UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ALGUNAS GENERALIZACIONES DE FUNCIONES *ALMOST* CONTRA-SUPER-CONTINUAS

(Modalidad: Investigación)

LUIS ELIGIO VÁSQUEZ MÁRQUEZ

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CUMANÁ, 2010

ALGUNAS GENERALIZACIONES DE FUNCIONES *ALMOST* CONTRA-SUPER-CONTINUAS

APROBADO POR:

Prof. Ennis Rosas

Asesor Académico

Profa. Margot Salas

Jurado Principal

Prof. Carlos Carpintero

Jurado Principal

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por haberme dado el don de la vida y la facilidad de entender las matemáticas.

A mi madre Zuleima Vásquez porque con su sacrificio, trabajo y dedicación me guió por el camino correcto hasta lograr todo lo que soy ahora.

A mi esposa Yasmin Márquez por estar en esos momentos difíciles y hermosos dándome su apoyo.

A mi hija Anabeliz Vásquez, el regalo más grande que me ha dado Dios.

Al profesor Ennis Rafael Rosas Rodriguez, mi más sincero agradecimiento por aceptar ser mi tutor para la elaboración de este trabajo. Por las jornadas dedicadas a la revisión, corrección y discusión de este trabajo.

A los esposos, Profesora Margot Salas y Profesor Julio Ramos por su colaboración, disposición y apoyo durante la realización de este trabajo.

Al profesor Manuel Gómez, Por haber visto en mi la habilidad para las matemáticas y haber hecho posible el cambio de especialidad de la Licenciatura en Informática a la Licenciatura en Matemáticas.

A todos los que, de una u otra forma, me ayudaron en la realización de este sueño.

DEDICATORIA

A mi abuela, Ana Agustina Márquez De Vásquez, que en vida siempre fuiste mi inspiración a los estudios y me dabas aliento a seguir adelante, se que donde quiera que te encuentres estarás feliz. Quisiste ver este logro alcanzado pero por cosas del destino no estuviste aquí a mi lado. Siempre vivirás en mi pensamiento y en mi corazón. Dios te tenga en su gloria.

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

En este trabajo se estudia una generalización de algunos tipos de funciones, que guardan relación con el concepto clásico de continuidad, usando los conceptos, de conjuntos abiertos generalizados, tales como las funciones *almost* contra-super-continuas, contra R-maps, (δ-pre,s)-continuas, (δ-semi,s)-continuas. Se introduce la noción de estructura minimal y se definen y estudian nuevas clases de funciones que generalizan los conceptos antes mencionados.

INTRODUCCIÓN

La topología es probablemente la más joven de las ramas clásicas de las matemáticas. En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de los números, cuyas genealogías datan de tiempos antiguos, la topología aparece en el siglo diecisiete, con el nombre de *analysis situs*, esto es, *análisis de la posición*.

De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas sin romperse o rasgarse, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes.

Formalmente, una topología sobre un conjunto es una familia de subconjuntos de dicho conjunto, que satisface ciertas reglas sobre la unión y la intersección. Los elementos de dicha familia se denominan conjuntos abiertos.

El concepto de conjunto abierto, a lo largo del tiempo, ha sido objeto de muchas generalizaciones tales como: los conjuntos semi-abiertos, pre-abiertos, β-abiertos, regular abiertos, δ-abiertos, δ-semi-abiertos, α-abiertos, e-abiertos, e^*-abiertos y a-abiertos, las cuales desempeñan un papel importante en la generalización de funciones continuas entre espacios topológicos. Tomando como base estos conjuntos, muchos autores estudiaron y definieron variantes de la noción de continuidad clásica.

En 1963, Levine introduce los conceptos de conjunto semi-abierto y semi continuidad en espacios topológicos, generalizando el concepto de funciones continuas, y obteniendo así las funciones semi-continuas. En 1978, Popa introduce y estudia el concepto de funciones *almost* quasi continuas, el cual generaliza el de funciones *almost* continuas dado por Singal y Singal (1968). Para el año 1982, Mashhour et. al., introducen la noción de conjuntos pre-abiertos y de función pre-continua. Estos nuevos conceptos inducen a que Popa et. al. introduzcan las funciones *almost* pre-continuas las cuales generalizan las funciones *almost* continuas. Abd El-Monsef et. al., en 1983, introdujeron los conceptos de conjuntos β-abierto y funciones β-continuas. En 1997, Park et. al., introdujeron el concepto de conjuntos δ-semi-abiertos en espacios topológicos, dando origen a las funciones δ-semicontinuas. De igual forma en 1965, Njastad introduce el concepto de conjunto α-abierto, el cual fue empleado por Mashhour en 1983 para introducir el concepto de funciones α-continuas.

En 2006, Ekici introdujo nuevas clases de conjuntos llamados e^*-abierto, e-abierto y a-abierto, dando lugar a las nuevas nociones de funciones e*-continuas, e-continuas y a-continuas, respectivamente.

Conforme a lo anteriormente descrito y para contribuir con el estudio de funciones continuas, se pretende estudiar las nuevas clases de funciones conocidas como funciones (e^*, s)-continuas, (e,s)-continuas y (a,s)-continuas, las cuales son generalizaciones de las funciones *almost* contra-super-continuas. En particular, se buscará algunas caracterizaciones y propiedades de dichas funciones. Así mismo, haciendo uso de la noción de estructura minimal sobre un conjunto no vacío X, dada por Maki (1996) y algunas de sus propiedades, se introducirán nuevas definiciones que generalizan de manera natural, las funciones antes mencionadas.

CAPÍTULO 1
PRELIMINARES

En este capítulo se describe, en forma general, los elementos básicos estrictamente necesarios para el desarrollo de este trabajo. Se presentan algunos hechos relevantes, relativos a las distintas relaciones existentes entre estos, que serán empleados a lo largo de los próximos capítulos.

1.1 Conjuntos abiertos generalizados

En esta sección se introducen ciertas clases de subconjuntos las cuales generalizan las nociones clásicas de conjuntos abiertos y conjuntos cerrados de un espacio topológico. Se estudian también algunas propiedades relativas a estas clases de conjuntos.

Definición 1.1. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es:

(1) regular abierto si $A = int(cl(A))$.

(2) semi-abierto si $A \subset cl(int(A))$.

(3) α-abierto si $A \subset int(cl(int(A)))$.

(4) pre-abierto si $A \subset int(cl(A))$.

(5) β-abierto si $A \subset cl(int(cl(A)))$.

(6) b-abierto si $A \subset cl(int(A)) \cup int(cl(A))$.

El siguiente Teorema muestra la relación existente entre los conjuntos antes definidos y los conjuntos abiertos.

Teorema 1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) Todo conjunto α-abierto es un conjunto semi-abierto.

(2) Todo conjunto abierto es un conjunto semi-abierto.

(3) Todo conjunto regular abierto es un conjunto abierto.

(4) Todo conjunto pre-abierto es un conjunto β-abierto.

(5) Todo conjunto abierto es un conjunto pre-abierto.

(6) Todo conjunto semi-abierto es un conjunto β-abierto.

(7) Todo conjunto abierto es un conjunto α-abierto.

(8) Todo conjunto α-abierto es un conjunto pre-abierto.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto α-abierto, entonces

$$A \subset int(cl(int(A))) \subset cl(int(A))$$

Por lo tanto, A es un conjunto semi-abierto.

(2) Suponga que A es un conjunto abierto, entonces

$$A = int(A) \subset cl(int(A))$$

Por lo tanto, A es un conjunto semi-abierto.

(3) Suponga que A es un conjunto regular abierto, entonces $A = int(cl(A))$. Como $int(cl(A))$ es un conjunto abierto, se deduce que A es abierto.

(4) Suponga que A es un conjunto pre-abierto, entonces

$$A \subset int(cl(A)) \subset cl(int(cl(A)))$$

Por lo tanto, A es un conjunto β-abierto.

(5) Suponga que A es un conjunto abierto, entonces

$$A = int(A) \subset int(cl(A))$$

Por lo tanto, A es un conjunto pre-abierto.

(6) Suponga que A es un conjunto semi-abierto, entonces

$$A \subset cl(int(A)) \subset cl(int(cl(A)))$$

Por lo tanto, A es un conjunto β-abierto.

(7) Suponga que A es un conjunto abierto, entonces

$$A = int(A) \subset cl(int(A)) \subset int(cl(int(A)))$$

Por lo tanto, A es un conjunto α-abierto.

(8) Suponga que A es un conjunto α-abierto, entonces

$$A \subset int(cl(int(A))) \subset int(cl(A))$$

Por lo tanto, A es un conjunto pre-abierto. $\square$

Se tiene el siguiente diagrama para un subconjunto A de un espacio X:

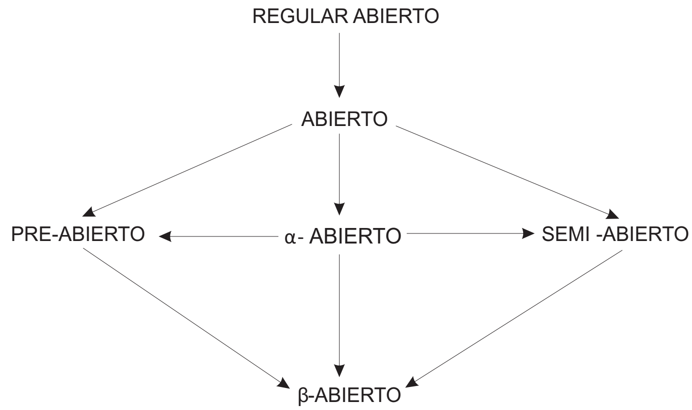

Figura 1.1: Diagrama 1

Ninguna de estas implicaciones es reversible como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. El conjunto $\{a, c\}$ es semi-abierto pero no es α-abierto. El conjunto $\{a, c\}$ es semi-abierto pero no es abierto. El conjunto $\{a, b\}$ es abierto pero no es regular abierto. El conjunto $\{a, c\}$ es β-abierto pero no es pre-abierto.

Ejemplo 1.2. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$. El conjunto $\{a, c\}$ es pre-abierto pero no es abierto ni α-abierto.

Ejemplo 1.3. Considere $\mathbb{R}$ con la topología usual. Note que $cl(int(\mathbb{Q})) = \emptyset$ y $cl(int(cl(\mathbb{Q}))) = \mathbb{R}$ por lo que $\mathbb{Q}$ es β-abierto pero no es semi-abierto ni α-abierto.

Ejemplo 1.4. Si U es un abierto entonces $int(cl(U))$ es regular abierto. En efecto, considere $V = int(cl(U))$, entonces

$$cl(V) = cl(int(cl(U))) \supset int(cl(U)),\ int(cl(V)) \supset int(cl(U)) = V$$

Así, se tiene que $V \subset int(cl(V))$. Por otra parte,

$$cl(V) \subset cl(U),\ int(cl(V)) \subset int(cl(U)) = V$$

y de esta manera, $int(cl(V)) \subset V$. Por lo tanto, $int(cl(V)) = V$.

Similarmente como se definen los conjuntos cerrados en un espacio topológico, se definen los conjuntos cerrados asociados a generalizaciones de conjuntos abiertos antes dados.

Definición 1.2. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es:

(1) regular cerrado si y solo si $X \setminus A$ es regular abierto.

(2) semi-cerrado si y solo si $X \setminus A$ es semi-abierto.

(3) α-cerrado si y solo si $X \setminus A$ es α-abierto.

(4) pre-cerrado si y solo si $X \setminus A$ es pre-abierto.

(5) β-cerrado si y solo si $X \setminus A$ es β-abierto.

El siguiente teorema caracteriza las definiciones anteriores en términos del interior y la clausura.

Teorema 1.2. *Sea A un subconjunto de un espacio X. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) A es regular cerrado si y solo si $A = cl(int(A))$.

(2) A es semi-cerrado si y solo si $int(cl(A)) \subset A$.

(3) A es α-cerrado si y solo si $cl(int(cl(A))) \subset A$.

(4) A es pre-cerrado si y solo si $cl(int(A)) \subset A$.

(5) A es β-cerrado si y solo si $int(cl(int(A))) \subset A$.

Demostración:

(1) Suponga que A es regular cerrado, entonces $X \setminus A$ es regular abierto, es decir,

$$X \setminus A = int(cl(X \setminus A)) = int(X \setminus int(A)) = X \setminus cl(int(A))$$

Tomando complemento, se concluye que $A = cl(int(A))$.

Recíprocamente, suponga que $A = cl(int(A))$, tomando complemento

$$X \setminus A = X \setminus cl(int(A)) = int(X \setminus int(A)) = int(cl(X \setminus A))$$

Esto dice que $X \setminus A$ es regular abierto, por lo tanto A es regular cerrado.

(2) Suponga que A es semi-cerrado, entonces $X \setminus A$ es semi-abierto, es decir,

$$X \setminus A \subset cl(int(X \setminus A)) \subset cl(X \setminus cl(A)) \subset X \setminus int(cl(A))$$

Tomando complemento, se concluye que $int(cl(A)) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $int(cl(A)) \subset A$, tomando complemento

$$X \setminus A \subset X \setminus int(cl(A)) \subset cl(X \setminus cl(A)) \subset cl(int(X \setminus A))$$

Esto dice que $X \setminus A$ es semi-abierto, por lo tanto A es semi-cerrado.

(3) Suponga que A es α-cerrado, entonces $X \setminus A$ es α-abierto, es decir,

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset int(cl(int(X \setminus A))) \subset int(cl(X \setminus cl(A))) \\ &\subset int(X \setminus int(cl(A))) \subset X \setminus cl(int(cl(A))) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se concluye que $cl(int(cl(A))) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $cl(int(cl(A))) \subset A$, tomando complemento

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus cl(int(cl(A))) \subset int(X \setminus int(cl(A))) \\ &\subset int(cl(X \setminus cl(A))) \subset int(cl(int(X \setminus A))) \end{aligned}$$

Esto dice que $X \setminus A$ es α-abierto, por lo tanto A es α-cerrado.

(4) Suponga que A es pre-cerrado, entonces $X \setminus A$ es pre-abierto, es decir,

$$X \setminus A \subset int(cl(X \setminus A)) \subset int(X \setminus int(A)) \subset X \setminus cl(int(A))$$

Tomando complemento, se concluye que $cl(int(A)) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $cl(int(A)) \subset A$, tomando complemento

$$X \setminus A \subset X \setminus cl(int(A)) \subset int(X \setminus int(A)) \subset int(cl(X \setminus A))$$

Esto dice que $X \setminus A$ es pre-abierto, por lo tanto A es pre-cerrado.

(5) Suponga que A es β-cerrado, entonces $X \setminus A$ es β-abierto, es decir,

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset cl(int(cl(X \setminus A))) \subset cl(int(X \setminus int(A))) \\ &\subset cl(X \setminus cl(int(A))) \subset X \setminus int(cl(int(A))) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se concluye que $int(cl(int(A))) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $int(cl(int(A))) \subset A$, tomando complemento

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus int(cl(int(A))) \subset cl(X \setminus cl(int(A))) \\ &\subset cl(int(X \setminus int(A))) \subset cl(int(cl(X \setminus A))) \end{aligned}$$

Esto dice que $X \setminus A$ es β-abierto, por lo tanto A es β-cerrado. □

A continuación se muestra que la colección de los conjuntos pre-abiertos, α-abiertos, y semi-abiertos es cerrada para uniones arbitrarias.

Teorema 1.3. *Para una familia de subconjuntos de X las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) La unión arbitraria de conjuntos pre-abiertos es un conjunto pre-abierto.

(2) La unión arbitraria de conjuntos α-abiertos es un conjunto α-abierto.

(3) La unión arbitraria de conjuntos semi-abiertos es un conjunto semi-abierto.

Demostración:

(1) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ tales que $U_\alpha \subset int(cl(U_\alpha))$ para todo $\alpha \in J$. Se mostrará que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \subset int(cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))$.

En efecto, como $U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ se sigue que

$$int(cl(U_\alpha)) \subset int(cl(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$$

pero $U_\alpha \subset int(cl(U_\alpha))$ para cada $\alpha \in J$.

Así, $U_\alpha \subset int(cl(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$ para cada $\alpha \in J$ y por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset int(cl(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)).$$

(2) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ tales que $U_\alpha \subset int(cl(int(U_\alpha)))$ para todo $\alpha \in J$. Se mostrará que $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset int(cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$.

En efecto, como $U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ se tiene entonces que

$$int(cl(int(U_\alpha))) \subset int(cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$$

pero $U_\alpha \subset int(cl(int(U_\alpha)))$ para cada $\alpha \in J$, de donde se obtiene que

$$U_\alpha \subset int(cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$$

para cada $\alpha \in J$ y por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset int(cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))).$$

(3) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ tales que $U_\alpha \subset cl(int(U_\alpha))$ para todo $\alpha \in J$. Se mostrará que $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$.

En efecto, como $U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ se sigue que

$$cl(int(U_\alpha)) \subset cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$$

pero $U_\alpha \subset cl(int(U_\alpha))$ para cada $\alpha \in J$.

Así, $U_\alpha \subset cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$ para cada $\alpha \in J$ y por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)).$$

$\square$

La coleccion formada por los conjuntos regular abiertos no es cerrada para las uniones arbitrarias tal y como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5. Considere $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. Los τ-cerrados son:
$\{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{d\}, \{b\}\}$.
Observe que:
$cl(\{a\}) = \{a, b, d\}$, $int(cl(\{a\})) = \{a, b\}$
$cl(\{c\}) = \{c, d\}$, $int(cl(\{c\})) = \{c\}$
$cl(\{a, b\}) = \{a, b, d\}$, $int(cl(\{a, b\})) = \{a, b\}$
$cl(\{a, c\}) = X$, $int(cl(\{a, c\})) = X$
$cl(\{a, b, c\}) = X$, $int(cl(\{a, b, c\})) = X$
$cl(\{a, c, d\}) = X$, $int(cl(\{a, c, d\})) = X$

Los conjuntos regular abiertos en (X, τ) son:

$$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$$

Pero $\{c\} \cup \{a, b\} = \{a, b, c\}$, que no es regular abierto. $\square$

Teorema 1.4. *Sea X un espacio topológico, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) La intersección arbitraria de conjuntos pre-cerrados es un conjunto pre-cerrado.

(2) La intersección arbitraria de conjuntos α-cerrados es un conjunto α-cerrado.

(3) La intersección arbitraria de conjuntos semi-cerrados es un conjunto semi-cerrado.

Demostración: Es consecuencia directa de la Definición 1.2, el Teorema 1.3 y las leyes de De Morgan. $\square$

La familia de todos los conjuntos regular abierto (resp. regular cerrado, semi-abierto, α-abierto, pre-abierto, β-abierto) se denota por $RO(X)$ (resp. $RC(X)$, $SO(X)$, $\alpha O(X)$, $PO(X)$, $\beta O(X)$). La familia de todos los conjuntos regular abierto, regular cerrado, semi-abierto, α-abierto, pre-abierto, β-abierto de X que contiene un punto $x \in X$ se denota por $RO(X, x)$, $RC(X, x)$, $SO(X, x)$, $\alpha O(X, x)$, $PO(X, x)$, $\beta O(X, x)$, respectivamente. A continuación se define el concepto de clausura asociada a los conjuntos pre-cerrado, α-cerrado y semi-cerrado.

Definición 1.3. Para un subconjunto A de un espacio X se define:

(1) La preclausura de A, denotada por P-$cl(A)$ como la intersección de todos los conjuntos pre-cerrados, que contienen a A.

(2) La α-clausura de A, denotada por α-$cl(A)$ como la intersección de todos los conjuntos α-cerrados, que contienen a A.

(3) La semi-clausura de A, denotada por s-$cl(A)$, como la intersección de todos los conjuntos semi-cerrados, que contienen a A.

La preclausura, la α-clausura y la semi-clausura tambien pueden escribirse como conjuntos minimales que satisfacen cierta propiedad, tal y como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.5. *Sea A un subconjunto de un espacio X, las siguientes proposiciones se satisfacen:*

(1) La preclausura de A, es el pre-cerrado más pequeño que contiene a A.

(2) La α-clausura de A, es el α-cerrado mas pequeño que contiene a A.

(3) La semi-clausura de A,es el semi-cerrado mas pequeño que contiene a A.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 1.3 y el Teorema 1.4. □

El siguiente lema caracteriza la semi-clausura de un conjunto abierto en términos del interior y clausura.

Lema 1.1. *s-$cl(A) = int(cl(A))$ para cualquier subconjunto abierto A de un espacio X.*

Demostración: Para todo subconjunto A de X, $int(cl(A)) \subset s\text{-}cl(A)$. Falta mostrar que $s\text{-}cl(A) \subset int(cl(A))$. Suponga que $x \notin int(cl(A))$, entonces $x \in cl(int(X\backslash A))$. Como A es abierto, se tiene que $A \subset int(cl(A))$. De modo que $cl(int(X\backslash A))$ es un semi-abierto que contiene a x y $A \cap cl(int(X\backslash A)) = \emptyset$. Esto dice que $x \notin s\text{-}cl(A)$. Por lo tanto se obtiene que $s\text{-}cl(A) = int(cl(A))$. □

Es de observar que la caracterización de la semi-clausura en el lema anterior es para conjuntos abiertos y en general no es cierto para conjuntos arbitrarios, tal como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.
Los τ-cerrados son:
$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}\}$.
Observe que:
$int(\{a\}) = \{a\}$, $cl(int(\{a\})) = \{a, c\}$, $\{a\} \subset cl(int(\{a\})) \Longrightarrow \{a\}$ es semi-abierto
$int(\{b\}) = \{b\}$, $cl(int(\{b\})) = \{b, c\}$, $\{b\} \subset cl(int(\{b\})) \Longrightarrow \{b\}$ es semi-abierto
$int(\{a, b\}) = \{a, b\}$, $cl(int(\{a, b\})) = X$, $\{a, b\} \subset cl(int(\{a, b\})) \Longrightarrow \{a, b\}$ es semi-abierto

El conjunto $\{c\}$ es semi-cerrado por lo que $s\text{-}cl(\{c\}) = \{c\}$, pero $int(cl(\{c\})) = \emptyset$.

El siguiente teorema muestra que la clausura y la α-clausura coinciden sobre conjuntos β-abiertos.

Teorema 1.6. *Sea A un subconjunto de un espacio X. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) $cl(A)$ es α-cerrado.

(2) $\alpha\text{-}cl(A) \subset cl(A)$.

(3) $cl(int(cl(A)))$ es α-cerrado.

(4) Si $A \in \beta O(X)$ entonces $\alpha\text{-}cl(A) \subset cl(int(cl(A)))$.

(5) Si $A \in \beta O(X)$ entonces α-$cl(A) \in \beta O(X)$.

(6) Si A es α-cerrado y β-abierto entonces A es cerrado.

(7) Si $A \in \beta O(X)$ entonces $cl(A) \subset \alpha$-$cl(A)$.

Demostración:

(1) Dado que $cl(A)$ es cerrado y todo conjunto cerrado es α-cerrado se obtiene que $cl(A)$ es α-cerrado.

(2) Dado que $cl(A)$ es un α-cerrado que contiene a A y el α-cerrado mas pequeño que contiene a A es α-$cl(A)$ se obtiene que α-$cl(A) \subset cl(A)$.

(3) Si se toma $V = cl(int(cl(A)))$, entonces $V \subset cl(A)$. Así

$$\begin{aligned} cl(V) &\subset cl(A) \\ int(cl(V)) &\subset int(cl(A)) \\ cl(int(cl(V))) &\subset cl(int(cl(A))) = V \end{aligned}$$

Por lo que V es α-cerrado y se concluye que $cl(int(cl(A)))$ es α-cerrado.

(4) Si $A \in \beta O(X)$ entonces $A \subset cl(int(cl(A)))$, de modo que $cl(int(cl(A)))$ es un α-cerrado que contiene a A, pero el α-cerrado mas pequeño que contiene a A es α-$cl(A)$ de donde se concluye que α-$cl(A) \subset cl(int(cl(A)))$.

(5) Si $A \in \beta O(X)$ entonces α-$cl(A) \subset cl(int(cl(A)))$, además $A \subset \alpha$-$cl(A)$, por lo que

$$cl(int(cl(A))) \subset cl(int(cl(\alpha\text{-}cl(A))))$$

Así

$$\alpha\text{-}cl(A) \subset cl(int(cl(\alpha\text{-}cl(A))))$$

y se concluye que α-$cl(A) \in \beta O(X)$.

(6) Si A es α-cerrado se tiene que $cl(int(cl(A))) \subset A$. Análogamente, si A es β-abierto se tiene que $A \subset cl(int(cl(A)))$, por lo que $A = cl(int(cl(A)))$ y se tiene que A es cerrado.

(7) α-$cl(A)$ es α-cerrado. α-$cl(A)$ es β-abierto pues A es β-abierto, de modo que α-$cl(A)$ es un cerrado que contiene a A, pero el cerrado más pequeño que contiene a A es $cl(A)$ por lo que $cl(A) \subset \alpha$-$cl(A)$. $\square$

A continuación se muestra que la clausura y la pre-clausura coinciden sobre conjuntos semi-abiertos.

