiento, la condición necesaria y suficiente para acoplar dos regiones del espaciotiempo, separadas por una hipersuperficie, está dada por la continuidad de dos cantidades invariantes, conocidas como la

primera y segunda forma fundamental, a través de dicha frontera. La primera forma fundamental corresponde a la métrica inducida sobre la superficie de separación, mientras que la segunda forma fundamental corresponde a la derivada covariante del vector normal a la hipersuperficie proyectada sobre la misma.

Luego, Lichnerowicz [13] introdujo un método alternativo para garantizar el acoplamiento en la frontera. Según el enfoque de Lichnerowicz, la condición necesaria y suficiente para acoplar dos regiones del espaciotiempo es que exista un sistema de coordenadas en el cual, tanto el tensor métrico como todas sus primeras derivadas sean continuos a través de la hipersuperficie que separa ambas regiones.

La equivalencia entre el enfoque de Darmois y el de Lichnerowicz fue demostrada más adelante por Bonnor y Vickers [21]. Puede decirse que las condiciones de Darmois están expresadas en un lenguaje covariante, mientras que las de Lichnerowicz no lo están.

Posteriormente, Herrera y Jiménez [22] demostraron que la continuidad de la segunda forma fundamental es equivalente a la continuidad de los coeficientes de espín, provenientes del formalismo desarrollado por Newman y Penrose [14].

La continuidad de la primera forma fundamental se reduce a la continuidad de las funciones β y \tilde{m} a través de la superficie,

$$\beta(u, A) = 0, \tag{3.2}$$

$$\tilde{m}(u, A) = M(u), \tag{3.3}$$

mientras que la continuidad de la segunda forma fundamental equivale a la

continuidad del coeficiente de espín γ , el cual viene dado por [10]

$$\gamma = \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r}\right) \beta_{,r} - \frac{\tilde{m}_{,r}}{2r} - \beta_{,u} e^{-2\beta}, \quad (3.4)$$

y su consecuencia más importante es que la presión se anula en la superficie de la distribución

$$p_a = 0. \quad (3.5)$$

Esta condición garantiza un comportamiento regular de las variables físicas en $r = A$.

3.2. Ecuaciones en la superficie

Evaluando las ecuaciones de campo en la hipersuperficie $r = A$ y tomando en cuenta las condiciones de acoplamiento antes mencionadas, se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales en la superficie. Para escribir las ecuaciones de este sistema, conviene definir las siguientes variables

$$F = 1 - \frac{2M}{A}, \quad (3.6)$$

$$E = 4\pi A^2 \epsilon_a, \quad (3.7)$$

donde A corresponde al radio de la esfera, $M = m(u, A)$ es la masa de la distribución de materia y E es la luminosidad en la superficie del fluido. La primera ecuación del sistema puede obtenerse de la velocidad material (1.32) evaluada en la superficie

$$\dot{A} = \frac{F W}{1 - W}, \quad (3.8)$$

siendo $W = \omega_a$ la velocidad del observador comóvil en la frontera. La segunda ecuación en la superficie se obtiene evaluando la variación absoluta de \tilde{m} con respecto a u (1.48) en $r = A$

$$\dot{M} = -F E. \quad (3.9)$$

La emisión de radiación implica una luminosidad E positiva, lo cual claramente se traduce en pérdida de masa. Se puede reescribir esta ecuación como

$$\frac{\dot{F}}{F} = \frac{2E}{A} + \left(\frac{1-F}{A} \right) \left(\frac{F W}{1-W} \right). \quad (3.10)$$

Las ecuaciones (3.8) y (3.10) son independientes del modelo que se pueda considerar en la evolución del sistema.

La tercera ecuación en la superficie, para $W(u)$, se determina evaluando la ecuación de TOV (2.24) en la frontera de acoplamiento, obteniéndose la siguiente expresión

$$\frac{\dot{F}}{F} - \frac{\dot{\tilde{\rho}}_a}{\tilde{\rho}_a} + \frac{\dot{W}}{\tilde{W}} + \frac{F(H_a + W\tilde{\rho}_{,ra})}{\tilde{\rho}_a\tilde{W}^2} + \frac{W}{\tilde{W}} \left[4\pi A\tilde{\rho}_a(2+W) - \frac{3+F}{2A} \right] = 0, \quad (3.11)$$

donde $\tilde{W} = 1 - W$, esta expresión depende explícitamente del modelo estudiado a través de la densidad efectiva evaluada en la superficie del fluido $\tilde{\rho}_a$.

Se tendría un sistema de tres ecuaciones diferenciales en la frontera del fluido con cuatro variables: A , M , W y E . Este sistema resulta prácticamente imposible de integrar analíticamente, sin embargo, una forma de integrar numéricamente dicho sistema sería especificar una de las variables y establecer condiciones iniciales. También es posible obtener información adicional para complementar el sistema de ecuaciones en la superficie caracterizando el fluido a través del escalar de expansión

y el tensor de deformaciones, como veremos enseguida.

Considerando una distribución libre de expansión, evaluamos el escalar de expansión en la superficie, tal que

$$\Theta_a = 0, \quad (3.12)$$

lo cual conduce a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{W}{A} \left(2 - \frac{3M}{A} \right) + \frac{\dot{W}}{W(1+W)} + \frac{\dot{M}(1-W)}{A-2M} - \frac{\omega_{,ua}}{W} = 0. \quad (3.13)$$

La variación absoluta de W con respecto a la coordenada temporal se escribe como

$$\dot{W} = \omega_{,ua} + v\omega_{,ra}, \quad (3.14)$$

si el gradiente de velocidad se anula en la superficie ($\omega_{,ra} = 0$), entonces

$$\dot{W} = \omega_{,ua}. \quad (3.15)$$

Así, la ecuación (3.13) toma la forma de una ecuación diferencial de Riccati

$$\frac{W}{A} \left(2 - \frac{3M}{A} \right) - \frac{\dot{W}}{1+W} + \frac{\dot{M}(1-W)}{A-2M} = 0. \quad (3.16)$$

En este caso particular, se tiene un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales en la superficie con cuatro variables, que puede ser integrado numéricamente.

