



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

**CAMINOS Y CICLOS HAMILTONIANOS EN GRAFOS
BIPARTITOS BALANCEADOS**

Autor: MSc. Alcalá Maiz Yusleidy Margarita

Tutor: Dr. Brito Daniel

Tesis Doctoral
Presentada ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
Para optar al título de
Doctor en Ciencias
Mención Matemática

Caracas, Venezuela

Junio 2015

DEDICATORIA

El presente trabajo esta dedicado al Dr. Daniel Brito, un gran educador e investigador por su invaluable colaboración y ayuda que me proporcionó como profesional y persona.

AGRADECIMIENTOS

A Dios Todopoderoso.

Índice general

	Pág.
ÍNDICE DE FIGURAS	IX
RESUMEN	X
ABSTRACT	XI
INTRODUCCIÓN	XII
1. DEFINICIONES Y NOTACIONES	2
2. HAMILTON CONECTIVIDAD EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS	11
3. CICLOS DE MÁXIMA LONGITUD EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS	31
4. HAMILTONICIDAD EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS INVOLUCRANDO CONJUNTO INDEPENDIENTE BALANCEADO	46
CONCLUSIONES	59

Índice de figuras

1. The 1- 2-dumbbell	XV
1.1. Grafo $G = (V, E)$	2
1.2. Grafo Bipartito	3
1.3. Grafo $G = (V, E)$	5
1.4. Camino P Maximal	6
1.5. Camino P Cruzado	7
1.6. Grafo $G = (V, E)$	8
1.7. Grafo Conexo	8
1.8. $G-\{a_1, b_2\}$	9
1.9. Grafo Hamilton conectado	10
1.10. 2-Dumbbell	10
2.1. Grafo Minimal de H_{14}	12
2.2. El 1-2- dumbbell.	14
2.3. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	15
2.4. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	16
2.5. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	16
2.6. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	17
2.7. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j a_k C_1^- a_r a_k^+ C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	18
2.8. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_k^+ a_r C_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	18
2.9. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k C_1^- a_k^+ b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	19
2.10. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^+ a_k^+ C_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	19

2.11. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_k^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	20
2.12. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	20
2.13. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_k^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	21
2.14. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	21
2.15. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	22
2.16. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	22
2.17. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	23
2.18. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t C_2^+ a_k a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_k^+ C_2^+ b_j^-$	23
2.19. Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t C_2^+ a_k a_t^- P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_k^+ C_2^+ b_j^-$	24
2.20. Camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- b_j a_k P_2^- b_j^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$	24
2.21. Camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_k P_2^- b_j a_t C_2^+ b_j^-$	25
2.22. Camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- b_j^+ P_2^+ a_k b_j a_t C_2^+ b_j^-$	25
2.23. Camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- a_k P_2^- b_j a_t C_2^+ b_j^-$	26
2.24. Grafo bipartito balanceado de orden 18 con ciclo hamiltoniano.	28
2.25. Dumbbell generador D con $C_1 = a_1 b_1 a_4 b_2 a_1$, $C_2 = a_7 b_4 a_3 b_5 a_7$, $P_1 =$ $a_5 b_7 a_2 b_3 a_6 b_8$ y $P_2 = a_8 b_9 a_9 b_6$	28
2.26. Dumbbell D	29
2.27. 1 – 2 Dumbbell.	29
2.28. Conteo de vecinos.	30
3.1. Grafo 3 conexo con camino maximal no cruzado.	33
3.2. Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_2 = \emptyset$ y $N_P(y_p) \cap I_2 = \emptyset$	34
3.3. Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_2 = \emptyset$ y $N_P(y_p) \cap I_2 \neq \emptyset$	35
3.4. Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $q < w < u < v$	36
3.5. Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $q < u < w < v$	36

3.6. Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $u < q < w < v$	37
3.7. Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $u < q < v < w$	38
3.8. Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $u < v < q < w$	38
3.9. Lado $y_t y_k^-$ con y_t en el camino $x_j P^+ y_i$	40
3.10. Camino $P' = y_k^- P^- x_1 y_k P^+ y_p$	40
3.11. Lado $x_s x_w^+$ con x_s en el camino $x_j P^+ y_i$	41
3.12. Camino $P' = x_w^+ P^+ y_p x_w P^- x_1$	41
3.13. Lados $y_t y_k^-$ y $x_s x_w^+$ con y_t, x_s en el camino $x_j P^+ y_i$	42
3.14. Ciclo $C_0 = x_1 P^+ x_j y_p P^- y_i x_1$	43
3.15. Ciclo $C_1 = x_1 Q_2^+ y_a^- y_k Q_3^- y_i Q_1^+ x_j Q_3^- x_m x_r^+ Q_2^+ y_p x_r Q_2^- x_c y_b Q_2^- y_a x_1$	45
4.1. Grafo con camino maximal no cruzado.	47
4.2. Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap (I_1 \cup I_2) \neq \emptyset$ y $R_2 \cap I_2 = \emptyset$	48
4.3. Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $q < s < u < v$	49
4.4. Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $q < u < s < v$	50
4.5. Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $u < q < s < v$	50
4.6. Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $u < q < v < s$	51
4.7. Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $u < v < q < s$	51
4.8. Ciclo $C = x_w^+ y_z^{+++} P^+ y_n x_w P^- x_1 y_z P^- x_w^+$ y el lado $y_z^+ y_z^{++}$	54
4.9. Matching M en G	56
4.10. Ciclo $C_0 = x_1 y_i C^- x_2 y_n C^- x_u^+ x_t C^- y_i^+ y_k C^+ x_u y_1 x_1$	56

4.11. El Grafo Minimal de H_{26}	57
--	----

RESUMEN

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado simple de orden $2n$. G es hamilton conectado si por cada dos vértices uno a cada lado de la bipartición existe un camino hamiltoniano que los conecta. El orden de un ciclo C , es el número de vértices del ciclo, $c(G)$ denota el orden del ciclo de máxima longitud en el grafo. En este trabajo, establecemos condiciones para que el grafo G sea hamiltoniano o hamilton conectado, en función de algunos parametros, tales como: la conectividad, el orden del ciclo maximo, cardinalidad de unión de vecindades y mínimo grado de un vértice.

Palabras Claves: Grafo bipartito balanceado; hamiltoniano; hamilton conectado; unión de vecindades.

ABSTRACT

Let $G = (X \cup Y, E)$ be a balanced bipartite simple graph of order $2n$. G is Hamiltonian connected if for every two vertex one on each side of the bipartition there exists a Hamiltonian path connecting them. The order of a cycle C , is the vertex number in the cycle, $c(G)$ denotes the order of the cycle of maximum length in the graph. In this work, we establish conditions for that G is Hamiltonian or Hamiltonian connected, depending of certain parameters such as: connectivity, the order of the maximum cycle, cardinality of union of neighborhoods and minimum degree of a vertex.

Key Words: Balanced bipartite graph; hamiltonian; hamilton connected; neighborhood union.

INTRODUCCIÓN

La teoría de grafos, que comenzó a estructurarse en 1736 a partir de interesantes ideas planteadas por Leonhard Euler (1701-1783), constituye una herramienta matemática importante hoy en día por permitirnos ver muchas cosas que pueden parecer de lo más cotidianas como son: carreteras, líneas telefónicas, circuitos eléctricos, entre otras.

Existen muchos problemas físicos, económicos, químicos, que se modelan de manera natural y muchos de ellos se prestan para ser estudiados usándose estas estructuras.

Un grafo G es un par de conjuntos (V, E) , denotado por $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices y E es un conjunto formado por pares no ordenados de elementos de V , llamados lados o aristas.

Existen muchos tipos de grafos, dentro de los cuales se pueden nombrar a los grafos simples (grafos que no poseen lados paralelos ni lazos), grafos completos (grafos simples donde todos los vértices comparten un lado), grafos complementarios (grafos simples cuyo conjunto de lados es complemento de otro conjunto de lados de un grafo simple con los mismos vértices) y los grafos bipartitos. Estos últimos fueron de gran utilidad en el presente trabajo, (o son la herramienta principal de nuestro trabajo) definiéndose estos como aquellos en el cual el conjunto de vértices V puede partitionarse en dos conjuntos disjuntos X y Y , tal que para todo par de vértices del mismo subconjunto de partición no exista un lado, denotado por $G = (X \cup Y, E)$, con $V = X \cup Y$ y $X \cap Y = \phi$. Además, si los dos subconjuntos de partición tienen igual

números de elementos, entonces $G = (X \cup Y, E)$ es un grafo bipartito balanceado.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo (para cualquier par de vértices existe un camino que los une) y vértice conectividad $k(G)$ (mínimo número de vértices cuya eliminación da como resultado un grafo no conexo o trivial), con orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ (mínimo número de lados incidentes a un vértice). Un subconjunto S de $V(G)$ es un conjunto balanceado de vértices independientes, si sus vértices son mutuamente no adyacentes en G y la mitad de sus elementos están en una clase de la partición. Si S es un conjunto balanceado de vértices independientes, $N(S)$ denota el conjunto formado por los vecinos de los vértices de S .

G es hamiltoniano, si contiene un ciclo hamiltoniano (ciclo que contiene todos los vértices del grafo sin repetir ninguno) y es hamilton conectado, si para cualquier par de vértices u en X y v en Y existe un camino hamiltoniano (camino que contiene todos los vértices del grafo sin repetir ninguno) que los conecte.

El estudio de la hamiltonocidad y hamilton conectividad, tanto en grafos como en grafos bipartitos, es muy amplio. Se puede trabajar con estas propiedades utilizándose algunos parámetros como, por ejemplo, la conectividad, el orden del ciclo máximo, cardinalidad de unión de vecindades y mínimo grado de un vértice (en el capítulo uno damos las definiciones y notaciones que utilizaremos en este trabajo). El problema de la hamiltonicidad nace con Will Hamilton (1805-1865) quien crea el juego icosiano que consistía en un dodecaedro, en el cual, se debía pasar por todos los vértices de éste solo una vez. No fue hasta 1952 y 1960 que Dirac y Ore en [11] y [19], respectivamente, lograron con condiciones suficientes para el mínimo grado y la suma de grados de vértices independientes en función del número de vértices, garantizar que un grafo es hamiltoniano.

Luego, en 1963, Moon y Moser en [18] lograron un resultado para que un grafo sea hamiltoniano en función del número de vértices pero en grafos bipartitos balanceados.

Más tarde, Faudree et al en el 1987, 1989, 1991, 1992 en [15], [14], [13] y [12], respectivamente lograron un resultado de manera semejante pero usando por primera vez la unión de vecindades en función del número de vértices

Asimismo, Jackson en el 1991, en [16] y Broersman en el 1993, en [9] lo hicieron con grafos simples tres conexos.

Ya para 1998, Amar et al. en [3] , consideraron la unión de vecindades, $N(S)$, con un conjunto independiente balanceado S de cardinalidad cuatro y $|N(S)|$ en función de n , para garantizar la hamiltonicidad de un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado al menos tres.

Recién en los últimos años se puede encontrar el uso de las vecindades en función del número de vértices como una condición suficiente para garantizar la hamiltonicidad de un grafo simple bipartito balanceado, véase por ejemplo el trabajo de Chen y otros en el 2002, en [10],o lo publicado por Amar, Flandrin y Gancarzewicz en el 2009, en [4].

En el año 2010, Brito, Mago y Marín en [8] demostraron lo siguiente: Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos tres. Si para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad cuatro tenemos que $|N(S)| > n + 2$, entonces G es hamilton conectado.

Considerándose el resultado anterior, en el capítulo dos, se demostrará que si G es un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro, tal que para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad cuatro tenemos que $|N(S)| \geq n + 2$, entonces G es hamilton conectado. En cuya prueba se usara el subgrafo llamado un 1-2-dumbell de un grafo bipartito balanceado G , figura 1, el cual es definido como un 2-dumbell (es decir, un subgrafo de G que consiste en dos ciclos vértices disjuntos C_1 y C_2 , unidos por dos caminos vértices disjuntos P_1 y P_2 con $V(C_i) \cap V(P_i) = \phi$, para todo $i = 1, 2$, tal que los vecinos de P_1 en C_1 y en

C_2 son consecutivos con los vecinos de P_2 en C_1 y en C_2 respectivamente) en el que uno de los extremos de un camino son adyacentes a los extremos del otro camino. Además, los vecinos consecutivos de los extremos de los caminos en el ciclo, tienen un vecino a distancia uno de los extremos del otro camino. Los resultados obtenidos en este capítulo fueron aceptados para ser publicados en International Journal of Pure and Applied Mathematics.

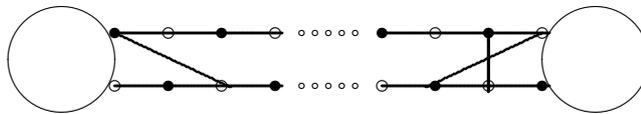


Figura 1: The 1- 2-dumbbell

Por otro lado, en el año 2002, Kaneko y Yoshimoto en [17] establecieron que en un grafo bipartito balanceado 3 - conexo, $c(G) \geq 2\sigma_{1,1}$ o G es hamiltoniano; donde $\sigma_{1,1}$ es la menor suma de los grados de un conjunto de vértices independientes de cardinalidad dos.

Luego en el año 2009, Alcalá en [1] adaptó y demostró este resultado para un grafo bipartito balanceado 3 conexo de mínimo grado al menos tres y S un conjunto de vértices independientes de cardinalidad cuatro; obteniendo así lo siguiente: Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 3 conexo de orden $2n$ y mínimo grado al menos tres, entonces G es un grafo hamiltoniano o $\sigma_{2,2} \leq c(G) + 2$; donde $\sigma_{2,2}$ es la menor suma de los grados de un conjunto de vértices independientes de cardinalidad cuatro.

Siguiéndose esta misma idea, y usándose conjuntos independientes balancea-

dos de cardinalidad seis, en grafos bipartitos balanceados 3 conexo en el, capítulo tres se demostrará lo siguiente: Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 3-conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco entonces, G es hamiltoniano o $|N(S)| \leq c(G) + 2$ para cada conjunto independiente balanceado S de G , de cardinalidad seis.

Extendiéndose de esta manera a seis vértices independientes, el resultado de Alcalá, en [1].

Además, En el año 2007, Brito y Lárez en [7], establecieron lo siguiente: Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro. Si $|N(S)| \geq n + 1$ para cada conjunto independiente balanceado S , entonces G es hamiltoniano.

En el capítulo cuatro se utilizó conjuntos independientes balanceados de cardinalidad seis, en grafos bipartitos balanceados de orden $2n$ y mínimo grado al menos cinco, para demostrar lo siguiente: Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si $|N(S)| \geq n + 1$ entonces el grafo es hamiltoniano.

Extendiendo de esta manera a seis vértices independientes, el resultado de Brito y Lárez , en [7].

Los resultados del capítulo cuatro de esta tesis, forman parte de la siguiente publicacion:

ALCALÁ Y.,BRITO D. y MARÍN L.. *The Hamiltonicity of Balanced Bipartite Graphs Involving Balanced Independent Set*. International Mathematical Forum 8,28: 1353-1358. 2013.

Capítulo 1

DEFINICIONES Y NOTACIONES

En este primer capítulo se darán las definiciones y notaciones básicas que se ilustran con ejemplos sencillos necesarias para el desarrollo de este trabajo. Las cuales fueron extraídas de Bondy y Murty en [6].

Definición 1.1. *GRAFO:* Un grafo G , es un par de conjuntos (V, E) , donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices o nodos y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V , llamados lados o aristas. El grafo G se denota por $G = (V, E)$. Si G no contiene lazos ni lados múltiples, se dice que es un grafo simple.