Teorema 1.7. *Sea A un subconjunto de un espacio X. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) $cl(A)$ es pre-cerrado.

(2) p-$cl(A) \subset cl(A)$.

(3) $cl(int(A))$ es pre-cerrado.

(4) Si $A \in SO(X)$ entonces p-$cl(A) \subset cl(int(A))$.

(5) Si $A \in SO(X)$ entonces p-$cl(A) \in SO(X)$.

(6) Si A es pre-cerrado y semi-abierto entonces A es cerrado.

(7) Si $A \in SO(X)$ entonces $cl(A) \subset p$-$cl(A)$.

Demostración:

(1) Dado que $cl(A)$ es cerrado y todo conjunto cerrado es pre-cerrado se obtiene que $cl(A)$ es pre-cerrado.

(2) Dado que $cl(A)$ es un pre-cerrado que contiene a A y el pre-cerrado mas pequeño que contiene a A es p-$cl(A)$ se obtiene que p-$cl(A) \subset cl(A)$.

(3) Por (1) la $cl(A)$ es pre-cerrado, de donde se tiene que $cl(int(A))$ es pre-cerrado.

(4) Si $A \in SO(X)$ entonces $A \subset cl(int(A))$, de modo que $cl(int(A))$ es un pre-cerrado que contiene a A, pero el pre-cerrado mas pequeño que contiene a A es $p\text{-}cl(A)$ de donde se concluye que $p\text{-}cl(A) \subset cl(int(A))$.

(5) Si $A \in SO(X)$ entonces $p\text{-}cl(A) \subset cl(int(A))$, además $A \subset p\text{-}cl(A)$, por lo que

$$cl(int(A)) \subset cl(int(p\text{-}cl(A)))$$

Así

$$p\text{-}cl(A) \subset cl(int(p\text{-}cl(A)))$$

y se concluye que $p\text{-}cl(A) \in SO(X)$.

(6) Si A es pre-cerrado se tiene que $cl(int(A)) \subset A$. Análogamente, si A es semi-abierto se tiene que $A \subset cl(int(A))$, por lo que $A = cl(int(A))$ y se tiene que A es cerrado.

(7) $p\text{-}cl(A)$ es pre-cerrado. $p\text{-}cl(A)$ es semi-abierto pues A es semi-abierto, de modo que $p\text{-}cl(A)$ es un cerrado que contiene a A, pero el cerrado más pequeño que contiene a A es $cl(A)$ por lo que $cl(A) \subset p\text{-}cl(A)$. □

Dado que las colecciones formadas por los conjuntos semi-cerrados, pre-cerrados y α-cerrados son cerradas bajo intersecciones arbitrarias, es natural e intuitivo pensar y definir la semi-clausura, la pre-clausura y la α-clausura. Estos conceptos originan conjuntos semi-cerrados, pre-cerrados y α-cerrados minimales. Sin embargo no sucede lo mismo con la coleccion formada por los conjuntos regular cerrados, es por esta razón que se introducen las siguientes definiciones.

Definición 1.4. La δ-clausura de un conjunto A en un espacio (X, τ) denotado por $\delta\text{-}cl(A)$, es definido por:

$$\delta\text{-}cl(A) = \{x \in X : A \cap int(cl(U)) \neq \emptyset, \text{para todo entorno U de x}, U \in \tau\}$$

Definición 1.5. El δ-interior de un subconjunto A de X es la unión de todos los conjuntos regulares abiertos de X contenidos en A y es denotado por $\delta\text{-}int(A)$.

Observe que el δ-interior no es regular abierto, debido a que la unión de conjuntos regular abiertos no es regular abierto (Ver ejemplo 1.5).

Los siguientes teoremas muestran algunas propiedades de la δ-clausura y δ-interior de un conjunto.

Teorema 1.8. *Sea A un subconjunto de un espacio X, las siguientes proposiciones se satisfacen:*

(1) $\delta\text{-}int(A) \subset int(A) \subset A$.

(2) Si $A \subset B$ *entonces* $\delta\text{-}int(A) \subset \delta\text{-}int(B)$.

Demostración:

(1) El $\delta\text{-}int(A)$ se define como la unión de conjuntos regular abierto que están contenidos en A, por lo tanto $\delta\text{-}int(A) \subset A$. Como todo conjunto regular abierto es abierto se obtiene que $\delta\text{-}int(A)$ es un abierto contenido en A. Pero el abierto mas grande contenido en A es $int(A)$, por lo tanto, $\delta\text{-}int(A) \subset int(A)$.

(2) Sea $x \in \delta\text{-}int(A)$, esto dice que $x \in \bigcup W$, W regular abierto, $W \subset A$. Como $A \subset B$, $x \in \bigcup W$, W regular abierto, $W \subset B$. Por lo tanto, se tiene que $x \in \delta\text{-}int(B)$. $\square$

Teorema 1.9. *Sea A un subconjunto de un espacio X, las siguientes proposiciones se satisfacen:*

(1) $cl(A) \subset \delta\text{-}cl(A)$.

(2) $A \subset \delta\text{-}cl(A)$

(3) Si $A \subset B$ *entonces* $\delta\text{-}cl(A) \subset \delta\text{-}cl(B)$.

Demostración:

(1) Sea $x \in cl(A)$, esto dice que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo conjunto abierto U, $x \in U$. Entonces,

$$U \subset cl(U),$$

$$U = int(U) \subset int(cl(U)),$$

$$\emptyset \neq U \cap A \subset int(cl(U)) \cap A.$$

Esto dice que $int(cl(U)) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \delta\text{-}cl(A)$.

(2) Como $A \subset cl(A)$ para todo $A \subset X$, por (1) se tiene que $A \subset \delta\text{-}cl(A)$.

(3) Suponga que $x \notin \delta\text{-}cl(B)$, esto nos dice que existe un conjunto abierto U de x tal que $int(cl(U)) \cap B = \emptyset$. Entonces,

$$A \cap int(cl(U)) \subset B \cap int(cl(U)) = \emptyset.$$

Por lo que $A \cap int(cl(U)) = \emptyset$ y se tiene que $x \notin \delta\text{-}cl(A)$. □

Teorema 1.10. *Sea A un subconjunto de un espacio X, las siguientes proposiciones se satisfacen:*

(1) $\delta\text{-}int(X \setminus A) = X \setminus \delta\text{-}cl(A)$.

(2) $\delta\text{-}cl(X \setminus A) = X \setminus \delta\text{-}int(A)$.

(3) $\delta\text{-}int(\delta\text{-}cl(A)) \subset int(\delta\text{-}cl(A))$.

(4) $\delta\text{-}int(A) \subset int(\delta\text{-}cl(A))$.

(5) $\delta\text{-}int(\delta\text{-}int(A)) = \delta\text{-}int(A)$.

(6) $\delta\text{-}cl(\delta\text{-}cl(A)) = \delta\text{-}cl(A)$.

Demostración:

(1) Sea $x \in \delta\text{-}int(X \setminus A)$, entonces existe un regular abierto U tal que

$$x \in U \subset X \setminus A$$

luego $U \cap A = \emptyset$. Como U es regular abierto entonces $U = int(cl(U))$ e $int(cl(U)) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, $x \notin \delta\text{-}cl(A)$ y se tiene que $x \in X \setminus \delta\text{-}cl(A)$. Así, $\delta\text{-}int(X \setminus A) \subset X \setminus \delta\text{-}cl(A)$.

Por otra parte, suponga que $x \in X \setminus \delta\text{-}cl(A)$,esto implica que $x \notin \delta\text{-}cl(A)$, entonces existe un abierto U de x tal que

$$int(cl(U)) \cap A = \emptyset$$

$$x \in U \subset int(cl(U)) \subset X \setminus A$$

esto dice que $x \in \delta\text{-}int(X \setminus A)$. Así, $X \setminus \delta\text{-}cl(A) \subset \delta\text{-}int(X \setminus A)$ y se concluye que

$$X \setminus \delta\text{-}cl(A) = \delta\text{-}int(X \setminus A)$$

.

(2) Suponga que $x \notin \delta\text{-}cl(X \setminus A)$, entonces existe un conjunto abierto U, $x \in U$ tal que

$$int(cl(U)) \cap X \setminus A = \emptyset$$

$$x \in U \subset int(cl(U)) \subset A$$

esto dice que $x \in \delta\text{-}int(A)$ y se tiene que $x \notin X \setminus \delta\text{-}int(A)$ y por lo tanto $X \setminus \delta\text{-}int(A) \subset \delta\text{-}cl(X \setminus A)$

Por otra parte, suponga que $x \notin X \setminus \delta\text{-}int(A)$, esto implica que $x \in \delta\text{-}int(A)$ entonces existe un conjunto regular abierto U, tal que $x \in U \subset A$, esto dice que $U \cap X \setminus A = \emptyset$. Como $U = int(cl(U))$ entonces $int(cl(U)) \cap X \setminus A = \emptyset$, esto dice que $x \notin \delta\text{-}cl(X \setminus A)$ y por lo tanto $\delta\text{-}cl(X \setminus A) \subset X \setminus \delta\text{-}int(A)$. De esta manera se concluye que $\delta\text{-}cl(X \setminus A) = X \setminus \delta\text{-}int(A)$.

(3) Sea $x \in \delta\text{-}int(\delta\text{-}cl(A))$, esto nos dice que $x \in \bigcup W$, W regular abierto, $W \subset \delta\text{-}cl(A)$. Así, $x \in W$ para algún W regular abierto, $W \subset \delta\text{-}cl(A)$. Como todo conjunto regular abierto es abierto entonces existe un W abierto, tal que $W \subset \delta\text{-}cl(A)$. Por lo tanto, $x \in int(\delta\text{-}cl(A))$.

(4) Sea $x \in \delta\text{-}int(A)$, esto dice que $x \in \bigcup W$, W regular abierto, $W \subset A$. Así, $x \in W$ para algún W regular abierto, $W \subset A$. Como todo conjunto regular abierto es abierto y $A \subset \delta\text{-}cl(A)$ entonces existe un W abierto, tal que $W \subset \delta\text{-}cl(A)$. Por lo tanto, $x \in int(\delta\text{-}cl(A))$.

(5) Por el Teorema 1.8, se tiene que $\delta\text{-}int(\delta\text{-}int(A)) \subset \delta\text{-}int(A)$. Falta ver que

$$\delta\text{-}int(A) \subset \delta\text{-}int(\delta\text{-}int(A))$$

Para esto, tómese $x \notin \delta\text{-}int(\delta\text{-}int(A))$, entonces para todo regular abierto U que contenga a x se cumple que

$$U \cap (X \setminus \delta\text{-}int(A)) \neq \emptyset$$

$$U \cap (\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \neq \emptyset$$

esto dice que existe $z \in U \cap (\delta\text{-}cl(X \setminus A))$. Observe que U es un abierto que contiene a z, por lo que

$$int(cl(U)) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

$$U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

de esta manera se concluye que $x \notin \delta\text{-}int(A)$. Por lo tanto,

$$\delta\text{-}int(\delta\text{-}int(A)) = \delta\text{-}int(A)$$

.

(6) Por el Teorema 1.9, se tiene que $\delta\text{-}cl(A) \subset \delta\text{-}cl(\delta\text{-}cl(A))$. Falta ver que

$$\delta\text{-}cl(\delta\text{-}cl(A)) \subset \delta\text{-}cl(A)$$

Para esto, tómese $x \notin \delta\text{-}cl(A)$, entonces existe un conjunto abierto U de x tal que

$$int(cl(U)) \cap A = \emptyset$$

Observe que de aquí se deduce que

$$int(cl(U)) \cap \delta\text{-}cl(A) = \emptyset$$

Pues en caso contrario existiría $z \in int(cl(U)) \cap \delta\text{-}cl(A)$. Si se toma $V = int(cl(U))$, entonces V es un abierto que contiene a z y sigue que

$$int(cl(V)) \cap A \neq \emptyset$$

$$V \cap A \neq \emptyset$$

$$int(cl(U)) \cap A \neq \emptyset$$

lo que contradice el hecho que $int(cl(U)) \cap A = \emptyset$. De esta manera se concluye que

$$\delta\text{-}cl(\delta\text{-}cl(A)) \subset \delta\text{-}cl(A)$$

Por lo tanto

$$\delta\text{-}cl(\delta\text{-}cl(A)) = \delta\text{-}cl(A)$$

□

Definición 1.6. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es:

(1) δ-abierto si $A = \delta\text{-}int(A)$.

(2) δ-pre-abierto si $A \subset int(\delta\text{-}cl(A))$.

(3) δ-semi-abierto si $A \subset cl(\delta\text{-}int(A))$.

Como consecuencia del Teorema 1.10 se obtiene que el $\delta\text{-}int(A)$ es un conjunto δ-abierto.

Definición 1.7. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es:

(1) δ-cerrado si $X \setminus A$ es δ-abierto.

(2) δ-pre-cerrado si $X \setminus A$ es δ-pre-abierto.

(3) δ-semicerado si $X \setminus A$ es δ-semi-abierto.

Teorema 1.11. *Sea A un subconjunto de un espacio X. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) A es δ-cerrado si y solo si $A = \delta\text{-}cl(A)$.

(2) A es δ-pre-cerrado si y solo si $cl(\delta\text{-}int(A)) \subset A$.

(3) A es δ-semi-cerrado si y solo si $int(\delta\text{-}cl(A)) \subset A$.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto δ-cerrado, entonces $X \setminus A$ es un conjunto δ-abierto, es decir

$$X \setminus A = \delta\text{-}int(X \setminus A) = X \setminus \delta\text{-}cl(A)$$

Tomando complemento, se tiene que $A = \delta\text{-}cl(A)$.

Recíprocamente, suponga que $A = \delta\text{-}cl(A)$, tomando complemento se tiene que

$$X \setminus A = X \setminus \delta\text{-}cl(A) = \delta\text{-}int(X \setminus A)$$

esto dice que $X \setminus A$ es δ-abierto y por lo tanto A es δ-cerrado.

(2) Suponga que A es un conjunto δ-pre-cerrado, entonces $X \setminus A$ es un conjunto δ-pre-abierto, es decir

$$X \setminus A \subset int(\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \subset int(X \setminus \delta\text{-}int(A)) \subset X \setminus cl(\delta\text{-}int(A))$$

Tomando complemento, se tiene que $cl(\delta\text{-}int(A)) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $cl(\delta\text{-}int(A)) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$X \setminus A \subset X \setminus cl(\delta\text{-}int(A)) \subset int(X \setminus \delta\text{-}int(A)) \subset int(\delta\text{-}cl(X \setminus A))$$

esto dice que $X \setminus A$ es δ-pre-abierto y por lo tanto A es δ-pre-cerrado.

(3) Suponga que A es un conjunto δ-semi-cerrado, entonces $X \setminus A$ es un conjunto δ-semi-abierto, es decir

$$X \setminus A \subset cl(\delta\text{-}int(X \setminus A)) \subset cl(X \setminus \delta\text{-}cl(A)) \subset X \setminus int(\delta\text{-}cl(A))$$

Tomando complemento, se tiene que $int(\delta\text{-}cl(A)) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $int(\delta\text{-}cl(A)) \subset A$, tomando complemento se tiene

$$X \setminus A \subset X \setminus int(\delta\text{-}cl(A)) \subset cl(X \setminus \delta\text{-}cl(A)) \subset cl(\delta\text{-}int(X \setminus A))$$

esto dice que $X \setminus A$ es δ-semi-abierto y por lo tanto A es δ-semi-cerrado. $\square$

Como consecuencia del Teorema 1.10 se obtiene que δ-$cl(A)$ es un conjunto δ-cerrado.

La familias de todos los conjuntos δ-abiertos, δ-pre-abiertos, δ-semi-abiertos se denotan por $\delta O(X)$, $\delta PO(X)$, $\delta SO(X)$ respectivamente. La familias de todos los conjuntos δ-abiertos, δ-pre-abiertos, δ-semi-abiertos con respecto a un punto x de X se denotan por $\delta O(X,x)$, $\delta PO(X,x)$, $\delta SO(X,x)$ respectivamente.

El siguiente teorema muestra la relación existente entre las distintas clases de conjuntos abiertos hasta ahora definidas.

Teorema 1.12. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes propiedades se cumplen:*

(1) Todo conjunto δ-semi-abierto es un conjunto semi-abierto.

(2) Todo conjunto δ-abierto es un conjunto δ-semi-abierto.

(3) Todo conjunto δ-abierto es un conjunto abierto.

(4) Todo conjunto abierto es un conjunto δ-pre-abierto.

(5) Todo conjunto pre-abierto es un conjunto δ-pre-abierto.

(6) Todo conjunto regular abierto es δ-abierto.

(7) Todo conjunto δ-abierto es un conjunto δ-pre-abierto.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto δ-semi-abierto, entonces

$$A \subset cl(\delta\text{-}int(A)) \subset cl(int(A))$$

Por lo tanto, A es semi-abierto.

(2) Suponga que A es un conjunto δ-abierto, entonces

$$A \subset \delta\text{-}int(A) \subset cl(\delta\text{-}int(A))$$

Por lo tanto, A es δ-semi-abierto.

(3) Suponga que A es un conjunto δ-abierto,entonces $A = \delta\text{-}int(A)$. Como $\delta\text{-}int(A)$ es un conjunto abierto, se deduce que A es un conjunto abierto.

(4) Suponga que A es un conjunto abierto, entonces

$$A \subset int(A) \subset int(\delta\text{-}cl(A))$$

Por lo tanto, A es un conjunto δ-pre-abierto.

(5) Suponga que A es un conjunto pre-abierto, entonces

$$A \subset int(cl(A)) \subset int(\delta\text{-}cl(A))$$

Por lo tanto, A es un conjunto δ-pre-abierto.

(6) Sea U un conjunto regular cerrado. $X \setminus U$ es regular abierto. Así

$$\delta\text{-}int(X \setminus U) = \bigcup_{W \subset X \setminus U} W$$

donde W es regular abierto. Como $X \setminus U$ es regular abierto entonces

$$\delta\text{-}int(X \setminus U) = X \setminus U$$

Por lo tanto $X \setminus U$ es δ-abierto y así, U es δ-cerrado. Ahora, sea W un conjunto regular abierto, entonces $X \setminus W$ es regular cerrado. Como todo conjunto regular cerrado es δ-cerrado entonces $X \setminus W$ es δ-cerrado, de donde se tiene que W es un conjunto δ-abierto.

(7) Suponga que A es un conjunto δ-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &= \delta\text{-}int(A) \\ &\subset int(\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto δ-pre-abierto $\square$

De acuerdo con el Teorema 1.12 y el Teorema 1.1 se tiene el siguiente diagrama para un subconjunto A de un espacio X:

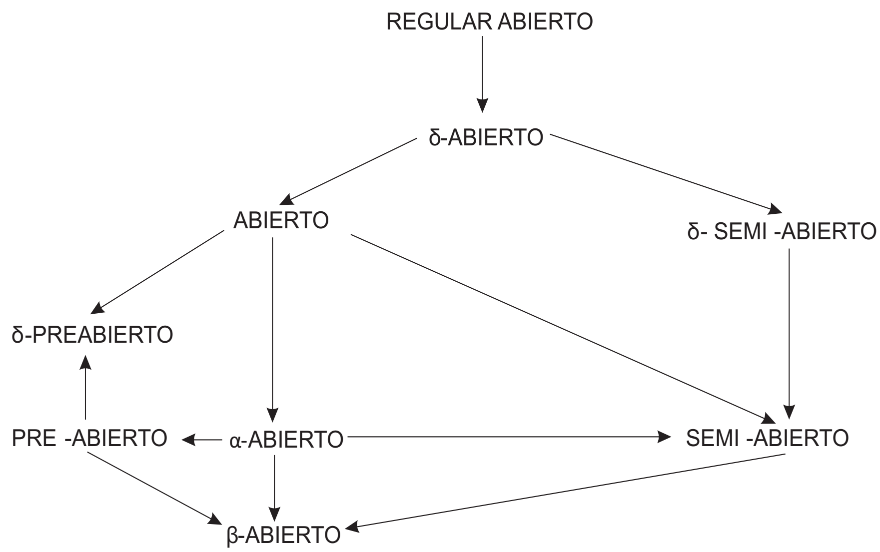

Figura 1.2: Diagrama 2

Ninguna de estas implicaciones es reversible como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.7. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. El conjunto $\{a, c\}$ es semi-abierto pero no es δ-semi-abierto.

Ejemplo 1.8. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. El conjunto $\{a, c\}$ es δ-semi-abierto pero no es δ-abierto.

Ejemplo 1.9. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. El conjunto $\{a, c\}$ es abierto pero no es δ-abierto.

Ejemplo 1.10. Sea $X = \{x, y, z, w\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{w\}, \{x, y\}, \{x, w\}, \{x, y, w\}, \{x, w, z\}\}$. El conjunto $\{y\}$ es δ-pre-abierto pero no es pre-abierto.

Ejemplo 1.11. Sea $X = \{x, y, z, w\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{w\}, \{x, y\}, \{x, w\}, \{x, y, w\}, \{x, w, z\}\}$. El conjunto $\{y\}$ es δ-pre-abierto pero no es abierto.

Ejemplo 1.12. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. El conjunto $\{a, b, c\}$ es δ-abierto pero no es regular abierto.

Definición 1.8. Un punto $x \in X$ se dice que es punto θ-semi-clausura de un subconjunto A de X si $cl(U) \cap A \neq \emptyset$ para todo conjunto semi-abierto U que contenga a x. El conjunto de todos los puntos θ-semi-clausura de A es denotado por θ-s-$cl(A)$. Un subconjunto A es llamado θ-semi-cerrado si $A = \theta$-s-$cl(A)$. El complemento de un conjunto θ-semi-cerrado es llamado θ-semi-abierto.

Definición 1.9. Para un subconjunto A de un espacio X, el conjunto $\bigcap\{P \in RO(X) : A \subset P\}$ es llamado el r-kernel de A y es denotado por r-$ker(A)$.

Lema 1.2. *Las siguientes propiedades para $A \subset X$ y $B \subset X$ se satisfacen:*

(1) $x \in r$-$ker(A)$ si y solo si $A \cap S \neq \emptyset$ para cualquier conjunto regular cerrado S, $x \in S$.

(2) $A \subset r$-$ker(A)$.

(3) $A = r$-$ker(A)$ si A es regular abierto en X.

(4) Si $A \subset B$ entonces r-$ker(A) \subset r$-$ker(B)$.

Demostración:

(1) Suponga que $x \notin r$-$ker(A)$, entonces existe un conjunto regular abierto U, $A \subset U$ y $x \notin U$. Como $x \notin U$, entonces $x \in X \setminus U$. Como U es un conjunto regular abierto en X, $X \setminus U$ es un conjunto regular cerrado. Si se toma $S = X \setminus U$ entonces $A \cap S = \emptyset$ para cualquier conjunto regular cerrado S, $x \in S$.

Recíprocamente, suponga que para algún regular cerrado S, $x \in S$, $P \cap S = \emptyset$. Como $A \cap S = \emptyset$ y $x \notin X \setminus S$, esto nos dice que $A \subset X \setminus S$. Ahora $X \setminus S$ es un conjunto regular abierto que contiene a A y $x \notin X \setminus S$. Así $x \notin \bigcap\{U \in RO(X) : A \subset U\}$, esto dice que $x \notin r$-$ker(A)$.

(2) Observe que $A \subset r\text{-}ker(A)$ puesto que $r\text{-}ker(A)$ es la intersección de conjuntos regular abierto que contienen a A.

(3) Suponga que A es un conjunto regular abierto en X, entonces $r\text{-}ker(A) \subset A$, en consecuencia $A = r\text{-}ker(A)$.

(4) Suponga que $x \notin r\text{-}ker(B)$, entonces existe un conjunto regular abierto U, $B \subset U$ y $x \notin U$. Como $A \subset B \subset U$ entonces existe un regular abierto U, $A \subset U$ y $x \notin U$, esto dice que $x \notin r\text{-}ker(A)$. $\square$

1.2 Conjuntos e-abierto, e^*-abierto y a-abierto

En esta sección se introducen las nociones de conjuntos e-abierto como una generalización de los conceptos de conjuntos δ-abierto, δ-semi-abierto y δ-pre-abierto. También se introducen las nociones de conjuntos e^*-abierto y a-abierto. Se estudia la relación entre estos conceptos, se definen nociones de clausura e interior asociadas a estos conjuntos y se estudian algunas propiedades.

Definición 1.10. Un subconjunto A de un espacio (X, τ) es llamado:

(1) e-abierto si $A \subset cl(\delta\text{-}int(A)) \cup int(\delta\text{-}cl(A))$.

(2) e^*-abierto si $A \subset cl(int(\delta\text{-}cl(A)))$.

(3) a-abierto si $A \subset int(cl(\delta\text{-}int(A)))$.