Por otro lado, en el caso adiabático ($\epsilon = 0$), la ecuación de continuidad (2.22) queda escrita como

$$\tilde{\Theta} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho + p}. \quad (3.17)$$

Utilizando esta expresión para $\tilde{\Theta}$, el invariante del tensor de cizalladura viene dado por

$$\tilde{\sigma} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} + \frac{3v}{r} \right). \quad (3.18)$$

el cual, en la superficie, se reduce a la siguiente expresión

$$\tilde{\sigma}_a = -\frac{(\ln \rho_a + 3 \ln A)'}{\sqrt{3}}. \quad (3.19)$$

Considerando ahora una distribución libre de cizalladuras ($\sigma = 0$), la expresión (3.19) puede ser integrada para obtener

$$\rho_a = C_1 \frac{3M}{4\pi A^3}, \quad (3.20)$$

siendo C_1 una constante de integración. En este caso es interesante observar que la densidad superficial es proporcional a la densidad promedio de la distribución en la superficie.

CAPÍTULO 4

POLÍTROPAS RADIANTES

4.1. Ecuación de estado Polítropa

La ecuación de estado que constituye la base del estudio de las distribuciones polítropas en Relatividad General es del tipo $p = p(\rho)$ y se expresa como

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{n}} = K\rho^\Gamma, \quad (4.1)$$

donde K es la constante polítropa y Γ es el exponente adiabático, relacionado con el índice adiabático n . En estas distribuciones de materia, la entropía por partícula y la composición química permanecen constantes; además, la presión p y la densidad de energía ρ se anulan en la superficie de la distribución ($r = A$)

$$p_a = \rho_a = 0. \quad (4.2)$$

Como es bien sabido, para deducir la ecuación de estado polítropa (4.1) se considera que la densidad de energía interna ϵ es proporcional a la presión, es decir

$$\epsilon = \rho - m_n \eta = \frac{p}{\Gamma - 1}, \quad (4.3)$$

donde Γ es constante, $m_n = 1,66 \times 10^{-24}$ g es la masa en reposo del nucleón y $\eta(r)$ es el número de nucleones por unidad de volumen. La condición de entropía uniforme

por nucleón está dada por [23]

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\rho}{\eta} \right) + p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\eta} \right) = 0. \quad (4.4)$$

Combinando (4.3) y (4.4), se tiene

$$\left(\frac{1}{\eta} \right) \frac{dp}{dr} + \Gamma p \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\eta} \right) = 0, \quad (4.5)$$

al integrar esta ecuación, resulta $p \propto \eta^\Gamma$ y asumiendo que $\rho \propto m_n \eta$, se obtiene la expresión (4.1). Aunque esta simple consideración física se hace para deducir la ecuación de estado polítropa, dicha ecuación ha sido extensamente utilizada en una gran cantidad de modelos astrofísicos más complejos [24]. Incluyendo fluidos sometidos a campos gravitacionales muy intensos, los cuales dan lugar a objetos exóticos como enanas blancas, estrellas de neutrones, estrellas de neutrones interactuando con campo escalar [3, 10], entre otros.

Un caso particular de ecuación de estado polítropa ampliamente estudiado en Relatividad General es aquella con $n = \infty$ (equivalente a un proceso isocórico en gases), tal que

$$p = K\rho.$$

Para un fluido perfecto, esta ecuación de estado tiene aplicaciones importantes en astrofísica y cosmología relativista al considerar distintos valores de K [24]. Específicamente, cuando $K = 0$, la distribución se comporta como polvo, lo cual representa un fluido con presión nula $p = 0$; mientras que, en el caso $K = -1$ se tiene una densidad de energía igual a la constante cosmológica Λ , es decir $p = -\rho = -\Lambda$. Por otro lado, el valor $K = \frac{1}{3}$ corresponde a la radiación electromagnética, la cual

satisface la ecuación de estado $p = \frac{1}{3}\rho$.

Concretamente, la distribución polítropa que consideraremos en nuestro estudio será aquella con índice adiabático $n = 1$ y exponente adiabático $\Gamma = 2$, con los cuales la presión y la densidad de energía se relacionan a través de la ecuación de estado

$$p = K\rho^2, \quad (4.6)$$

expresión que ha sido utilizada por Siebel, Font y Papadopoulos para modelar el comportamiento de estrellas de neutrones [3]. Reemplazando esta ecuación en (1.44) y resolviendo para ρ obtenemos

$$\rho = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4K(\tilde{p} - \tilde{\rho})}}{2K}. \quad (4.7)$$

Para satisfacer la condición polítropa (4.2) se toma el signo negativo de la raíz cuadrada, obteniéndose la siguiente expresión para la densidad de energía

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{1 + 4K(\tilde{p} - \tilde{\rho})}}{2K}, \quad (4.8)$$

mientras que la presión se puede escribir como

$$p = \frac{1 - \sqrt{1 + 4K(\tilde{p} - \tilde{\rho})}}{2K} + \tilde{p} - \tilde{\rho}. \quad (4.9)$$

La velocidad del observador comóvil (1.45) viene dada por

$$\omega = \frac{1 - 2K\tilde{\rho} - \sqrt{1 + 4K(\tilde{p} - \tilde{\rho})}}{1 + 2K\tilde{p} - \sqrt{1 + 4K(\tilde{p} - \tilde{\rho})}}, \quad (4.10)$$

y el flujo de radiación de fotones y/o neutrinos (1.46) se expresa como

$$\epsilon = -\frac{\tilde{m}_{,u}e^{-2\beta}}{4\pi r(r-2\tilde{m})} - \frac{1-2K^2\tilde{\rho}\tilde{p}+3K(\tilde{p}-\tilde{\rho})-[1+K(\tilde{p}-\tilde{\rho})]\sqrt{1+4K(\tilde{p}-\tilde{\rho})}}{2K^2(\tilde{\rho}+\tilde{p})}, \quad (4.11)$$

donde las variables efectivas $\tilde{\rho}$ y \tilde{p} se determinan a partir de las ecuaciones de campo (1.41) y (1.42). A continuación se analizará el comportamiento de la polítropa radiante cerca del origen del sistema.