Ejemplo 1.1. *En el grafo de la figura 1.1.*

$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \text{ y } E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

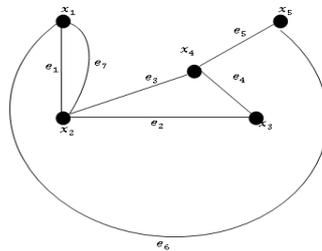


Figura 1.1: Grafo $G = (V, E)$

Definición 1.2. *GRAFO BIPARTITO:* Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito, si el conjunto de sus vértices puede particionarse en dos conjuntos X y Y , diferentes del vacío, de tal forma que todo par de vértices del mismo conjunto de la partición no forman un lado. Si $V = X \cup Y$, denotamos el grafo bipartito por $G = (X \cup Y, E)$.

Ejemplo 1.2. Ver figura 1.2.

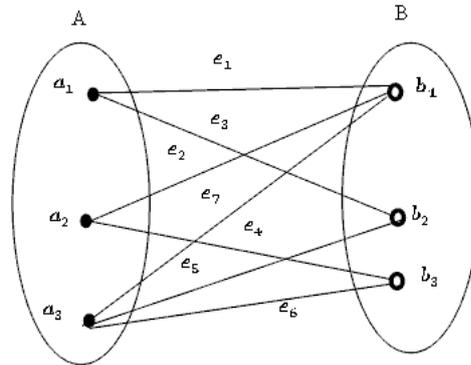


Figura 1.2: Grafo Bipartito

Definición 1.3. *ORDEN DE UN GRAFO BIPARTITO:* Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito tal que $|X| = n$ y $|Y| = m$. Entonces el orden de G , denotado por $|V|$, es igual a $m + n$. Si $|X| = |Y| = n$, se dice que G es balanceado y su orden es $2n$.

Ejemplo 1.3. El grafo de la figura 1.2. es un grafo bipartito balanceado con $|A| = |B| = 3$; es decir, de orden 6.

Definición 1.4. *VÉRTICES ADYACENTES:* Si $e = uv$ representa un lado de un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$, se dice que u y v son vértices adyacentes o vecinos y que el lado e es incidente a los vértices u y v . Si los vértices u y v no son adyacentes, se dice que son vértices independientes de G . El conjunto de vecinos de un vértice u de $G = (X \cup Y, E)$, se denota por $N_G(u)$ o simplemente $N(u)$; es decir $N(u) = \{v \in V : uv \in E\}$.

Ejemplo 1.4. En la figura 1.2. e_1 conecta o une a los vértices a_1 y b_2 . Estos vértices son adyacentes o vecinos y $N_G(b_1) = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Definición 1.5. GRADO DE UN VÉRTICE: El grado de un vértice u de un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$, denotado por $d_G(u)$ o simplemente $d(u)$, es el número de lados, de G , incidentes con u ; es decir, $d(u) = |N(u)|$.

Ejemplo 1.5. En la figura 1.2. $d_G(a_3) = 3$ y $d_G(b_2) = 2$.

Definición 1.6. MÍNIMO GRADO: El mínimo grado de un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$, denotado por $\delta(G)$ o simplemente δ , está definido por $\delta = \min\{\delta_X, \delta_Y\}$; donde $\delta_X = \min\{d(u) : u \in X\}$ y $\delta_Y = \min\{d(v) : v \in Y\}$.

Ejemplo 1.6. En la figura 1.2. $\delta(G) = 2$.

Definición 1.7. LADOS ADYACENTES: Si e_i y e_j representan dos lados de un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ con un vértice extremo en común, entonces se dice que e_i y e_j son lados adyacentes. Si e_i y e_j no son adyacentes, se dice que son lados independientes.

Definición 1.8. CONJUNTO DE VÉRTICES INDEPENDIENTES: Un subconjunto S de $X \cup Y$, es un conjunto de vértices independientes de un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$, si para todo par de vértices u y v en S , tenemos que u y v no forman un lado. Se dice que S es un conjunto balanceado de G si $|S \cap X| = |S \cap Y|$.

Ejemplo 1.7. En la figura 1.2. $\{a_1, b_3\}$ es un conjunto de vértices independientes o estables.

Definición 1.9. CONJUNTO DE LADOS INDEPENDIENTES: Un subconjunto L de E , es un conjunto de lados independientes de un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$, si para todo par de lados e_i y e_j en L , tenemos que e_i y e_j no son adyacentes. Un conjunto de lados independientes de G , se dice que es un matching de G .

Definición 1.10. MATCHING PERFECTO: Si M es un matching de un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ con la propiedad que cada vértice de G es incidente con un lado de M , entonces se dice que M es un matching perfecto de G .

Ejemplo 1.8. En la figura 1.3. $M = \{e_1, e_4, e_{12}\}$ es un Matching y $M = \{e_1, e_5, e_6, e_{11}\}$ es un Matching perfecto en G .

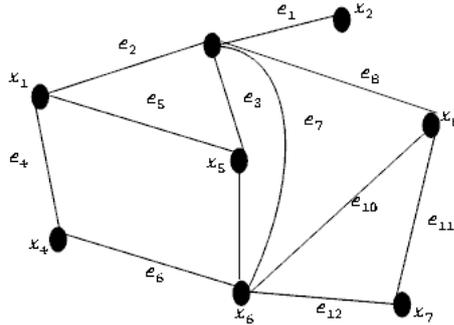


Figura 1.3: Grafo $G = (V, E)$

Definición 1.11. CAMINO: Un camino P es una sucesión finita no nula $u_0e_1u_1e_2\dots e_q u_q$ de vértices u_0, u_1, \dots, u_q y lados e_1, e_2, \dots, e_q tales que para cada $1 \leq i \leq q$ los vértices extremos de e_i son u_{i-1} y u_i . Se dice que $P = u_0, u_1, \dots, u_q$ es un camino que va desde el vértice u_0 hasta el vértice u_q y los vértices u_1, u_2, \dots, u_{q-1} se llaman internos. Si $u_0 = u_q$, se dice que P es un camino cerrado.

Si u y v son dos vértices de P , uP^+v y uP^-v representan el camino de P que une a u con v , siguiendo la orientación directa e inversa, respectivamente, acordada en el camino P .

Notación: La longitud del camino se denota por $|P|$ (es el número de lados). $|uP^+v|$ es la longitud del camino que va desde el vértice u hasta el vértice v en P .

Ejemplo 1.9. En la figura 1.3. $P = x_1e_4x_4e_6x_6e_{12}x_7$ es un camino que va del vértice x_1 al vértice x_7 , cuya longitud es $|P| = 3$.

Definición 1.12. *CAMINO ELEMENTAL:* Un camino P es elemental, si todos sus vértices son distintos.

Ejemplo 1.10. *El camino P del ejemplo 1.7. es un camino elemental.*

Definición 1.13. *CAMINO MAXIMAL:* Es un camino elemental P , en el cual $N_G(x_0) = \{x_l : x_l x_0 \in E(G)\}$ y $N_G(x_p) = \{x_l : x_l x_p \in E(G)\}$ están contenidos en P .

Ejemplo 1.11. *Ver figura 1.4.*

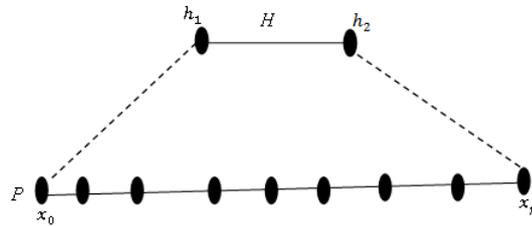


Figura 1.4: Camino P Maximal

Definición 1.14. *CAMINO CRUZADO:* Es un camino elemental P , en el cual si $x_i \in N_G(x_0)$ y $x_j \in N_G(x_q)$ entonces $i > j$.

Ejemplo 1.12. *Ver figura 1.5.*

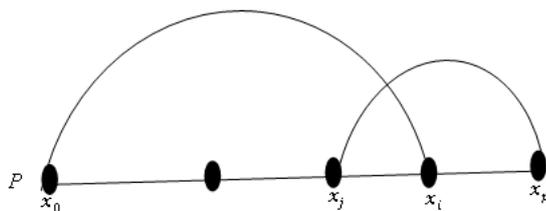


Figura 1.5: Camino P Cruzado

Definición 1.15. *CICLO:* Un ciclo C es un camino elemental en el cual sus vértices extremos coinciden.

Acordada una orientación arbitraria en C , el h -ésimo sucesor y el h -ésimo predecesor de un vértice u , en C , son denotados por u^{+h} y u^{-h} respectivamente; si $h = 1$, abreviamos u^{+1} por u^+ y u^{-1} por u^- . Si u y v son dos vértices de C , uC^+v y uC^-v representan el camino del ciclo que une a u con v , siguiendo la orientación directa e inversa, respectivamente.

Notación: La longitud del ciclo se denota por $|C|$ (es el número de vértices). $c(G)$ es el orden del ciclo de máxima longitud.

Ejemplo 1.13. En la figura 1.6. $C = x_4e_6x_1e_4x_5e_7x_4$ es un ciclo elemental de G cuya longitud es $|C| = 3$.

Definición 1.16. *CAMINO HAMILTONIANO:* Un camino P es hamiltoniano, si es un camino elemental que contiene todos los vértices del grafo.

Ejemplo 1.14. En la figura 1.6. $P = x_4e_7x_5e_2x_2e_1x_1e_5x_3$ es un camino hamiltoniano de G .

Definición 1.17. *CICLO HAMILTONIANO:* Un ciclo C es hamiltoniano, si es un camino hamiltoniano cerrado.

Ejemplo 1.15. En la figura 1.6. $C = x_4e_7x_5e_2x_2e_1x_1e_5x_3e_3x_4$ es un ciclo hamiltoniano de G cuya orden es $c(G) = 6$.

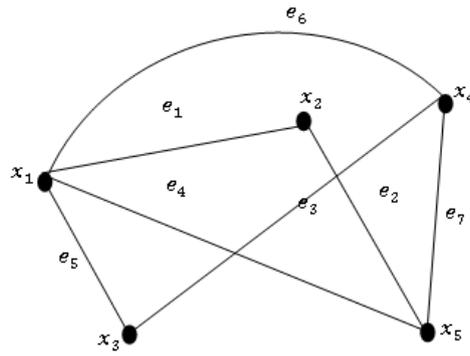


Figura 1.6: Grafo $G = (V, E)$

Definición 1.18. *GRAFO HAMILTONIANO:* Un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ es hamiltoniano, si contiene un ciclo hamiltoniano.

Definición 1.19. *GRAFO BIPARTITO CONEXO:* Un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ es conexo, si para cualquier par de vértices, en $X \cup Y$, existe un camino que los une o es el grafo trivial. En caso contrario, se dice que G es no conexo o desconexo.

Ejemplo 1.16. Ver figura 1.7.

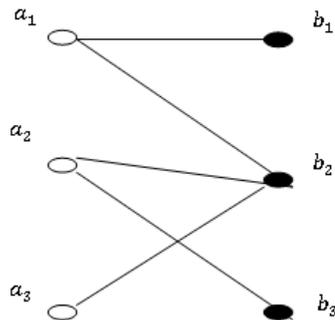


Figura 1.7: Grafo Conexo

Definición 1.20. *VÉRTICE CONECTIVIDAD:* La vértice conectividad de un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$, denotada por $\kappa(G)$ o simplemente κ , es el mínimo número de vértices cuya eliminación desconecta al grafo o lo reduce a un solo vértice. Un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ es h -conexo si su vértice conectividad κ es mayor o igual que h .

Ejemplo 1.17. *El grafo de la figura 1.7. es 2-conexo por ser $G - \{a_1, b_2\}$ un grafo desconexo, ver figura 1.8.*

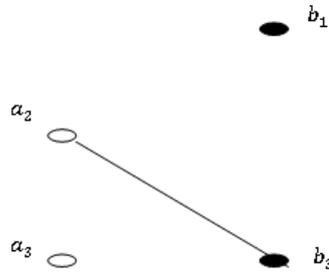


Figura 1.8: $G - \{a_1, b_2\}$

Definición 1.21. *GRAFO BIPARTITO HAMILTON CONECTADO:* Un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ es hamilton conectado, si para cada par de vértices u en X y v en Y existe un camino hamiltoniano que los una.

Ejemplo 1.18. *Ver figura 1.9.*

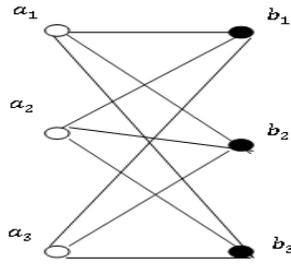


Figura 1.9: Grafo Hamilton conectado

Definición 1.22. *GRAFO 2-DUMBBELL:* Es un subgrafo de G que consiste en dos ciclos vértices disjuntos C_1 y C_2 , unidos por dos caminos vértices disjuntos P_1 y P_2 con $V(C_i) \cap V(P_i) = \phi$, para todo $i = 1, 2$, tal que los vecinos de P_1 en C_1 y en C_2 son consecutivos con los vecinos de P_2 en C_1 y en C_2 respectivamente. Un 2-dumbbell generador D es maximal, si los caminos P_1 y P_2 son tan largos como sea posible entre todos los 2-dumbbells generadores.

Ejemplo 1.19. Ver figura 1.10.

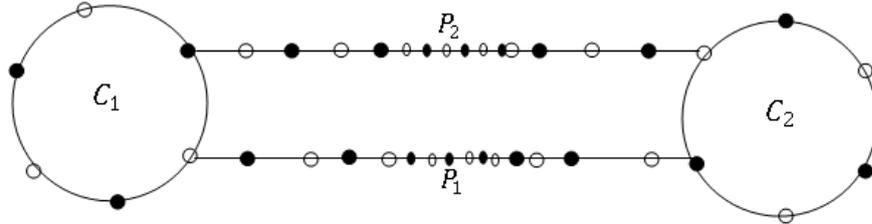


Figura 1.10: 2-Dumbbell

Las definiciones y notaciones no dadas en este capítulo, las encontramos en [5].

Capítulo 2

HAMILTON CONECTIVIDAD EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS

Un grafo bipartito balanceado $G = (X \cup Y, E)$ es hamilton conectado, si para cada par de vértices de G , en clases diferentes existe un camino hamiltoniano que los une.

Las investigaciones de ciertos problemas en grafos que involucran condiciones de unión de vecindades, en lugar de suma de grados, fue iniciada por Faudree et al en [14], con el siguiente resultado:

Teorema 2.1. ([14]).

Sea G un grafo 2-conexo de orden n . Si para cada par de vértices no adyacentes u y v en G , tenemos que:

i.- $|N(u) \cup N(v)| \geq (2n - 1)/3$, G es hamiltoniano.

ii.- $|N(u) \cup N(v)| \geq (n - 1)/2$, G es traceable.

iii.- $|N(u) \cup N(v)| \geq (2n + 1)/3$ y G es 3-conexo, G es hamilton conectado.

Mientras que en grafos bipartitos balanceados fue iniciada por Amar et al en [3], involucrando la condición de unión de vecindades para conjuntos independientes balanceados de cardinalidad cuatro. Ellos plantearon lo siguiente: Sea $G = (X \cup Y, E)$

el grafo bipartito balanceado H_{14} , el cual denota la clase de todos los grafos obtenidos a partir de la figura 2.1, donde algunos, o todos, de los cuatro lados que une la parte superior con la parte inferior pueden estar también presentes.