Definición 1.11. Un subconjunto A de un espacio (X, τ) es llamado:

(1) e-cerrado si $X \setminus A$ es e-abierto.

(2) e^*-cerrado si $X \setminus A$ es e^*-abierto.

(3) a-cerrado si $X \setminus A$ es a-abierto.

El siguiente teorema caracteriza los conjuntos e-cerrado, e^*-cerrado y a-cerrado en términos de la clausura, interior, δ-clausura y δ-interior.

Teorema 1.13. *Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) A es e-cerrado si y solo si $cl(\delta\text{-}int(A)) \cap int(\delta\text{-}cl(A)) \subset A$.

(2) A es e^*-cerrado si y solo si $int(cl(\delta\text{-}int(A))) \subset A$.

(3) A es a-cerrado si y solo si $cl(int(\delta\text{-}cl(A))) \subset A$.

Demostración:

(1) Suponga que A es e-cerrado, entonces $X \setminus A$ es e-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset cl(\delta\text{-}int(X \setminus A)) \cup int(\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \\ &\subset cl(X \setminus \delta\text{-}cl(A)) \cup int(X \setminus \delta\text{-}int(A)) \\ &\subset X \setminus int(\delta\text{-}cl(A)) \cup X \setminus cl(\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que $cl(\delta\text{-}int(A)) \cap int(\delta\text{-}cl(A)) \subset A$.
Recíprocamente, suponga que $cl(\delta\text{-}int(A)) \cap int(\delta\text{-}cl(A)) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus (cl(\delta\text{-}int(A)) \cap int(\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset X \setminus cl(\delta\text{-}int(A)) \cup X \setminus int(\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset int(X \setminus \delta\text{-}int(A)) \cup cl(X \setminus \delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset int(\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \cup cl(\delta\text{-}int(X \setminus A)) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es e-abierto y por lo tanto A es e-cerrado.

(2) Suponga que A es e^*-cerrado, entonces $X \setminus A$ es e^*-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset cl(int(\delta\text{-}cl(X \setminus A))) \\ &\subset cl(int(X \setminus \delta\text{-}int(A))) \\ &\subset cl(X \setminus cl(\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset X \setminus int(cl(\delta\text{-}int(A))) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que $int(cl(\delta\text{-}int(A))) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $int(cl(\delta\text{-}int(A))) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus (int(cl(\delta\text{-}int(A)))) \\ &\subset cl(X \setminus cl(\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset cl(int(X \setminus \delta\text{-}int(A))) \\ &\subset cl(int(\delta\text{-}cl(X \setminus A))) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es e^*-abierto y por lo tanto A es e^*-cerrado.

(3) Suponga que A es a-cerrado, entonces es $X \setminus A$ a-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset int(cl(\delta\text{-}int(X \setminus A))) \\ &\subset int(cl(X \setminus \delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset int(X \setminus int(\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset X \setminus cl(int(\delta\text{-}cl(A))) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que $cl(int(\delta\text{-}cl(A))) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $cl(int(\delta\text{-}cl(A))) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus (cl(int(\delta\text{-}cl(A)))) \\ &\subset int(X \setminus int(\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset int(cl(X \setminus \delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset int(cl(\delta\text{-}int(X \setminus A))) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es a-abierto y por lo tanto A es a-cerrado. $\square$

A continuación se muestra la relación existente entre los conjuntos e-abierto, e^*-abierto y a-abierto.

Teorema 1.14. *Para un subconjunto A de un espacio X las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) Todo conjunto a-abierto es un conjunto e-abierto.

(2) Todo conjunto e-abierto es un conjunto e*-abierto.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto a-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset int(cl(\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A)) \cup int(\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto e-abierto.

(2) Suponga que A es un conjunto e-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset cl(\delta\text{-}int(A)) \cup int(\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A)) \cup cl(int(\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A) \cup int(\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset cl(int(\delta\text{-}cl(A))) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto e^*-abierto. □

Los siguientes ejemplos muestran que los recíprocos del teorema anterior en general no son ciertos.

Ejemplo 1.13. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. El conjunto $\{b, d\}$ es e-abierto pero no es a-abierto.

Ejemplo 1.14. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. El conjunto $\{b, d\}$ es e^*-abierto pero no es e-abierto.

El siguiente resultado relaciona todas las nociones de conjuntos abiertos hasta ahora estudiados.

Teorema 1.15. *Sea X un espacio topológico, A subconjunto de X. Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) Todo conjunto δ-abierto es a-abierto.

(2) Todo conjunto a-abierto es δ-pre-abierto.

(3) Todo conjunto a-abierto es δ-semi-abierto.

(4) Todo conjunto a-abierto es α-abierto.

(5) Todo conjunto δ-semi-abierto es e-abierto.

(6) Todo conjunto α-abierto es e-abierto.

(7) Todo conjunto pre-abierto es e-abierto.

(8) Todo conjunto semi-abierto es e^*-abierto.

(9) Todo conjunto δ-pre-abierto es e-abierto.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto δ-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &= \delta\text{-}int(A) \\ A &\subset cl(\delta\text{-}int(A)) \\ int(A) &\subset int(cl(\delta\text{-}int(A)) \\ A = \delta\text{-}int(A) \subset int(A) &\subset int(cl(\delta\text{-}int(A))) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto e-abierto.

(2) Suponga que A es un conjunto a-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset int(cl(\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset int(cl(A)) \\ &\subset int(\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto δ-pre-abierto.

(3) Suponga que A es un conjunto a-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset int(cl(\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto δ-semi-abierto.

(4) Suponga que A es un conjunto a-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset int(cl(\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset int(cl(int(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto α-abierto.

(5) Suponga que A es un conjunto δ-semi-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset cl(\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A)) \cup int(\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto e-abierto.

(6) Suponga que A es un conjunto α-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset int(cl(int(A)) \\ &\subset int(cl(A)) \\ &\subset int(\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset int(\delta\text{-}cl(A)) \cup int(\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto e-abierto.

(7) Suponga que A es un conjunto pre-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset int(cl(A)) \\ &\subset int(\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset int(\delta\text{-}cl(A)) \cup cl(\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto e-abierto.

(8) Suponga que A es un conjunto semi-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset cl(int(A)) \\ &\subset cl(int(\delta\text{-}cl(A))) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto e^*-abierto.

(9) Suponga que A es un conjunto δ-pre-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset int(\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset int(\delta\text{-}cl(A)) \cup cl(\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto e-abierto. □

De acuerdo con el Teorema 1.12, el Teorema 1.1 y el Teorema 1.15 se tiene el siguiente diagrama para un subconjunto A de un espacio X:

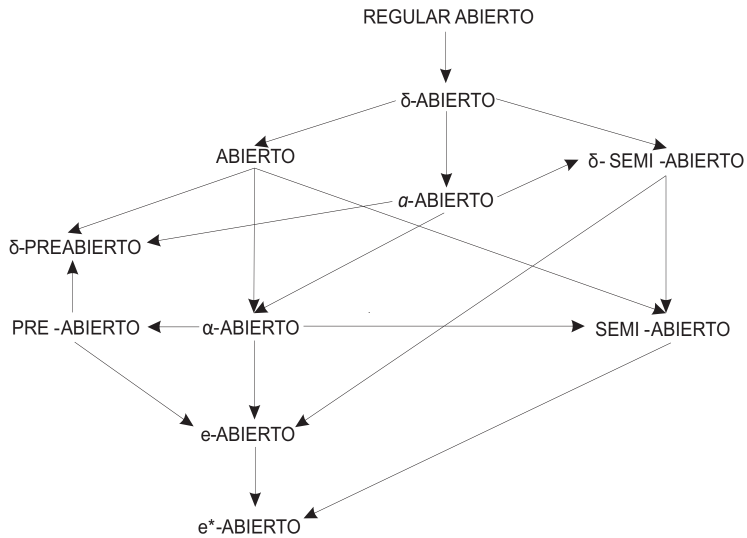

Figura 1.3: Diagrama 3

A continuación se muestra que los recíprocos del Teorema 1.15 en general no se satisfacen:

Ejemplo 1.15. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$. El conjunto $\{a, b, c\}$ es a-abierto pero no δ-abierto.

Ejemplo 1.16. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, d\}, \{c\}, \{a, c, d\}\}$. El conjunto $\{a, b, c\}$ es δ-pre-abierto pero no a-abierto.

Ejemplo 1.17. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. El conjunto $\{c, d\}$ es δ-semi-abierto pero no a-abierto.

Ejemplo 1.18. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. El conjunto $\{a, c\}$ es α-abierto pero no a-abierto.

Ejemplo 1.19. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. El conjunto $\{a, c\}$ es e-abierto pero no δ-semi-abierto.

Ejemplo 1.20. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. El conjunto $\{b\}$ es e-abierto pero no α-abierto.

Ejemplo 1.21. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. El conjunto $\{b\}$ es e-abierto pero no pre-abierto.

Ejemplo 1.22. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. El conjunto $\{b, d\}$ es e^*-abierto pero no semi-abierto.

Ejemplo 1.23. Sea $X = \{x, y, w, z\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{w\}, \{x, y\}, \{x, w\}, \{x, y, w\}, \{x, w, z\}\}$. El conjunto $\{y, w\}$ es e-abierto pero no b-abierto.

Ejemplo 1.24. Sea $X = \{x, y, w, z\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}, \{w\}, \{x, y\}, \{x, w\}, \{x, y, w\}, \{x, w, z\}\}$. El conjunto $\{x, z\}$ es b-abierto pero no e-abierto.

A continuación se muestra que las colecciones formadas por los conjuntos e-abierto, e^*-abierto y a-abierto son cerradas bajo uniones arbitrarias.

Teorema 1.16. *Para una familia de subconjuntos de X las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) La unión de cualquier familia de conjuntos e**-abierto es un conjunto* e**-abierto.*

(2) La unión de cualquier familia de conjuntos e-abierto es un conjunto e-abierto.

(3) La unión de cualquier familia de conjuntos a-abierto es un conjunto a-abierto.

Demostración:

(1) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos e^*-*abierto*, entonces para cada $\alpha \in J$, $U_\alpha \subset cl(int(\delta\text{-}cl(U_\alpha)))$, por lo que:

$$\begin{aligned}
U_\alpha &\subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \\
cl(int(\delta\text{-}cl(U_\alpha))) &\subset cl(int(\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))) \\
U_\alpha &\subset cl(int(\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))) \\
\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha &\subset cl(int(\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha)))
\end{aligned}$$

y se tiene que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ es e^*-abierto.

(2) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de conjuntos e-abierto, entonces para cada $\alpha \in J$, $U_\alpha \subset cl(\delta\text{-}int(U_\alpha)) \cup int(\delta\text{-}cl(U_\alpha))$, por lo que:

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in J}(cl(\delta\text{-}int(U_\alpha)) \cup (int(\delta\text{-}cl(U_\alpha))))$$

Pero,

$$\bigcup_{\alpha\in J} cl(\delta\text{-}int(U_\alpha)) \subset cl(\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$$

y

$$\bigcup_{\alpha\in J} int(\delta\text{-}cl(U_\alpha)) \subset int(\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha\in J}(cl(\delta\text{-}int(U_\alpha)) \cup (int(\delta\text{-}cl(U_\alpha)))) \subset cl(\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)) \cup int(\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$$

En consecuencia

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset cl(\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)) \cup int(\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$$

y se tiene que $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ es e-abierto.

(3) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de conjuntos a-abierto, entonces para cada $\alpha \in J$, $U_\alpha \subset int(cl(\delta\text{-}int(U_\alpha)))$, por lo que:

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in J}(int(cl(\delta\text{-}int(U_\alpha))))$$

Pero,

$$\bigcup_{\alpha\in J}(int(cl(\delta\text{-}int(U_\alpha)))) \subset int(cl(\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$$

En consecuencia

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset int(cl(\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$$

y se tiene que $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ es a-abierto. $\square$

Teorema 1.17. *Para una familia de subconjuntos de X las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) La intersección de familia de conjuntos e^*-cerrado es un conjunto e^*-cerrado.

(2) La intersección de familia de conjuntos e-cerrado es un conjunto e-cerrado.

(3) La intersección de familia de conjuntos e-cerrado es un conjunto e-cerrado.

Demostración: Es consecuencia directa de la Definición 1.10, el Teorema 1.16 y las leyes de De Morgan. □

La familia de todos los conjuntos e^*-abierto, e-abierto, a-abierto de X es denotado por $e^*O(X)$, $eO(X)$, $aO(X)$ respectivamente. La familia de todos los conjuntos e^*-abierto, e-abierto, a-abierto de X que contienen un punto $x \in X$ es denotado por $e^*O(X,x)$, $eO(X,x)$, $aO(X,x))$ respectivamente.

A continuación se define la noción de clausura asociada a los conjuntos e^*-cerrado, e-cerrado, a-cerrado respectivamente.

Definición 1.12. Sea X un espacio topológico, A un subconjunto de X, se define:

(1) La e^*-clausura de A, denotada por e^*-$cl(A)$ como la intersección de todos los conjuntos e^*-cerrado que contiene a A.

(2) La e-clausura de A, denotada por e-$cl(A)$ como la intersección de todos los conjuntos e-cerrado que contiene a A.

(3) La a-clausura de A, denotada por a-$cl(A)$ como la intersección de todos los conjuntos a-cerrado que contiene a A.

La e^*-clausura, la e-clausura y la a-clausura son conjuntos e^*-cerrado, e-cerrado, a-cerrado respectivamente, tal y como se exhibe en el siguiente teorema.

Teorema 1.18. *Las siguiente propiedades para un subconjunto A de un espacio X se cumplen:*

(1) La e^**-clausura de* A*, es el* e^**-cerrado mas pequeño que contiene a* A*.*

(2) La e-clausura de A*, es el e-cerrado mas pequeño que contiene a* A*.*

(3) La a-clausura de A*, es el a-cerrado mas pequeño que contiene a* A*.*

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 1.12 y el Teorema 1.17. □

Definición 1.13. Sea X un espacio topológico, A un subconjunto de X, se define:

(1) La e^*-interior de A, denotada por e^*-$int(A)$ como la unión de todos los conjuntos e^*-abierto contenido en A.

(2) La e-interior de A, denotada por e-$int(A)$ como la unión de todos los conjuntos e-abierto contenido a A.

(3) La a-interior de A, denotada por a-$int(A)$ como la unión de todos los conjuntos a-abierto contenido a A.

Teorema 1.19. *Las siguiente propiedades para un subconjunto* A *de un espacio* X *se cumplen:*

(1) La e^**-interior de* A*, es el* e^**-abierto mas grande contenido en* A*.*

(2) La e-interior de A*, es el e-abierto mas grande contenido en* A*.*

(3) La a-interior de A*, es el a-abierto mas grande contenido en* A*.*

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 1.13 y el Teorema 1.16. □

El siguiente lema relaciona la e^*-clausura y el e^*-interior de un conjunto. De forma análoga, se relaciona la e-clausura y el e-interior, la a-clausura y el a-interior.

Lema 1.3. *Las siguientes propiedades para un subconjunto* A *de un espacio* X *se cumplen:*

(1) $X \setminus e^*\text{-}cl(A) = e^*\text{-}int(X \setminus A)$.

(2) $X \setminus e\text{-}cl(A) = e\text{-}int(X \setminus A)$.

(3) $X \setminus a\text{-}cl(A) = a\text{-}int(X \setminus A)$.

Demostración:

(1) Como $A \subset e^*\text{-}cl(A)$, tomando complemento $X \setminus e^*\text{-}cl(A) \subset X \setminus A$. Como $X \setminus e^*\text{-}cl(A)$ es un conjunto e^*-abierto contenido en $X \setminus A$ se tiene que:

$$X \setminus e^*\text{-}cl(A) \subset e^*\text{-}int(X \setminus A) \subset X \setminus A$$

Tomando complemento

$$A \subset X \setminus e^*\text{-}int(X \setminus A) \subset e^*\text{-}cl(A)$$

Como $X \setminus e^*\text{-}int(X \setminus A)$ es un conjunto e^*-cerrado que contiene a A entonces

$$e^*\text{-}cl(A) \subset X \setminus e^*\text{-}int(X \setminus A) \subset e^*\text{-}cl(A)$$

Como los extremos son iguales se tiene que

$$e^*\text{-}cl(A) = X \setminus e^*\text{-}int(X \setminus A)$$

Tomando complemento se concluye que

$$X \setminus e^*\text{-}cl(A) = e^*\text{-}int(X \setminus A)$$

(2) Como $A \subset e\text{-}cl(A)$, tomando complemento $X \setminus e\text{-}cl(A) \subset X \setminus A$. Como $X \setminus e\text{-}cl(A)$ es un conjunto e-abierto contenido en $X \setminus A$ se tiene que:

$$X \setminus e\text{-}cl(A) \subset e\text{-}int(X \setminus A) \subset X \setminus A$$

Tomando complemento

$$A \subset X \setminus e\text{-}int(X \setminus A) \subset e\text{-}cl(A)$$

Como $X \setminus e\text{-}int(X \setminus A)$ es un conjunto e-cerrado que contiene a A entonces

$$e\text{-}cl(A) \subset X \setminus e\text{-}int(X \setminus A) \subset e\text{-}cl(A)$$

Como los extremos son iguales se tiene que

$$e\text{-}cl(A) = X \setminus e\text{-}int(X \setminus A)$$

Tomando complemento se concluye que

$$X \setminus e\text{-}cl(A) = e\text{-}int(X \setminus A)$$

(3) Como $A \subset a\text{-}cl(A)$, tomando complemento $X \setminus a\text{-}cl(A) \subset X \setminus A$. Como $X \setminus a\text{-}cl(A)$ es un conjunto a-abierto contenido en $X \setminus A$ se tiene que:

$$X \setminus a\text{-}cl(A) \subset a\text{-}int(X \setminus A) \subset X \setminus A$$

Tomando complemento

$$A \subset X \setminus a\text{-}int(X \setminus A) \subset a\text{-}cl(A)$$

Como $X \setminus a\text{-}int(X \setminus A)$ es un conjunto a-cerrado que contiene a A entonces

$$a\text{-}cl(A) \subset X \setminus a\text{-}int(X \setminus A) \subset a\text{-}cl(A)$$

Como los extremos son iguales se tiene que

$$a\text{-}cl(A) = X \setminus a\text{-}int(X \setminus A)$$

Tomando complemento se concluye que

$$X \setminus a\text{-}cl(A) = a\text{-}int(X \setminus A)$$

□

Lema 1.4. *Sea X un espacio y $A, B \subset X$. Si $A \in \delta O(X)$ y $B \in e^*O(X)$, entonces $A \cap B \in e^*O(X)$.*

Demostración: Sea $A \in \delta O(X)$ y $B \in e^{*}O(X)$, entonces $A = \delta\text{-}int(A)$ y $B \subset cl(int(\delta\text{-}cl(B)))$ respectivamente

$$\begin{aligned} A \cap B &\subset \delta\text{-}int(A) \cap cl(int(\delta\text{-}cl(B))) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A) \cap int(\delta\text{-}cl(B))) \\ &= cl(\delta\text{-}int(\delta\text{-}int(A) \cap \delta\text{-}cl(B))) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(\delta\text{-}cl(\delta\text{-}int(A) \cap B))) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(\delta\text{-}cl(A \cap B))) \\ &\subset cl(int(\delta\text{-}cl(A \cap B))) \end{aligned}$$

De esta manera $A \cap B \in e^{*}O(X)$. □

Lema 1.5. *Sea X un espacio y $A, B \subset X$. Si $A \in \delta O(X)$ y $B \in eO(X)$, entonces $A \cap B \in eO(X)$.*

Demostración: Sea $A \in \delta O(X)$ y $B \in eO(X)$, entonces

$$A = \delta\text{-}int(A) \text{ y } B \subset cl(\delta\text{-}int(B)) \cup int(\delta\text{-}cl(B))$$

respectivamente. Luego

$$\begin{aligned} A \cap B &\subset \delta\text{-}int(A) \cap (cl(\delta\text{-}int(B)) \cup int(\delta\text{-}cl(B))) \\ &\subset (\delta\text{-}int(A) \cap cl(\delta\text{-}int(B))) \cup (\delta\text{-}int(A) \cap int(\delta\text{-}cl(B))) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A) \cap \delta\text{-}int(B)) \cup (\delta\text{-}int(A) \cap int(\delta\text{-}cl(B))) \\ &= cl(\delta\text{-}int(A) \cap \delta\text{-}int(B)) \cup \delta\text{-}int(\delta\text{-}int(A) \cap \delta\text{-}cl(B)) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A \cap B)) \cup \delta\text{-}int(\delta\text{-}cl(\delta\text{-}int(A) \cap B)) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A \cap B)) \cup \delta\text{-}int(\delta\text{-}cl(A \cap B)) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(A \cap B)) \cup int(\delta\text{-}cl(A \cap B)) \end{aligned}$$

De esta manera $A \cap B \in eO(X)$ □

CAPÍTULO 2
FORMAS DÉBILES DE FUNCIONES *ALMOST* CONTRA-SUPER-CONTINUAS

En este capítulo, se utilizan los conceptos definidos en el Capítulo 1 para definir nuevas clases de funciones, que generalizan a las funciones *Almost* contra-super-continua. Se estudian las relaciones entre estas funciones, propiedades y bajo que condiciones son equivalentes. También se introducen las nociones de conjuntos compactos y axiomas de separación asociadas a los conjuntos e^*-abierto, e-abierto y a-abierto. Se estudia el comportamiento de estos conjuntos bajo estas nuevas clases de funciones.

2.1 Funciones *Almost* contra-super-continuas

En esta sección, se define el ya clásico concepto de funciones *Almost* contra-super-continuas. También se definen las funciones (δ-semi,s)-continua, (δ-pre,s)-continua, contra R-map y su relación con las funciones *Almost* contra-super-continua. Se utilizan los conjuntos e-abierto, e^*-abierto y a-abierto para definir nuevas formas débiles de funciones *Almost* contra-super-continuas que generalizan las formas de continuidad antes mencionadas.

Definición 2.1. Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

(1) contra R-map si $f^{-1}(A)$ es regular cerrado en X para todo conjunto A regular abierto en Y.

(2) *almost* contra-super-continua si $f^{-1}(A)$ es δ-cerrado en X para todo conjunto A regular abierto en Y.

(3) (δ-semi,s)-continua si $f^{-1}(A)$ es δ-semi-cerrado en X para todo conjunto A regular abierto en Y.

(4) (δ-pre,s)-continua si $f^{-1}(A)$ es δ-pre-cerrado en X para todo conjunto A regular abierto en Y.

El siguiente teorema muestra la relación existente entre las formas débiles de continuidad antes definidas.

Teorema 2.1. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) Si f es contra R-map entonces f es almost contra-super-continua.

(2) Si f es almost contra-super-continua entonces f es (δ-semi,s)-continua.

(3) Si f es almost contra-super-continua entonces f es (δ-pre,s)-continua.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 2.1, el Teorema1.12 y las leyes de De Morgan. $\square$

Se tiene el siguiente diagrama para una función $f : X \to Y$

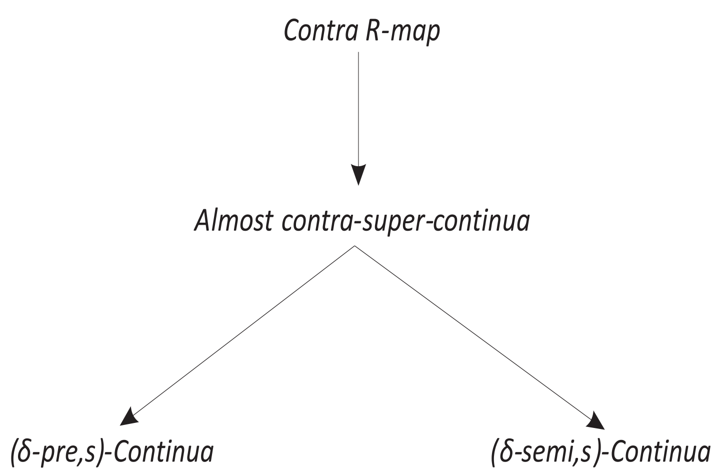

Figura 2.1: Diagrama 4

Los siguientes ejemplos muestran que los recíprocos del teorema anterior en general no son ciertos:

Ejemplo 2.1. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. La función identidad $i : X \to X$ es *almost* contra-super-continua pero no contra R-map.

Ejemplo 2.2. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. La función identidad $i : X \to X$ es (δ-semi,s)-continua pero no *almost* contra-super-continua.

Ejemplo 2.3. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a, d\}, \{c\}, \{a, c, d\}\}$. La función $f : X \to X$ definida por $f(a) = d$, $f(b) = a$, $f(c) = b$, $f(d) = c$ es (δ-pre,s)-continua pero no *almost* contra-super-continua.

El siguiente lema presenta una caracterización puntual de las funciones *almost* contra-super-continua.