4.2. Desarrollo hacia el origen

Con el propósito de estudiar una polítropa radiante completamente regular en el origen, se realizó un desarrollo en serie de potencias de r alrededor del punto $r = 0$, donde las condiciones de regularidad fueron obtenidas de las ecuaciones de campo (1.34–1.37), para luego evaluar la ecuación polítropa (4.6) en las expresiones provenientes del desarrollo en serie.

Todas las variables, tanto métricas como físicas, se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tilde{m}(u, r) &= m_1(u)r + m_2(u)r^2 + m_3(u)r^3 + m_4(u)r^4 + \dots, \\ \beta(u, r) &= \beta_0(u) + \beta_1(u)r + \beta_2(u)r^2 + \beta_3(u)r^3 + \dots, \\ \rho(u, r) &= \rho_0(u) + \rho_1(u)r + \rho_2(u)r^2 + \rho_3(u)r^3 + \dots, \\ p(u, r) &= p_0(u) + p_1(u)r + p_2(u)r^2 + p_3(u)r^3 + \dots, \\ \omega(u, r) &= \omega_1(u)r + \omega_2(u)r^2 + \omega_3(u)r^3 + \omega_4(u)r^4 + \dots, \\ \epsilon(u, r) &= \epsilon_0(u) + \epsilon_1(u)r + \epsilon_2(u)r^2 + \epsilon_3(u)r^3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde m_0 y ω_0 se han anulado. Evidentemente, $m_0 \neq 0$ introduciría una

singularidad en la métrica. Por otro lado, de la velocidad material (1.32) se verifica inmediatamente que $\omega_0 = 0$.

Para obtener las condiciones de regularidad en el origen y determinar los coeficientes del desarrollo en serie, se escribe cada una de las ecuaciones de campo de Einstein como una serie de potencias positivas y negativas de r . La regularidad en $r = 0$ requiere que los coeficientes de potencias negativas de r se anulen, lo que se traduce en las siguientes restricciones para las variables métricas:

$$m_1 = m_2 = \beta_1 = 0. \quad (4.13)$$

Posteriormente, los coeficientes de potencias positivas de r en las ecuaciones de campo conducen a un sistema de ecuaciones que puede resolverse para determinar los coeficientes de las variables físicas en función de las variables métricas. A continuación

se escriben los primeros coeficientes del desarrollo en serie

$$\rho_0 = \frac{3m_3}{4\pi}, \quad (4.14)$$

$$p_0 = \frac{4\beta_2 - 3m_3}{4\pi}, \quad (4.15)$$

$$\epsilon_0 = 0, \quad (4.16)$$

$$\rho_1 = \frac{-2e^{-2\beta_0}\dot{\beta}_2 + 3\beta_3 + 2m_4}{4\pi}, \quad (4.17)$$

$$p_1 = \frac{-2e^{-2\beta_0}\dot{\beta}_2 + 9\beta_3 - 6m_4}{4\pi}, \quad (4.18)$$

$$\omega_1 = \frac{-2e^{-2\beta_0}\dot{\beta}_2 + 3\beta_3 - 2m_4}{4\beta_2}, \quad (4.19)$$

$$\epsilon_1 = \frac{e^{-2\beta_0}(2\dot{\beta}_2 - \dot{m}_3) - 3\beta_3 + 2m_4}{4\pi}, \quad (4.20)$$

$$\rho_2 = \frac{-3e^{-2\beta_0}\dot{\beta}_3 + 4\beta_2(2\beta_2 - 3m_3) + 8\beta_4}{4\pi}, \quad (4.21)$$

$$p_2 = \frac{-3e^{-2\beta_0}\dot{\beta}_3 + 4\beta_2(2\beta_2 - 5m_3) + 16\beta_4 - 10m_5}{4\pi}, \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{(2e^{-2\beta_0}\dot{\beta}_2 - 9\beta_3 + 2m_4)(e^{-2\beta_0}\dot{\beta}_2 - 3\beta_3 + 2m_4)}{16\beta_2^2} \\ &+ \frac{8\beta_4 - 5m_5}{4\beta_2} + 2\beta_2 - 3m_3, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \frac{(2\beta_2 - 3m_3)(e^{-2\beta_0}\dot{\beta}_2 - 3\beta_3 + 2m_4)^2}{32\pi\beta_2^2} + \frac{e^{-2\beta_0}(3\dot{\beta}_3 - \dot{m}_4)}{4\pi} \\ &- \frac{8\beta_4 - 5m_5}{4\pi} - \frac{\beta_2(2\beta_2 - 3m_3)}{\pi}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Combinando las expresiones (4.14), (4.15) y (4.20), se encuentra una ecuación de

conservación para la densidad y presión centrales, dada por

$$\dot{\rho}_0 + 3\dot{p}_0 - 3e^{2\beta_0} \left(2\epsilon_1 + \frac{2m_4 - 3\beta_3}{2\pi} \right) = 0. \quad (4.25)$$