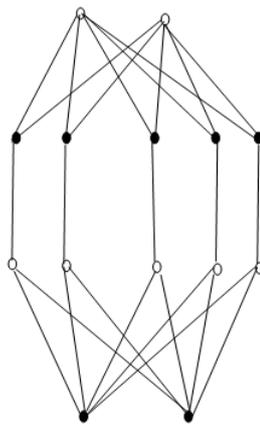


Figura 2.1: Grafo Minimal de H_{14} .

Ellos conjeturaron lo siguiente:

Conjetura 1. ([3]). Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos tres. Si para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad cuatro tenemos que $|N(S)| > n$, entonces G es hamiltoniano o $G \in H_{14}$, figura 2.1.

En el año 1998 Amar et al en [3] demostraron lo siguiente:

Teorema 2.2. ([3]).

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos tres. Si para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad cuatro tenemos que $|N(S)| > n + 2$, entonces G es hamiltoniano.

En el año 2007 Brito y Lárez en [7] demostraron lo siguiente:

Teorema 2.3. ([7]).

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro. Si para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad cuatro tenemos que $|N(S)| > n$, entonces G es hamiltoniano.

En el año 2010, Brito, Mago y Marín en [8] demostraron lo siguiente:

Teorema 2.4. ([8]).

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos tres. Si para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad cuatro tenemos que $|N(S)| > n + 2$, entonces G es hamilton conectado.

Siguiendo esta misma idea, en este capítulo, se utilizaron conjuntos independientes balanceados de cardinalidad cuatro, en grafos bipartitos balanceados, para demostrar que si el número de elementos del conjunto de vecinos de un conjunto independiente balanceado cualquiera, de cardinalidad cuatro, supera a la mitad del orden del grafo más dos, entonces entre cualquier par de vértices, en clases diferentes, existe un camino hamiltoniano que los une; obteniéndose de esta manera, una mejora de la cota del resultado de Brito, Mago y Marín en [8].

Primeramente se demostrará el siguiente lema, en cuya prueba se usará el subgrafo llamado un 1-2-dumbbell de un grafo bipartito balanceado G , figura 2.2, el cual es definido como un 2-dumbbell en el que uno de los extremos de un camino es adyacentes al extremo del otro camino. Además, los vecinos consecutivos de los extremos de los caminos en el ciclo, tienen un vecino a distancia uno de los extremos del otro camino.

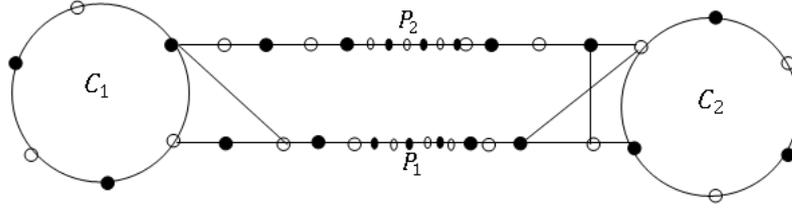


Figura 2.2: El 1-2- dumbbell.

Lema 2.1. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado hamiltoniano de orden $2n$ con mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro y que contiene un 1 – 2 dumbbell generador. Si G no es Hamilton conectado entonces existe un conjunto independiente balanceado S de cardinalidad cuatro tal que $N^-(S \cap X) \cap N(S \cap Y) = \emptyset$.*

Prueba:

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ con mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro, que contiene un ciclo hamiltoniano y un 2 dumbbell generador D , que consiste en dos ciclos vértices disjuntos C_1 y C_2 unidos por dos caminos vértices disjuntos P_1 y P_2 . Sean a_r un vértice de C_1 , vecino de un extremo de P_2 , y b_j un vértice de C_2 , vecino del otro extremo de P_2 . Similarmente, sean b_s un vértice de C_1 , vecino de un extremo de P_1 , y a_t un vértice de C_2 , vecino del otro extremo de P_1 , tal que a_r y b_s sean vértices consecutivos en C_1 y a_t y b_j sean vértices consecutivos en C_2 con orientación $a_r C_1^+ b_s P_1 a_t C_2^+ b_j P_2 a_r$.

Por definición de 1 – 2 dumbbell y la orientación dada, en D , están los lados $a_r b_s^{++}$, $b_j a_t^{--}$ y $b_j^+ a_t^-$.

Como G no es hamilton conectado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que G no tiene un uv - camino hamiltoniano, con $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$.

Entonces, para garantizar la existencia de un conjunto S independiente balanceado de cardinalidad cuatro se tiene:

i.- Los vértices a_r y b_j no forman un lado en G .

En efecto:

Supóngase que a_r y b_j forman un lado en G . Entonces, el camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices ; $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$ lo cual es una contradicción. Ver figura 2.3.

Así, $a_r b_j \notin E(G)$.

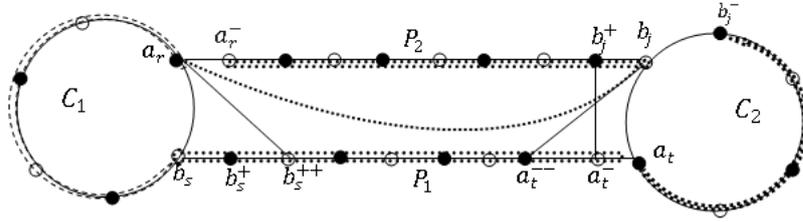


Figura 2.3: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

ii.- Los vértices a_r y a_t^- no forman un lado en G .

En efecto:

Supóngase que a_r y a_t^- forman un lado en G . Entonces, el camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices ; $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$ lo cual es una contradicción. Ver figura 2.4.

Así, $a_r a_t^- \notin E(G)$.

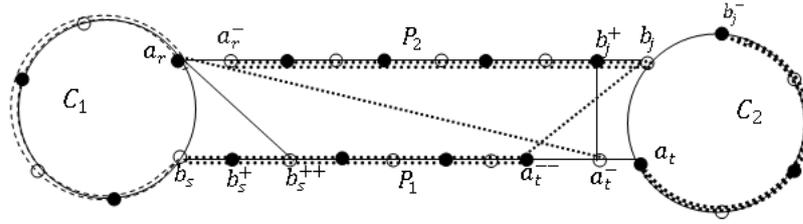


Figura 2.4: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

iii.- Los v3rtices b_s^+ y b_j no forman un lado en G .

En efecto:

Sup3ngase que b_s^+ y b_j forman un lado en G . Entonces, el camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v3rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci3n. Ver figura 2.5.

As3, $b_s^+ b_j \notin E(G)$.

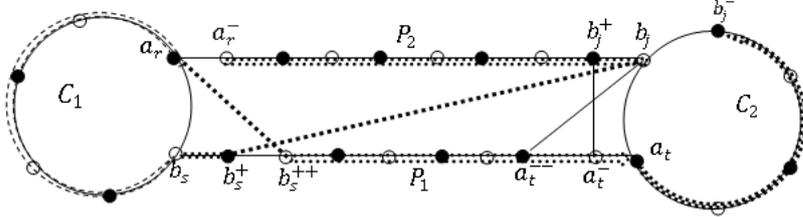


Figura 2.5: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

iv.- Los v3rtices b_s^+ y a_t^- no forman un lado en G .

En efecto:

Sup3ngase que b_s^+ y a_t^- forman un lado en G . Entonces, el camino

$P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v3rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci3n. Ver figura 2.6.

Así, $b_s^+ a_t^- \notin E(G)$.

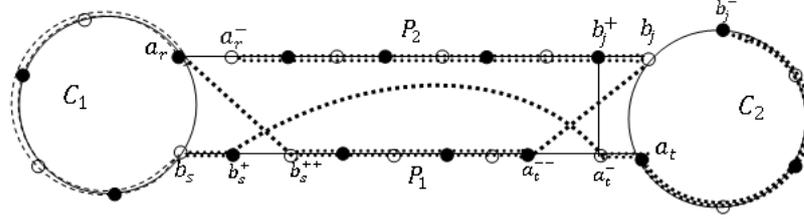


Figura 2.6: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Por lo tanto, $S = \{a_r, b_j, b_s^+, a_t^-\}$ es un conjunto independiente, de cardinalidad cuatro.

Sean, sin pérdida de generalidad, a_r^- en X y b_j^- en Y los vértices que no están conectados por un camino hamiltoniano en G .

Sea, $S = \{a_r, b_j, b_s^+, a_t^-\}$ con $a_r, b_s^+ \in Y$ y $b_j, a_t^- \in X$ y supongamos que $N^-(S \cap Y) \cap N(S \cap X) \neq \emptyset$.

Sea, $a_k \in (N^-(S \cap Y) \cap N(S \cap X))$ entonces, $a_k \in (N^-(a_r, b_s^+))$ y $a_k \in (N(b_j, a_t^-))$

Luego, por definición $a_k^+ a_r \in E(G)$ o $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$ o $a_k a_t^- \in E(G)$.

Considérense los siguientes casos:

Caso I. $1 < k < s < t < j < r^-$

Si $a_k^+ a_r \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j a_k C_1^- a_r a_k^+ C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.7.

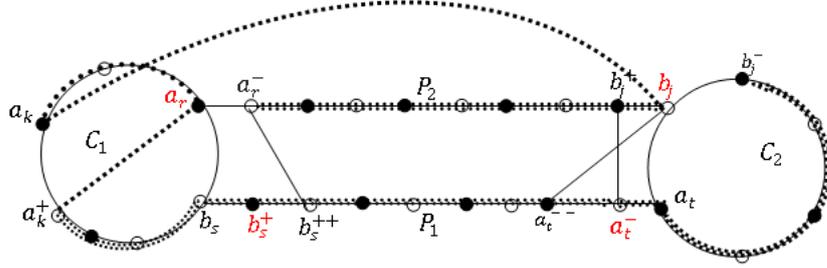


Figura 2.7: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j a_k C_1^- a_r a_k^+ C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ a_r \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_k^+ a_r C_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.8.

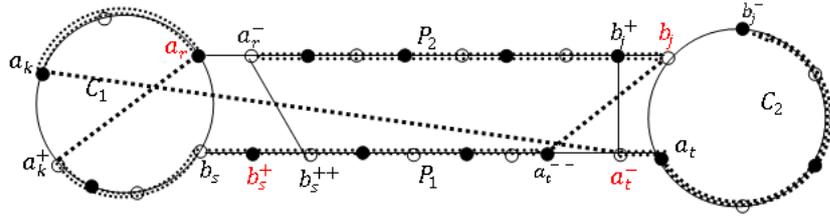


Figura 2.8: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_k^+ a_r C_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k C_1^- a_k^+ b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.9.

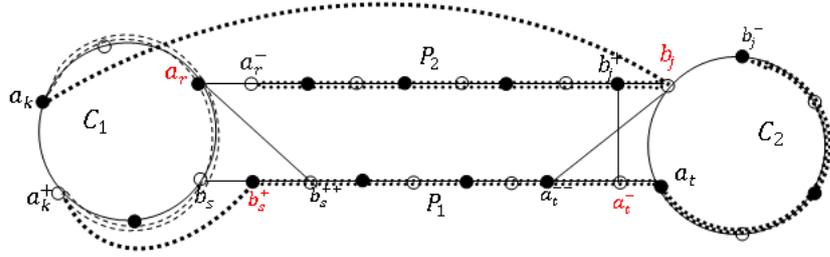


Figura 2.9: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k C_1^- a_k^+ b_s^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^+ a_k^+ C_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.10.

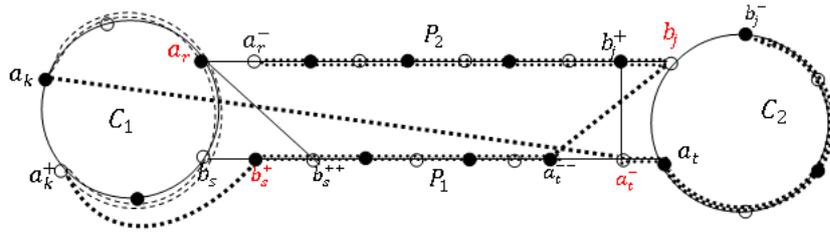


Figura 2.10: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- b_s^+ a_k^+ C_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Caso II. $1 < s < k < t < j < r^-$

Si $a_k^+ a_r \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_k^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.11.

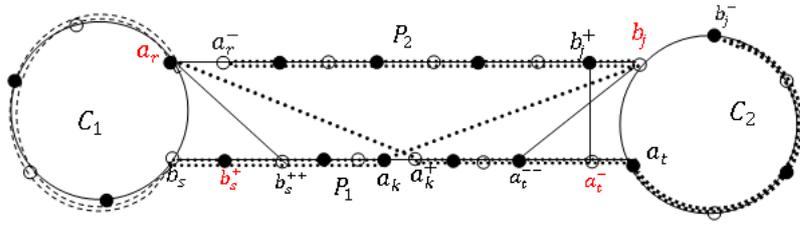


Figura 2.11: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_k^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ a_r \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.12.

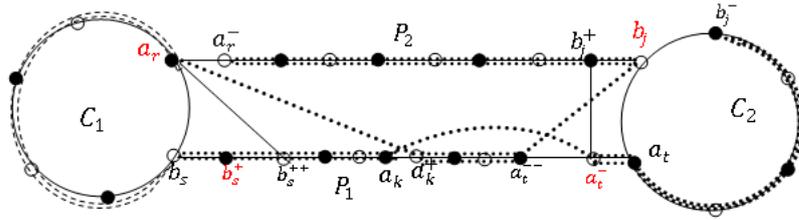


Figura 2.12: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k P_1^- b_s^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_k^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.13.

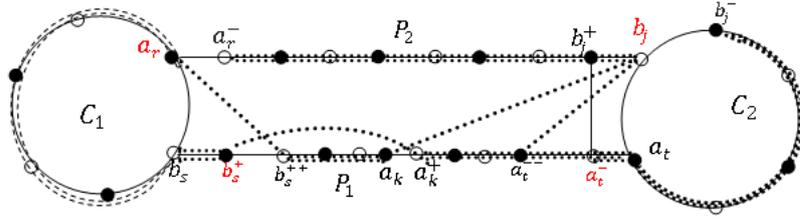


Figura 2.13: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_k^+ P_1^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v\u00e9rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci\u00f3n. Ver figura 2.14.

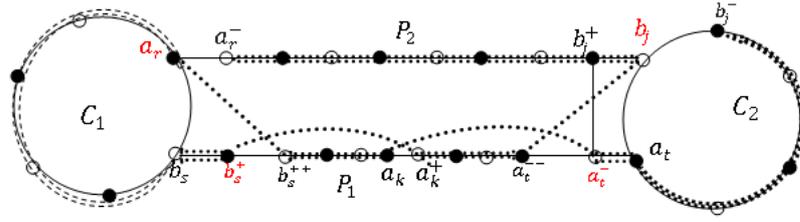


Figura 2.14: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Caso III. $1 < s < t < k < j < r^-$.

Si $a_k^+ a_r \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j a_k C_2^- a_t a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_k^+ C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v\u00e9rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci\u00f3n. Ver figura 2.15.

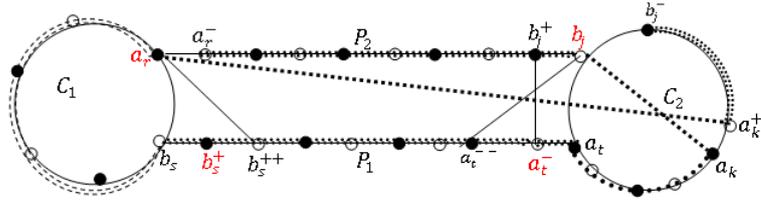


Figura 2.15: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_k C_2^- a_t a_t^- P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_k^+ C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v\u00e9rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci\u00f3n. Ver figura 2.16.