Lema 2.1. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Si f es almost contra-super-continua, entonces para cada $x \in X$ y para $V \in SO(Y, f(x))$, existe un conjunto δ-abierto U en X que contiene a x tal que $f(U) \subset cl(V)$.*

Demostración: Sea $x \in X$ y V un semi-abierto tal que $f(x) \in V$. Observe que $cl(V) = cl(int(cl(V)))$, de aquí que $cl(V)$ es un regular cerrado en Y que contiene a $f(x)$ y por lo tanto $Y \setminus cl(V)$ es un regular abierto en Y. Dado que f es *almost* contra-super-continua se tiene que $f^{-1}(Y \setminus cl(V))$ es δ-cerrado en X. Pero

$$f^{-1}(Y \setminus cl(V)) = X \setminus f^{-1}(cl(V))$$

Así $f^{-1}(cl(V))$ es δ-abierto en X y $x \in f^{-1}(cl(V))$, esto es

$$f^{-1}(cl(V)) = \delta\text{-}int(f^{-1}(cl(V)))$$

Si se toma $U = \delta\text{-}int(f^{-1}(cl(V)))$ entonces en virtud del Teorema 1.10, U es un δ-abierto en X, $x \in U$ y $f^{-1}(cl(V)) = U$, de donde se concluye que

$$cl(V) \supset f(f^{-1}(cl(V))) = f(U)$$

$\square$

En la siguiente definición se usan los conjuntos e^*-cerrado, e-cerrado y a-cerrado para definir nuevas formas débiles de continuidad que generalizan el concepto de función *almost* contra-super-continua.

Definición 2.2. Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

(1) (e^*,s)-continua si la imagen inversa de cada conjunto regular abierto de Y es e^*-cerrado en X.

(2) (e,s)-continua si la imagen inversa de cada conjunto regular abierto de Y es e-cerrado en X.

(3) (a,s)-continua si la imagen inversa de cada conjunto regular abierto de Y es a-cerrado en X.

A continuación se muestra la relación existente entre las formas débiles de continuidad hasta ahora definidas.

Teorema 2.2. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Se tienen las siguientes propiedades*

(1) Si f es almost contra-super-continua entonces f es (a,s)-continua.

(2) Si f es (a,s)-continua entonces f es (δ-semi,s)-continua.

(3) Si f es (a,s)-continua entonces f es (δ-pre,s)-continua.

(4) Si f es (δ-semi,s)-continua entonces f es (e,s)-continua.

(5) Si f es (δ-pre,s)-continua entonces f es (e,s)-continua.

(6) Si f es (e,s)-continua entonces f es (e^*,s)-continua.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 2.2, el Teorema 1.14, el Teorema 1.15 y las leyes de De Morgan. $\square$

Se tiene el siguiente diagrama para una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos:

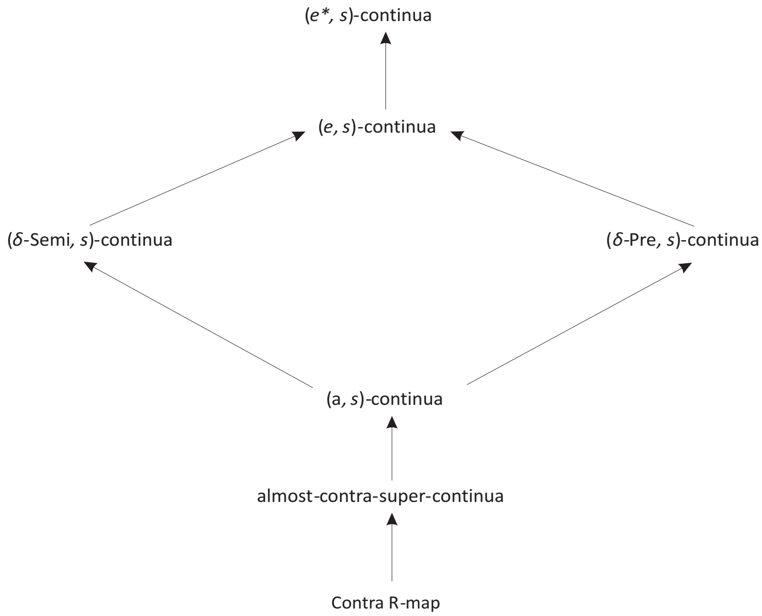

Figura 2.2: Diagrama 5

Ninguna de estas implicaciones es reversible como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.4. Sea $X = \{a, b, c, d\} = Y$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$ y $\sigma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. Considere la función $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ definida por f(a)=d, f(b)=d, f(c)=d, f(d)=c. Entonces, f es (a,s)-continua pero no es *almost* contra-super-continua. En efecto,

Los σ-cerrados son:

$\{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{d\}, \{b\}\}$.

Observe que:

$cl(\{a\}) = \{a, b, d\}$, $int(cl(\{a\})) = \{a, b\}$

$cl(\{c\}) = \{c, d\}$, $int(cl(\{c\})) = \{c\}$

$cl(\{a, b\}) = \{a, b, d\}$, $int(cl(\{a, b\})) = \{a, b\}$

$cl(\{a, c\}) = X$, $int(cl(\{a, c\})) = X$

$cl(\{a, b, c\}) = X$, $int(cl(\{a, b, c\})) = X$

$cl(\{a, c, d\}) = X$, $int(cl(\{a, c, d\})) = X$

De manera que los conjuntos regular abierto en (Y, σ) son:
$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$

Por otro lado, la imagen inversa de cada conjunto regular abierto en (Y, σ) es:

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in X : f(x) \in Y\} = X$$

$$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in X : f(x) = c\} = \{d\}$$

$$f^{-1}(\{a, b\}) = \{x \in X : f(x) \in \{a, b\}\} = \emptyset$$

Finalmente, observe que $\delta\text{-}cl(\{d\}) = \{c, d\}$, luego

$$int(\delta\text{-}cl(\{d\})) = int(\{c, d\}) = \emptyset$$

$$cl(int(\delta\text{-}cl(\{d\}))) = cl(\emptyset) = \emptyset \subset \{d\}$$

Esto implica que $\{d\}$ es a-cerrado, y por tanto la imagen inversa de cada regular abierto en (Y, σ) es a-cerrado en (X, τ). De donde se obtiene que la función f es (a,s)-continua.
Sin embargo, f no es almost contra-super-continua, pues $V = \{c\}$ es un regular abierto en (Y, σ) pero $f^{-1}(V) = \{d\}$ no es δ-cerrado en (X, τ).

A continuación, se muestra con detalles que la $\delta\text{-}cl(\{d\}) = \{c, d\}$

(1) $a \notin \delta\text{-}cl(\{d\})$ pues $U = \{a\}$ es un abierto que contiene a a y sin embargo $int(cl(U)) \cap \{d\} = \emptyset$.

(2) $b \notin \delta\text{-}cl(\{d\})$ pues $U = \{b\}$ es un abierto que contiene a b y sin embargo $int(cl(U)) \cap \{d\} = \emptyset$.

(3) $c \in \delta\text{-}cl(\{d\}$ pues los únicos abiertos que contienen a c son $U = X$ y $U = \{a, b, c\}$, en cada uno de los casos $int(cl(U)) = X$ de donde se obtiene que $int(cl(U)) \cap \{d\} \neq \emptyset$.

(4) $d \in \delta$-$cl(\{d\}$ pues los únicos abiertos que contienen a c son $U = X$ y $U = \{a, b, d\}$, en cada uno de los casos $int(cl(U)) = X$ de donde se obtiene que $int(cl(U)) \cap \{d\} \neq \emptyset$.

Ejemplo 2.5. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. Sea $f : X \to X$ la función definida por $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c$. Entonces f es (e,s)-continua pero no es (δ-*semi*,s)-continua. En efecto,

Los τ-cerrados son:

$\{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, b\}, \{b\}, \{a\}\}$

Observe que:

$cl(\{a\}) = \{a\}$, $int(cl(\{a\})) = \{a\} \Longrightarrow \{a\}$ es regular abierto

$cl(\{c\}) = \{b, c\}$, $int(cl(\{c\})) = \{b, c\} \Longrightarrow \{c\}$ no es regular abierto

$cl(\{a, c\}) = X$, $int(cl(\{a, c\})) = X \Longrightarrow \{a, c\}$ no es regular abierto

$cl(\{b, c\}) = \{b, c\}$, $int(cl(\{b, c\})) = \{b, c\} \Longrightarrow \{b, c\}$ es regular abierto

$cl(\{b\}) = \{b\}$, $int(cl(\{b\})) = \emptyset \Longrightarrow \{b\}$ no es regular abierto

$cl(\{a, b\}) = \{a, b\}$, $int(cl(\{a, b\})) = \emptyset \Longrightarrow \{a, b\}$ no es regular abierto

Los conjuntos regular abierto son:

$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ en (X, τ)

Observe que f es (e, s)-continua

Buscamos la imagen inversa de cada conjunto regular abierto:

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(X) = X$

$f^{-1}(\{a\}) = \{x \in X : f(x) \in \{a\}\} = \{b\}$

$f^{-1}(\{b, c\}) = \{x \in X : f(x) \in \{b, c\}\} = \{a, c\}$

Siempre se cumple que $\emptyset$ y X son e-cerrado, ahora se verifica que $\{b\}$ y $\{a, c\}$ son e-cerrados

Se determina la δ-$cl(\{a,c\})$

δ-$cl(\{a,c\}) = \{x \in X : \{a,c\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset$ para todo entorno U de x$\}$

para esto observe que:

(1) $a \in \delta$-$cl(\{a,c\})$ pues

$U = \{a\}$, $cl(U) = \{a\}$, $int(cl(U)) = \{a\}$, $\{a,c\} \cap \{a\} \neq \emptyset$

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{a,c\} \cap X \neq \emptyset$

$U = \{a,c\}$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{a,c\} \cap \ X \neq \emptyset$.

(2) $b \in \delta$-$cl(\{a,c\})$ pues

$U = \{b,c\}$, $cl(U) = \{b,c\}$, $int(cl(U)) = \{b,c\}$, $\{a,c\} \cap \{b,c\} \neq \emptyset$

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{a,c\} \cap X \neq \emptyset$.

(3) $c \in \delta$-$cl(\{a,c\})$ pues

$U = \{b,c\}$, $cl(U) = \{b,c\}$, $int(cl(U)) = \{b,c\}$, $\{a,c\} \cap \{b,c\} \neq \emptyset$

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{a,c\} \cap X \neq \emptyset$.

Así δ-$cl(\{a,c\}) = \{a,b,c\} = X$, luego

$int(\delta\text{-}cl(\{a,c\})) = int(\{a,b,c\}) = int(X) = X$

δ-$int(\{a,c\}) = \{a\}$, $cl(\delta\text{-}int(\{a,c\})) = \{a\}$

$cl(\delta\text{-}int(\{a,c\})) \cap int(\delta\text{-}cl(\{a,c\})) = \{a\} \cap X = \{a\} \subset \{a,c\}$

Esto dice que $\{a,c\}$ es *e-cerrado*

Se determina la δ-$cl(\{b\})$

δ-$cl(\{b\}) = \{x \in X : \{b\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset$ para todo entorno U de x$\}$

para esto observe que:

(1) $a \notin \delta$-$cl(\{b\})$ pues

$U = \{a\}$, $cl(U) = \{a\}$, $int(cl(U)) = \{a\}$,$\{b\} \cap \{a\} = \emptyset$.

(2) $b \in \delta\text{-}cl(\{b\})$ pues

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{b\} \cap X \neq \emptyset$

$U = \{b, c\}$, $cl(U) = \{b, c\}$, $int(cl(U)) = \{b, c\}$, $\{b\} \cap \{b, c\} \neq \emptyset$.

(3) $c \in \delta\text{-}cl(\{b\})$ pues

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{c\} \cap X \neq \emptyset$

$U = \{b, c\}$, $cl(U) = \{b, c\}$, $int(cl(U)) = \{b, c\}$, $\{c\} \cap \{b, c\} \neq \emptyset$

$U = \{a, c\}$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{c\} \cap\ X \neq \emptyset$

$U = \{c\}$, $cl(U) = \{b, c\}$, $int(cl(U)) = \{b, c\}$, $\{c\} \cap \{b, c\} \neq \emptyset$.

Así $\delta\text{-}cl(\{b\}) = \{b, c\}$, luego
$int(\delta\text{-}cl(\{b\})) = int(\{b, c\}) = \{b, c\}$
$\delta\text{-}int(\{b\}) = \emptyset$, $cl(\delta\text{-}int(\{b\})) = \emptyset$
$cl(\delta\text{-}int(\{b\})) \cap int(\delta\text{-}cl(\{b\})) = \emptyset \cap \{b, c\} = \emptyset \subset \{b\}$

Esto dice que $\{b\}$ es e-cerrado

Como $\emptyset, X, \{a, c\}, \{b\}$ son e-cerrado entonces f es (e,s)-continua.
Observe que
$X \setminus \{b\} = \{a, c\}$
$\delta\text{-}int(\{a, c\}) = \{a\}$
$cl(\delta\text{-}int(\{a, c\})) = \{a\}$
$\{a, c\} \nsubseteq cl(\delta\text{-}int(\{a, c\}))$
esto dice que $\{a, c\}$ no es δ-semi-abierto, $X \setminus \{b\}$ no es δ-semi-abierto, $\{b\}$ no es δ-semi-cerrado. Por lo tanto f no es (δ-semi,s)-continua.

Ejemplo 2.6. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. Entonces la función identidad $i : X \to X$ es (δ-semi,s)-continua pero no es (a,s)-continua. En efecto,

Los τ-cerrados son:
$\{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{d\}, \{b\}\}$

Observe que:

$cl(\{a\}) = \{a, b, d\}$, $int(cl(\{a\})) = \{a, b\} \Longrightarrow \{a\}$ no es regular abierto

$cl(\{c\}) = \{c, d\}$, $int(cl(\{c\})) = \{c\} \Longrightarrow \{c\}$ es regular abierto

$cl(\{a, b\}) = \{a, b, d\}$, $int(cl(\{a, b\})) = \{a, b\} \Longrightarrow \{a, b\}$ es regular abierto

$cl(\{a, c\}) = X$, $int(cl(\{a, c\})) = X \Longrightarrow \{a, c\}$ no es regular abierto

$cl(\{a, b, c\}) = X$, $int(cl(\{a, b, c\})) = X \Longrightarrow \{a, b, c\}$ no es regular abierto

$cl(\{a, c, d\}) = X$, $int(cl(\{a, c, d\})) = X \Longrightarrow \{a, c, d\}$ no es regular abierto

Los conjuntos regular abierto son:

$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$ en (X, τ)

Ahora, se verifica si i es (δ-semi,s)-continua

Se busca la imagen inversa de cada conjunto regular abierto:

$i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$i^{-1}(X) = X$

$i^{-1}(\{c\}) = \{x \in X : i(x) \in \{c\}\} = \{c\}$

$i^{-1}(\{a, b\}) = \{x \in X : i(x) \in \{a, b\}\} = \{a, b\}$

Siempre se cumple que $\emptyset$ y X son δ-semi-cerrado, ahora se verifica que $\{c\}$ y $\{a, b\}$ son δ-semi-cerrado

Buscando el complemento de las imágenes inversa se obtiene que:

$X \setminus \emptyset = X$, $X \setminus X = \emptyset$, $X \setminus \{c\} = \{a, b, d\}$, $X \setminus \{a, b\} = \{c, d\}$

Luego,

$$\delta\text{-}int(\{a, b, d\}) = \{a, b\}$$

$$cl(\delta\text{-}int(\{a, b, d\})) = \{a, b, d\}$$

$$\{a,b,d\} \subset cl(\delta\text{-}int(\{a,b,d\}))$$

esto dice que $X \setminus \{c\} = \{a,b,d\}$ es δ-semi-abierto, así $\{c\}$ es δ-semi-cerrado

De manera similar, se tiene que

$$\delta\text{-}int(\{c,d\}) = \{c\}$$

$$cl(\delta\text{-}int(\{c,d\})) = \{c,d\}$$

$$\{c,d\} \subset cl(\delta\text{-}int(\{c,d\}))$$

esto dice que $X \setminus \{a,b\} = \{c,d\}$ es δ-semi-abierto, así $\{a,b\}$ es δ-semi-cerrado

Como $\emptyset, X, \{c\}, \{a,b\}$ son δ-semi-cerrado entonces i es (δ-semi,s)-continua. Pero i no es (a,s)-continua, para esto, se verifica que $\{a,b\}$ no es a-cerrado

$$\delta\text{-}cl(\{a,b\}) = \{x \in X : \{a,b\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset \text{ para todo entorno U de x}\}$$

$$\delta\text{-}cl(\{a,b\}) = \{a,b,d\}$$

$$int(\delta\text{-}cl(\{a,b\})) = \{a,b\}$$

$$cl(int(\delta\text{-}cl(\{a,b\}))) = \{a,b,d\}$$

Pero $cl(int(\delta\text{-}cl(\{a,b\})) \nsubseteq \{a,b\}$, esto dice que $\{a,b\}$ no es a-cerrado, en consecuencia i no es (a,s)-continua.

Ejemplo 2.7. Sea $X = \{a,b,c,d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}\}$. La función $f : X \to X$ definida por $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = a$, $f(d) = c$ es (e^*,s)-continua pero no es (e,s)-continua. En efecto,

Los τ-cerrados son:

$\{\emptyset, X, \{b,c,d\}, \{a,b,d\}, \{c,d\}, \{b,d\}, \{d\}, \{b\}\}$

Observe que:

$cl(\{a\}) = \{a,b,d\}$, $int(cl(\{a\})) = \{a,b\} \Longrightarrow \{a\}$ no es regular abierto

$cl(\{c\}) = \{c, d\}$, $int(cl(\{c\})) = \{c\} \Longrightarrow \{c\}$ es regular abierto

$cl(\{a, b\}) = \{a, b, d\}$, $int(cl(\{a, b\})) = \{a, b\} \Longrightarrow \{a, b\}$ es regular abierto

$cl(\{a, c\}) = X$, $int(cl(\{a, c\})) = X \Longrightarrow \{a, c\}$ no es regular abierto

$cl(\{a, b, c\}) = X$, $int(cl(\{a, b, c\})) = X \Longrightarrow \{a, b, c\}$ no es regular abierto

$cl(\{a, c, d\}) = X$, $int(cl(\{a, c, d\})) = X \Longrightarrow \{a, c, d\}$ no es regular abierto

Los conjuntos regular abierto son:

$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$ en (X, τ)

Observe que f es (e^*,s)-continua

Buscamos la imagen inversa de cada conjunto regular abierto:

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(X) = X$

$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in X : f(x) \in \{c\}\} = \{b, d\}$

$f^{-1}(\{a, b\}) = \{x \in X : f(x) \in \{a, b\}\} = \{a, c\}$

Siempre se cumple que $\emptyset$ y X son e^*-cerrados, ahora se verifica que $\{b, d\}$ y $\{a, c\}$ son e^*-cerrado. Para esto, observe que:

$$\delta\text{-}int(\{b, d\}) = \emptyset$$

$$cl(\delta\text{-}int(\{b, d\})) = \emptyset$$

$$int(cl(\delta\text{-}int(\{b, d\}))) = \emptyset \subset \{b, d\}$$

Esto dice que $\{b, d\}$ es e^*-cerrado.

De manera similar

$$\delta\text{-}int(\{a, c\}) = \{c\}$$

$$cl(\delta\text{-}int(\{a, c\})) = \{c, d\}$$

$$int(cl(\delta\text{-}int(\{a,c\}))) = \{c\} \subset \{a,c\}$$

Esto dice que $\{a,c\}$ es e^*-cerrado.

Como $\emptyset, X, \{b,d\}, \{a,c\}$ son e^*-cerrado entonces f es (e^*,s)-continua. Pero f no es (e,s)-continua, para esto, se verifica que $\{a,c\}$ no es e-cerrado.

δ-$cl(\{a,c\}) = \{x \in X : \{a,c\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset$ para todo entorno U de x$\}$

$$\delta\text{-}cl(\{a,c\}) = X$$

$$int(\delta\text{-}cl(\{a,c\})) = X$$

$$cl(\delta\text{-}int(\{a,c\})) = \{c,d\}$$

$$cl(\delta\text{-}int(\{a,c\})) \cap int(\delta\text{-}cl(\{a,c\})) = \{c,d\} \cap X = \{c,d\} \nsubseteq \{a,c\}$$

Esto dice que $\{a,c\}$ no es e-cerrado, en consecuencia f no es (e,s)-continua.

Ejemplo 2.8. Sea $X = \{a,b,c,d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a,d\}, \{c\}, \{a,c,d\}\}$. Sea $f : X \to X$ una función definida por $f(a) = d$, $f(b) = a$, $f(c) = b$, $f(d) = c$. Entonces, f es (δ-pre,s)-continua pero no es (a,s)-continua. En efecto,

Los τ-cerrados son:

$\{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a,b,d\}, \{b\}\}$

Observe que:

$cl(\{a,c,d\}) = X$, $int(cl(\{a,c,d\})) = X \Longrightarrow \{a,c,d\}$ no es regular abierto

$cl(\{c\}) = \{b,c\}$, $int(cl(\{c\})) = \{c\} \Longrightarrow \{c\}$ es regular abierto

$cl(\{a,d\}) = \{a,b,d\}$, $int(cl(\{a,d\})) = \{a,d\} \Longrightarrow \{a,d\}$ es regular abierto

Los conjuntos regular abiertos son:

$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a,d\}\}$ en (X,τ)

Observe que f es (δ-pre,s)-continua

Se busca la imagen inversa de cada conjunto regular abierto:

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(X) = X$

$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in X : i(x) \in \{c\}\} = \{d\}$

$f^{-1}(\{a,d\}) = \{x \in X : i(x) \in \{a,d\}\} = \{a,b\}$

Siempre se cumple que $\emptyset$ y X son δ-pre-cerrados, ahora se verifica que $\{d\}$ y $\{a,b\}$ son δ-pre-cerrado.

Buscando el complemento de las imágenes inversa se obtiene que:

$X \setminus \{a,b\} = \{c,d\}$, $X \setminus \{d\} = \{a,b,c\}$

Luego

$$\delta\text{-}cl(\{c,d\}) = \{x \in X : \{c,d\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset \text{ para todo entorno U de x}\}$$

$$\delta\text{-}cl(\{c,d\}) = X$$

$$int(\delta\text{-}cl(\{c,d\})) = X$$

$$\{c,d\} \subset int(\delta\text{-}cl(\{c,d\}))$$

esto dice que $X \setminus \{a,b\} = \{c,d\}$ es δ-pre-abierto, así $\{a,b\}$ es δ-pre-cerrado

De manera similar

$$\delta\text{-}cl(\{a,b,c\}) = \{x \in X : \{a,b,c\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset \text{ para todo entorno U de x}\}$$

$$\delta\text{-}cl(\{a,b,c\}) = X$$

$$int(\delta\text{-}cl(\{a,b,c\})) = X$$

$$\{a,b,c\} \subset int(\delta\text{-}cl(\{a,b,c\}))$$

esto dice que $X \setminus \{d\} = \{a,b,c\}$ es δ-pre-abierto, así $\{d\}$ es δ-pre-cerrado

Como $\emptyset, X, \{a,b\}, \{d\}$ son δ-pre-cerrado entonces f es (δ-pre,s)-continua. Pero f no es (a,s)-continua, para esto, se verifica que $\{d\}$ no es a-cerrado.

δ-$cl(\{d\}) = \{x \in X : \{d\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset$ para todo entorno U de x$\}$

$$\delta\text{-}cl(\{d\}) = \{a,b,d\}$$

$$int(\delta\text{-}cl(\{d\})) = \{a,d\}$$

$$cl(int(\delta\text{-}cl(\{d\}))) = \{a,b,d\} \nsubseteq \{d\}$$

Esto dice que $\{d\}$ no es a-cerrado, en consecuencia f no es (a,s)-continua.

Ejemplo 2.9. Sea $X = \{a,b,c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Entonces la función identidad $i : X \to X$ es (e,s)-continua pero no es (δ-pre,s)-continua. En efecto,

Los τ-cerrados son:

$\{\emptyset, X, \{b,c\}, \{a,c\}, \{c\}\}$

Observe que:

$cl(\{a\}) = \{a,c\}$, $int(cl(\{a\})) = \{a\} \Longrightarrow \{a\}$ es regular abierto

$cl(\{b\}) = \{b,c\}$, $int(cl(\{b\})) = \{b\} \Longrightarrow \{b\}$ es regular abierto

$cl(\{a,b\}) = X$, $int(cl(\{a,b\})) = X \Longrightarrow \{a,b\}$ no es regular abierto

Los conjuntos regular abiertos son:

$\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ en (X,τ)

Se chequea si i es (e,s)-continua

Se busca la imagen inversa de cada conjunto regular abierto:

$i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$i^{-1}(X) = X$

$i^{-1}(\{a\}) = \{x \in X : i(x) \in \{a\}\} = \{a\}$

$i^{-1}(\{b\}) = \{x \in X : i(x) \in \{b\}\} = \{b\}$

Siempre se cumple que $\emptyset$ y X son e-cerrados, ahora se verifica que $\{a\}$ y $\{b\}$ son e-cerrado.