Hasta este punto, nuestro desarrollo en serie es completamente general para una distribución esférica de fluido radiante, puesto que no se ha tenido en cuenta la ecuación polítropa. Antes de proceder a estudiar las propiedades de una polítropa radiante en el origen, vale la pena mencionar que, en la aproximación post-cuasiestática [4, 25] se demuestra que el desarrollo de la variable \tilde{m} , alrededor de $r = 0$, es una serie de potencias impares de r , mientras que el desarrollo de β es una serie de potencias pares de r . En este límite, la ecuación de conservación (4.25) se reduce a la expresión presentada por Alvarado [18]:

$$\dot{\rho}_0 + 3\dot{p}_0 - 6e^{2\beta_0}\epsilon_1 = 0, \quad (4.26)$$

hallándose en tal caso la siguiente cantidad conservada en el origen

$$\rho_0 + 3p_0 - 6 \int e^{2\beta_0} \epsilon_1 du = \text{constante}, \quad (4.27)$$

además, para un fluido perfecto en el límite antes mencionado, esta cantidad conservada viene dada por

$$\rho_0 + 3p_0 = \text{constante}, \quad (4.28)$$

la cual fue reportada por Barreto, Castillo y Barrios [10]. De acuerdo a la interpretación de Winicour [26], este resultado puede relacionarse con una de las cantidades conservadas de Newman–Penrose [14], cuyo significado físico no se ha establecido en su totalidad. Ahora bien, la ecuación (4.28) indica la conservación de

la densidad de masa gravitacional activa de un fluido perfecto en el origen del sistema. En el caso general, la ecuación de conservación (4.25) también puede escribirse como una expresión completamente dinámica:

$$2\dot{\rho}_0 + 3\dot{p}_0 + 3e^{2\beta_0}[\omega_1(\rho_0 + p_0) - \epsilon_1] = 0. \quad (4.29)$$

A continuación se estudiará el comportamiento de una distribución politropa partiendo del desarrollo general. De la ecuación de estado (4.6), se tiene que los coeficientes de la presión y la densidad están relacionados a través de

$$\begin{aligned} p_0 &= K\rho_0^2, \\ p_1 &= 2K\rho_0\rho_1, \\ p_2 &= K(2\rho_0\rho_2 + \rho_1^2), \end{aligned} \quad (4.30)$$

aplicando estas condiciones es posible determinar una de las dos variables métricas, m o β en función de la otra, reduciendo así el sistema de ecuaciones (4.14–4.24). Una vez hecho esto, resulta conveniente expresar los coeficientes de las variables, tanto métricas como físicas, en términos de la densidad central y el flujo de radiación, tal

que

$$m_3 = \frac{4\pi\rho_0}{3},$$

$$m_4 = \frac{4\pi e^{-2\beta_0}\dot{\rho}_0}{3} - \frac{\pi\epsilon_1(2K\rho_0 - 3)}{2K\rho_0},$$

$$\begin{aligned} m_5 &= \frac{\pi e^{-4\beta_0}}{15K\rho_0} \left[(10K\rho_0 + 1)(\ddot{\rho}_0 - 2\dot{\beta}_0\dot{\rho}_0) - \frac{4\dot{\rho}_0^2}{3\rho_0} \left(\frac{K\rho_0 - 1}{K\rho_0 + 1} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\pi e^{-2\beta_0}}{10K\rho_0} \left\{ \frac{\epsilon_1\dot{\rho}_0}{\rho_0} \left[15 - \frac{16}{3} \left(\frac{K\rho_0 - 1}{K\rho_0 + 1} \right)^2 \right] + (2K\rho_0 - 7)\dot{\epsilon}_1 \right\} + \frac{4\pi(K\rho_0 - 1)\epsilon_2}{5K\rho_0} \\ &- \frac{\pi\epsilon_1^2}{5K\rho_0^2} \left[4 \left(\frac{K\rho_0 - 1}{K\rho_0 + 1} \right)^2 + \frac{9}{2K\rho_0} \right] - \frac{4\pi^2\rho_0(K\rho_0 + 1)(3K\rho_0 + 1)}{15K}, \end{aligned}$$

$$\beta_2 = \pi\rho_0(K\rho_0 + 1),$$

$$\beta_3 = \frac{2\pi e^{-2\beta_0}(6K\rho_0 + 5)\dot{\rho}_0}{9} - \frac{\pi\epsilon_1(2K\rho_0 + 3)}{3K\rho_0},$$