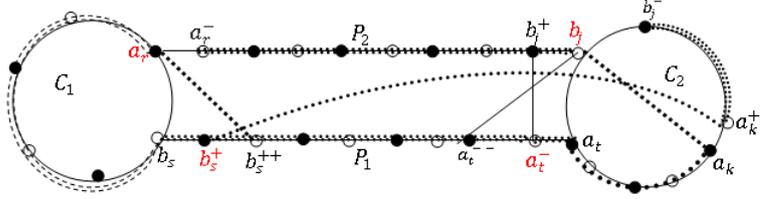


Figura 2.16: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ a_r \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j C_2^- a_k a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_k^+ C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v\u00e9rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci\u00f3n. Ver figura 2.17.

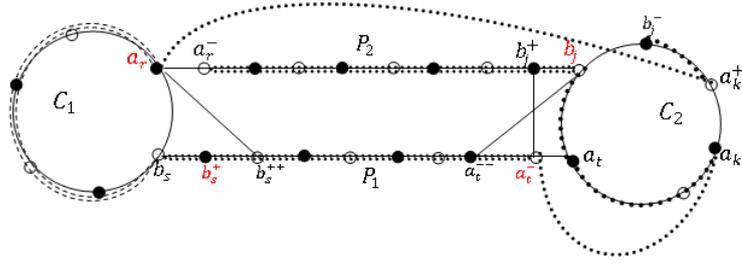


Figura 2.17: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t^- P_1^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_k a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ a_r^- \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t C_2^+ a_k a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_k^+ C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.18.

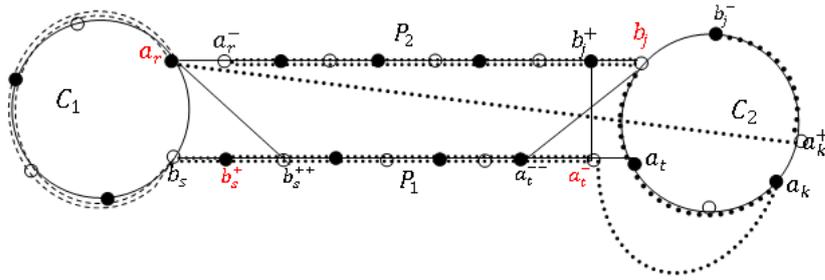


Figura 2.18: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t C_2^+ a_k a_t^- P_1^- b_s^+ b_s C_1^- a_r a_k^+ C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t C_2^+ a_k a_t^- P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_k^+ C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los vértices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicción. Ver figura 2.19.

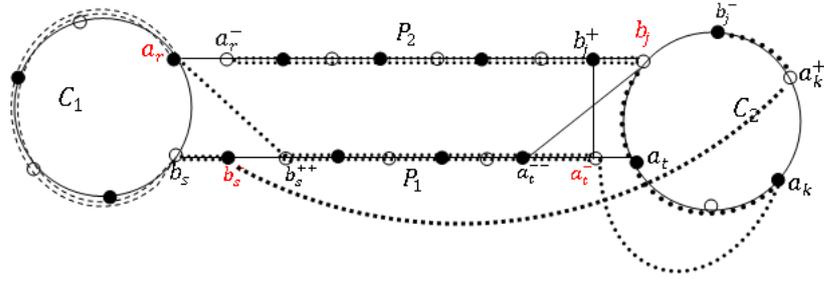


Figura 2.19: Camino $P = a_r^- P_2^- b_j^+ b_j a_t C_2^+ a_k a_t^- P_1^- b_s^{++} a_r C_1^+ b_s b_s^+ a_k^+ C_2^+ b_j^-$.

Caso IV. $1 < s < t < j < k < r^-$.

Si $a_k^+ a_r \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$. Entonces el camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- b_j a_k P_2^- b_j^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v\u00e9rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci\u00f3n. Ver figura 2.20.

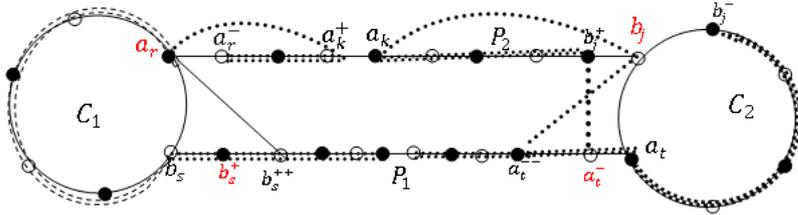


Figura 2.20: Camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- b_j a_k P_2^- b_j^+ a_t^- a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ a_r \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_k P_2^- b_j a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v\u00e9rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci\u00f3n. Ver figura 2.21.

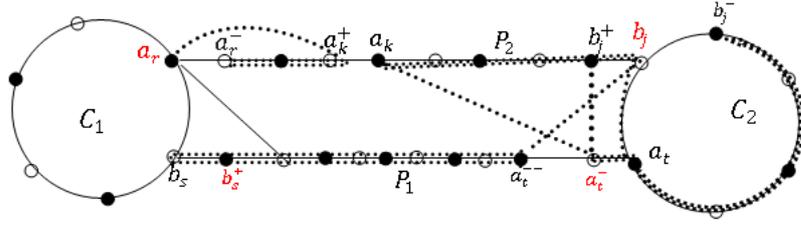


Figura 2.21: Camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ a_r C_1^+ b_s b_s^+ P_1^+ a_t^- a_k P_2^- b_j a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k b_j \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- b_j^+ P_2^+ a_k b_j a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v\u00e9rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci\u00f3n. Ver figura 2.22.

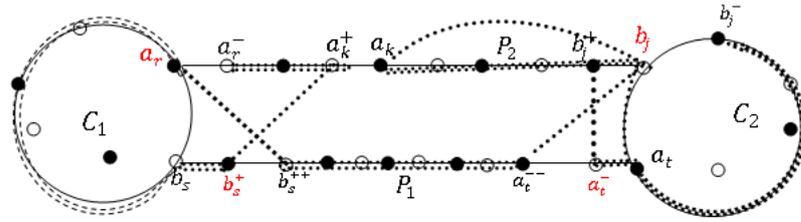


Figura 2.22: Camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- b_j^+ P_2^+ a_k b_j a_t C_2^+ b_j^-$.

Si $a_k^+ b_s^+ \in E(G)$ y $a_k a_t^- \in E(G)$. Entonces el camino, $P = a_r^- P_2^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- a_k P_2^- b_j a_t C_2^+ b_j^-$ es un camino hamiltoniano, en G , que une a los v\u00e9rtices $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$; lo cual es una contradicci\u00f3n. Ver figura 2.23.

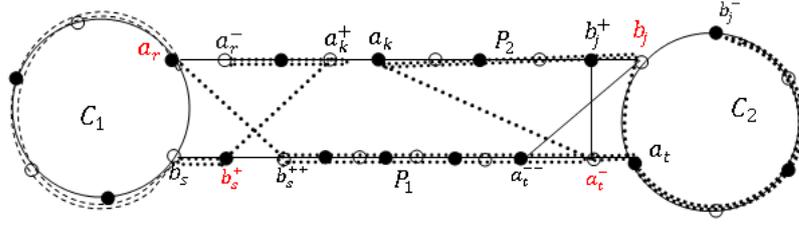


Figura 2.23: Camino $P = a_r^- P_2^- a_k^+ b_s^+ b_s C_1^- a_r b_s^{++} P_1^+ a_t^- a_k P_2^- b_j a_t C_2^+ b_j^-$.

En consecuencia, $N^-(S \cap X) \cap N(S \cap Y) = \emptyset$.

□

Teorema 2.5. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado hamiltoniano de orden $2n$ con mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro y que contiene un 1 – 2 dumbbell generator. Si para cada conjunto independiente balanceado, S , de cardinalidad cuatro se tiene que $|N(S)| \geq n + 2$, entonces G es hamilton conectado.*

Prueba:

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ con mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro, que contiene un ciclo hamiltoniano y un 2 dumbbell generator D , que consiste en dos ciclos vértices disjuntos C_1 y C_2 unidos por dos caminos vértices disjuntos P_1 y P_2 . Sean a_r un vértice de C_1 , vecino de un extremo de P_2 , y b_j un vértice de C_2 , vecino del otro extremo de P_2 . Similarmente, sean b_s un vértice de C_1 , vecino de un extremo de P_1 , y a_t un vértice de C_2 , vecino del otro extremo de P_1 , tal que a_r y b_s sean vértices consecutivos en C_1 y a_t y b_j sean vértices consecutivos en C_2 , con orientación $a_r C_1^+ b_s P_1 a_t C_2^+ b_j P_2 a_r$.

Por definición de 1 – 2 dumbbell y la orientación dada, en D , están los lados $a_r b_s^{++}$, $b_j a_t^{--}$ y $b_j^+ a_t^-$.

Supongamos G no es Hamilton conectado, es decir podemos suponer sin pérdida de generalidad que G no tiene un uv -camino hamiltoniano, con $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$.

Por lema 2.1 existe un conjunto independiente de cardinalidad cuatro $S = \{a_r, b_j, b_s^+, a_t^-\}$ tal que $N^-(S \cap X) \cap N(S \cap Y) = \emptyset$.

Como G no es hamilton conectado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que G no tiene un uv - camino hamiltoniano, con $u = a_r^-$ y $v = b_j^-$.

Entonces,

$$\begin{aligned} n + 2 &\leq |N(S)| = |N(a_r, b_s^+)| + |N(b_j, a_t^-)| = |N^-(a_r, b_s^+)| + |a_r^-| + |N(b_j, a_t^-)| \\ &\leq |N^-(a_r, b_s^+) \cup N(b_j, a_t^-)| + 1 \leq |Y| + 1 \leq n + 1. \end{aligned}$$

Lo cual contradice la hipótesis del teorema

□

Ejemplo 2.1. Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden 18 con mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro, que contiene un ciclo hamiltoniano, figura 2.24 y un 2 dumbbell generador D , que consiste en dos ciclos vértices disjuntos C_1 y C_2 unidos por dos caminos vértices disjuntos P_1 y P_2 , figura 2.25.

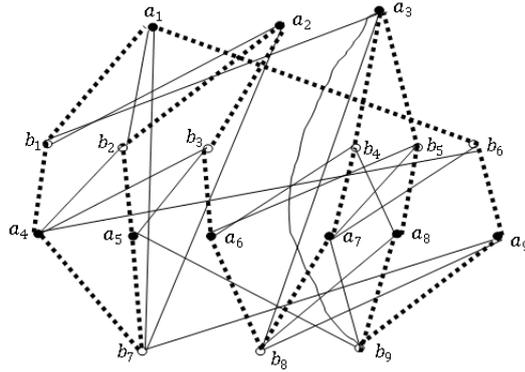


Figura 2.24: Grafo bipartito balanceado de orden 18 con ciclo hamiltoniano.

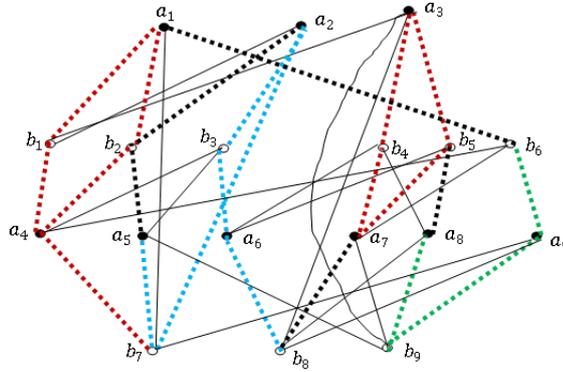


Figura 2.25: Dumbbell generator D con $C_1 = a_1b_1a_4b_2a_1$, $C_2 = a_7b_4a_3b_5a_7$, $P_1 = a_5b_7a_2b_3a_6b_8$ y $P_2 = a_8b_9a_9b_6$.

Sean a_1 un vértice de C_1 , vecino de un extremo de P_2 , y b_5 un vértice de C_2 , vecino del otro extremo de P_2 . Similarmente, sean b_2 un vértice de C_1 , vecino de un extremo de P_1 , y a_7 un vértice de C_2 , vecino del otro extremo de P_1 , tal que a_1 y b_2 sean vértices consecutivos en C_1 y a_7 y b_5 sean vértices consecutivos en C_2 , con orientación $a_1 C_1^+ b_2 P_1 a_7 C_2^+ b_5 P_2 a_1$. Ver figura 2.26.

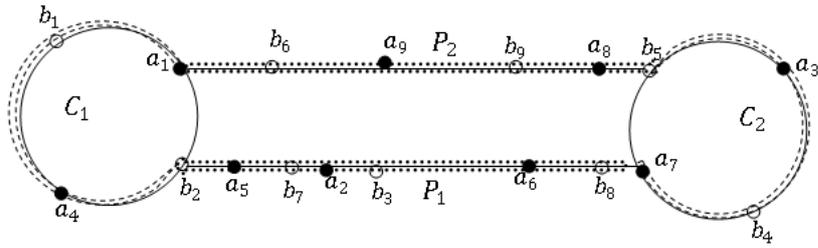


Figura 2.26: Dumbbell D .

Por definición de 1 – 2 dumbbell y la orientación dada, en D , están los lados a_1b_7 , b_5a_6 y b_8a_8 . Ver figura 2.27.

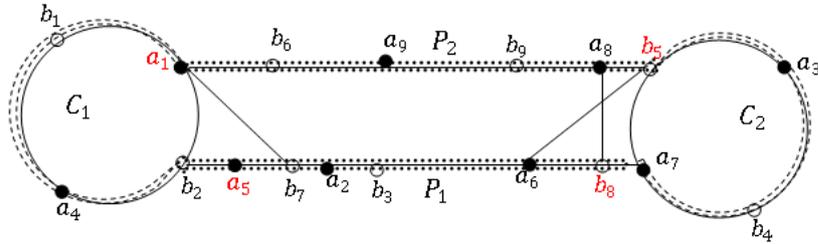


Figura 2.27: 1 – 2 Dumbbell.

Supongamos G no es Hamilton conectado, es decir podemos suponer sin pérdida de generalidad que G no tiene un uv -camino hamiltoniano, con $u = b_6$ y $v = a_3$.

Por lema 2.1 existe un conjunto independiente de cardinalidad cuatro $S = \{a_1, a_5, b_8, b_5\}$ tal que $N^-(a_1, a_5) \cap N(b_8, b_5) = \emptyset$.

Como G no es hamilton conectado, podemos suponer sin pérdida de generalidad que G no tiene un uv - camino hamiltoniano, con $u = b_6$ y $v = a_3$.

Sean, sin pérdida de generalidad, $a_1, a_5 \in X$ y $b_8, b_5 \in Y$.

Luego se tiene que $a_1b_9 \notin E(G)$, $a_5b_9 \notin E(G)$, $a_1b_4 \notin E(G)$ y $a_5b_4 \notin E(G)$,

$a_4b_8 \notin E(G)$ y $a_4b_5 \notin E(G)$

Entonces, $N^-(a_1, a_s) = \{a_1, a_2, a_4, a_5, b_9\}$ y $N(b_8, b_5) = \{a_6, a_7, a_8, a_9, a_3\}$. Ver figura 2.28.

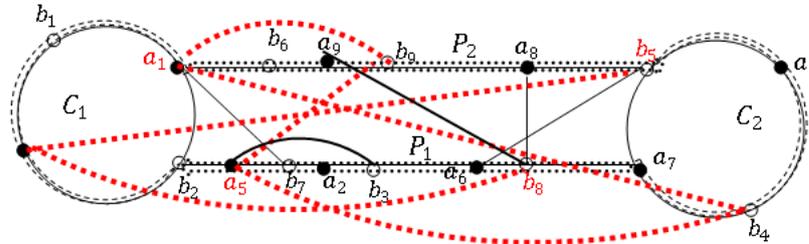


Figura 2.28: Conteo de vecinos.