Se determina la δ-$cl(\{a\})$

δ-$cl(\{a\}) = \{x \in X : \{a\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset$ para todo entorno U de x$\}$

para esto observe que

(1) $a \in \delta$-$cl(\{a\})$ pues

$U = \{a\}$, $cl(U) = \{a, c\}$, $int(cl(U)) = \{a\}$,$\{a\} \cap \{a\} \neq \emptyset$

$U = \{a, b\}$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$,$\{a\} \cap X \neq \emptyset$

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{a\} \cap X \neq \emptyset$.

(2) $b \notin \delta$-$cl(\{a\})$ pues

$U = \{b\}$, $cl(U) = \{b, c\}$, $int(cl(U)) = \{b\}$, $\{b\} \cap \{a\} = \emptyset$.

(3) $c \in \delta$-$cl(\{a\})$ pues

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{a\} \cap X \neq \emptyset$.

Así δ-$cl(\{a\}) = \{a, c\}$, luego

$int(\delta\text{-}cl(\{a\})) = int(\{a, c\}) = \{a\}$

$\delta\text{-}int(\{a\}) = \{a\}$, $cl(\delta\text{-}int(\{a\})) = \{a, c\}$

$int(\delta\text{-}cl(\{a\})) \cap cl(\delta\text{-}int(\{a\})) = \{a\} \cap \{a, c\} = \{a\} \subset \{a\}$

Esto dice que $\{a\}$ es e-cerrado

Se determina la $\delta\text{-}cl(\{b\})$

$\delta\text{-}cl(\{b\}) = \{x \in X : \{b\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset$ para todo entorno U de x$\}$

para esto observe que

(1) $a \notin \delta\text{-}cl(\{b\})$ pues

$U = \{a\}$, $cl(U) = \{a, c\}$, $int(cl(U)) = \{a\}$,$\{a\} \cap \{b\} = \emptyset$.

(2) $b \in \delta\text{-}cl(\{b\})$ pues

$U = \{b\}$, $cl(U) = \{b, c\}$, $int(cl(U)) = \{b\}$,$\{b\} \cap \{b\} \neq \emptyset$

$U = \{a, b\}$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$,$\{b\} \cap X \neq \emptyset$

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{b\} \cap X \neq \emptyset$.

(3) $c \in \delta\text{-}cl(\{b\})$ pues

$U = X$, $cl(U) = X$, $int(cl(U)) = X$, $\{b\} \cap X \neq \emptyset$.

Así $\delta\text{-}cl(\{b\}) = \{b, c\}$, luego

$int(\delta\text{-}cl(\{b\})) = int(\{b, c\}) = \{b\}$

$\delta\text{-}int(\{b\}) = \{b\}$, $cl(\delta\text{-}int(\{b\})) = \{b, c\}$

$int(\delta\text{-}cl(\{b\})) \cap cl(\delta\text{-}int(\{b\})) = \{b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \subset \{b\}$

Esto dice que $\{b\}$ es e-cerrado

Como $\emptyset, X, \{a\}, \{b\}$ son e-cerrados entonces i es (e,s)-continua. Pero i no es (δ-pre,s)-continua, para esto, se verifica que $\{a\}$ no es δ-pre-cerrado.

$$X \setminus \{a\} = \{b, c\}$$

Se determina la $\delta\text{-}cl(\{b, c\})$

$\delta\text{-}cl(\{b, c\}) = \{x \in X : \{b, c\} \cap int(cl(U)) \neq \emptyset$ para todo entorno U de x$\}$

para esto observe que $a \notin \delta\text{-}cl(\{b,c\})$ pues
$U = \{a\}$, $cl(U) = \{a,c\}$, $int(cl(U)) = \{a\}$,$\{a\} \cap \{b,c\} = \emptyset$.

Luego

$$\delta\text{-}cl(\{b,c\}) = \{b,c\}$$

$$int(\delta\text{-}cl(\{b,c\})) = int(\{b,c\}) = \{b\}$$

Pero

$$\{b,c\} \nsubseteq int(\delta\text{-}cl(\{b,c\}))$$

Esto dice que $X \setminus \{a\} = \{b,c\}$ no es δ-pre-abierto, $\{a\}$ no es δ-pre-cerrado, en consecuencia i no es (δ-pre,s)-continua.

A continuación se exhibe que bajo ciertas condiciones las funciones (e^*,s)-continua, (e,s)-continua, (a,s)-continua, (δ-semi,s)-continua, (δ-pre,s)-continua y *almost* contra-super-continua coinciden.

Definición 2.3. Un espacio (X,τ) es llamado e^*-$T_{1/2}$ si todo conjunto e^*-cerrado es δ-cerrado.

Teorema 2.3. *Sean X, Y espacios topológicos. $f : X \to Y$ una función y X un espacio e^*-$T_{1/2}$. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) f es (e^*,s)-continua.

(2) f es (e,s)-continua.

(3) f es (δ-semi,s)-continua.

(4) f es (δ-pre,s)-continua.

(5) f es (a,s)-continua.

(6) f es almost contra-super-continua.

Demostración:

(6) $\Rightarrow$ (5) Suponga que f es *almost* contra-super-continua. Sea W un conjunto regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es δ-cerrado, es decir,

$$f^{-1}(W) = \delta\text{-}cl(f^{-1}(W))$$

Como

$$\begin{aligned} cl(int(\delta\text{-}cl(f^{-1}(W))) &\subset cl(\delta\text{-}cl(f^{-1}(W))) \\ &\subset \delta\text{-}cl(\delta\text{-}cl(f^{-1}(W))) \\ &= \delta\text{-}cl(f^{-1}(W)) \\ &= f^{-1}(W) \end{aligned}$$

Esto dice que $f^{-1}(W)$ es a-cerrado. Por lo tanto f es (a,s)-continua.

(5) $\Rightarrow$ (3) Suponga que f es (a,s)-continua. Sea W un conjunto regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es a-cerrado. $X \backslash f^{-1}(W)$ es a-abierto. Como

$$\begin{aligned} X \backslash f^{-1}(W) &\subset int(cl(\delta\text{-}int(X \backslash f^{-1}(W))) \\ &\subset cl(\delta\text{-}int(X \backslash f^{-1}(W)) \end{aligned}$$

Esto dice que $X \backslash f^{-1}(W)$ es δ-semi-abierto. $f^{-1}(W)$ es δ-semi-cerrado. Por lo tanto f es (δ-semi,s)-continua.

(3) $\Rightarrow$ (2) Suponga que f es (δ-semi,s)-continua. Sea W un conjunto regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$es δ-semi-cerrado, como todo conjunto δ-semi-cerrado es e-cerrado entonces $f^{-1}(W)$ es e-cerrado. Por lo tanto f es (e,s)-continua.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponga que f es (e,s)-continua. Sea W un conjunto regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es e-cerrado, como todo conjunto e-cerrado es e^*-cerrado, entonces $f^{-1}(W)$ es e^*-cerrado. Por lo tanto f es (e^*,s)-continua.

(1) $\Rightarrow$ (4) Suponga que f es (e^*,s)-continua. Sea W un conjunto regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es e^*-cerrado, como X es e^*-$T_{1/2}$, $f^{-1}(W)$ es δ-cerrado. Como todo conjunto δ-cerrado es δ-pre-cerrado entonces $f^{-1}(W)$ es δ-pre-cerrado. Por lo tanto f es (δ-pre,s)-continua.

(4) $\Rightarrow$ (6) Suponga que f es (δ-pre,s)-continua. Sea W un conjunto regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es δ-pre-cerrado, como todo conjunto δ-pre-cerrado es e-cerrado y todo conjunto e-cerrado es e^*-cerrado, entonces $f^{-1}(W)$ es e^*-cerrado. Como X es e^*-$T_{1/2}$, $f^{-1}(W)$ es δ-cerrado. Por lo tanto f es *almost* contra-super-continua. □

2.2 Formas débiles de funciones continuas

En esta sección se usan los conjuntos e^*-cerrado, e-cerrado y a-cerrado para definir nuevas formas débiles de continuidad, como lo son las funciones e^*-continua, e-continua y a-continua. Se estudia la relación entre estas funciones y el concepto clásico de continuidad y las formas débiles de funciones *Almost* contra-super-continua. También se estudia algunas caracterizaciones y propiedades.

Definición 2.4. Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

(1) e^*-continua si $f^{-1}(A)$ es e^*-abierto en X para todo conjunto abierto A de Y.

(2) *almost* e^*-continua si $f^{-1}(A)$ es e^*-abierto en X para todo conjunto regular abierto A de Y.

(3) *almost* e-continua si $f^{-1}(A)$ es e-abierto en X para todo conjunto regular abierto A de Y.

(4) *almost* a-continua si $f^{-1}(A)$ es a-abierto en X para todo conjunto regular abierto A de Y.

Teorema 2.4. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) Si f es continua entonces f es e^*-continua.

(2) Si f es e^*-continua entonces f es almost e^*-continua.

(3) Si f es continua entonces f es almost e-continua.

(4) Si f es almost a-continua entonces f es almost e-continua.

(5) Si f es almost e-continua entonces f es almost e^*-continua.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 2.4, el Teorema 1.1 y el Teorema 1.14. $\square$

Se tiene el siguiente diagrama para una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos.

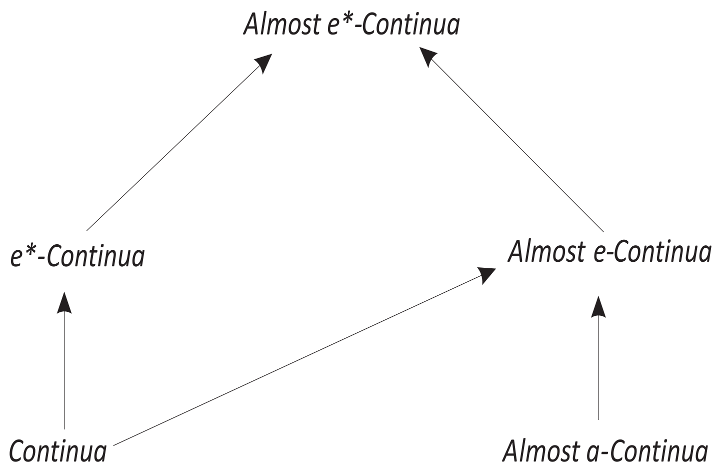

Figura 2.3: Diagrama 6

A continuación, se presentan ejemplos donde los recíprocos no son ciertos.

Ejemplo 2.10. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. La función $f : X \to X$ definida por $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = a$, $f(d) = c$ es *almost* e^*-continua pero no *almost* e-continua.

Ejemplo 2.11. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. La función $f : X \to X$ definida por $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ es e^*-continua pero no continua.

Ejemplo 2.12. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. La función $f : X \to X$ definida por $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ es *almost* e-continua pero no *almost* a-continua.

Ejemplo 2.13. Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$. La función $f : X \to X$ definida por $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ es *almost* e-continua pero no continua.

Ejemplo 2.14. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}\}$. La función $f : X \to X$ definida por $f(a) = d$, $f(b) = c$, $f(c) = b$, $f(d) = a$ es *almost* e^*-continua pero no e^*-continua.

Definición 2.5. Un espacio topológico (X, τ) se dice que es extremadamente disconexo si la clausura de todo conjunto abierto de X es abierto en X.

Ejemplo 2.15. Sea X un espacio topológico, el conjunto partes de X, denotado por $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ es extremadamente disconexo.

Teorema 2.5. *Sea (Y, σ) extremadamente disconexo. Las siguientes son equivalentes para una función $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$:*

(1) f es (e^*,s)-continua.

(2) f es almost e^*-continua.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $U \in RO(Y)$. Como Y es extremadamente disconexo entonces U es abierto y cerrado. En efecto, sea U un conjunto regular abierto, entonces $U = int(cl(U))$. Pero la clausura de U es un abierto, resulta que la clausura es abierto y cerrado. Luego $U = cl(U)$ lo que prueba que U es abierto y cerrado. Como U es regular cerrado, entonces $f^{-1}(U)$ es e^*-abierto. Por lo tanto, f es *almost* e^*-continua.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $W \in RC(Y)$. Como Y es extremadamente disconexo, W es regular abierto. Como f es *almost* e^*-continua entonces $f^{-1}(W)$ es e^*-abierto. Por lo tanto f es (e^*,s)-continua. $\square$

Teorema 2.6. *Sea Y un espacio regular y $f : X \to Y$ una función. Si f es (e^*,s)-continua entonces f es e^*-continua.*

Demostración: Sea $x \in X$ y A un conjunto abierto en Y que contiene a $f(x)$. Como Y es regular, existe un conjunto abierto G de Y que contiene a $f(x)$ tal que $f(x) \in cl(G) \subset A$. Como f es (e^*,s)-continua, existe $U \in e^*O(X, x)$ tal que $f(U) \subset cl(G)$. Como $f(U) \subset cl(G) \subset A$ se tiene que f es e^*-continua. $\square$

Definición 2.6. Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos se dice que es:

(1) e^*-irresoluta si $f^{-1}(A)$ es e^*-abierto en X para todo $A \in e^*O(Y)$.

(2) e-irresoluta si $f^{-1}(A)$ es e-abierto en X para todo $A \in eO(Y)$.

(3) a-irresoluta si $f^{-1}(A)$ es a-abierto en X para todo $A \in aO(Y)$.

Teorema 2.7. *Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones entre espacios topológicos. Entonces se tienen las siguientes propiedades:*

(1) Si f es e^*-irresoluta y g es (e^*,s)-continua entonces $g \circ f$ es (e^*,s)-continua.

(2) Si f es (e^*,s)-continua y g es contra R-map entonces $g \circ f$ es almost e^*-continua.

(3) Si f es e^*-continua y g es almost contra-super-continua entonces $g \circ f$ es (e^*,s)-continua.

(4) Si f es e^*-irresoluta y g es e^*-irresoluta entonces $g \circ f$ es e^*-irresoluta.

(5) Si f es almost e^*-continua y g es contra R-map entonces $g \circ f$ es (e^*,s)-continua.

Demostración:

(1) Sea U un conjunto regular abierto en Z, a mostrar que $(g \circ f)^{-1}(U)$ es e^*-cerrado en X. Como g es (e^*,s)-continua, $g^{-1}(U)$ es e^*-cerrado en Y. Usando el hecho que f es e^*-irresoluta entonces $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ es e^*-cerrado en X.

(2) Sea W un conjunto regular abierto en Z, a mostrar que $(g \circ f)^{-1}(W)$ es e^*-abierto en X. Como g es contra R-map entonces $g^{-1}(W)$ es regular cerrado

en Y, entonces $Y \setminus g^{-1}(W)$ es regular abierto en Y. Usando el hecho que f es (e^*,s)-continua, entonces $f^{-1}(Y \setminus g^{-1}(W))$ es e^*-cerrado en X. Pero

$$f^{-1}(Y \setminus g^{-1}(W)) = X \setminus f^{-1}(g^{-1}(W)) = X \setminus (g \circ f)^{-1}(W)$$

que es e^*-cerrado en X. Por lo tanto $(g \circ f)^{-1}(W)$ es e^*-abierto en X.

(3) Sea A un conjunto regular abierto en Z, a mostrar que $(g \circ f)^{-1}(A)$ es e^*-cerrado en X. Como g es *almost* contra-super-continua entonces $g^{-1}(A)$ es δ-cerrado en Y, y así $Y \setminus g^{-1}(A)$ es δ-abierto en Y. En consecuencia se tiene que

$$Y \setminus g^{-1}(A) = \delta\text{-}int(Y \setminus g^{-1}(A)) = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

donde cada U_α es un conjunto regular abierto, $U_\alpha = int(cl(U_\alpha))$. Esto dice que cada U_α es un conjunto abierto en Y. Como f es e^*-continua, se tiene que $f^{-1}(U_\alpha)$ es e^*-abierto en X.

$$f^{-1}(Y \setminus g^{-1}(A)) = f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha)$$

Por lo tanto $(g \circ f)^{-1}(A)$ es e^*-cerrado en X.

(4) Sea A un conjunto e^*-abierto en Z, a mostrar que $(g \circ f)^{-1}(N)$ es un conjunto e^*-abierto en X. Como g es e^*-irresoluta se tiene que $g^{-1}(A)$ es e^*-abierto en Y. Ahora, como f es e^*-irresoluta se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(A))$ es e^*-abierto en X. Pero $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ así se tiene que $(g \circ f)^{-1}(A)$ es e^*-abierto en X.

(5) Sea U un conjunto regular abierto en Z, a mostrar que $(g \circ f)^{-1}(U)$ es un conjunto e^*-cerrado en X. Como g es contra R-map, entonces $g^{-1}(U)$ es regular cerrado en Y, así $Y \setminus g^{-1}(U)$ es regular abierto en Y. Como f es *almost* e^*-continua entonces $f^{-1}(Y \setminus g^{-1}(U))$ es e^*-abierto en X. Pero:

$$f^{-1}(Y \setminus g^{-1}(U)) = X \setminus f^{-1}(g^{-1}(U)) = X \setminus (g \circ f)^{-1}(U)$$

que es e^*-abierto en X. Por lo tanto $(g \circ f)^{-1}(U)$ es e^*-cerrado en X. $\square$

Teorema 2.8. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(a) f *es* (e^*,s)*-continua.*

(b) *La imagen inversa de un conjunto regular cerrado de* Y *es* e^**-abierto.*

(c) $f^{-1}(e^*\text{-}cl(U)) \subset r\text{-}ker(f(U))$ *para todo* $U \subset X$.

(d) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(r\text{-}ker(A))$ *para todo* $A \subset Y$.

(e) *Para cada* $x \in X$ *y cada* $A \in SO(Y, f(x))$*, existe un conjunto* e^**-abierto* U *en* X, $x \in U$ *tal que* $f(U) \subset cl(A)$.

(f) $f(e^*\text{-}cl(P)) \subset \theta\text{-}s\text{-}cl(f(P))$ *para todo* $P \subset X$.

(g) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset Y$.

(h) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(A))$ *para todo subconjunto abierto* A *de* Y.

(i) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(s\text{-}cl(A))$ *para todo subconjunto abierto* A *de* Y.

(j) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(int(cl(A)))$ *para todo subconjunto abierto* A *de* Y.

(k) *La imagen inversa de un conjunto* θ*-semi-abierto de* Y *es* e^**-abierto.*

(l) $f^{-1}(A) \subset e^*\text{-}int(f^{-1}(cl(A)))$ *para todo* $A \in SO(Y)$.

(m) *La imagen inversa de un conjunto* θ*-semi-cerrado de* Y *es* e^**-cerrado.*

(n) $f^{-1}(int(cl(A)))$ *es* e^**-cerrado para todo subconjunto abierto* A *de* Y.

(o) $f^{-1}(cl(int(F)))$ *es* e^**-abierto para todo subconjunto cerrado* F *de* Y.

(p) $f^{-1}(cl(U))$ *es* e^**-abierto para todo* $U \in \beta O(Y)$.

(r) $f^{-1}(cl(U))$ *es* e^**-abierto para todo* $U \in SO(Y)$.

(s) $f^{-1}(int(cl(U)))$ *es* e^**-cerrado para todo* $U \in PO(Y)$.

Demostración:

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea W un conjunto regular cerrado en Y, así $Y \setminus W$ es conjunto regular abierto en Y. Como f es (e^*,s)-continua entonces $f^{-1}(Y \setminus W)$ es e^*-cerrado. Pero

$$f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$$

que es e^*-cerrado y así $f^{-1}(W)$ es e^*-abierto. Por lo tanto, la imagen inversa de un conjunto regular cerrado de Y es e^*-abierto.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea W un conjunto regular abierto en Y, así $Y \setminus W$ es regular cerrado en Y. Usando la hipótesis la imagen inversa de un conjunto regular cerrado de Y es e^*-abierto entonces $f^{-1}(Y \setminus W)$ es e^*-abierto. Pero

$$f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$$

Así $f^{-1}(W)$ es e^*-cerrado. Por lo tanto f es (e^*,s)-continua.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $U \subset X$, y suponga que $y \notin r\text{-}ker(f(U))$. Entonces existe un conjunto regular cerrado F, $y \in F$ tal que $f(U) \cap F = \emptyset$. Así, se obtiene que $U \cap f^{-1}(F) = \emptyset$ y $e^*\text{-}cl(U) \cap f^{-1}(F) = \emptyset$. Así, $f(e^*\text{-}cl(U)) \cap F = \emptyset$ y $y \notin f(e^*\text{-}cl(U))$. Por lo tanto $f^{-1}(e^*\text{-}cl(U)) \subset r\text{-}ker(f(U))$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea $A \subset Y$. Por (c), $f(e^*\text{-}cl(f^{-1}(A))) \subset r\text{-}ker(A)$. Así, $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(r\text{-}ker(A))$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea $A \subset RO(Y)$. Por hipótesis $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(r\text{-}ker(A)) = f^{-1}(A)$, como $f^{-1}(A) \subset e^*\text{-}cl(f^{-1}(A))$ se obtiene que $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$. Por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es e^*-cerrado en X.

$(e) \Rightarrow (f)$ Sea $P \subset X$ y $x \in e^*\text{-}cl(P)$ y $G \in SO(Y, f(x))$. Por (e) existe $U \in e^*O(X, x)$ tal que $f(U) \subset cl(G)$. Como $x \in e^*\text{-}cl(P)$, $U \cap P \neq \emptyset$ y $\emptyset \neq f(U) \cap f(P) \subset cl(G) \cap f(P)$. Así $f(x) \in \theta\text{-}s\text{-}cl(f(P))$ y por lo tanto $f(e^*\text{-}cl(P)) \subset \theta\text{-}s\text{-}cl(f(P))$.

$(f) \Rightarrow (g)$ Sea $R \subset Y$. Se tiene que $f(e^*\text{-}cl(f^{-1}(R))) \subset \theta\text{-}s\text{-}cl(f(f^{-1}(R))) \subset \theta\text{-}s\text{-}cl(R)$ y $e^*\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$.

$(g) \Rightarrow (e)$ Sea $A \in SO(Y, f(x))$. Como $cl(A) \cap (Y \setminus cl(A)) = \emptyset$, se tiene que $f(x) \notin \theta\text{-}s\text{-}cl(Y \setminus cl(A))$ y $x \notin f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(Y \setminus cl(A)))$. Por (g) $x \notin e^*\text{-}cl(f^{-1}(Y \setminus cl(A)))$ y por lo tanto existe $U \in e^*O(X, x)$ tal que $U \cap f^{-1}(Y \setminus cl(A)) = \emptyset$ y $f(U) \cap (Y \setminus cl(A)) = \emptyset$. De esto se deduce que $f(U) \subset cl(A)$.

$(g) \Rightarrow (h)$ Como $e^*\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ para todo $R \subset Y$, en general se cumple para todo subconjunto abierto A de Y. Por lo tanto,

$$e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(A)).$$

$(h) \Rightarrow (i)$ Como $\theta\text{-}s\text{-}cl(A) = s\text{-}cl(A)$ para un conjunto abierto A, entonces

$$e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(s\text{-}cl(A)).$$

$(i) \Rightarrow (j)$ Como $s\text{-}cl(A) = int(cl(A))$ para todo conjunto abierto A de Y, entonces $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(int(cl(A)))$.

$(j) \Rightarrow (a)$ Sea $A \in RO(Y)$. Por (j) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(int(cl(A))) = f^{-1}(A)$. Por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es e^*-cerrado y en consecuencia f es (e^*,s)-continua.

$(b) \Rightarrow (k)$ Como cualquier conjunto θ-semi-abierto es una unión de conjuntos regular cerrado entonces esta se mantiene.

$(k) \Rightarrow (e)$ Sea $x \in X$ y $A \in SO(Y, f(x))$. Como $cl(A)$ es θ-semi-abierto en Y, entonces existe un conjunto e^*-abierto U en X, tal que $x \in U \subset f^{-1}(cl(A))$. Por lo tanto $f(U) \subset cl(A)$.

$(e) \Rightarrow (l)$ Sea $A \in SO(Y)$ y $x \in f^{-1}(A)$. Se tiene que $f(x) \in A$, entonces existe un conjunto e^*-abierto U en X, que contiene a x tal que $f(U) \subset cl(A)$. Así, se tiene que $x \in U \subset f^{-1}(A)$ y por lo tanto $x \in e^*\text{-}int(f^{-1}(A))$ y se concluye que

$$f^{-1}(A) \subset e^*\text{-}int(f^{-1}(A)).$$

$(l) \Rightarrow (b)$ Sea F cualquier conjunto regular cerrado de Y. Como $F \in SO(Y)$, entonces $f^{-1}(F) \subset e^*\text{-}int(f^{-1}(F))$. Esto demuestra que $f^{-1}(F)$ es e^*-abierto en X.