$$\begin{aligned} \beta_4 &= \frac{\pi e^{-4\beta_0}}{2} \left\{ \left[\frac{(2K\rho_0 + 1)(6K\rho_0 + 5)}{4} - 1 \right] \left(\frac{\ddot{\rho}_0 - 2\dot{\beta}_0\dot{\rho}_0}{3K\rho_0} \right) \right. \\ &+ \left. \left[K + \frac{K\rho_0 - 1}{9K\rho_0^2(K\rho_0 + 1)^2} \right] \dot{\rho}_0^2 \right\} + \frac{\pi e^{-2\beta_0}}{K\rho_0} \left\{ \frac{\epsilon_1\dot{\rho}_0}{\rho_0} \left[\frac{9}{8} + \frac{K\rho_0 - 1}{3(K\rho_0 + 1)^2} \right] \right. \\ &- \left. \frac{(2K\rho_0 + 5)\dot{\epsilon}_1}{8} \right\} + \frac{\pi\epsilon_1^2}{2K\rho_0^2} \left[\frac{K\rho_0 - 1}{(K\rho_0 + 1)^2} - \frac{9}{8K\rho_0} \right] - \frac{\pi\epsilon_2}{2K\rho_0} \\ &- \frac{\pi^2\rho_0(K\rho_0 + 1)(6K^2\rho_0^2 - 3K\rho_0 + 1)}{6K}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= e^{-2\beta_0} \dot{\rho}_0 - \frac{3\epsilon_1}{2K\rho_0}, \\
\rho_2 &= \frac{e^{-4\beta_0}}{3\rho_0} \left[\left(\frac{6K\rho_0 + 5}{4K} - \frac{1}{K\rho_0 + 1} \right) (\ddot{\rho}_0 - 2\dot{\beta}_0 \dot{\rho}_0) + \frac{\dot{\rho}_0^2 (K\rho_0 - 1)}{3K\rho_0 (K\rho_0 + 1)^2} \right] \\
&+ \frac{e^{-2\beta_0}}{2K\rho_0^2} \left\{ 3\epsilon_1 \dot{\rho}_0 \left[\frac{K\rho_0 + 1 - K}{4K\rho_0 (K\rho_0 + 1)} + \frac{4(K\rho_0 - 1)}{9(K\rho_0 + 1)^2} + 1 \right] \right. \\
&- \frac{\dot{\epsilon}_1}{4} \left(\frac{2K\rho_0 + 3}{K} + \frac{2K\rho_0 - 3}{K\rho_0 + 1} \right) \left. \right\} + \frac{\epsilon_1^2}{K\rho_0^2} \left[\frac{K\rho_0 - 1}{(K\rho_0 + 1)^2} - \frac{9}{8K\rho_0} \right] - \frac{\epsilon_2}{K\rho_0} \\
&- \frac{\pi\rho_0 (K\rho_0 + 1)(3K\rho_0 + 1)}{3K}, \\
\omega_1 &= -\frac{(e^{-2\beta_0} \dot{\rho}_0 + 3\epsilon_1)}{3\rho_0 (K\rho_0 + 1)}, \\
\omega_2 &= \frac{e^{-4\beta_0}}{3(K\rho_0 + 1)} \left[(2\dot{\beta}_0 \dot{\rho}_0 - \ddot{\rho}_0) + \frac{(2K\rho_0 + 3)(3K\rho_0 + 1)\dot{\rho}_0^2}{3\rho_0^2 (K\rho_0 + 1)^2} \right] \\
&+ \frac{e^{-2\beta_0}}{\rho_0 (K\rho_0 + 1)} \left\{ \frac{\epsilon_1 \dot{\rho}_0}{K\rho_0 + 1} \left[\frac{16K^2 \rho_0^2 - 3K\rho_0 - 3\rho_0 - 4}{8K\rho_0^2} + \frac{4K}{3(K\rho_0 + 1)} \right] \right. \\
&- \left. \frac{(2K\rho_0 - 3)\dot{\epsilon}_1}{8K} \right\} + \frac{\epsilon_1^2}{\rho_0 (K\rho_0 + 1)^2} \left[\frac{2K}{K\rho_0 + 1} - \frac{3(2K\rho_0 + 1)}{2K\rho_0} \right] - \frac{\epsilon_2}{\rho_0 (K\rho_0 + 1)}.
\end{aligned}$$

Con estos resultados, la ecuación de conservación (4.29) toma la forma

$$(1 + 6K\rho_0)\dot{\rho}_0 - 6e^{2\beta_0}\epsilon_1 = 0. \quad (4.31)$$

Considerando que $(1 + 6K\rho_0)\dot{\rho}_0 = \dot{\rho}_0 + 3\dot{\rho}_0$, esta expresión (4.31) obtenida en el caso dinámico, resulta ser exactamente igual a la ecuación central de una distribución radiante en el régimen post-cuasiestático (4.26).

4.3. Solución estática

Considerando el caso estático, esta distribución se puede integrar analíticamente para hallar una conexión entre el origen y la superficie, como se verá enseguida. Utilizando la ecuación de estado polítropa (4.6), la ecuación de TOV se escribe como

$$\frac{d}{dr} \ln \left[(1 + K\rho)^2 \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \right] + 2 \frac{d\beta}{dr} = 0, \quad (4.32)$$

que puede ser integrada para obtener

$$e^{2\beta} = \frac{F^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r} \right)^{-\frac{1}{2}}}{(1 + K\rho)^2}, \quad (4.33)$$

evaluando en el centro de la distribución, se obtiene

$$e^{2\beta_0} (1 + K\rho_0)^2 = F^{\frac{1}{2}}. \quad (4.34)$$

Este resultado, presentado por Barreto, Castillo y Barrios [10], relaciona las variables en el centro (β_0, ρ_0) y en la superficie de la esfera de fluido (F) . La constante polítropa puede escribirse en función de estas variables como

$$K = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{F^{\frac{1}{4}}}{e^{4\beta_0}} - 1 \right). \quad (4.35)$$

Reescribiendo la ecuación (4.33), hallamos una expresión para la densidad en función de las variables métricas:

$$\rho = \frac{1}{K} \left[\frac{F^{\frac{1}{4}}}{e^{4\beta}} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r} \right)^{-\frac{1}{4}} - 1 \right]. \quad (4.36)$$

Por otra parte, la velocidad del sonido en el interior de la distribución, definida como $v_s^2 = dp/d\rho$ viene dada por la siguiente expresión

$$v_s^2 = 2 \left[\frac{F^{\frac{1}{4}}}{e^{4\beta}} \left(1 - \frac{2\tilde{m}}{r} \right)^{-\frac{1}{4}} - 1 \right]. \quad (4.37)$$

La velocidad del sonido adquiere su valor máximo en el centro de la distribución y decrece conforme se aproxima a la superficie. Se verifica además que tanto la velocidad del sonido como el cociente p/ρ no dependen explícitamente de la constante polítropa K , lo cual es consistente con el trabajo de Rezzolla, Yoshida y Zanotti [27].