Así

$$|N(S)| = |N(a_4, a_2)| + |N(b_5, b_8)| = |N^-(a_1, a_5)| + |N(b_8, b_5)| = 5+5 = 10.$$

Lo cual contradice la hipótesis del teorema

Como consecuencia inmediata se tiene:

Corolario 2.1. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado hamiltoniano de orden $2n$ con mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro y que contiene un 1 – 2 dumbbell generador. Si para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad cuatro tenemos que la suma de sus grados es al menos $n+2$, entonces G es hamilton conectado.*

Capítulo 3

CICLOS DE MÁXIMA LONGITUD EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS

En un grafo bipartito balanceado $G = (X \cup Y, E)$, $c(G)$ denota el orden del ciclo de máxima longitud en G .

En el año 2002, Kaneko y Yoshimoto en [17] establecieron que en un grafo bipartito balanceado 3 - conexo, $c(G) \geq 2\sigma_{1,1}$ o G es hamiltoniano; donde $\sigma_{1,1}$ es la menor suma de los grados de un conjunto de vértices independientes de cardinalidad dos.

Luego en el año 2009, Alcalá en [1] adaptó y demostró este resultado para un grafo bipartito balanceado 3 conexo de mínimo grado al menos tres y S un conjunto de vértices independientes de cardinalidad cuatro; obteniendo lo siguiente:

Teorema 3.1. ([1]).

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 3 conexo de orden $2n$ y mínimo grado al menos tres, entonces G es un grafo hamiltoniano o $\sigma_{2,2} \leq c(G) + 2$; donde $\sigma_{2,2}$ es la menor suma de los grados de un conjunto de vértices independientes de cardinalidad cuatro.

En este capítulo se utilizaron conjuntos independientes balanceados de cardinalidad seis, en grafos bipartitos balanceados 3 conexo, de orden $2n$ y mínimo grado

al menos cinco, para demostrar que el grafo es hamiltoniano o el número de elementos del conjunto de vecinos de un conjunto independiente balanceado cualquiera, de cardinalidad seis es a lo más el orden del ciclo de máxima longitud más dos. Extendiendo de esta manera a seis vértices independientes, el resultado de Alcalá, en [1].

Primeramente se demostrarán los siguientes lemas:

Lema 3.1. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 3-conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si $P = x_1y_1, \dots, x_iy_i, \dots, x_py_p$ es un camino maximal de G , entonces existe un conjunto independiente balanceado de cardinalidad seis.*

Prueba:

Sean X, Y una bipartición balanceada de $V(G)$ y $P = x_1y_1, \dots, x_iy_i, \dots, x_py_p$ un camino maximal de G , tal que $x_1, \dots, x_i, \dots, x_p \in X$ y $y_1, \dots, y_i, \dots, y_p \in Y$.

Como G es de mínimo grado cinco y P es maximal, entonces x_1 y y_p tienen al menos cinco vecinos en P .

Sean, sin pérdida de generalidad, $y_i \in N_P(x_1)$ y $x_j \in N_P(y_p)$.

Como G es 3-conexo existe una componente $H = V(G) - V(P)$, con $2 \leq |H| \leq |i - j|$.

Sean, sin pérdida de generalidad, $h_k, h_l, h_t \in V(H)$ con $h_k \in N_{G-P}(x_j)$, $h_l \in N_{G-P}(y_i)$ y $h_t \in N_{G-P}(x_s)$; tal que la distancia del vértice x_s a los extremos del camino y sus vecinos es mayor que la cardinalidad de H . Consideremos los siguientes casos:

Caso I. P es un camino no cruzado.

Como G es de mínimo grado cinco y P es maximal, entonces x_1 y y_p tienen al menos cinco vecinos en P .

Sean, sin pérdida de generalidad, $y_i \in N_P(x_1)$; con $2 < i \leq k$ y $x_j \in N_P(y_p)$; con $k < q \leq j \leq p - 1$.

Como P es maximal entonces, $T = \{y_i^- \in V(P) : y_i \in N_P(x_1)\} \cup \{x_j^+ \in V(P) : x_j \in N_P(y_p)\} \cup \{x_1, y_p\}$, es un conjunto independiente de G con $|T| \geq 10$, y en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq T$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 3.1.

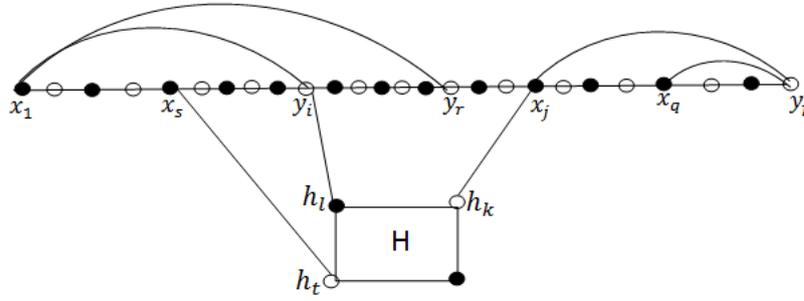


Figura 3.1: Grafo 3 conexo con camino maximal no cruzado.

Caso II. P es un camino cruzado.

Como P es un camino cruzado, entonces existe $y_i \in N_P(x_1)$ y $x_j \in N_P(y_p)$; tal que $i > j$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos $i = \max\{l : y_l \in N_P(x_1)\}$, $j = \min\{l : x_l \in N_P(y_p)\}$, $r = \max\{l : y_l \in N_P(x_1), 1 < l \leq j - 1\}$, $k = \min\{l : x_l \in N_P(y_p), i + 1 \leq l \leq p\}$, entonces $y_i, y_r \in N_P(x_1)$ y $x_j, x_k \in N_P(y_p)$

Sea $I_1 = x_2 P^+ y_r^-$, $I_2 = x_j^+ P^+ y_i^-$ y $I_3 = x_k^+ P^+ y_p^-$.

Como G es de mínimo grado cinco y P es maximal, entonces x_1 y y_p tienen al menos cinco vecinos en P .

Considérense los siguientes subcasos:

Subcaso II.1. $N_P(x_1) \cap I_2 = \emptyset$ y $N_P(y_p) \cap I_2 = \emptyset$.

Como P es maximal entonces, $T = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in N_P(x_1) \cap I_1\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in N_P(y_p) \cap I_3\} \cup \{x_1, y_r^-, x_k^+, y_p\}$, es un conjunto independiente de G con $|T| \geq 8$, en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq T$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 3.2.

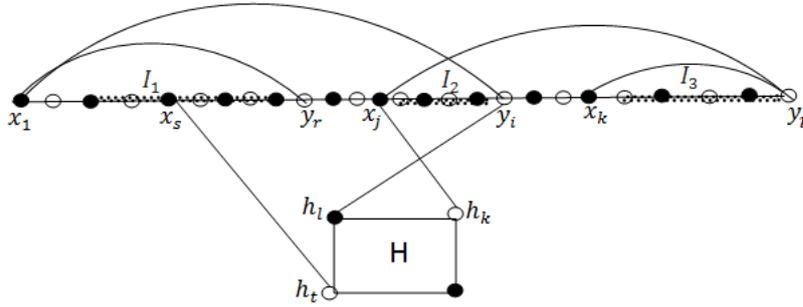


Figura 3.2: Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_2 = \emptyset$ y $N_P(y_p) \cap I_2 = \emptyset$.

Subcaso II.2. $N_P(x_1) \cap I_2 = \emptyset$ y $N_P(y_p) \cap I_2 \neq \emptyset$.

Como P es maximal entonces, $T = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in N_P(x_1) \cap I_1\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in N_P(y_p) \cap I_2\} \cup \{x_1, y_r^-, x_k^+, y_p\}$, es un conjunto independiente de G con $|T| \geq 8$, en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq T$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 3.3.

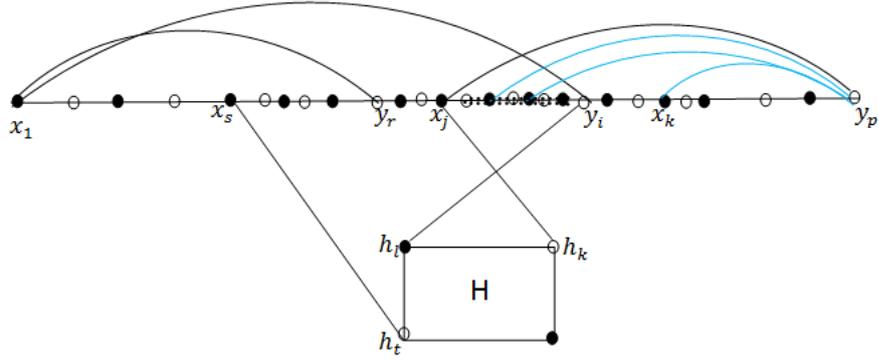


Figura 3.3: Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_2 = \emptyset$ y $N_P(y_p) \cap I_2 \neq \emptyset$.

Subcaso II.3. $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$ y $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$.

Como G es de mínimo grado al menos cinco y P es maximal, entonces $|N_P(x_1) \cap I_2| \geq 2$ y $|N_P(y_p) \cap I_2| \geq 2$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que, $y_q, y_w \in N_P(x_1) \cap I_2$ y $x_u, x_v \in N_P(y_p) \cap I_2$, por definición, y_q y y_w forman un lado con x_1 , en el que y_q, y_w están en el camino I_2 , x_u y x_v forman un lado con y_p , en el que x_u, x_v están en el camino I_2 . Obteniendo así los siguientes subcasos:

Subcaso II.3.1. $q < w < u < v$.

Como P es maximal entonces, $T = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in N_P(x_1) \cap I_2, l < u\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in N_P(y_p) \cap I_2, l \geq u\} \cup \{x_1, y_r^-, y_k^+, y_p\}$ es un conjunto independiente de G con $|T| \geq 8$, en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq T$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 3.4.

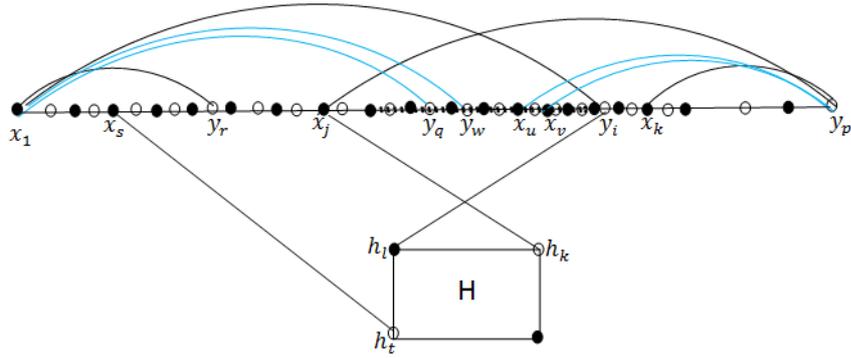


Figura 3.4: Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $q < w < u < v$.

Subcaso II.3.2. $q < u < w < v$.

Como P es maximal entonces, $T = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in N_P(x_1) \cap I_2, l < u\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in N_P(y_p) \cap I_2, l \geq u\} \cup \{x_1, y_r^-, x_k^+, y_p\}$ es un conjunto independiente de G con $|T| \geq 6$, en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq T$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 3.5.

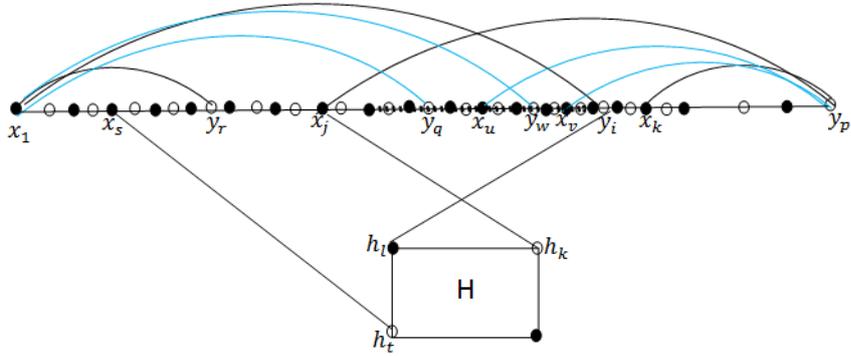


Figura 3.5: Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $q < u < w < v$.

Subcaso II.3.3. $u < q < w < v$.

Como P es maximal entonces, $T = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in N_P(x_1) \cap I_2, l < v\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in N_P(y_p) \cap I_2, l \geq v\} \cup \{x_1, y_r^-, x_k^+, y_p\}$ es un conjunto independiente de G con $|T| \geq 6$, en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq T$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 3.6.

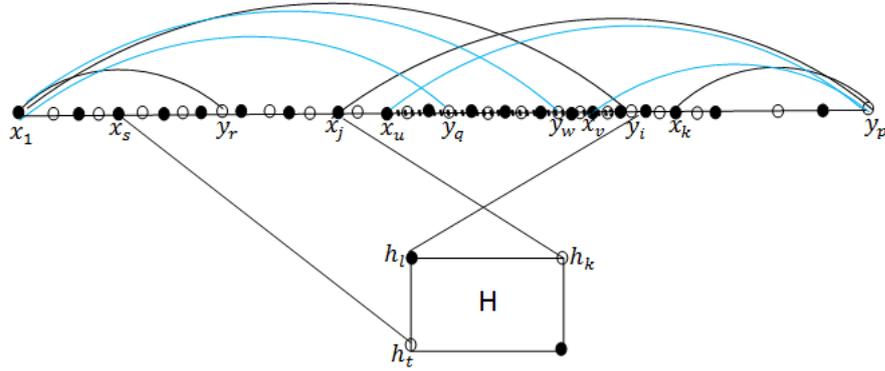


Figura 3.6: Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $u < q < w < v$.

Subcaso II.3.4. $u < q < v < w$.

Como P es maximal entonces, $T = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in N_P(x_1) \cap I_2, l < v\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in N_P(y_p) \cap I_2, l \geq v\} \cup \{x_1, y_r^-, x_k^+, y_p\}$ es un conjunto independiente de G con $|T| \geq 6$, en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq T$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 3.7.

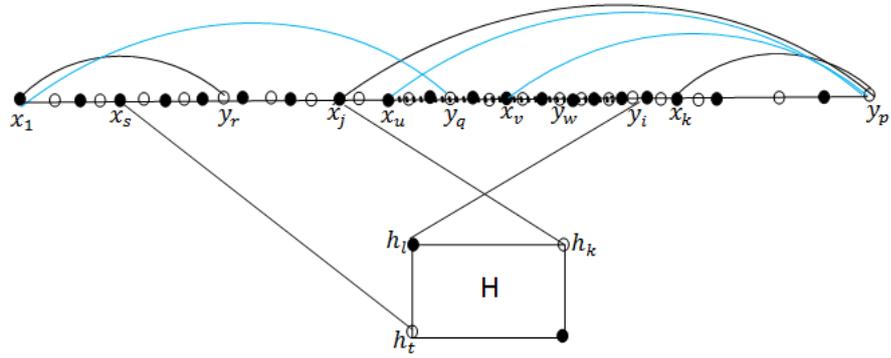


Figura 3.7: Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $u < q < v < w$.

Subcaso II.3.5. $u < v < q < w$.

Como P es maximal entonces, $T = \{y_l^+ \in V(P) : y_l \in N_P(x_1) \cap I_2, l > v\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in N_P(y_p) \cap I_2, l \leq v\} \cup \{x_j^+, y_i^+\}$ es un conjunto independiente de G con $|T| \geq 6$, en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq T$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 3.8.