$(k) \Rightarrow (m)$ Sea W un conjunto θ-semi-cerrado en Y. $Y \backslash W$ es θ-semi-abierto. Por hipótesis $f^{-1}(Y \setminus W)$ es e^*-abierto. Pero $f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$ que es e^*-abierto. Por lo tanto, $f^{-1}(W)$ es e^*-cerrado.

$(m) \Rightarrow (k)$ Sea W un conjunto θ-semi-abierto en Y. $Y \backslash W$ es θ-semi-cerrado. Por hipótesis $f^{-1}(Y \setminus W)$ es e^*-cerrado. Pero $f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$ que es e^*-cerrado. Por lo tanto, $f^{-1}(W)$ es e^*-abierto.

$(a) \Rightarrow (n)$ Sea A un subconjunto abierto de Y. Como $int(cl(A))$ es regular abierto, se tiene que $f^{-1}(int(cl((A)))$ es e^*-cerrado.

$(n) \Rightarrow (a)$ Sea A un conjunto regular abierto de Y. Por hipótesis, $f^{-1}(A)$ es e^*-cerrado en X. Pero $f^{-1}(A) = f^{-1}(int(cl((A)))$. Por lo tanto $f^{-1}(int(cl((A)))$ es e^*-cerrado.

$(b) \Rightarrow (o)$ Sea F un conjunto regular cerrado en Y. Por hipótesis $f^{-1}(F)$ es e^*-abierto. Como $f^{-1}(F) = f^{-1}(cl(int((F)))$ entonces $f^{-1}(cl(int((F)))$ es e^*-abierto.

$(o) \Rightarrow (b)$ Sea F conjunto regular cerrado en Y. Por hipótesis $f^{-1}(cl(int((F)))$ es e^*-abierto. Pero $f^{-1}(F) = f^{-1}(cl(int((F)))$ que es e^*-abierto. Por lo tanto, $f^{-1}(F)$ es e^*-*abierto*.

$(b) \Rightarrow (p)$ Sea $U \in \beta O(Y)$. Siempre ocurre que $int(cl(U)) \subset cl(U)$, por lo que

$$cl(int(cl(U))) \subset cl(U)$$

Por otro lado, como $U \in \beta O(Y)$ entonces $U \subset cl(int(cl(U)))$, por lo que $cl(U) \subset cl(cl(int(cl(U)))) = cl(int(cl(U)))$. Así $cl(U) = cl(int(cl(U)))$, lo que dice que $cl(U)$ es regular cerrado y por lo tanto $f^{-1}(cl(U))$ es e^*-abierto.

$(p) \Rightarrow (r)$ Como $SO(Y) \subset \beta O(Y)$ entonces $f^{-1}(cl(U))$ es e^*-abierto.

$(r) \Rightarrow (s)$ Sea $U \in PO(Y)$. Como $Y \setminus int(cl(U))$ es regular cerrado y por lo tanto es semi-abierto, se tiene que:

$$X \setminus f^{-1}(int(cl(U))) = f^{-1}(Y \setminus int(cl(U))) = f^{-1}(cl(Y \setminus int(cl(U)))) \in e^*O(X)$$

Así $f^{-1}(int(cl(U)))$ es e^*-cerrado.

$(s) \Rightarrow (a)$ Sea $U \in RO(Y)$. Entonces $U \in PO(Y)$ y por lo tanto $f^{-1}(U) = f^{-1}(int(cl(U)))$ es e^*-cerrado en X. □

Teorema 2.9. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(a) *f es (e,s)-continua.*

(b) *La imagen inversa de un conjunto regular cerrado de Y es e-abierto.*

(c) *$f^{-1}(e\text{-}cl(U)) \subset r\text{-}ker(f(U))$ para todo $U \subset X$.*

(d) *$e\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(r\text{-}ker(A))$ para todo $A \subset Y$.*

(e) *Para cada $x \in X$ y cada $A \in SO(Y, f(x))$, existe un conjunto e-abierto U en X, $x \in U$ tal que $f(U) \subset cl(A)$.*

(f) *$f(e\text{-}cl(P)) \subset \theta\text{-}s\text{-}cl(f(P))$ para todo $P \subset X$.*

(g) *$e\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ para todo $R \subset Y$.*

(h) *$e\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(A))$ para todo subconjunto abierto A de Y.*

(i) *$e\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(s\text{-}cl(A))$ para todo subconjunto abierto A de Y.*

(j) *$e\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(int(cl(A)))$ para todo subconjunto abierto A de Y.*

(k) *La imagen inversa de un conjunto θ-semi-abierto de Y es e-abierto.*

(l) *$f^{-1}(A) \subset e\text{-}int(f^{-1}(cl(A)))$ para todo $A \in SO(Y)$.*

(m) *La imagen inversa de un conjunto θ-semi-cerrado de Y es e-cerrado.*

(n) $f^{-1}(int(cl(A)))$ *es e-cerrado para todo subconjunto abierto A de Y.*

(o) $f^{-1}(cl(int(F)))$ *es e-abierto para todo subconjunto cerrado F de Y.*

(p) $f^{-1}(cl(U))$ *es e-abierto para todo $U \in \beta O(Y)$.*

(r) $f^{-1}(cl(U))$ *es e-abierto para todo $U \in SO(Y)$.*

(s) $f^{-1}(int(cl(U)))$ *es e-cerrado para todo $U \in PO(Y)$.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.8. □

Teorema 2.10. *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(a) *f es (a,s)-continua.*

(b) *La imagen inversa de un conjunto regular cerrado de Y es a-abierto.*

(c) $f^{-1}(a\text{-}cl(U)) \subset r\text{-}ker(f(U))$ *para todo $U \subset X$.*

(d) $a\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(r\text{-}ker(A))$ *para todo $A \subset Y$.*

(e) *Para cada $x \in X$ y cada $A \in SO(Y, f(x))$, existe un conjunto a-abierto U en X, $x \in U$ tal que $f(U) \subset cl(A)$.*

(f) $f(a\text{-}cl(P)) \subset \theta\text{-}s\text{-}cl(f(P))$ *para todo $P \subset X$.*

(g) $a\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo $R \subset Y$.*

(h) $a\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(A))$ *para todo subconjunto abierto A de Y.*

(i) $a\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(s\text{-}cl(A))$ *para todo subconjunto abierto A de Y.*

(j) $a\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(int(cl(A)))$ *para todo subconjunto abierto A de Y.*

(k) *La imagen inversa de un conjunto θ-semi-abierto de Y es a-abierto.*

(l) $f^{-1}(A) \subset a\text{-}int(f^{-1}(cl(A)))$ *para todo* $A \in SO(Y)$.

(m) *La imagen inversa de un conjunto* θ*-semi-cerrado de* Y *es a-cerrado.*

(n) $f^{-1}(int(cl(A)))$ *es a-cerrado para todo subconjunto abierto* A *de* Y.

(o) $f^{-1}(cl(int(F)))$ *es a-abierto para todo subconjunto cerrado* F *de* Y.

(p) $f^{-1}(cl(U))$ *es a-abierto para todo* $U \in \beta O(Y)$.

(r) $f^{-1}(cl(U))$ *es a-abierto para todo* $U \in SO(Y)$.

(s) $f^{-1}(int(cl(U)))$ *es a-cerrado para todo* $U \in PO(Y)$.

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.8. □

Corolario 2.1. *Sea* $f : X \to Y$ *una función entre espacios topológicos. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) f *es* (e^*,*s*)*-continua.*

(2) $f^{-1}(\alpha\text{-}cl(A))$ *es* e^**-abierto en* X *para todo* $A \in \beta O(Y)$.

(3) $f^{-1}(p\text{-}cl(A))$ *es* e^**-abierto en* X *para todo* $A \in SO(Y)$.

(4) $f^{-1}(s\text{-}cl(A))$ *es* e^**-abierto en* X *para todo* $A \in PO(Y)$.

(5) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset SO(Y)$.

(6) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset PO(Y)$.

(7) $e^*\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset \beta O(Y)$.

Demostración: Es consecuencia directa del Lema 1.1, Teorema 2.8, Teorema 1.6 y el Teorema 1.7. □

Corolario 2.2. *Sea* $f : X \to Y$ *una función entre espacios topológicos. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) f *es (e,s)-continua.*

(2) $f^{-1}(\alpha\text{-}cl(A))$ *es e-abierto en* X *para todo* $A \in \beta O(Y)$.

(3) $f^{-1}(p\text{-}cl(A))$ *es e-abierto en* X *para todo* $A \in SO(Y)$.

(4) $f^{-1}(s\text{-}cl(A))$ *es e-abierto en* X *para todo* $A \in PO(Y)$.

(5) $e\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset SO(Y)$.

(6) $e\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset PO(Y)$.

(7) $e\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset \beta O(Y)$.

Demostración: Es consecuencia directa del Lema 1.1, Teorema 2.9, Teorema 1.6 y el Teorema 1.7. □

Corolario 2.3. *Sea* $f : X \to Y$ *una función entre espacios topológicos. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) f *es (e,s)-continua.*

(2) $f^{-1}(\alpha\text{-}cl(A))$ *es e-abierto en* X *para todo* $A \in \beta O(Y)$.

(3) $f^{-1}(p\text{-}cl(A))$ *es e-abierto en* X *para todo* $A \in SO(Y)$.

(4) $f^{-1}(s\text{-}cl(A))$ *es e-abierto en* X *para todo* $A \in PO(Y)$.

(5) $e\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset SO(Y)$.

(6) $e\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset PO(Y)$.

(7) $e\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset \beta O(Y)$.

Demostración: Es consecuencia directa del Lema 1.1, Teorema 2.10, Teorema 1.6 y el Teorema 1.7. □

Definición 2.7. Un subconjunto A de un espacio X se dice que es:

(1) e^*-denso si e^*-$cl(A) = X$.

(2) e-denso si e-$cl(A) = X$.

Definición 2.8. Un espacio X se dice s-Urysohn si para cada par de puntos distintos x e y en X, existe $M \in SO(X, x)$ y $N \in SO(X, y)$ tal que $cl(M) \cap cl(N) = \emptyset$.

Teorema 2.11. *Sean f, g: $X \to Y$ funciones entre espacios topológicos. Si f es (e^*,s)-continua y g es almost contra-super-continua y Y es s-Urysohn, entonces $P = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es e^*-cerrado en X.*

Demostración: Sea $x \in X \backslash P$, entonces $f(x) \neq g(x)$. Como Y es s-Urysohn, existe $M \in SO(Y, f(x))$ y $N \in SO(Y, g(x))$ tal que $cl(M) \cap cl(N) = \emptyset$. Como f es (e^*,s)-continua y g es *almost* contra-super-continua, existe un conjunto e^*-abierto K y un conjunto δ-abierto L que contiene a x tal que $f(K) \subset cl(M)$ y $g(L) \subset cl(N)$. Por Lema 1.4, $K \cap L = S \in e^*O(X)$, $f(S) \cap g(S) = \emptyset$ para todo $s \in S$ y por lo tanto $x \notin e^*$-$cl(P)$. En consecuencia, P es e^*-cerrado en X. $\square$

Teorema 2.12. *Sean f, g: $X \to Y$ funciones entre espacios topológicos. Si f es (e,s)-continua y g es almost contra-super-continua y Y es s-Urysohn, entonces $P = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es e-cerrado en X.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.11. $\square$

Teorema 2.13. *Sean X e Y espacios Topológicos. Si Y es s-Urysohn, $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son funciones (e^*,s)-continua y almost contra-super-continua respectivamente y $f = g$ sobre un conjunto e^*-denso $P \subset X$, entonces $f = g$ en X.*

Demostración: Sean f y g funciones (e^*,s)-continua y *almost* contra-super-continua respectivamente y Y s-Urysohn. Entonces $R = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es e^*-cerrado en X. Como $P \subset R$ y P es un conjunto e^*-denso en X, $X = e^*$-$cl(P) \subset e^*$-$cl(R) = R$. Así $f = g$ sobre X. $\square$

Teorema 2.14. *Sean X e Y espacios Topológicos. Si Y es s-Urysohn, $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son funciones (e,s)-continua y almost-contra-super-continua respectivamente y $f = g$ sobre un conjunto e-denso $P \subset X$, entonces $f = g$ en X.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.13. $\square$

Definición 2.9. Para un subconjunto A de un espacio topológico X se define:

(1) La e^*-frontera de A, denotada por e^*-$fr(A)$, como:

$$e^*\text{-}fr(A) = e^*\text{-}cl(A) \cap e^*\text{-}cl(X \setminus A).$$

(2) La e-frontera de A, denotada por e-$fr(A)$, como:

$$e\text{-}fr(A) = e\text{-}cl(A) \cap e\text{-}cl(X \setminus A).$$

(3) La a-frontera de A, denotada por a-$fr(A)$, como:

$$a\text{-}fr(A) = a\text{-}cl(A) \cap a\text{-}cl(X \setminus A).$$

Teorema 2.15. *Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f no es (e^*,s)-continua en x si y solo si $x \in e^*$-$fr(f^{-1}(F))$ para algún $F \in RO(Y, f(x))$.*

Demostración: Suponga que f no es (e^*,s)-continua en x. Entonces existe $F \in RO(Y, f(x))$ tal que $f(U) \nsubseteq F$ para todo $U \in e^*O(X, x)$. Para todo $U \in e^*O(X, x)$, se tiene que $f(U) \cap (Y \setminus f^{-1}(F)) \neq \emptyset$. Así $U \cap (X \setminus f^{-1}(F)) \neq \emptyset$ para todo $U \in e^*O(X, x)$ y por lo tanto $x \in e^*$-$fr(X \setminus f^{-1}(F))$. Como $x \in F$, $x \in e^*$-$fr(f^{-1}(F))$.

Recíprocamente, para $x \in X$, Suponga que existe $F \in RC(Y, f(x))$ tal que $x \in e^*$-$fr(X \setminus f^{-1}(F))$ y f es (e^*,s)-continua en x. Entonces existe un conjunto e^*-abierto U tal que $x \in U$ y $U \subset f^{-1}(F)$. Así $x \notin e^*$-$fr(X \setminus f^{-1}(F))$. Esto es una contradicción. Por lo tanto f no es (e^*,s)-continua en x. $\square$

Teorema 2.16. *Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f no es (e,s)-continua en x si y solo si $x \in e\text{-}fr(f^{-1}(F))$ para algún $F \in RO(Y, f(x))$.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.15 $\square$

Teorema 2.17. *Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces f no es (a,s)-continua en x si y solo si $x \in a\text{-}fr(f^{-1}(F))$ para algún $F \in RO(Y, f(x))$.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.15 $\square$

2.3 Conjuntos Compactos

En esta sección, se definen los conjuntos compactos, usando la noción de conjuntos e^*-abierto, e-abierto y a-abierto. Se estudia las relaciones entre ellos y cuáles de estos son preservados bajo acciones de las funciones (e^*,s)-continua, (e,s)-continua y (a,s)-continua.

Definición 2.10. Un subespacio A de un espacio X se dice e^*-compacto relativo a X si para todo cubrimiento $\{P_i : i \in I\}$ de A por subconjuntos e^*-abierto de X, existe un subconjunto I_0 finito de I tal que $A \subset \bigcup\{P_i : i \in I_0\}$. Un espacio X se dice e^*-compacto si para todo cubrimiento e^*-abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

Definición 2.11. Un subespacio A de un espacio X se dice e-compacto relativo a X si para todo cubrimiento $\{P_i : i \in I\}$ de A por subconjuntos e-abierto de X, existe un subconjunto I_0 finito de I tal que $A \subset \bigcup\{P_i : i \in I_0\}$. Un espacio X se dice e-compacto si para todo cubrimiento e-abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

Definición 2.12. Un subespacio A de un espacio X se dice a-compacto relativo a X si para todo cubrimiento $\{P_i : i \in I\}$ de A por subconjuntos a-abierto de X, existe un subconjunto I_0 finito de I tal que $A \subset \bigcup\{P_i : i \in I_0\}$. Un espacio X se dice a-compacto si para todo cubrimiento a-abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 2.18. *Sea X un espacio topológico, A subconjunto de X. Entonces*

(1) Si A es e*-compacto entonces A es compacto.

(2) Si A es e*-compacto entonces A es e-compacto.

(3) Si A es e-compacto entonces A es a-compacto.

Demostración:

(1) Sea A un subconjunto de X e^*-compacto. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos abiertos de X. Como todo conjunto abierto es e^*-abierto entonces $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos e^*-abierto de X. Como A es e^*-compacto, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ que cubre a A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Por lo tanto, A es compacto.

(2) Sea A un subconjunto de X e^*-compacto. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos e-abiertos de X. Como todo conjunto e-abierto es e^*-abierto entonces $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos e^*-abierto de X. Como A es e^*-compacto, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ que cubre a A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Por lo tanto, A es e-compacto.

(3) Sea A un subconjunto de X e-compacto. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos a-abiertos de X. Como todo conjunto a-abierto es e-abierto entonces $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos e-abierto de X. Como A es e-compacto, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ que cubre a A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Por lo tanto, A es a-compacto. $\square$

Teorema 2.19. *Todo subconjunto e***-cerrado* A *de un espacio e***-compacto* X *es e***-compacto relativo a* X.

Demostración: Sea A un subconjunto de X e^*-cerrado y X un espacio e^*-compacto. Sea $\{M_i : i \in I\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos e^*-abierto de X. Esto implica que $A \subset \bigcup_{i \in I} M_i$ y $(X \setminus A) \cup (\bigcup_{i \in I} M_i) = X$. Como X es e^*-compacto, existe un subconjunto finito I_0 de I tal que $(X \setminus A) \cup (\bigcup_{i \in I_0} M_i) = X$. Así $A \subset \bigcup_{i \in I_0} M_i$ y por lo tanto A es e^*-compacto relativo a X. $\square$

Teorema 2.20. *Todo subconjunto e-cerrado* A *de un espacio e-compacto* X *es e-compacto relativo a* X.

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.19. $\square$

Teorema 2.21. *Todo subconjunto a-cerrado* A *de un espacio a-compacto* X *es a-compacto relativo a* X.

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.19. $\square$

Definición 2.13. Un subespacio X se dice s-cerrado si para todo cubrimiento regular cerrado de X tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 2.22. *Sea* $f : X \rightarrow Y$ *sobreyectiva y (e***,s)-continua, si* X *es e***-compacto entonces* Y *es s-cerrado.*

Demostración: Sea X un espacio e^*-compacto y $f : X \rightarrow Y$ una función (e^*,s)-continua sobreyectiva. Sea $\{M_i : i \in I\}$ un cubrimiento de Y por conjuntos regular cerrado. Como f es (e^*,s)-continua, entonces $\{f^{-1}(M_i) : i \in I\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos e^*-abierto. Como X es e^*-compacto, existe un subconjunto finito I_0 de I tal que $X = \bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(M_i)$. Como f es sobreyectiva, $Y = \bigcup_{i \in I_0} M_i$. Así Y es s-cerrado. $\square$

Teorema 2.23. *Sea $f : X \to Y$ sobreyectiva y (e,s)-continua, si X es e-compacto entonces Y es s-cerrado.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.22. $\square$

Teorema 2.24. *Sea $f : X \to Y$ sobreyectiva y (a,s)-continua, si X es a-compacto entonces Y es s-cerrado.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.22. $\square$

Teorema 2.25. *Si f es e^*-irresoluta y $A \subset X$ un espacio e^*-compacto relativo a X, entonces la imagen $f(A)$ es e^*-compacto relativo a Y.*

Demostración: Sea $A \subset X$ un espacio e^*-compacto y $f : X \to Y$ una función e^*-irresoluta. Sea $\{M_i : i \in I\}$ un cubrimiento de Y por conjuntos e^*-abierto. Como f es e^*-irresoluta, entonces $\{f^{-1}(M_i) : i \in I\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos e^*-abierto. Como A es e^*-compacto, existe un subconjunto finito I_0 de I tal que $A = \bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(M_i)$. Luego

$$f(A) = f(\bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(M_i)) = \bigcup_{i\in I_0} f(f^{-1}(M_i)) \subset \bigcup_{i\in I_0} M_i$$

Así $f(A) \subset \bigcup_{i\in I_0} M_i$ y por lo tanto $f(A)$ es e^*-compacto relativo a Y. $\square$

Teorema 2.26. *Si f es e-irresoluta y $A \subset X$ un espacio e-compacto relativo a X, entonces la imagen $f(A)$ es e-compacto relativo a Y.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.25. $\square$

Teorema 2.27. *Si f es a-irresoluta y $A \subset X$ un espacio a-compacto relativo a X, entonces la imagen $f(A)$ es a-compacto relativo a Y.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.25. $\square$

2.4 Axiomas de separación

En esta sección, se definen algunos axiomas de separación, usando la noción de conjuntos e^*-abierto, e-abierto y a-abierto. Se estudia cuáles de estos axiomas son preservados bajo acciones de las funciones (e^*,s)-continua, (e,s)-continua y (a,s)-continua.

Definición 2.14. Un espacio X se dice que es:

(1) e^*-T_1 si para cada par de puntos distintos de X, existen conjuntos e^*-abierto M y N que contienen a x e y respectivamente tal que $y \notin M$ y $x \notin N$.

(2) e-T_1 si para cada par de puntos distintos de X, existen conjuntos e-abierto M y N que contienen a x e y respectivamente tal que $y \notin M$ y $x \notin N$.

(3) a-T_1 si para cada par de puntos distintos de X, existen conjuntos a-abierto M y N que contienen a x e y respectivamente tal que $y \notin M$ y $x \notin N$.

Definición 2.15. Un espacio X se dice que es débilmente *Hausdorff* si cada elemento de X es una intersección de conjuntos regular cerrado.

Teorema 2.28. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (e^*,s)-continua y Y es débilmente Hausdorff, entonces X es e^*-T_1.*

Demostración: Para $x \neq y$ en X, como f es inyectiva $f(x) \neq f(y)$ en Y, así existen $P, R \in RC(Y)$ tal que $f(x) \in P$, $f(y) \notin P$, $f(x) \notin R$ y $f(y) \in R$. Como f es (e^*,s)-continua, $f^{-1}(P)$ y $f^{-1}(R)$ son subconjuntos e^*-abierto de X tal que $x \in f^{-1}(P)$, $y \notin f^{-1}(P)$, $x \notin f^{-1}(R)$ y $y \in f^{-1}(R)$. Así X es e^*-T_1. □

Teorema 2.29. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (e,s)-continua y Y es débilmente Hausdorff, entonces X es e-T_1.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.28. □

Teorema 2.30. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (a,s)-continua y Y es débilmente Hausdorff, entonces X es a-T_1.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 2.28. $\square$

Definición 2.16. Un espacio X se dice que es:

(1) e^*-T_2 si para cada par de puntos distintos x e y en X, existe $M \in e^*O(X, x)$ y $N \in e^*O(X, y)$ tal que $M \cap N = \emptyset$.

(2) e-T_2 si para cada par de puntos distintos x e y en X, existe $M \in eO(X, x)$ y $N \in eO(X, y)$ tal que $M \cap N = \emptyset$.

(3) a-T_2 si para cada par de puntos distintos x e y en X, existe $M \in aO(X, x)$ y $N \in aO(X, y)$ tal que $M \cap N = \emptyset$.

Teorema 2.31. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (e^*,s)-continua y Y es s-Urysohn, entonces X es e^*-T_2.*

Demostración: Sea Y *s-Urysohn*. Para cualquier par de puntos distintos x e y en X, $f(x) \neq f(y)$. Como Y es *s-Urysohn*, entonces existe $P \in SO(Y, f(x))$ y $R \in SO(Y, f(y))$ tal que $cl(P) \cap cl(R) = \emptyset$. Como f es (e^*,s)-continua, entonces existen conjuntos A y B e^*-abierto en X que contienen a x e y, respectivamente, tal que $f(A) \subset cl(P)$ y $f(B) \subset cl(R)$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Así, X es e^*-T_2. $\square$

Teorema 2.32. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (e,s)-continua y Y es s-Urysohn, entonces X es e-T_2.*

Demostración: Se prueba de manera similar a Teorema 2.31. $\square$

Teorema 2.33. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (a,s)-continua y Y es s-Urysohn, entonces X es a-T_2.*

Demostración: Se prueba de manera similar a Teorema 2.31. $\square$

CAPÍTULO 3
FUNCIONES (e^*,s)-CONTINUAS, (e,s)-CONTINUAS, (a,s)-CONTINUAS EN m-ESPACIOS

En este Capítulo, se plantea el concepto de estructura minimal m_X sobre un conjunto no vacío X y algunas de sus propiedades. Usando este concepto, se dan nuevas definiciones de funciones continuas, generalizando a las mencionadas en el Capítulo 2, se estudia la relación existente entre ellos y sus propiedades. También se introduce la noción de compacidad y axiomas de separación usando estructura minimal los cuales van a generalizar las definiciones y propiedades dadas en el Capítulo 2.