CAPÍTULO 5

MODELO ADIABÁTICO

En este capítulo se propone un modelo de distribución polítropa en evolución adiabática, es decir con flujo de radiación nulo

$$\epsilon = 0. \tag{5.1}$$

En este caso, a partir de la ecuación de campo (1.40), se obtiene la siguiente expresión para la velocidad del observador comóvil

$$\omega = -\frac{\tilde{m}_{,u}}{4\pi r(r - 2\tilde{m})(\tilde{\rho} + p) - \tilde{m}_{,u}}. \tag{5.2}$$

A continuación se estudia el comportamiento de la polítropa adiabática cerca del origen del sistema.

5.1. Ecuaciones cerca del origen

Para determinar las propiedades de una distribución polítropa, adiabática, esféricamente simétrica, en el origen del sistema, se evalúan las expresiones obtenidas del desarrollo en serie de potencias realizado en el capítulo anterior, exigiendo la nulidad de los coeficientes del flujo de radiación

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0. \tag{5.3}$$

La ecuación de conservación (4.29) se reduce a la siguiente expresión

$$(6K\rho_0 + 1)\dot{\rho}_0 = 0, \quad (5.4)$$

la cual es satisfecha si y solo si $\rho_0 = \text{constante}$. Una vez demostrado esto, los coeficientes del desarrollo en serie vienen dados por

$$m_3 = \frac{4\pi\rho_0}{3},$$

$$m_4 = 0,$$

$$m_5 = -\frac{4\pi^2\rho_0(K\rho_0 + 1)(3K\rho_0 + 1)}{15K},$$

$$\beta_2 = \pi\rho_0(K\rho_0 + 1),$$

$$\beta_3 = 0,$$

$$\beta_4 = -\frac{\pi^2\rho_0(K\rho_0 + 1)(6K^2\rho_0^2 - 3K\rho_0 + 1)}{6K},$$

$$\rho_1 = 0,$$

$$\rho_2 = -\frac{\pi\rho_0(K\rho_0 + 1)(3K\rho_0 + 1)}{3K},$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0.$$

Solo sobreviven los coeficientes impares de la variable métrica \tilde{m} y los coeficientes pares de la variable métrica β así como los coeficientes pares de las variables físicas ρ y p , mientras que todos los coeficientes de la velocidad ω se anulan. Se observa además que todos los coeficientes son constantes. Estos resultados muestran un comportamiento completamente estático para la polítropa adiabática cerca del

origen del sistema. Vale la pena mencionar que a medida que se aumenta el orden de los coeficientes en la serie, de las variables métricas y físicas, estas pueden abarcar regiones más alejadas del origen, permitiendo aproximarse cada vez más a la superficie de la esfera.

5.2. Desarrollo cerca de la superficie

El siguiente paso de nuestro estudio consiste en analizar el comportamiento de la distribución en la superficie, para ello se realiza un desarrollo en serie de potencias alrededor del punto $r = A$. Las variables métricas se expresan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\tilde{m}(u, r) &= M(u) + M_2(u) (r - A)^2 + M_3(u) (r - A)^3 + \dots, \\ \beta(u, r) &= B_2(u) (r - A)^2 + B_3(u) (r - A)^3 + B_4(u) (r - A)^4 + \dots,\end{aligned}\tag{5.5}$$

donde $M_1 = B_1 = 0$ respetando la condición polítropa $\rho_a = 0$. Por otro lado, las variables físicas se expresan como

$$\begin{aligned}\rho(u, r) &= D_1(u) (r - A) + D_2(u) (r - A)^2 + D_3(u) (r - A)^3 + \dots, \\ p(u, r) &= P_2(u) (r - A)^2 + P_3(u) (r - A)^3 + P_4(u) (r - A)^4 + \dots, \\ \omega(u, r) &= W(u) + W_1(u) (r - A) + W_2(u) (r - A)^2 + \dots,\end{aligned}\tag{5.6}$$

y de la ecuación polítropa (4.6), se obtienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}P_2 &= KD_1^2, \\ P_3 &= 2KD_1D_2, \\ P_4 &= K(2D_1D_3 + D_2^2).\end{aligned}\tag{5.7}$$

Al introducir las expresiones (5.5) y (5.6) en las ecuaciones de campo, aplicando la ecuación de estado polítropa (5.7) y exigiendo la nulidad de los términos independientes del flujo de radiación, se obtienen las siguientes ecuaciones para las variables en la superficie

$$W = 1 + \frac{2AF(B_2 - 3AB_3)}{2A^2\dot{B}_2 + 3AM_3 - 2B_2(2A + M)}, \quad (5.8)$$

$$\dot{A} = \frac{2A^2(3FB_3 - \dot{B}_2) + 2B_2(A + 3M) - 3AM_3}{2A(B_2 - 3AB_3)}, \quad (5.9)$$

$$\dot{M} = 0. \quad (5.10)$$

De esta forma, a medida que se aumenta el orden de la serie en torno a la superficie ($r = A$), las variables métricas y físicas tienden a acercarse cada vez más hacia el origen de la esfera. Así mismo, los coeficientes del desarrollo anterior alrededor del origen (4.12) comprenden regiones cada vez más cercanas a la superficie, en la medida que se aumenta el orden de la serie. La consecuencia más relevante de este hecho es que las velocidades (5.8) y (5.9) dependen de ciertas variables métricas comprendidas entre la frontera y las regiones internas donde encontramos que el comportamiento es estático.