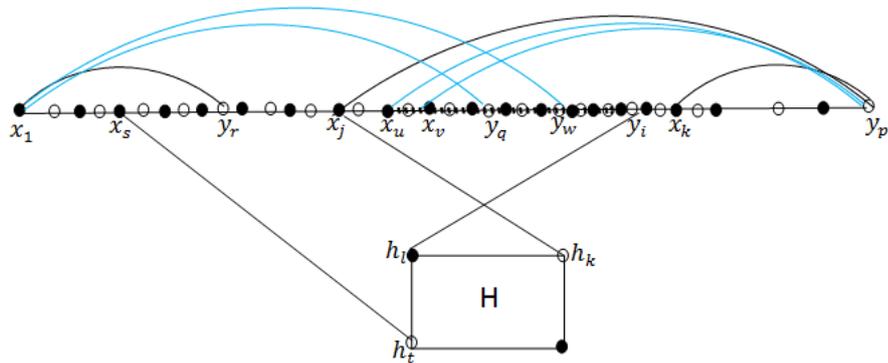


Figura 3.8: Grafo 3 conexo con camino maximal cruzado donde $N_P(x_1) \cap I_1 = \emptyset$, $N_P(y_p) \cap I_3 = \emptyset$ y $u < v < q < w$.

El lema es demostrado por existir en cada caso un conjunto independiente balanceado S , de cardinalidad 6.

□

Lema 3.2. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 3-conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Sea $\wp = \{P : P \text{ es un camino cruzado maximal}\}$. Si $P \in \wp$ y $y_k \in N_P(x_1)$, $x_w \in N_P(y_p)$ entonces $N_P(y_k^-) \cap x_j P^+ y_i = \emptyset$ y $N_P(x_w^+) \cap x_j P^+ y_i = \emptyset$, con $P = x_1 y_1, \dots, x_i y_i, \dots, x_p y_p$ tal que $y_i \in N_P(x_1)$, $x_j \in N_P(y_p)$ y $i - j = \min\{l - t : x_l \in N_P(y_p), y_t \in N_P(x_1), \text{ con } l < t\}$.*

Prueba:

Sean X, Y una bipartición balanceada de $V(G)$ y $P = x_1 y_1, \dots, x_i y_i, \dots, x_p y_p$ un camino maximal de G , tal que $x_1, \dots, x_i, \dots, x_p \in X$ y $y_1, \dots, y_i, \dots, y_p \in Y$.

Como G es de mínimo grado cinco y P es maximal, entonces x_1 y y_p tienen al menos cinco vecinos en G .

Sean, sin pérdida de generalidad, $y_i \in N_P(x_1)$, $x_j \in N_P(y_p)$.

Como G es 3-conexo existe una componente $H = V(G) - V(P)$, con $2 \leq |H| \leq |i - j|$.

Sean, sin pérdida de generalidad, $h_k, h_l, h_t \in V(H)$ con $h_k \in N_{G-P}(x_j)$, $h_l \in N_{G-P}(y_i)$ y $h_t \in N_{G-P}(x_r)$; tal que la distancia del vértice x_r a los extremos del camino y sus vecinos es mayor que la cardinalidad de H .

Supóngase que $N_P(y_k^-) \cap x_j P^+ y_i \neq \emptyset$ ó $N_P(x_w^+) \cap x_j P^+ y_i \neq \emptyset$, sea $y_t \in N_P(y_k^-) \cap x_j P^+ y_i$ ó $x_s \in N_P(x_w^+) \cap x_j P^+ y_i$

Entonces:

i) Si y_t y y_k^- forman un lado con y_t en el camino $x_j P^+ y_i$. Ver figura 3.9.

Entonces, $P' = y_k^- P^- x_1 y_k P^+ y_p$, es un camino con $|x_j P' y_t| < |x_j P^+ y_i|$ lo cual contradice la escogencia de (P, x_j, y_i) . Ver figura 3.10.

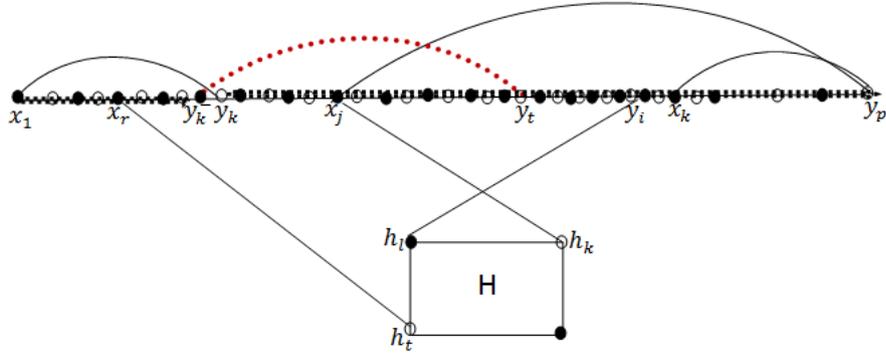


Figura 3.9: Lado $y_t y_k^-$ con y_t en el camino $x_j P^+ y_i$.

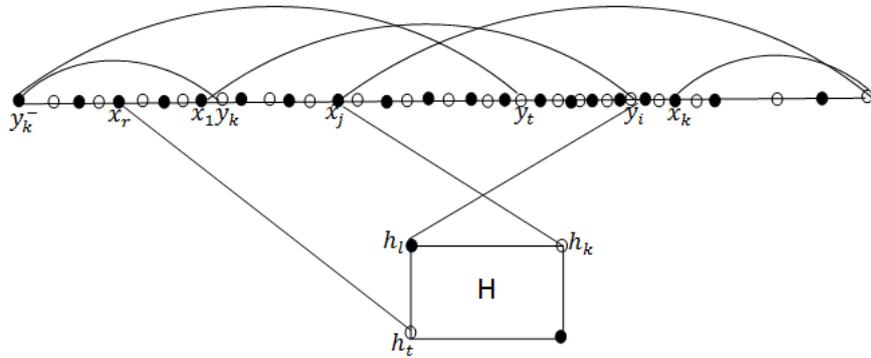


Figura 3.10: Camino $P' = y_k^- P^- x_1 y_k P^+ y_p$.

ii) Si x_s y x_w^+ forman un lado con x_s en el camino $x_j P^+ y_i$. Ver figura 3.11.

Entonces, $P' = x_w^+ P^+ y_p x_w P^- x_1$, es un camino con $|y_i P' x_s| < |x_j P^+ y_i|$ lo cual contradice la escogencia de (P, x_j, y_i) . Ver figura 3.12.

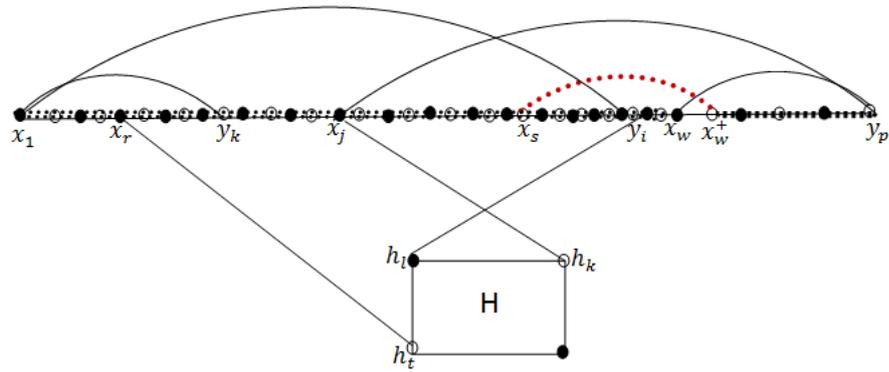


Figura 3.11: Lado $x_s x_w^+$ con x_s en el camino $x_j P^+ y_i$.

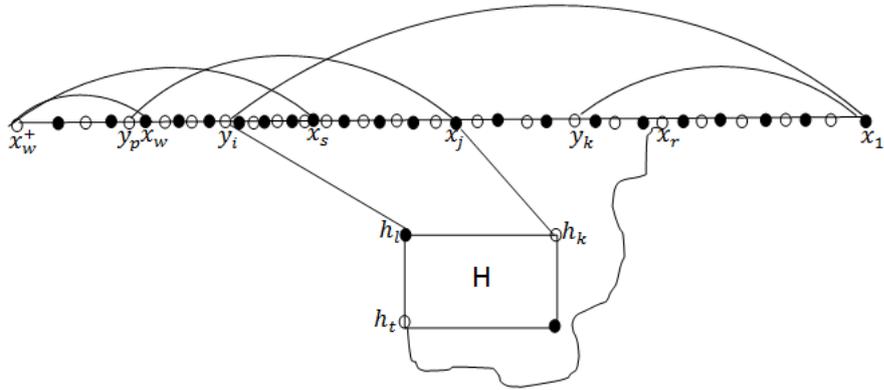


Figura 3.12: Camino $P' = x_w^+ P^+ y_p x_w P^- x_1$.

iii) Si y_t y y_k^- , x_s y x_w^+ forman un lado con y_t , x_s en el camino $x_j P^+ y_i$ con $j < s < t < i$. Ver figura 3.13.

Este caso es consecuencia de los casos i y ii.

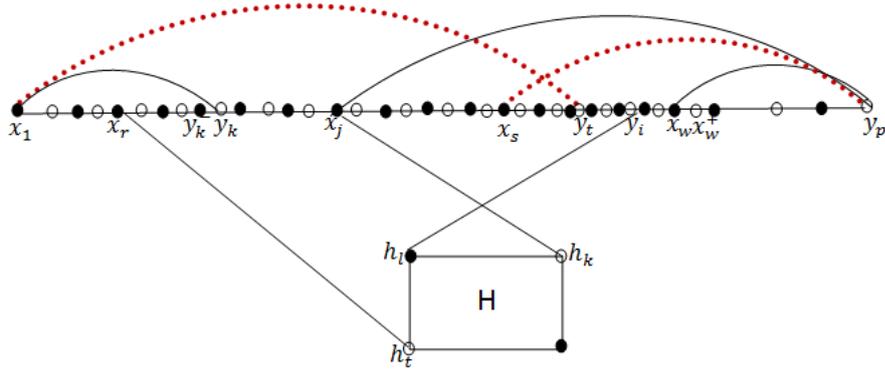


Figura 3.13: Lados $y_t y_k^-$ y $x_s x_w^+$ con y_t, x_s en el camino $x_j P^+ y_i$.

Por lo tanto, $N_P(y_k^-) \cap x_j P^+ y_i = \emptyset$ y $N_P(x_w^+) \cap x_j P^+ y_i = \emptyset$ para $y_k \in N_P(x_1)$ y $x_w \in N_P(y_p)$.

□

Teorema 3.2. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 3-conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco entonces, G es hamiltoniano o $|N(S)| \leq c(G) + 2$ para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad seis.*

Prueba:

Supóngase que G no es hamiltoniano.

Sean X, Y una bipartición balanceada de $V(G)$ y $P = x_1 y_1, \dots, x_i y_i, \dots, x_p y_p$ un camino maximal de G .

Como G es de mínimo grado cinco y P es maximal, entonces x_1 y y_p tienen al menos cinco vecinos en G .

Sean, sin pérdida de generalidad, $y_i, y_a, y_b, y_q \in N_P(x_1)$ y $x_j, x_r, x_c, x_d \in N_P(y_p)$, con $i - j = \min\{l - t : x_l \in N_P(y_p), y_t \in N_P(x_1), \text{ con } t < l\}$

Como G es 3-conexo existe una componente $H = V(G) - V(P)$, con $2 \leq |H| \leq |i - j|$.

Sean, sin pérdida de generalidad, $h_k, h_l, h_t \in V(H)$ con $h_k \in N_{G-P}(x_j)$, $h_l \in N_{G-P}(y_i)$ y $h_t \in N_{G-P}(x_s)$; tal que la distancia del vértice x_s a los extremos del camino y sus vecinos es mayor que la cardinalidad de H . Asímanse los siguientes casos:

Caso I: P es un camino cruzado de máxima longitud.

Sea $i - j = \min\{l - t : x_l \in N_P(y_p), y_t \in N_P(x_1), \text{ con } t < l\}$.

Considérese que $2 < a < b < q < j < i < r < c < d < p - 1$.

Entonces por el lema 3.1, existe un conjunto independiente balanceado de P , tal que $S = \{x_1, y_a^-, y_b^-, x_c^+, x_d^+, y_p\}$, con $S \cap X = \{x_1, y_a^-, y_b^-\}$ y $S \cap Y = \{x_c^+, x_d^+, y_p\}$ y por el lema 3.2, $N_P(y_a^-, y_b^-) \cap x_j P^+ y_i = \emptyset$ y $N_P(x_c^+, x_d^+) \cap x_j P^+ y_i = \emptyset$.

En consecuencia, existe el ciclo $C_0 = x_1 P^+ x_j y_p P^- y_i x_1$ de G . Ver figura 3.14.

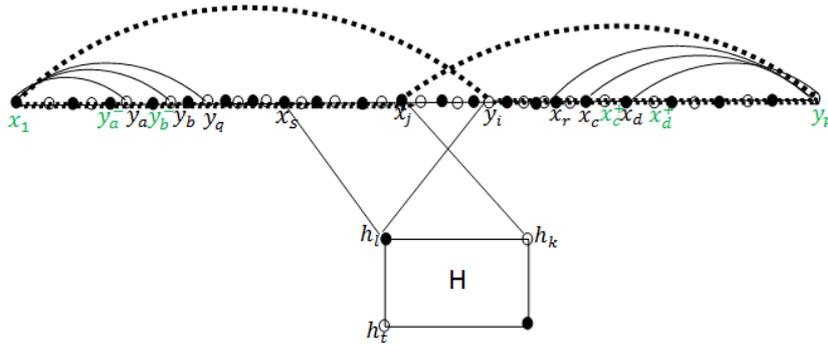


Figura 3.14: Ciclo $C_0 = x_1 P^+ x_j y_p P^- y_i x_1$.

Observando la figura 3.14, se tiene que

$$(N_G^-(x_1) - \{y_i^-\}) \cup N_G(y_a^-) \cup N_G(y_b^-) \cup N_G(x_c^+) \cup N_G(x_d^+) \cup (N_G^+(y_p) - \{x_j^+\}) \subseteq V(C_0)$$

Por lo tanto,

$$|N(S)| = (|N_G^-(x_1)| - 1) + |N_G(y_a^-)| + |N_G(y_b^-)| + |N_G(x_c^+)| + |N_G(x_d^+)| + (|N_G^+(y_p)| - 1) \leq |C_0|$$

En consecuencia, $|N(S)| - 2 \leq |C|$.

De donde, $|N(S)| \leq c(G) + 2$.

Caso II: P es un camino no cruzado de máxima longitud.

Sea $i - j = \min\{l - t : x_l \in N_P(y_p), y_t \in N_P(x_1), \text{cont} < l\}$.

Sea, sin pérdida de generalidad, y_b el vértice más cercano a y_i y x_c el vértice más cercano a x_j .

Entonces, por el lema 3.1, existe un conjunto independiente balanceado de P , tal que $S = \{x_1, y_a^-, y_q^-, x_r^+, x_d^+, y_p\}$, con $S \cap X = \{x_1, y_a^-, y_q^-\}$ y $S \cap Y = \{x_r^+, x_d^+, y_p\}$.

Como G es 3-conexo existen tres caminos internamente disjuntos que enlazan al camino $y_i P^+ x_j$.