3.1 Estructuras minimales

En esta sección, se introduce el concepto de estructura minimal sobre un conjunto X no vacío y se estudian algunas propiedades.

Definición 3.1. Una estructura minimal o una m_X-estructura sobre un conjunto no vacío X, es una familia m_X de subconjuntos de X tal que $\emptyset \in m_X$ y $X \in m_X$.

El par (X, m_X) formado por un conjunto no vacío X y una m_X-estructura se denomina m-espacio.

Observe que toda topología es una estructura minimal, de modo que todo espacio topológico es un m-espacio.

Observe que si X es un espacio topológico entonces las colecciones formadas por los conjuntos semi-abiertos, α-abiertos y pre-abiertos, son m_X-estructuras sobre X.

Definición 3.2. Sea (X, m_X) un m-espacio, se dice que un subconjunto A de X es m_X-abierto si $A \in m_X$ y el complemento de un conjunto m_X-abierto se denomina m_X-cerrado.

Al igual que en un espacio topológico, se pueden definir ciertas operaciones de conjuntos en un m-espacio.

Definición 3.3. Sea $(X,\, m_X)$ un m-espacio y A un subconjunto de X, se define el m_X-interior de A, denotado por m_X-$int(A)$, como la unión de todos conjuntos m_X-abierto que están contenidos en A, es decir, m_X-$int(A) = \bigcup_{G\in m_X} \{G : G \subset A\}$.

Definición 3.4. Sea $(X,\, m_X)$ un m-espacio y A un subconjunto de X, se define la m_X-clausura de A, denotado por m_X-$cl(A)$, como la intersección de todos conjuntos m_X-cerrados que contienen a A, es decir, m_X-$cl(A) = \bigcap_{X-F\in m_X} \{F : F \supset A\}$.

Observe que cuando la estructura minimal es una topología se recuperan las nociones clásicas de interior y clausura de un conjunto.

Los siguientes teoremas muestran algunas propiedades del m_X-interior y de la m_X-clausura de un conjunto.

Teorema 3.1. *Sea (X,m_X) un m-espacio, A y B subconjuntos de X, entonces*

(1) m_X-$int(A) \subset A$.

(2) Si A es m_X-abierto, entonces m_X-$int(A) = A$.

(3) m_X-$int(\emptyset) = \emptyset$ *y* m_X-$int(X) = X$.

(4) $x \in m_X$-$int(A)$ *si y solo si existe un m_X-abierto G tal que* $x \in G \subset A$.

(5) Si $A \subset B$ entonces m_X-$int(A) \subset m_X$-$int(B)$.

(6) m_X-$int(m_X$-$int(A)) = m_X$-$int(A)$.

(7) m_X-$int(A \cap B) \subset m_X$-$int(A) \cap m_X$-$int(B)$.

Demostración:

(1) Es consecuencia inmediata de la Definición 3.3.

(2) Suponga que A es un conjunto m_X-abierto, entonces

$$A \subset \bigcup_{G \in m_X} \{G : G \subset A\} = m_X\text{-}int(A)$$

y como $m_X\text{-}int(A) \subset A$ para todo $A \subset X$, se deduce que $A = m_X\text{-}int(A)$.

(3) Como $\emptyset$ y X son conjuntos m_X-abiertos, se tiene que $m_X\text{-}int(\emptyset) = \emptyset$ y $m_X\text{-}int(X) = X$, por (2).

(4) Suponga que $x \in m_X\text{-}int(A)$, entonces $x \in \bigcup\limits_{G \in m_X} \{G : G \subset A\}$, es decir, $x \in G$ para algún $G \in m_X$ y $G \subset A$.

Recíprocamente, suponga que existe un abierto G tal que $x \in G \subset A$, entonces $x \in \bigcup\limits_{G \in m_X} \{G : G \subset A\} = m_X\text{-}int(A)$.

(5) Suponga que $x \in m_X\text{-}int(A)$, entonces existe $G \in m_X$ tal que $x \in G \subset A$, y como $A \subset B$, se tiene que $x \in G \subset B$ para algún $G \in m_X$. Así, por (4), $x \in m_X\text{-}int(B)$. En consecuencia, $m_X\text{-}int(A) \subset m_X\text{-}int(B)$.

(6) Como $m_X\text{-}int(A) \subset A$ para todo $A \subset X$, por (1); es inmediato de la proposición anterior que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}int(A)) \subset m_X\text{-}int(A)$. Por tanto, sólo resta verificar que $m_X\text{-}int(A) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}int(A))$. Sea $x \in m_X\text{-}int(A)$, entonces $x \in G$ para algún $G \in m_X$ y $G \subset A$, por (4); luego, como $G \subset A$ se tiene que $m_X\text{-}int(G) \subset m_X\text{-}int(A)$; además, como G es m_X-abierto, se sigue que $G \subset m_X\text{-}int(A)$ por (2), así, $x \in G$ para algún $G \in m_X$ y $G \subset m_X\text{-}int(A)$, lo cual implica que $x \in m_X\text{-}int(m_X\text{-}int(A))$, por (4); de donde

$$m_X\text{-}int(A) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}int(A))$$

con lo cual resulta la igualdad que se quiere.

(7) Como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, entonces $m_X\text{-}int(A \cap B) \subset m_X\text{-}int(A)$ y $m_X\text{-}int(A \cap B) \subset m_X\text{-}int(B)$, por (5), de modo que

$$m_X\text{-}int(A \cap B) \subset m_X\text{-}int(A) \cap m_X\text{-}int(B)$$

. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la contención de la proposición (7) del Teorema 3.1 es estricta.

Ejemplo 3.1. Considere el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ con la siguiente m_X-estructura $m_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$. Observe que existen subconjuntos A y B de X tales que $m_X\text{-}int(A) \cap m_X\text{-}int(B) \nsubseteq m_X\text{-}int(A \cap B)$. En efecto, sean $A = \{b, c, d\}$ y $B = \{a, b, c\}$, entonces $m_X\text{-}int(A \cap B) = m_X\text{-}int(\{b, c\}) = \emptyset$, $m_X\text{-}int(A) = \{b, c, d\}$ y $m_X\text{-}int(B) = \{a, b, c\}$. Por tanto,

$$m_X\text{-}int(A) \cap m_X\text{-}int(B) = \{b, c\} \nsubseteq m_X\text{-}int(A \cap B)$$

.

Teorema 3.2. *Sean (X, m_X) un m-espacio, A y B subconjuntos de X, entonces*

(1) $A \subset m_X\text{-}cl(A)$.

(2) Si A es m_X-cerrado, entonces $m_X\text{-}cl(A) = A$.

(3) $m_X\text{-}cl(\emptyset) = \emptyset$ *y* $m_X\text{-}cl(X) = X$.

(4) $x \in m_X\text{-}cl(A)$ *si y solo si para todo m_X-abierto U que contiene a x, se tiene que* $U \cap A \neq \emptyset$.

(5) Si $A \subset B$, entonces $m_X\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}cl(B)$.

(6) $m_X\text{-}(m_X\text{-}cl(A)) = m_X\text{-}cl(A)$.

(7) $m_X\text{-}cl(A \cup B) \supset m_X\text{-}cl(A) \cup m_X\text{-}cl(B)$.

Demostración:

(1) Es consecuencia inmediata de la Definición 3.4.

(2) Suponga que A es un m_X-cerrado, entonces

$$m_X\text{-}cl(A) = \bigcap_{X-F\in m_X} \{F : F \supset A\} \subset A$$

y como $A \subset m_X\text{-}cl(A)$ para todo A subconjunto de X, se obtiene que

$$m_X\text{-}cl(A) = A$$

.

(3) Como $\emptyset$ y X son m_X-cerrados porque son los complementos de los conjuntos m_X-abiertos, entonces $m_X\text{-}cl(\emptyset) = \emptyset$ y $m_X\text{-}cl(X) = X$, por (2).

(4) Para probar esta proposición se procede a mostrar su equivalente: $x \notin m_X\text{-}cl(A)$ si y sólo si existe m_X-abierto U que contiene a x tal que $U \cap A = \emptyset$.

Suponga que $x \notin m_X\text{-}cl(A)$, entonces $x \notin \bigcap_{X-F\in m_X} \{F : F \supset A\}$, lo cual significa que existe un m_X-cerrado F que contiene a A tal que $x \notin F$, es decir, $X \setminus F$ es un m_X-abierto que contiene a x tal que $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$.

Recíprocamente, suponga que existe un m_X-abierto U que contiene a x tal que $U \cap A = \emptyset$, entonces $A \subset X \setminus U$ y $X \setminus (X \setminus U) = U \in m_X$. Por lo tanto, $m_X\text{-}cl(A) \subset X \setminus U$ y como $x \in U$ se concluye que $x \notin m_X\text{-}cl(A)$.

(5) Suponga que $x \in m_X\text{-}cl(A)$, entonces para todo m_X-abierto U que contiene a x, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$, por (4), y así, $B \cap U \neq \emptyset$ para cada m_X-abierto U que contiene a x, es decir, $x \in m_X\text{-}cl(B)$. Así, $m_X\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}cl(B)$.

(6) Como $A \subset m_X\text{-}cl(A)$ para todo $A \subset X$, entonces usando (5), se tiene que $m_X\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}cl(A))$. De modo que, sólo resta probar que

$$m_X\text{-}cl(m_X\text{-}cl(A)) \subset m_X\text{-}cl(A)$$

Sea $x \in m_X\text{-}cl(m_X\text{-}cl(A))$, entonces $x \in F$ para cada $F \supset m_X\text{-}cl(A)$ tal que $X \setminus F \in m_X$; pero, como $A \subset m_X\text{-}cl(A)$, se sigue que $x \in F$ para cada $F \supset A$ y $X \setminus F \in m_X$, lo cual significa que $x \in m_X\text{-}cl(A)$. Por lo tanto, $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}cl(A)) \subset m_X\text{-}cl(A)$, de donde resulta la igualdad que se quiere.

(7) Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, entonces $m_X\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}cl(A \cup B)$ y $m_X\text{-}cl(B) \subset m_X\text{-}cl(A \cup B)$, por (5). En consecuencia,

$$m_X\text{-}cl(A \cup B) \supset m_X\text{-}cl(A) \cup m_X\text{-}cl(B)$$

$\square$

El siguiente ejemplo muestra que la contención de la proposición (7) en el teorema 3.2 es estricta.

Ejemplo 3.2. Considere el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ con la siguiente m_X-estructura $m_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}\}$. Observe que existen A y B subconjuntos de X tales que $m_X\text{-}cl(A \cup B) \nsubseteq m_X\text{-}cl(A) \cup m_X\text{-}cl(B)$. En efecto, sean $A = \{a\}$ y $B = \{d\}$, entonces $m_X\text{-}cl(A \cup B) = X$, $m_X\text{-}cl(A) = \{a\}$ y $m_X\text{-}cl(B) = \{d\}$. Por tanto, $m_X\text{-}cl(A \cup B) \nsubseteq m_X\text{-}cl(A) \cup m_X\text{-}cl(B)$.

La m_X-clausura y el m_X-interior de un conjunto pueden relacionarse tal y como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sean (X, m_X) un m-espacio y A un subconjunto de X, entonces*

(1) $m_X\text{-}cl(X \setminus A) = X \setminus m_X\text{-}int(A)$.

(2) $m_X\text{-}int(X \setminus A) = X \setminus m_X\text{-}cl(A)$.

Demostración:

(1) Por la Definición 3.3, se tiene que $m_X\text{-}int(A) = \bigcup_{G \in m_X} \{G : G \subset A\}$; de modo que, $X \setminus A = X \setminus \bigcup_{G \in m_X} \{G : G \subset A\} = \bigcap_{X \setminus (X \setminus G) \in m_X} \{X \setminus G : X \setminus A \subset X \setminus G\}$; pero, como G es m_X-abierto y esta contenido en A, entonces $X \setminus G$ es m_X-cerrado y contiene a $X \setminus A$; y como para cada m_X-cerrado que contenga a $X \setminus A$ existe un m_X-abierto contenido en A, entonces al tomar esta intersección sobre todos los m_X-abiertos contenidos en A se esta intersectando a todos los m_X-cerrados que contienen a $X \setminus A$. Luego, $\bigcap_{X \setminus (X \setminus G) \in m_X} \{X \setminus G : X \setminus A \subset X \setminus G\} = m_X\text{-}cl(X \setminus A)$. Por lo tanto, $m_X\text{-}cl(X \setminus A) = X \setminus m_X\text{-}int(A)$.

(2) Por la Definición 3.4, se tiene que $m_X\text{-}cl(A) = \bigcap_{X \setminus F \in m_X} \{F : F \supset A\}$; de modo que, $X \setminus m_X\text{-}cl(A) = X \setminus \bigcap_{X \setminus F \in m_X} \{F : F \supset A\} = \bigcup_{X \setminus F \in m_X} \{X \setminus F \subset X \setminus A\}$.
Por la Definición 3.3 tenemos que $m_X\text{-}int(X \setminus A) = \bigcup_{X \setminus F \in m_X} \{X \setminus F \subset X \setminus A\}$.
Por lo tanto, $m_X\text{-}int(X \setminus A) = X \setminus m_X\text{-}cl(A)$. $\square$

Es importante destacar que a diferencia de como ocurre con el interior y la clausura de un conjunto en un espacio topológico, el m_X-interior no necesariamente es un conjunto m_X-abierto ni la m_X-clausura es un conjunto m_X-cerrado.

Sin embargo, cuando a la estructura minimal se le exige cierta condición se pueden obtener estos resultados. Dicha condición se especifica a continuación.

Definición 3.5. Una estructura minimal m_X sobre un conjunto X, se dice que satisface la condición (B) de Maki si la unión arbitraria de elementos de la m_X-estructura es un elemento de la m_X-estructura.

Observe que la colección formada por los conjuntos semi-abierto, α-abierto, pre-abierto cumplen con la condición (B) de Maki. Sin embargo, la colección formada por los conjuntos regular abierto no satisfacen la condición (B) de Maki.

Observe que si m_X satisface la condición (B) de Maki, entonces intersección de conjuntos m_X-cerrados es un conjunto m_X-cerrado. De modo que, si m_X satisface la condición (B) de Maki y si $A \subset X$, entonces $m_X\text{-}int(A)$ es un conjunto m_X-abierto y $m_X\text{-}cl(A)$ es un conjunto m_X-cerrado.

En el siguiente teorema, se obtienen los recíprocos del Teorema 3.1 (2) y el Teorema 3.2 (2), haciendo uso de la condición (B) de Maki.

Teorema 3.4. *Sean $(X,\, m_X)$ un m-espacio y A un subconjunto de X. Si m_X satisface la condición (B) de Maki, entonces*

(1) A es m_X-abierto si y sólo si $m_X\text{-}int(A) = A$.

(2) A es m_X-cerrado si y sólo si m_X-$cl(A) = A$.

Demostración:

(1) Por (2) del Teorema 3.1, es inmediato que si A es un conjunto m_X-abierto, entonces m_X-$int(A) = A$.

Recíprocamente, como m_X-$int(A)$ es un conjunto m_X-abierto y por hipótesis m_X-$int(A) = A$, se tiene que A es un conjunto m_X-abierto.

(2) Por (2) del Teorema 3.2, es inmediato que si A es un conjunto m_X-cerrado, entonces m_X-$cl(A) = A$.

Recíprocamente, como m_X-$cl(A)$ es un conjunto m_X-cerrado y por hipótesis m_X-$cl(A) = A$, se tiene que A es un conjunto m_X-cerrado. □

Definición 3.6. Sea (X,m_X) un m-espacio, A un subconjunto de X. Se dice que A es m_X-compacto si para todo cubrimiento $\mathfrak{B}$ de A por subconjuntos m_X-abiertos de X, existe una subcolección finita de $\mathfrak{B}$ que cubre a A.

Teorema 3.5. *Sea (X,m_X) un m-espacio, A un subconjunto de X donde X es m_X-compacto. Si A es m_X-cerrado entonces A es m_X-compacto.*

Demostración: Sea $A \subset X$, X m_X-compacto y $\mathfrak{B} = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos m_X-abiertos de X. Como A es m_X-cerrado, entonces $X \setminus A$ es m_X-abierto. Así, se obtiene que $\mathfrak{B}' = \{U_\alpha : \alpha \in J\} \cup \{X \setminus A\}$ es un cubrimiento de X por subconjuntos m_X-abiertos de X. Como X es m_X-compacto, existe una subcolección finita de $\mathfrak{B}'$ que cubre a X. Esta subcolección puede contener o no al conjunto $X \setminus A$, si no lo contiene se obtiene una subcolección finita de $\mathfrak{B}$ que cubre a A, si lo contiene se descarta y se obtiene una subcolección finita de $\mathfrak{B}$ que cubre a A, de donde se concluye que A es m_X-compacto. □

3.2 Conjuntos abiertos generalizados en m-espacios

En esta sección, se consideran los conjuntos definidos en Capítulo 1, y se generalizan usando la noción de estructural minimal.

Definición 3.7. Sea $(X,\, m_X)$ un m-espacio. Un subconjunto A de X, se dice que es

(1) m_X-regular abierto si $A = m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))$.

(2) m_X-semi-abierto si $A \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))$.

(3) m_X-α-abierto si $A \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)))$.

(4) m_X-pre-abierto si $A \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))$.

(5) m_X-β-abierto si $A \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)))$.

Observe que si m_X es una topología sobre X entonces las definición anterior coincide con la dada en el Capítulo 1.

Observe que un m_X-regular abierto no necesariamente es m_X-abierto

Ejemplo 3.3. Considere $X = \{a, b, c, d\}$ y $m_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{c, d\}\}$. Los m_X-cerrados son:
$\{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b\}\}$.
Observe que:
$m_X\text{-}cl(\{a, b\}) = \{a, b, d\}$, $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(\{a, b\})) = \{a, b\}$

Como $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(\{a, b\})) = \{a, b\}$, se tiene que $\{a, b\}$ es m_X-regular abierto pero no es m_X-abierto.

Sin embargo si se le exige a la m_X-estructura que satisfaga la condición (B) de Maki entonces el resultado anterior es cierto tal y como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea $(X,\, m_X)$ un m-espacio que satisface la condicion (B) de Maki, entonces todo conjunto m_X-regular abierto es un conjunto m_X-abierto.*

Demostración: Suponga que A es un conjunto m_X-regular abierto, entonces $A = m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))$, dado que $(X,\, m_X)$ satisface la condición (B) de Maki se tiene del Teorema 3.4 que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))$ es un conjunto m_X-abierto, se deduce que A es m_X-abierto. □

El siguiente teorema muestra la relación existente entre los conjuntos antes definidos y los conjuntos m_X-abiertos.

Teorema 3.7. *Las siguientes propiedades en un m-espacio X se cumplen:*

(1) Todo conjunto m_X-α-abierto es un conjunto m_X-semi-abierto.

(2) Todo conjunto m_X-abierto es un conjunto m_X-semi-abierto.

(3) Todo conjunto m_X-pre-abierto es un conjunto m_X-β-abierto.

(4) Todo conjunto m_X-abierto es un conjunto m_X-pre-abierto.

(5) Todo conjunto m_X-semi-abierto es un conjunto m_X-β-abierto.

(6) Todo conjunto m_X-abierto es un conjunto m_X-α-abierto.

(7) Todo conjunto m_X-α-abierto es un conjunto m_X-pre-abierto.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto m_X-α-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-semi-abierto.

(2) Suponga que A es un conjunto m_X-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &= m_X\text{-}int(A) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-semi-abierto.

(3) Suponga que A es un conjunto m_X-pre-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-β-abierto.

(4) Suponga que A es un conjunto m_X-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &= m_X\text{-}int(A) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-pre-abierto.

(5) Suponga que A es un conjunto m_X-semi-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-β-abierto.

(6) Suponga que A es un conjunto m_X-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &= m_X\text{-}int(A) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \\ A = m_X\text{-}int(A) &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-α-abierto.

(7) Suponga que A es un conjunto m_X-α-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-pre-abierto. $\square$

Se tiene el siguiente diagrama para un subconjunto A de un m-espacio X:

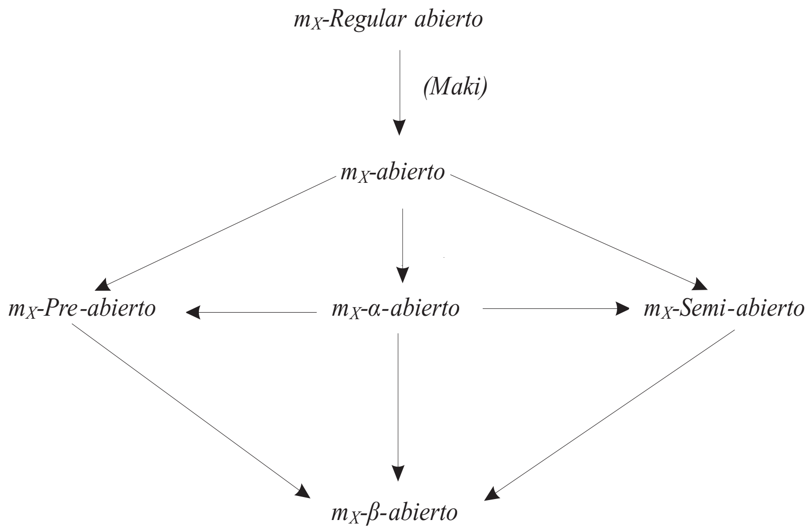

Figura 3.1: Diagrama 7

Los Ejemplos 1.1, 1.2, 1.3 dados en el Capítulo 1, si se toma $\tau = m_X$, se muestra que los recíprocos del teorema anterior en general no es cierto.

Ejemplo 3.4. Si U es un m_X-abierto entonces m_X-$int(m_X$-$cl(U))$ es m_X-regular abierto. En efecto,

Considere $V = m_X$-$int(m_X$-$cl(U))$, observe que V es m_X-regular abierto.

$$m_X\text{-}cl(V) = m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U))) \supset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U))$$

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(V)) \supset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) = V$$

Así, se tiene que $V \subset m_X$-$int(m_X$-$cl(V))$. Por otra parte,

$$m_X\text{-}cl(V) \subset m_X\text{-}cl(U)$$

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(V)) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) = V$$

y se tiene que m_X-$int(m_X$-$cl(V)) \subset V$. Por lo tanto, m_X-$int(m_X$-$cl(V)) = V$.

Al igual como se definen los conjuntos m_X-cerrados en estructuras minimales, se definen los conjuntos m_X-cerrados asociados a generalizaciones de conjuntos m_X-abiertos antes dados.

Definición 3.8. Sea (X, m_X) un m-espacio. Un subconjunto A de X, se dice que es

(1) m_X-regular cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es m_X-regular abierto.

(2) m_X-semi-cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es m_X-semi-abierto.

(3) m_X-α-cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es m_X-α-abierto.

(4) m_X-pre-cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es m_X-pre-abierto.

(5) m_X-β-cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es m_X-β-abierto.

El siguiente teorema caracteriza las definiciones anteriores en términos del m_X-interior y la m_X-clausura.

Teorema 3.8. *Sea A un subconjunto de un m-espacio X. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) A es m_X-regular cerrado si y sólo si $A = m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))$.

(2) A es m_X-semi-cerrado si y sólo si $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \subset A$.

(3) A es m_X-α-cerrado si y sólo si $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \subset A$.

(4) A es m_X-pre-cerrado si y sólo si $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \subset A$.

(5) A es m_X-β-cerrado si y sólo si $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \subset A$.

Demostración:

(1) Suponga que A es m_X-regular cerrado, entonces $X \setminus A$ es m_X-regular abierto, es decir,

$$\begin{aligned} X \setminus A &= m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus A)) \\ &= m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(A)) \\ &= X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se concluye que $A = m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))$.

Recíprocamente, suponga que $A = m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &= X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \\ &= m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(A)) \\ &= m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus A)) \end{aligned}$$

Esto dice que $X \setminus A$ es m_X-regular abierto, por lo tanto A es m_X-regular cerrado.

(2) Suponga que A es m_X-semi-cerrado, entonces $X \setminus A$ es m_X-semi-abierto, es decir,

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(X \setminus A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}cl(A)) \\ &\subset X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se concluye que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(X \setminus A)) \end{aligned}$$

Esto dice que $X \setminus A$ es m_X-semi-abierto, por lo tanto A es m_X-semi-cerrado.

(3) Suponga que A es m_X-α-cerrado, entonces $X \setminus A$ es m_X-α-abierto, es decir,

$$\begin{aligned}
X \setminus A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(X \setminus A))) \\
&\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}cl(A))) \\
&\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \\
&\subset X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)))
\end{aligned}$$

Tomando complemento, se concluye que $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned}
X \setminus A &\subset X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \\
&\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \\
&\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}cl(A))) \\
&\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(X \setminus A)))
\end{aligned}$$

Esto dice que $X \setminus A$ es m_X-α-abierto, por lo tanto A es m_X-α-cerrado.