Por otra parte, al no haber disipación de energía, como indica la ecuación (5.10), el carácter dinámico de la distribución se atribuye a la velocidad del observador comóvil y a la velocidad material. Dicha evolución adiabática ha sido ampliamente estudiada por muchos autores, en particular por Barreto [28]. Sin embargo, habiéndose demostrado que la distribución es estática cerca del origen, incluyendo las capas

cercanas a la superficie, se hace inadmisibile una superficie móvil ya que esta rompería la continuidad del fluido en el borde de la esfera. En este sentido, las ecuaciones en la superficie deben satisfacer la condición de estaticidad $W = \dot{A} = 0$, lo que conduce a las siguientes expresiones para los coeficientes constantes de \tilde{m} y β cerca de la superficie

$$\begin{aligned}
 M_2 &= -\frac{\pi AM}{KAF}, \\
 M_3 &= -\frac{\pi M(4A - 13M)}{6KA^2F^2}, \\
 B_2 &= -\frac{\pi AM}{2KA^2F^2}, \\
 B_3 &= \frac{5\pi M^2}{4KA^3F^3},
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

luego, utilizando estos valores métricos, los primeros coeficientes del desarrollo en serie de las variables físicas vienen dados por

$$\begin{aligned}
 D_1 &= -\frac{M}{2KA^2F}, \\
 D_2 &= \frac{M(4A - 3M)}{8KA^4F^2}, \\
 P_2 &= \frac{M^2}{4KA^4F^2}, \\
 P_3 &= -\frac{M^2(4A - 3M)}{8KA^6F^3},
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$W_1 = W_2 = 0.$$

En base a los resultados de este capítulo, puede interpretarse el flujo de radiación como una función de información para la distribución polítropa, tal que, si se anula dicho parámetro, también lo hace la dinámica del sistema.

CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la evolución de una distribución esférica de fluido radiante, caracterizada por una ecuación de estado polítropa, utilizando como base el esquema desarrollado por Bondi. Las conclusiones obtenidas en este trabajo se presentan a continuación.

En la superficie de una esfera de fluido radiante no polítropa, con densidad superficial distinta de cero, se consideró un modelo de evolución adiabática y libre de deformaciones, esto permitió determinar la densidad en la frontera del fluido. Encontrando que la densidad superficial para dicho modelo es proporcional a la densidad promedio de la distribución de materia en la superficie de la esfera.

En el origen de una distribución esférica de fluido radiante se obtuvo una ecuación de conservación que generaliza la expresión presentada por Alvarado dentro del contexto de la aproximación post-cuasiestática. Utilizando la ecuación de estado polítropa en el desarrollo en serie de potencias cerca del origen, se demuestra que la ecuación de conservación obtenida para una distribución polítropa radiante es exactamente igual a la ecuación de conservación asociada a una esfera de fluido radiante en el régimen post-cuasiestático. Seguidamente, se consideró una polítropa estática y se integró la ecuación de Tolman–Oppenheimer–Volkov para reproducir el resultado presentado por Barreto, Castillo y Barrios, así se obtuvo una ecuación que permite conectar las variables centrales con las variables en la superficie. Además se verificó que la velocidad del sonido no depende explícitamente de la constante polítropa.

Se propuso un modelo polítropo adiabático en el cual se demostró, a través de la ecuación de conservación, que la densidad de energía central permanece constante al igual que los coeficientes del desarrollo en serie. Esto implica estaticidad en las

capas internas del fluido. Posteriormente se mostró que la estaticidad cerca del origen no es compatible con un comportamiento dinámico hacia la superficie. El resultado más importante de este modelo, el cual no ha sido reportado, se resume en que la distribución permanece estática en ausencia de flujo de radiación, por lo cual esta cantidad puede ser interpretada como una función de información para sistemas que se ajusten a la ecuación de estado politropa.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Chandrasekar, S. 1957. *An introduction to the study of stellar structure*. Dover. New York.
- [2] Horedt, G. P. 2004. *Polytropes—Applications in Astrophysics and Related Fields*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- [3] Siebel, F; Font, J y Papadopoulos, P. 2001. Scalar field induced oscillations of neutron stars and gravitational collapse. *Phys. Rev. D.*, **65**: 104024.
- [4] Herrera, L. y Barreto, W. 2004. Evolution of relativistic polytropes in the post–quasi–static regime. *Gen. Rel. Grav.*, **36**: 127-150.
- [5] Shapiro, S. L. y Teukolsky, S. A. 1983. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. John Wiley and Sons. New York.
- [6] Herrera, L. y Barreto, W. 2013. General relativistic polytropes for anisotropic matter: The general formalism and applications. *Phys. Rev. D.*, **88**: 084022.
- [7] Bondi, H. 1964. The Contraction of Gravitating Spheres. *Proc. Roy. Soc. A*, **281**: 39–48.
- [8] Herrera, L.; Jiménez, J. y Ruggeri, G. J. 1980. Evolution of radiating fluid spheres in general relativity. *Phys. Rev.*, **22**: 2305–2316.
- [9] Barreto, W.; Castillo, L. y Barrios, E. 2009. Central equation of state in spherical characteristic evolutions. *Phys. Rev. D.*, **80**: 1–4.
- [10] Barreto, W.; Castillo, L. y Barrios, E. 2010. Bondian frames to couple matter with radiation. *Gen. Rel. Grav.*, **42**: 1845.
- [11] Vaidya, P. C. 1951. The gravitational field of a radiating star. *Proc. Indian Acad. Sic.*, **33**: 264–276.
- [12] Darmois, G. 1927. *Memorial des sciences mathématiques, fascicule XXV: Les équations de la gravitation einsteinienne*. Gauthier-villars. París.
- [13] Lichnerowicz, A. 1955. *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson. París.
- [14] Newman, E. y Penrose, R. 1962. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, **3**: 566–578.
- [15] Kazanas, D. y Schramm, D. 1979. *Sources of Gravitational Radiation*. L. Smarr (ed). Cambridge University Press. Cambridge.