Sean, sin pérdida de generalidad, $Q_1 = y_i P^+ x_j$, $Q_2 = y_i x_1 P^+ y_b x_c P^+ y_p x_j$ y $Q_3 = y_i P^- y_b h_k H^+ h_l x_c P^- x_j$ tal que $V(G) = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$.

Supóngase que $|y_b P^+ y_i| > 2$ y $|x_j P^+ x_c| > 2$.

Sean $y_k \in N_G(y_a^-, y_q^-)$ tal que $k = \min\{l : x_l \in N_G(y_a^-, y_q^-), \text{con } b < l < i\}$ y $x_s \in N_G(x_r^+, x_d^+)$ tal que $s = \max\{l : x_l \in N_G(x_r^+, x_d^+), \text{con } j < l < c\}$ entonces,

Si y_k y y_a^- forman un lado, con y_k en el camino $y_b P^+ y_i$ y x_s y x_r^+ forman un lado, con x_s en el camino $x_j P^+ x_c$.

Por lo tanto, el ciclo $C_1 = x_1 Q_2^+ y_a^- y_k Q_3^- y_i Q_1^+ x_j Q_3^- x_s x_r^+ Q_2^+ y_p x_r Q_2^- x_c y_b Q_2^- y_a x_1$.

Ver figura 3.15.

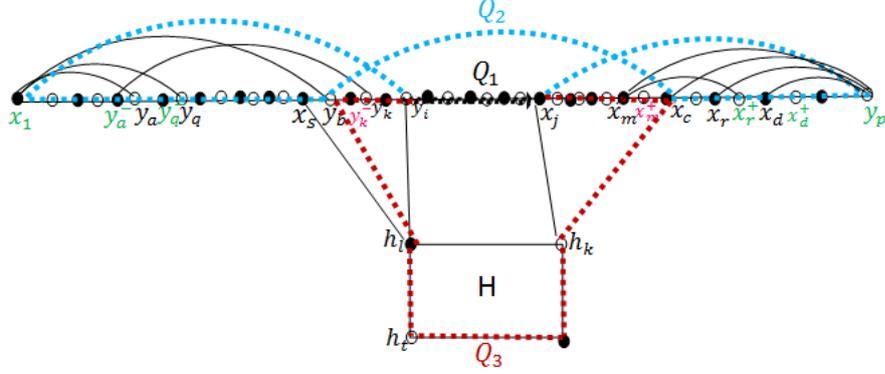


Figura 3.15: Ciclo $C_1 = x_1 Q_2^+ y_a^- y_k Q_3^- y_i Q_1^+ x_j Q_3^- x_s x_r^+ Q_2^+ y_p x_r Q_2^- x_c y_b Q_2^- y_a x_1$.

Observado la figura 3.15, se tiene que

$$N_G(x_1) \cup N_G(y_q^-) \cup (N_G^-(y_a^-) - \{y_k^-\}) \cup N_G(y_a^+) \cup N_G(x_d^+) \cup (N_G^+(x_r^+) - \{x_s^+\}) \cup N_G(y_p) \subseteq V(C_1).$$

Por lo tanto,

$$|N(S)| = |N_G(x_1)| + |N_G(y_q^-)| + (|N_G^-(y_a^-)| - 1) + |N_G(x_d^+)| + (|N_G^+(x_r^+)| - 1) + |N_G(y_p)| \leq |C_1|.$$

En consecuencia, $|N(S)| - 2 \leq |C|$.

De donde, $|N(S)| \leq c(G) + 2$.

De igual forma se obtiene si y_k y y_q^- forman un lado, con y_k en el camino $y_b P^+ y_i$ y x_s y x_d^+ forman un lado, con x_s en el camino $x_j P^+ x_c$.

□

Capítulo 4

HAMILTONICIDAD EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS INVOLUCRANDO CONJUNTO INDEPENDIENTE BALANCEADO

Un grafo bipartito balanceado $G = (X \cup Y, E)$ es hamiltoniano, si existe un camino elemental cerrado, en G , que contenga todos los vértices del grafo.

En el año 2007, Brito y Lárez en [7], establecieron que para que un grafo bipartito balanceado, de mínimo grado al menos cuatro sea hamiltoniano, en términos del número de elementos de los vecinos de un conjunto independiente balanceado al menos la mitad del orden del grafo más uno, lo siguiente:

Teorema 4.1. ([7]). *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cuatro. Si $|N(S)| \geq n + 1$ para cada conjunto independiente balanceado S , entonces G es hamiltoniano*

En este capítulo usaremos conjuntos independientes balanceados de cardinalidad seis, en grafos bipartitos balanceados, de orden $2n$ y mínimo grado al menos cinco, para demostrar que el grafo es hamiltoniano. Extendiendo de esta manera a seis vértices independientes, el resultado de Brito y Lárez en [7].

Primeramente se demostrarán los siguientes lemas:

Lema 4.1. Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado no hamiltoniano de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si $P = x_1y_1, \dots, x_iy_i, \dots, x_ny_n$ es un camino hamiltoniano de G , entonces existe un conjunto independiente balanceado S de P , tal que $|S| = 6$.

Prueba:

Sean X, Y una bipartición balanceada de $V(G)$ y $P = x_1y_1, \dots, x_iy_i, \dots, x_ny_n$ un camino hamiltoniano de G .

Como G es de mínimo grado cinco, entonces x_1 y y_n tienen al menos cinco vecinos en G . Considérese los siguientes casos:

Caso I. P es un camino no cruzado

Como P es un camino no cruzado, entonces x_1 y y_n no forman un lado.

Sin pérdida de generalidad, sean $R_1 = \{y_i \in V(P) : y_i \in N(x_1), 2 < i < p\}$ y $R_2 = \{x_j \in V(P) : x_j \in N(y_n), p < q \leq j \leq n - 1\}$, el conjunto de vecinos de x_1 y y_n respectivamente.

En consecuencia $R = \{y_i^- \in V(P) : y_i \in R_1\} \cup \{x_j^+ \in V(P) : x_j \in R_2\} \cup \{x_1, y_n\}$ es un conjunto independiente de G con $|R| \geq 10$, por lo tanto existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq R$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 4.1.

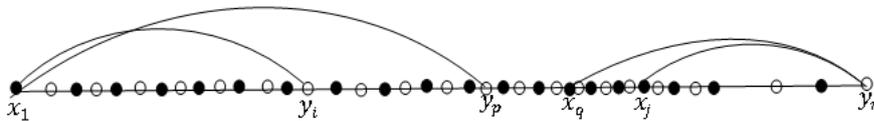


Figura 4.1: Grafo con camino maximal no cruzado.

Caso II. P es un camino cruzado

Como P es un camino cruzado, entonces existen $y_i \in N(x_1)$ y $x_j \in N(y_n)$ tal que $i > j$.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $i = \max\{l : y_l \in N(x_1)\}$, $j = \min\{l : x_l \in N(y_n)\}$, $r = \max\{l : y_l \in N(x_1), 1 \leq l \leq j - 1\}$, $p = \min\{l : x_l \in N(y_n), i + 1 \leq l \leq n\}$, entonces $y_i, y_r \in N(x_1)$ y $x_j, x_p \in N(y_n)$.

Sea $I_1 = x_2P^+y_{r-1}$, $I_2 = x_{j+1}P^+y_{i-1}$ y $I_3 = x_{p+1}P^+y_{n-1}$.

Como G es de mínimo grado al menos cinco, entonces x_1 y y_n tienen al menos dos vecinos en P , sean $R_1 = \{y_l \in V(P) : y_l \in N(x_1)\}$ y $R_2 = \{x_l \in V(P) : x_l \in N(y_n)\}$

Subcaso II.1. $R_1 \cap (I_1 \cup I_2) \neq \emptyset$ y $R_2 \cap I_2 = \emptyset$.

Supóngase que $R_1 \cap (I_1 \cup I_2) \neq \emptyset$ entonces, existe un $y_l \in R_1$, con $y_l \in I_1 \cup I_2$.

Luego, por definición de R_1 , y_l y x_1 forman un lado, con $y_l \in I_1$ ó $y_l \in I_2$

Entonces, $R = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in R_1 \cap (I_1 \cup I_2)\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in R_2 \cap I_3\} \cup \{x_1, y_r^-, x_p^+, y_n\}$ es un conjunto independiente de G con $|R| \geq 8$, por lo tanto existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq R$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 4.2.

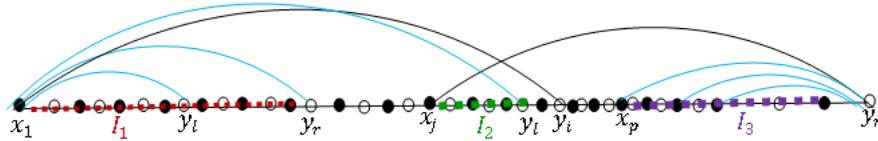


Figura 4.2: Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap (I_1 \cup I_2) \neq \emptyset$ y $R_2 \cap I_2 = \emptyset$.

Subcaso II.2. $R_1 \cap I_1 = \emptyset$ y $R_2 \cap I_2 = \emptyset$.

Como G es de mínimo grado al menos cinco, entonces $|R_1 \cap I_2| \geq 2$ y $|R_2 \cap I_2| \geq 2$.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que $y_q, y_s \in R_1 \cap I_2$ y $x_u, x_v \in R_2 \cap I_2$

Por definición de R_1, R_2, I_2 , se tiene que y_q y y_s forman un lado con x_1 , en el que y_q, y_s están en el camino I_2 , x_u y x_v forman un lado con y_n , en el que x_u, x_v están en el camino I_2 . Obteniendo así los siguientes subcasos:

Subcaso II.2.1 $q < s < u < v$.

Entonces, $R = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in R_1 \cap I_2, l < u\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in R_2 \cap I_2, l \geq u\} \cup \{x_1, y_r^-, x_p^+, y_n\}$ es un conjunto independiente de G con $|R| \geq 8$, por lo tanto existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq R$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 4.3.

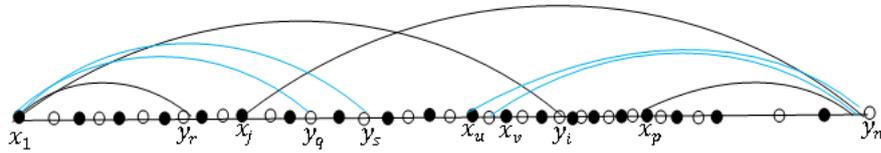


Figura 4.3: Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $q < s < u < v$.

Subcaso II.2.2 $q < u < s < v$.

Entonces, $R = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in R_1 \cap I_2, l < u\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in R_2 \cap I_2, l \geq u\} \cup \{x_1, y_r^-, x_p^+, y_n\}$ es un conjunto independiente de G con $|R| \geq 6$, por lo tanto existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq R$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 4.4.

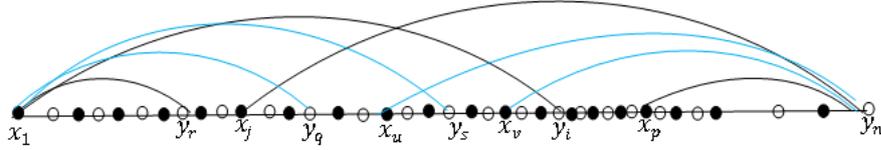


Figura 4.4: Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $q < u < s < v$.

Subcaso II.2.3 $u < q < s < v$.

Entonces, $R = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in R_1 \cap I_2, l < v\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in R_2 \cap I_2, l \geq v\} \cup \{x_1, y_r^-, x_p^+, y_n\}$ es un conjunto independiente de G con $|R| \geq 6$, por lo tanto existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq R$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 4.5.

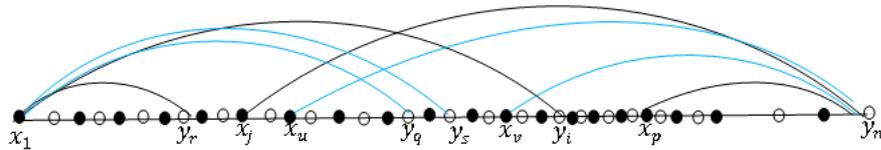


Figura 4.5: Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $u < q < s < v$.

Subcaso II.2.4 $u < q < v < s$.

Entonces, $R = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in R_1 \cap I_2, l < v\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in R_2 \cap I_2, l \geq v\} \cup \{x_1, y_r^-, x_p^+, y_n\}$ es un conjunto independiente de G con $|R| \geq 6$, por lo tanto existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq R$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 4.6.

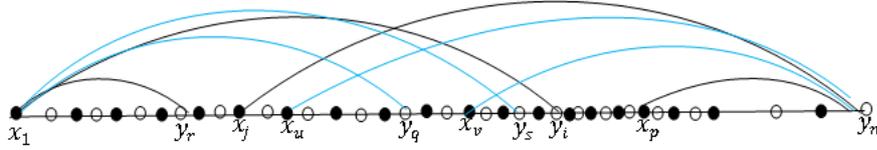


Figura 4.6: Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $u < q < v < s$.

Subcaso II.2.5 $u < v < q < s$.

Entonces, $R = \{y_l^- \in V(P) : y_l \in R_1 \cap I_2, l > v\} \cup \{x_l^+ \in V(P) : x_l \in R_2 \cap I_2, l \leq v\} \cup \{x_j^+, y_i^+\}$ es un conjunto independiente de G con $|R| \geq 6$, por lo tanto existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq R$ tal que $|S| = 6$. Ver figura 4.7.

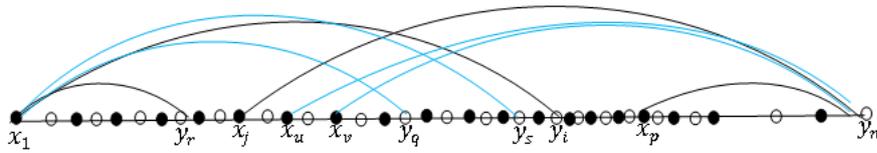


Figura 4.7: Grafo con camino maximal cruzado donde $R_1 \cap I_1 = \emptyset$, $R_2 \cap I_2 = \emptyset$ y $u < v < q < s$.

En todos los casos, existe un conjunto independiente balanceado S , de cardinalidad 6, y el lema está probado.

□

Lema 4.2. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si para cada conjunto independiente balanceado S tal que $|S| = 6$, se tiene que $|N(S)| > n$, entonces G es conexo.*

Prueba:

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco.

Supóngase que G es no conexo, entonces existen dos componentes distintas G_1 y G_2 de G .

Como G es de mínimo grado cinco, entonces cada componente conexa G_1 y G_2 tiene al menos cinco vértices en X y cinco vértices en Y .

Supóngamos que $|V(G_1) \cap Y| \leq |V(G_2) \cap X|$

Entonces, cada conjunto R que contiene cinco vértices de $V(G_1) \cap Y$ y cinco vértices de $V(G_2) \cap X$, es un conjunto independiente balanceado, y en consecuencia existe un conjunto independiente balanceado $S \subseteq R$ tal que $|S| = 6$.

Sea sin pérdida de generalidad, $S = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ un conjunto de vértices independientes balanceados. Entonces $|N(S)| \leq |N(x_1, x_2, x_3)| + |N(y_1, y_2, y_3)| \leq |V(G_1) \cap Y| + |V(G_2) \cap X| \leq |V(G_1) \cap X| + |V(G_2) \cap X| = n$.

Así $|N(S)| \leq n$ lo cual es una contradicción.

□

Lema 4.3. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si para cada conjunto independiente balanceado S tal que $|S| = 6$, se tiene que $|N(S)| \geq n$, entonces G tiene un matching perfecto.*

Prueba:

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco

Supóngase que G no tiene un matching perfecto. Entonces, existe un subconjunto W de X talque $|N(W)| < |W|$.