- [16] Misner, C.; Thorne, K. y Wheeler, J. 1973. *Gravitation*. W. H. Freeman and Company. San Francisco.
- [17] Minkowski, H. 1909. Raum und Zeit. *Phys. Z.*, **10**: 75–88.
- [18] Alvarado, J. 2013. Evolución de distribuciones estelares esféricas y radiantes. Trabajo de pregrado. Departamento de Física, Universidad de Oriente, Cumaná.
- [19] Misner, C. y Sharp, D. 1964. Relativistic Equations for Adiabatic, Spherically Symmetric Gravitational Collapse. *Phys. Rev.*, **136**: B571.
- [20] Herrera, L.; Martínez, J. 1998. Dissipative fluids out of hydrostatic equilibrium. *Class. Quant. Grav.*, **15**: 407–420.
- [21] Bonnor, W. y Vickers, P. 1981. Junction conditions in general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, **13**: 29–36.
- [22] Herrera, L. y Jiménez, J. 1983. Junction conditions and the propagation of isometries in general relativity. *Phys. Rev. D.*, **28**: 2987.
- [23] Weinberg, S. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons. New York.
- [24] Rezzolla, L. y Zanotti, O. 2013. *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford University Press. Oxford.
- [25] Herrera, L.; Barreto, W.; Di Prisco, A. y Santos, N. O. 2002. Relativistic gravitational collapse in non-comoving coordinates: post-quasistatic approximation. *Phys. Rev. D.*, **65**: 104004.
- [26] Winicour, J. 2012. Characteristic evolution and matching. *Living Rev. Rel.*, **5**: 2.
- [27] Rezzolla, L.; Yoshida, S. y Zanotti, O. 2003. Oscillations of vertically integrated relativistic tori—I. Axisymmetric modes in Schwarzschild spacetime. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **344**: 978–992.
- [28] Barreto, W. 2013. An evolution of adiabatic matter: A case for the quasistatic regime. *Gen. Rel. Grav.*, **45**: 2223.

HOJA DE METADATOS

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/6

Título	Polítropas Radiantes en Simetría Esférica
---------------	---

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Dosil Rivas, Andrés Alejandro	CVLAC	24.129.816
	e-mail	andresdosil@maill.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Simetría esférica, esquema de Bondi, fluido radiante, ecuación de estado polítropa, ecuación de conservación, evolución adiabática.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/6

Líneas y sub líneas de investigación:

Área	Sub área
Ciencias	Física

Resumen (abstract):

En el marco de la Teoría de la Relatividad General, se estudia la evolución de una distribución esférica de fluido radiante, la cual satisface una ecuación de estado polítropa. Se plantean las ecuaciones de campo de Einstein utilizando el esquema de Bondi, donde se expresan las variables físicas en términos de la velocidad de un observador comóvil con el fluido. Además, se determinan las expresiones de las variables cinemáticas y las ecuaciones de conservación del tensor de energía-momento. La frontera de la distribución material se acopla suavemente con la región exterior correspondiente al fluido nulo, mediante las condiciones de Darmais-Lichnerowicz que en este caso se reducen a la continuidad de la primera forma fundamental y de uno de los coeficientes de espín de Newman-Penrose. Una vez garantizado el acoplamiento, se encuentra una ecuación de Riccati para la velocidad del observador comóvil en la superficie cuando el fluido es libre de expansión. Seguidamente, para un caso no polítropo, adiabático y libre de deformaciones, se demuestra que la densidad superficial es proporcional a la densidad promedio. Posteriormente, la regularidad de las variables físicas en el origen se garantiza por medio de un desarrollo en series de potencias de la coordenada radial. De esta forma, se encuentra una ecuación de conservación, en función de las variables físicas, que generaliza la expresión presentada por Alvarado. Al aplicar la ecuación de estado polítropa en la implementación del desarrollo hacia el origen, se demuestra que la ecuación de conservación de una polítropa radiante coincide con la ecuación de conservación asociada a una esfera radiante en el límite post-cuasiestático. Luego, se integra la ecuación de equilibrio hidrodinámico para una polítropa en el caso estático. Finalmente, se plantea un modelo polítropo adiabático donde se estudió el comportamiento del sistema a través de desarrollos en series de potencias en torno al origen y a la superficie. En este caso se demuestra que la ausencia de flujo de radiación conduce a un comportamiento estático de la polítropa.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Castillo Brito, Luis Eduardo	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input checked="" type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input type="checkbox"/>
	CVLAC	8.647.592
	e-mail	lucasti@ula.ve
Araque Lameda, Luis Antonio	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	2.728.346
	e-mail	aralameda@gmail.com
Betancourt Tineo, Ángel Eduardo	ROL	CA <input type="checkbox"/> AS <input type="checkbox"/> TU <input type="checkbox"/> JU <input checked="" type="checkbox"/>
	CVLAC	8.434.642
	e-mail	a.e.betancourt@gmail.com

Fecha de discusión y aprobación:

Año Mes Día

2020	01	31
------	----	----

Lenguaje: SPA

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
Tesis-DosilAndres.pdf	application/pdf

Alcance:

Espacial: Internacional
Temporal: Intemporal

Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciado en Física

Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciatura

Área de Estudio: Física

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado: UNIVERSIDAD DE ORIENTE

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/6



UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CU N° 0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda **"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009"**.

Letdo el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
SISTEMA DE BIBLIOTECA
RECIBIDO POR *Martínez*
FECHA 05/08/09 HORA 5:30

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

Juan A. Bolanos Cunele
Secretario



C.C.: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/maruja

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 6/6

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009) : “los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario para su autorización”.



Br. Andrés A. Dosil R.
Autor



Dr. Luis E. Castillo B.
Asesor