Como G es de mínimo grado cinco, entonces $|N(W)| < |W|$ y G es balanceado; $2 \leq |W| \leq n - 1$.

Sea $S = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ un conjunto independiente balanceado tal que x_1, x_2, x_3 son vértices en W y y_1, y_2, y_3 son vértices en $Y - N(W)$. Entonces, $|N(S)| \leq |N(x_1, x_2, x_3)| + |N(y_1, y_2, y_3)| = |N(W)| + |X - W| < |W| + |X - W| = n$.

Así $|N(S)| < n$, lo cual es una contradicción.

□

Teorema 4.2. *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 3-conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si para cada conjunto independiente balanceado S tal que $|S| = 6$, se tiene que $|N(S)| > n$ entonces G es hamiltoniano o G contiene un subgrafo que consiste de un ciclo y un lado aislado.*

Prueba:

Sea X, Y una bipartición balanceada de $V(G)$, por el lema 4.0.20 G es conexo.

Supóngase que G es no hamiltoniano.

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo de tamaño máximo entre todos los grafos de orden $2n$ que no son hamiltonianos y satisfacen la condición del teorema.

Por maximalidad de $|E(G)|$, para cada dos vértices no adyacentes $x \in A$ y $y \in B$, el grafo $G + xy$ es hamiltoniano, y además cada ciclo hamiltoniano de $G + xy$ contiene el lado xy .

Por lo tanto, hay un $x - y$ camino $P = x = x_1y_1x_2y_2, \dots, x_ny_n = y$ que contiene cada vértice de G , con $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ y $y_1, y_2, \dots, y_n \in B$.

Por el lema 4.1, existe un conjunto independiente balanceado S de P , tal que $|S| = 6$.

Sin pérdida de generalidad sea $\{y_q, y_s, y_i\} \subseteq (N(x_1) \cap P)$ y $\{x_j, x_u, x_v\} \subseteq (N(y_n) \cap P)$ tal que $i = \max\{l : y_l \in N(x_1)\}$ $j = \min\{l : x_l \in N(y_n)\}$ y $j < u < v < q < s < i$, con $S = \{x_j^+, x_u^+, x_v^+, y_q^+, y_s^+, y_i^+\}$ conjunto independiente balanceado y como $|N(S)| > n$, entonces x_w^{+++} , con $w \in \{j, u, v\}$, es adyacente a S ó y_z^{+++} , con $z \in \{q, s, i\}$ es adyacente a S .

Entonces se tiene que el ciclo $C = x_w^+y_z^{+++}P^+y_nx_wP^-x_1y_zP^-x_w^+$ y el lado $y_z^+y_z^{+++}$ ó el ciclo $C = y_z^+x_w^{+++}P^+y_zx_1P^+x_wy_nP^-y_z^+$ y el lado $x_w^+x_w^{+++}$, para $w \in \{j, u, v\}$ y $z \in \{q, s, i\}$. Ver figura 4.8.

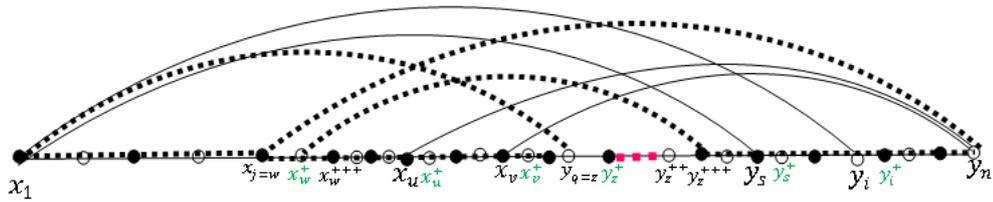


Figura 4.8: Ciclo $C = x_w^+y_z^{+++}P^+y_nx_wP^-x_1y_zP^-x_w^+$ y el lado $y_z^+y_z^{+++}$.

Así la prueba del teorema es completa.

□

Como consecuencia inmediata se tiene:

Corolario 4.1. ([2]).

Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si para cada conjunto independiente balanceado S , de G , de cardinalidad seis tenemos que, $|N(S)| > n$, entonces G es traceable.

Teorema 4.3. Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado 3-conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si para cada conjunto independiente balanceado S tal que $|S| = 6$, se tiene que $|N(S)| > n + 1$, entonces G es hamiltoniano.

Prueba:

Sea X, Y una bipartición balanceada de $V(G)$, por el lema 4.2, G es conexo.

Supóngase que G es no hamiltoniano.

Por teorema 4.2, existe un ciclo C de longitud $2n-2$ tal que $G - C$ es un lado.

Sin pérdida de generalidad, sea $C = x_2y_2, \dots, x_2y_i, \dots, x_ny_nx_2$ y x_1y_1 un lado en $G - C$.

Como G es de mínimo grado al menos cinco, entonces x_1 y y_1 tienen al menos cuatro vecinos en C .

Sea $R = \{y_i^+ \in V(C) : y_i \in N_C(x_1)\} \cup \{x_i^+ \in V(C) : x_i \in N_C(y_n)\}$ entonces, R es un conjunto independiente balanceado.

Sea $S \subseteq R$ un conjunto independiente balanceado tal que $|S| = 6$. Por el lema 4.3, existe un matching M en G . Ver figura 4.9.

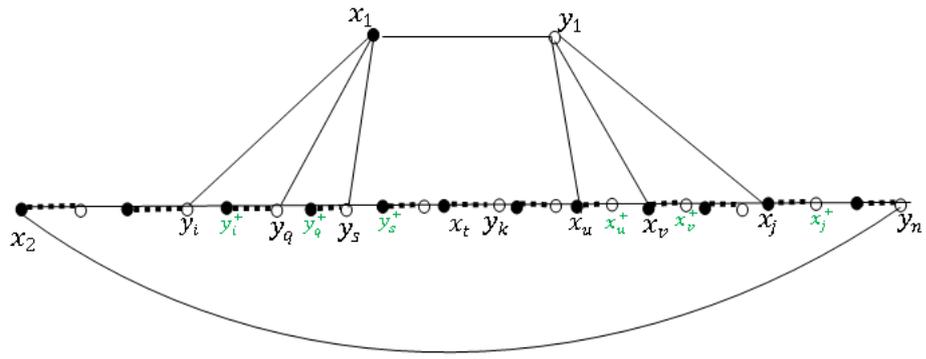


Figura 4.9: Matching M en G .

Como $|N(S)| > n + 1$, existe un lado de M , en el que ambos extremos son adyacentes a S en forma de cruz, obteniendo así una contradicción a lo supuesto. Ver figura 4.10.

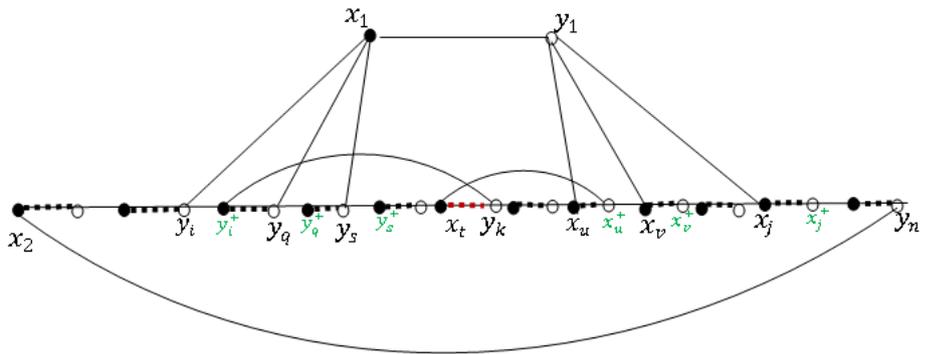


Figura 4.10: Ciclo $C_0 = x_1 y_i C^- x_2 y_n C^- x_u^+ x_t C^- y_i^+ y_k C^+ x_u y_1 x_1$.

En consecuencia $|N(S)| \leq n + 1$, lo cual es una contradicción.

□

Como consecuencia inmediata se tiene:

Corolario 4.2. ([2]). *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado conexo de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si para cada conjunto de vértices independientes S , de G , de cardinalidad seis tenemos que, de G , la suma de sus grados es al menos $n+2$, entonces G es hamiltoniano.*

Sea el grafo bipartito balanceado H_{26} , el cual denota la clase de todos los grafos obtenidos a partir del grafo de la figura 4.11, donde algunos o todos, de los dieciséis lados que une a la parte superior con la parte inferior pueden también estar presentes.

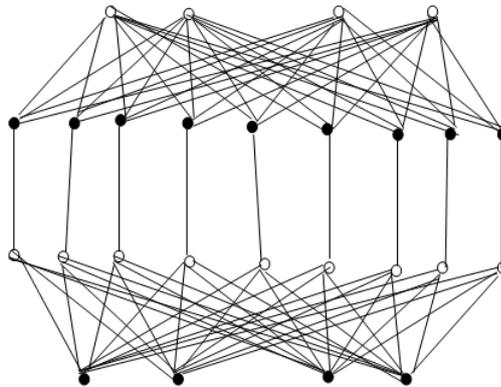


Figura 4.11: El Grafo Minimal de H_{26} .

Del teorema 4.3 nosotros conjeturamos

Conjetura 2. ([3]). *Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito balanceado de orden $2n$ y mínimo grado $\delta(G)$ al menos cinco. Si para cada conjunto independiente balanceado*

S de G , con $|S| = 6$ tenemos que $|N(S)| > n$, entonces G es hamiltoniano o $G \in H_{26}$, figura 4.11.

Si la afirmación de la conjetura es verdad, el resultado es el mejor posible, en una condición. Tomemos dos grafos bipartitos balanceados completos, escojamos un lado de cada uno de ellos y hagamos la conexión completamente con el otro grafo. El grafo bipartito balanceado resultante satisface que $|N(S)| = n$, para cada conjunto independiente balanceado S de cardinalidad seis, pero no es hamiltoniano.

CONCLUSIONES

En este trabajo, realizado en grafos bipartitos balanceados simples, obtuvimos las siguientes conclusiones:

1.- Al trabajar con conjuntos independientes balanceados de cardinalidad cuatro, en grafos bipartitos balanceados, logramos dar condiciones al conjunto de vecinos de un conjunto independiente balanceado cualquiera, con respecto a la mitad del número de vértices del grafo más dos para que éste fuese hamilton conectado, obteniendo de esta manera, una mejora de la cota del resultado de Brito, Mago y Marín, cuyos resultados fueron aceptados para ser publicados en *International Journal of Pure and Applied Mathematics*.

2.- Utilizando conjuntos independientes balanceados de cardinalidad seis, en grafos bipartitos balanceados 3 conexo, de orden $2n$ y mínimo grado al menos cinco, se demostró que el grafo es hamiltoniano o el número de elementos del conjunto de vecinos de un conjunto independiente balanceado cualquiera, de cardinalidad seis es a lo más el orden del ciclo de máxima longitud más dos. Extendiendo de esta manera a seis vértices independientes, el resultado de Alcalá.

3.- Usando conjuntos independientes balanceados de cardinalidad seis, en grafos bipartitos balanceados, de orden $2n$ y mínimo grado al menos cinco, se demostró que el grafo es hamiltoniano. Extendiendo de esta manera, el resultado de Brito y Lárez a seis vértices independientes, cuyos resultados, forman parte de la publicación, ALCALÁ Y.,BRITO D. y MARÍN L..*The Hamiltonicity of Balanced Bipartite Graphs Involving Balanced Independent Set*. *International Mathematical Forum* 8,28: 1353-1358. 2013.

Bibliografía

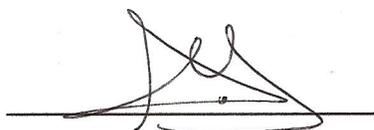
- [1] ALCALÁ Y.. *Longitud Relativa de Caminos y Ciclos más Largos en un Grafo Bipartito Balanceado 3- Conexo* . Universidad de Oriente. Trabajo de Grado. Núcleo de Sucre. 2009.
- [2] ALCALÁ Y., BRITO D. y MARÍN L.. *The Hamiltonicity of Balanced Bipartite Graphs Involving Balanced Independent Set*. International Mathematical Forum 8, 28: 1353 - 1358. 2013.
- [3] AMAR D., BRANDT S., BRITO D. y ORDAZ O.. *Neighborhood Conditions for Balanced Independent Sets in Bipartite Graphs* . Discrete Mathematics 181: 31-36. 1998.
- [4] AMAR D., FALDRIN E. y GANCARZEWICZ G.. *Cyclability in Bipartite Graphs*. Opuscula Mathematica 4: 29. 2009.
- [5] BEHZAD M., CHARTRAND G. y LESNIAK L.. *Graphs and Digraphs*. Wadsworth Intenational Group. USA. 1981.
- [6] BONDY J. A. y MURTY U.. *Graph Theory with Applications*. North Holland. 1976.
- [7] BRITO D. y LÁREZ G.. *Neighborhood Conditions for Balanced Bipartite Graphs to be Hamiltonian*. International Journal of Pure and Applied Mathematics 4: 509 - 512. 2007.

- [8] BRITO D., MAGO P. y MARÍN L.. *Neighborhood Conditions for Balanced Bipartite Graphs to be Hamiltonian Connected*. International Mathematical Forum 5, 26: 1291 - 1295. 2010.
- [9] BROERSMA H. y TUINSTRA H.. *Independence Trees and Hamilton Cycles*. Journal of Graph Theory 16: 127 - 137. 1993.
- [10] CHEN G., SAITO A., WEI B. y ZHANG X.. *The Hamiltonicity Bipartite Graphs Involving Neighborhood Unions*. Discrete Mathematics 249: 45 - 56. 2002.
- [11] DIRAC G.A.. *Some Theorems On Abstract Graphs*. Proc. London Math.Soc. 2: 69 - 81. 1952.
- [12] FAUDREE R., GOULD R., JACOBSON M. y SCHELP R.. *Neighborhood Unions and a Generalization Of DiracS Theorem*. Discrete Mathematics 105: 61 - 71. 1992.
- [13] FAUDREE R., GOULD R., JACOBSON M. y SCHELP R.. *Neighborhood Unions and Highly Hamiltonian*. Ars Combin 31: 139 - 148. 1991.
- [14] FAUDREE R., GOULD R., JACOBSON M. y SCHELP R.. *Neighborhood Unions and Hamiltonian Properties in Graphs* . J. Combin. Theory Ser B 47: 1 - 9. 1989.
- [15] FAUDREE R., GOULD R., JACOBSON M. y SCHELP R.. *Extremal Problems Involving Neighborhood Unions*. J. Graph. Theory 11, 5: 55 - 564. 1987.
- [16] JACKSON B.. *Neighborhood Unions and Hamilton Cycles* . J. Graph. Theory 15: 443 - 451. 1991.
- [17] KANEKO A. y YOSHIMOTO K.. *On Longest Cycles in a Balanced Bipartite Graph with Ore Type Condition, II* 10: 2 - 22. 2002.
- [18] MOON J. y MOSER L.. *On Hamiltonian Bipartite Graphs*. Israel Journal Mathematics 1: 163 - 165. 1963.

- [19] ORE O.. *Note on Hamiltonian Circuits*. America Mathematics Monthly 67: 55.
1960.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 6/6

Artículo 41 de REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (Vigente a partir del II Semestre de 2009, según comunicación CU-034.2009): Los Trabajos de grados son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y solo podrá ser utilizados para otros fines con el consentimiento de Consejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario, para su autorización

A handwritten signature in black ink, consisting of stylized, overlapping loops and lines, positioned above a horizontal line.

Alcalá Yusleidy