(4) Suponga que A es m_X-pre-cerrado, entonces $X \setminus A$ es m_X-pre-abierto, es decir,

$$\begin{aligned}
X \setminus A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus A)) \\
&\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(A)) \\
&\subset X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))
\end{aligned}$$

Tomando complemento, se concluye que $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \subset A$, tomando complemento

$$\begin{aligned}
X \setminus A &\subset X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \\
&\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(A)) \\
&\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus A))
\end{aligned}$$

Esto dice que $X \setminus A$ es m_X-pre-abierto, por lo tanto A es m_X-pre-cerrado.

(5) Suponga que A es m_X-β-cerrado, entonces $X \setminus A$ es m_X-β-abierto, es decir,

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \\ &\subset X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se concluye que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus A))) \end{aligned}$$

Esto dice que $X \setminus A$ es m_X-β-abierto, por lo tanto A es m_X-β-cerrado. $\square$

A continuación se muestra que la colección de los conjuntos m_X-pre-abiertos, m_X-α-abiertos, y m_X-semi-abiertos es m_X-cerrada para uniones arbitrarias.

Teorema 3.9. *Para una familia de subconjuntos de X las propiedades siguientes se satisfacen:*

(1) La unión arbitraria de conjuntos m_X-pre-abierto es un conjunto m_X-pre-abierto.

(2) La unión arbitraria de conjuntos m_X-α-abierto es un conjunto m_X-α-abierto.

(3) La unión arbitraria de conjuntos m_X-semi-abierto es un conjunto m_X-semiabierto.

Demostración:

(1) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ tales que $U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U_\alpha))$ para todo $\alpha \in J$. Se mostrará que $\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha))$.

En efecto, como $U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ se sigue que

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U_\alpha)) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$$

pero $U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U_\alpha))$ para cada $\alpha \in J$.

Así, $U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha))$ para cada $\alpha \in J$ y por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)).$$

(2) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ tales que $U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(U_\alpha)))$ para todo $\alpha \in J$. Se mostrará que $\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha)))$.

En efecto, como $U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ se tiene entonces que

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(U_\alpha))) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$$

pero $U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(U_\alpha)))$ para cada $\alpha \in J$, de donde se obtiene que

$$U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$$

para cada $\alpha \in J$ y por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))).$$

(3) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ tales que $U_\alpha \subset cl(int(U_\alpha))$ para todo $\alpha \in J$. Se mostrará que $\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha \subset cl(int(\bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha))$.

En efecto, como $U_\alpha \subset \bigcup\limits_{\alpha\in J} U_\alpha$ para cada $\alpha \in J$ se sigue que

$$cl(int(U_\alpha)) \subset cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$$

pero $U_\alpha \subset cl(int(U_\alpha))$ para cada $\alpha \in J$.

Así, $U_\alpha \subset cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha))$ para cada $\alpha \in J$ y por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset cl(int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)).$$

□

Teorema 3.10. *Sea X un m-espacio, las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) La intersección arbitraria de conjuntos m_X-pre-cerrado es un conjunto m_X-pre-cerrado.

(2) La intersección arbitraria de conjuntos m_X-α-cerrado es un conjunto m_X-α-cerrado.

(3) La intersección arbitraria de conjuntos m_X-semi-cerrado es un conjunto m_X-semicerrado.

Demostración: Es consecuencia directa de la Definición 3.8, el Teorema 3.9 y las leyes de De Morgan. □

La familia de todos los conjuntos m_X-regular abiertos, m_X-regular cerrados, m_X-semi-abiertos, m_X-α-abiertos, m_X-pre-abiertos, m_X-β-abiertos se denota por $m_X RO(X)$, m_X-$RC(X)$, m_X-$SO(X)$, m_X-$\alpha O(X)$, m_X-$PO(X)$, m_X-$\beta O(X)$ respectivamente. La familia de todos los conjuntos m_X-regular abiertos, m_X-regular cerrados, m_X-semi-abiertos, m_X-α-abiertos, m_X-pre-abiertos, m_X-β-abiertos de X que contiene un punto $x \in X$ se denota por m_X-$RO(X,x)$, m_X-$RC(X,x)$, m_X-$SO(X,x)$, m_X-$\alpha O(X,x)$, m_X-$PO(X,x)$, m_X-$\beta O(X,x)$ respectivamente.

A continuación se define el concepto de m_X-clausura asociada a los conjuntos m_X-pre-cerrado, m_X-α-cerrado y m_X-semi-cerrado.

Definición 3.9. Para un subconjunto A de un m-espacio X se define:

(1) La m_X-preclausura de A, denotada por m_X-p-$cl(A)$, como la intersección de todos los conjuntos m_X-pre-cerrados que contienen a A.

(2) La m_X-α-clausura de A, denotada por m_X-α-$cl(A)$, como la intersección de todos los conjuntos m_X-α-cerrados que contienen a A.

(3) La m_X-semi-clausura de A, denotada por m_X-s-$cl(A)$, como la intersección de todos los conjuntos m_X-semi-cerrados que contienen a A.

La m_X-preclausura, la m_X-α-clausura y la m_X-semi-clausura también pueden escribirse como conjuntos que satisfacen cierta propiedad, tal y como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 3.11. *Sea A un subconjunto de un m-espacio X, las siguientes proposiciones se satisfacen:*

(1) La m_X-preclausura de A, es el m_X-pre-cerrado mas pequeño que contiene a A.

(2) La m_X-α-clausura de A, es el m_X-α-cerrado mas pequeño que contiene a A.

(3) La m_X-semi-clausura de A, m_X-semi-cerrado mas pequeño que contiene a A.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 3.9 y el Teorema 3.10. $\square$

El siguiente lema caracteriza la m_X-semi-clausura de un conjunto m_X-abierto en términos del m_X-interior y m_X-clausura.

Lema 3.1. *m_X-s-$cl(A) = m_X$-$int(m_X$-$cl(A))$ para un subconjunto m_X-abierto A de un m-espacio X.*

Demostración: Para todo subconjunto A de X, m_X-$int(m_X$-$cl(A)) \subset m_X$-s-$cl(A)$. Falta mostrar que m_X-s-$cl(A) \subset m_X$-$int(m_X$-$cl(A))$. Suponga que $x \notin m_X$-$int(m_X$-$cl(A))$, entonces $x \in m_X$-$cl(m_X$-$int(X \setminus A))$. Como A es m_X-abierto, se tiene que $A \subset m_X$-$int(m_X$-$cl(A))$ y $A \cap m_X$-$cl(m_X$-$int(X \setminus A)) = \emptyset$. Esto dice que $x \notin m_X$-s-$cl(A)$. Por lo tanto se obtiene que m_X-s-$cl(A) = m_X$-$int(m_X$-$cl(A))$. $\square$

El siguiente teorema muestra que la m_X-clausura y la m_X-α-clausura coinciden sobre conjuntos m_X-β-abierto si se agrega la condición (B) de Maki.

Teorema 3.12. *Sean $(X,\, m_X)$ un m-espacio y A un subconjunto de X. Si m_X satisface la condición (B) de Maki, entonces*

(1) m_X-$cl(A)$ es m_X-α-cerrado.

(2) m_X-α-$cl(A) \subset m_X$-$cl(A)$.

(3) m_X-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$ es m_X-α-cerrado.

(4) Si $A \in m_X$-$\beta O(X)$ entonces m_X-α-$cl(A) \subset m_X$-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$.

(5) Si $A \in m_X$-$\beta O(X)$ entonces m_X-α-$cl(A) \in m_X$-$\beta O(X)$.

(6) Si A es m_X-α-cerrado y m_X-β-abierto entonces A es m_X-cerrado.

(7) Si $A \in m_X$-$\beta O(X)$ entonces m_X-$cl(A) \subset m_X$-α-$cl(A)$.

Demostración:

(1) Dado que m_X-$cl(A)$ es m_X-cerrado y todo conjunto m_X-cerrado es m_X-α-cerrado se obtiene que m_X-$cl(A)$ es m_X-α-cerrado.

(2) Dado que m_X-$cl(A)$ es un m_X-α-cerrado que contiene a A y el m_X-α-cerrado mas pequeño que contiene a A es m_X-α-$cl(A)$ se obtiene que m_X-α-$cl(A) \subset m_X$-$cl(A)$.

(3) Si se toma $V = m_X$-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$, entonces $V \subset m_X$-$cl(A)$ por lo que

$$\begin{aligned} m_X\text{-}cl(V) &\subset m_X\text{-}cl(A) \\ m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(V)) &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A) \\ m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(V))) &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) = V \end{aligned}$$

Por lo que V es m_X-α-cerrado y se concluye que m_X-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$ es m_X-α-cerrado.

(4) Si $A \in m_X$-$\beta O(X)$ entonces $A \subset m_X$-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$, de modo que m_X-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$ es un m_X-α-cerrado que contiene a A, pero el m_X-α-cerrado mas pequeño que contiene a A es m_X-α-$cl(A)$ de donde se concluye que

$$m_X\text{-}\alpha\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)))$$

(5) Si $A \in m_X$-$\beta O(X)$ entonces m_X-α-$cl(A) \subset m_X$-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$, además $A \subset m_X$-α-$cl(A)$, por lo que

$$m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A))) \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\alpha\text{-}cl(A))))$$

Así

$$m_X\text{-}\alpha\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\alpha\text{-}cl(A))))$$

y se concluye que m_X-α-$cl(A) \in m_X$-$\beta O(X)$.

(6) Si A es m_X-α-cerrado se tiene que m_X-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A))) \subset A$. Análogamente, si A es m_X-β-abierto se tiene que $A \subset m_X$-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$, por lo que $A = m_X$-$cl(m_X$-$int(m_X$-$cl(A)))$ y se tiene que A es m_X-cerrado.

(7) m_X-α-$cl(A)$ es m_X-α-cerrado. m_X-α-$cl(A)$ es m_X-β-abierto pues A es m_X-β-abierto, de modo que m_X-α-$cl(A)$ es un m_X-cerrado que contiene a A, pero el m_X-cerrado más pequeño que contiene a A es m_X-$cl(A)$ por lo que m_X-$cl(A) \subset m_X$-α-$cl(A)$. $\square$

El siguiente teorema muestra que la m_X-clausura y la m_X-preclausura coinciden sobre conjuntos m_X-semi-abierto si se agrega la condición (B) de Maki.

Teorema 3.13. *Sean $(X,\, m_X)$ un m-espacio y A un subconjunto de X. Si m_X satisface la condición (B) de Maki, entonces*

(1) m_X-$cl(A)$ es m_X-pre-cerrado.

(2) m_X*-p-cl*$(A) \subset m_X$*-cl*(A).

(3) m_X*-cl*$(m_X$*-int*$(A))$ *es* m_X*-pre-cerrado.*

(4) Si $A \in m_X$*-SO*(X) *entonces* m_X*-p-cl*$(A) \subset m_X$*-cl*$(m_X$*-int*$(A))$.

(5) Si $A \in m_X$*-SO*(X) *entonces* m_X*-p-cl*$(A) \in m_X$*-SO*(X).

(6) Si A *es* m_X*-pre-cerrado y* m_X*-semi-abierto entonces* A *es* m_X*-cerrado.*

(7) Si $A \in m_X$*-SO*(X) *entonces* m_X*-cl*$(A) \subset m_X$*-p-cl*(A).

Demostración:

(1) Dado que m_X-*cl*(A) es m_X-cerrado y todo conjunto m_X-cerrado es m_X-precerrado se obtiene que m_X-*cl*(A) es m_X-pre-cerrado.

(2) Dado que m_X-*cl*(A) es un m_X-pre-cerrado que contiene a A y el m_X-pre-cerrado mas pequeño que contiene a A es m_X-*p-cl*(A) se obtiene que m_X-*p-cl*$(A) \subset m_X$-*cl*(A).

(3) Por (1) m_X-*cl*(A) es m_X-pre-cerrado, de donde se tiene que m_X-*cl*$(m_X$-*int*$(A))$ es m_X-pre-cerrado.

(4) Si $A \in m_X$-*SO*(X) entonces $A \subset m_X$-*cl*$(m_X$-*int*$(A))$, de modo que m_X-*cl*$(m_X$-*int*$(A))$ es un m_X-pre-cerrado que contiene a A, pero el m_X-pre-cerrado mas pequeño que contiene a A es m_X-*p-cl*(A) de donde se concluye que

$$m_X\text{-}p\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A))$$

.

(5) Si $A \in m_X$-*SO*(X) entonces m_X-*p-cl*$(A) \subset m_X$-*cl*$(m_X$-*int*$(A))$, además $A \subset m_X$-*p-cl*(A), por lo que

$$m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}p\text{-}cl(A)))$$

Así

$$m_X\text{-}p\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}p\text{-}cl(A)))$$

y se concluye que m_X-p-$cl(A) \in m_X$-$SO(X)$.

(6) Si A es m_X-pre-cerrado se tiene que m_X-$cl(m_X$-$int(A)) \subset A$. Análogamente, si A es m_X-semi-abierto se tiene que $A \subset m_X$-$cl(m_X$-$int(A))$, por lo que $A = m_X$-$cl(m_X$-$int(A))$ y se tiene que A es m_X-cerrado.

(7) Por Teorema 3.11, m_X-p-$cl(A)$ es m_X-pre-cerrado. Por inciso anterior, m_X-p-$cl(A)$ es m_X-semiabierto pues A es m_X-semiabierto, de modo que m_X-p-$cl(A)$ es un m_X-cerrado que contiene a A, pero el m_X-cerrado más pequeño que contiene a A es m_X-$cl(A)$ por lo que m_X-$cl(A) \subset m_X$-p-$cl(A)$. □

Definición 3.10. La m_X-δ-clausura de un conjunto A en un m-espacio (X, m_X) denotado por m_X-δ-$cl(A)$, es definido por:

$$m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A) = \{x \in X : A \cap m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \neq \emptyset, x \in U, U \in m_X\}$$

Definición 3.11. El m_X-δ-interior de un subconjunto A de X denotado por m_X-δ-$int(A)$, es la unión de todos los conjuntos m_X-regular abierto de X contenido en A.

Los siguientes teoremas muestran algunas propiedades de la m_X-δ-clausura y m_X-δ-interior de un conjunto.

Teorema 3.14. *Sea A un subconjunto de un m-espacio X, las siguientes proposiciones se satisfacen:*

(1) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces

$$m_X\text{-}\delta\text{-}int(A) \subset m_X\text{-}int(A) \subset A$$

(2) Si $A \subset B$ entonces m_X-δ-$int(A) \subset m_X$-δ-$int(B)$.

Demostración:

(1) El m_X-δ-$int(A)$ se define como la unión de de conjuntos m_X-regular abierto que están contenido en A, por lo tanto m_X-δ-$int(A) \subset A$. Como todo conjunto m_X-regular abierto es m_X-abierto se obtiene que m_X-δ-$int(A)$ es un m_X-abierto contenido en A. Pero el m_X-abierto más grande contenido en A es m_X-$int(A)$, por lo tanto, m_X-δ-$int(A) \subset m_X$-$int(A)$.

(2) Sea $x \in m_X$-δ-$int(A)$, esto dice que $x \in \bigcup W$, W m_X-regular abierto, $W \subset A$. Como $A \subset B$, $x \in \bigcup W$, W m_X-regular abierto, $W \subset B$. Por lo tanto, se tiene que $x \in m_X$-δ-$int(B)$. $\square$

Teorema 3.15. *Sea A un subconjunto de un m-espacio X, las siguientes proposiciones se satisfacen:*

(1) m_X-$cl(A) \subset m_X$-δ-$cl(A)$.

(2) $A \subset m_X$-δ-$cl(A)$.

(3) Si $A \subset B$ *entonces* m_X-δ-$cl(A) \subset m_X$-δ-$cl(B)$.

Demostración:

(1) Sea $x \in m_X$-$cl(A)$, esto dice que $U \cap A \neq \emptyset$ para todo conjunto m_X-abierto U, $x \in U$.

$$U \subset m_X\text{-}cl(U)$$

$$U = m_X\text{-}int(U) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U))$$

$$\emptyset \neq U \cap A \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap A$$

Esto dice que m_X-$int(m_X$-$cl(U)) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in m_X$-δ-$cl(A)$.

(2) Como $A \subset m_X$-$cl(A)$ para todo $A \subset X$, por (1) se tiene que $A \subset m_X$-δ-$cl(A)$.

(3) Suponga que $x \notin m_X$-δ-$cl(B)$, esto dice que existe un conjunto m_X-abierto U de x tal que m_X-$int(m_X$-$cl(U)) \cap B = \emptyset$.

$$A \cap m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \subset B \cap m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) = \emptyset$$

Por lo que $A \cap m_X$-$int(m_X$-$cl(U)) = \emptyset$ y se tiene que $x \notin m_X$-δ-$cl(A)$. $\square$

Teorema 3.16. *Sea A un subconjunto de un m-espacio X, las siguientes proposiciones se satisfacen:*

(1) m_X-δ-$int(X \setminus A) = X \setminus m_X$-$\delta$-$cl(A)$.

(2) m_X-δ-$cl(X \setminus A) = X \setminus m_X$-$\delta$-$int(A)$.

(3) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces

$$m_X\text{-}\delta\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))$$

(4) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces

$$m_X\text{-}\delta\text{-}int(A) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))$$

(5) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces

$$m_X\text{-}\delta\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) = m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$$

(6) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces

$$m_X\text{-}\delta\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) = m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$$

Demostración:

(1) Sea $x \in m_X$-δ-$int(X \setminus A)$, entonces existe un m_X-regular abierto U tal que

$$x \in U \subset X \setminus A$$

luego $U \cap A = \emptyset$. Como U es m_X-regular abierto entonces $U = m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U))$ y $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap A = \emptyset$. Por lo tanto, $x \notin m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$ y se tiene que $x \in X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$. Así, $m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A) \subset X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$.

Por otra parte, suponga que $x \in X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$, esto implica que $x \notin m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$, entonces existe un m_X-abierto U de x tal que

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap A = \emptyset$$

$$x \in U \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \subset X \setminus A$$

esto dice que $x \in m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A)$. Así, $X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A) \subset m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A)$ y se concluye que

$$X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A) = m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A)$$

(2) Suponga que $x \notin m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A)$, entonces existe un conjunto m_X-abierto U, $x \in U$ tal que

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap X \setminus A = \emptyset$$

$$x \in U \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \subset A$$

esto dice que $x \in m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$ y se tiene que $x \notin X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$ y por lo tanto $X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A) \subset m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A)$

Por otra parte, suponga que $x \notin X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$, esto implica que $x \in m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$ entonces existe un conjunto m_X-regular abierto U, tal que $x \in U \subset A$, esto dice que $U \cap X \setminus A = \emptyset$. Como $U = m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U))$ entonces $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap X \setminus A = \emptyset$, esto dice que $x \notin m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A)$ y por lo tanto $m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A) \subset X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$. De esta manera se concluye que $m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A) = X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$.

(3) Sea $x \in m_X\text{-}\delta\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))$, esto dice que $x \in \bigcup W$, W m_X-regular abierto, $W \subset m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$. Así, $x \in W$ para algún W m_X-regular abierto, $W \subset \delta\text{-}cl(A)$. Como todo conjunto m_X-regular abierto es m_X-abierto entonces existe un W m_X-abierto, tal que $W \subset m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$. Por lo tanto, $x \in m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))$.

(4) Sea $x \in m_X$-δ-$int(A)$, esto dice que $x \in \bigcup W$, W m_X-regular abierto, $W \subset A$. Así, $x \in W$ para algún W m_X-regular abierto, $W \subset A$. Como todo conjunto m_X-regular abierto es m_X-abierto y $A \subset m_X$-δ-$cl(A)$ entonces existe un W m_X-abierto, tal que $W \subset m_X$-δ-$cl(A)$. Por lo tanto, $x \in m_X$-$int(\delta$-$cl(A))$.

(5) Por el Teorema 3.14, se tiene que m_X-δ-$int(m_X$-δ-$int(A)) \subset m_X$-δ-$int(A)$. Ahora se verifica que

$$m_X\text{-}\delta\text{-}int(A) \subset m_X\text{-}\delta\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))$$

Para esto, tómese $x \notin m_X$-δ-$int(m_X$-δ-$int(A))$ entonces para todo m_X-regular abierto U que contenga a x se cumple que

$$U \cap (X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \neq \emptyset$$

$$U \cap (m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \neq \emptyset$$

esto dice que existe $z \in U \cap (m_X$-δ-$cl(X \setminus A))$. Observe que U es un m_X-abierto que contiene a z, por lo que

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

$$U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

de esta manera se concluye que $x \notin m_X$-δ-$int(A)$. Por lo tanto,

$$m_X\text{-}\delta\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) = m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$$

.

(6) Por el Teorema 3.15, se tiene que m_X-δ-$cl(A) \subset m_X$-δ-$cl(m_X$-δ-$cl(A))$. Ahora se verifica que

$$m_X\text{-}\delta\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \subset m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$$

Para esto, tómese $x \notin m_X$-δ-$cl(A)$, entonces existe un conjunto m_X-abierto U de x tal que

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap A = \emptyset$$

Observe que de aquí se deduce que

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A) = \emptyset$$

Pues en caso contrario existiría $z \in m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$. Para esto tómese $V = m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U))$, entonces V es un m_X-abierto que contiene a z y sigue que

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(V)) \cap A \neq \emptyset$$

$$V \cap A \neq \emptyset$$

$$m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap A \neq \emptyset$$

lo que contradice el hecho que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(U)) \cap A = \emptyset$. De esta manera se concluye que

$$m_X\text{-}\delta\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \subset m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$$

Por lo tanto

$$m_X\text{-}\delta\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) = m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)$$

$\square$

Definición 3.12. Un subconjunto A de un m-espacio X se dice que es:

(1) m_X-δ-abierto si $A = m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)$.

(2) m_X-δ-pre-abierto si $A \subset m_X\text{-}int(\delta\text{-}cl(A))$.

(3) m_X-δ-semi-abierto si $A \subset m_X\text{-}cl(\delta\text{-}int(A))$.

Definición 3.13. Un subconjunto A de un m-espacio X se dice que es:

(1) m_X-δ-cerrado si $X \setminus A$ es m_X-δ-abierto.

(2) m_X-δ-pre-cerrado si $X \setminus A$ es m_X-δ-pre-abierto.

(3) m_X-δ-semi-cerrado si $X \setminus A$ es m_X-δ-semi-abierto.

Teorema 3.17. *Sea A un subconjunto de un m-espacio X. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) A es m_X-δ-cerrado si y sólo si $A = m_X$-δ-$cl(A)$.

(2) A es m_X-δ-pre-cerrado si y sólo si m_X-$cl(m_X$-δ-$int(A)) \subset A$.

(3) A es m_X-δ-semi-cerrado si y sólo si m_X-$int(m_X$-δ-$cl(A)) \subset A$.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-cerrado, entonces $X \setminus A$ es un conjunto m_X-δ-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &= m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A) \\ &= X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que $A = m_X$-δ-$cl(A)$.

Recíprocamente, suponga que $A = m_X$-δ-$cl(A)$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &= X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A) \\ &= m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es m_X-δ-abierto y por lo tanto A es m_X-δ-cerrado.

(2) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-pre-cerrado, entonces $X\setminus A$ es un conjunto m_X-δ-pre-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que m_X-$cl(m_X$-δ-$int(A)) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que m_X-$cl(m_X$-δ-$int(A)) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es m_X-δ-pre-abierto y por lo tanto A es m_X-δ-pre-cerrado.

(3) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-semi-cerrado, entonces $X \setminus A$ es un conjunto m_X-δ-semi-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que m_X-$int(m_X$-δ-$cl(A)) \subset A$.

Recíprocamente, suponga que m_X-$int(m_X$-δ-$cl(A)) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A)) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es m_X-δ-semi-abierto y por lo tanto A es m_X-δ-semicerrado.

$\square$

La familia de todos los conjuntos m_X-δ-abiertos, m_X-δ-pre-abiertos, m_X-δ-semi-abiertos se denota por m_X-$\delta O(X)$, m_X-$\delta PO(X)$, m_X-$\delta SO(X)$ respectivamente. La familia de todos los conjuntos m_X-δ-abiertos, m_X-δ-pre-abiertos, m_X-δ-semi-abiertos con respecto a un punto x de X se denota por m_X-$\delta O(X, x)$, m_X-$\delta PO(X, x)$, m_X-$\delta SO(X, x)$ respectivamente.

El siguiente teorema muestra la relación existente entre las distintas clases de conjuntos m_X-abiertos hasta ahora definidas.

Teorema 3.18. *Las siguientes propiedades para un subconjunto A de un m-espacio X se cumplen:*

(1) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces todo conjunto m_X-δ-semi-abierto es un conjunto m_X-semi-abierto.

(2) Todo conjunto m_X-δ-abierto es un conjunto m_X-δ-semi-abierto.

(3) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces todo conjunto m_X-δ-abierto es un conjunto m_X-abierto.

(4) Todo conjunto m_X-abierto es un conjunto m_X-δ-pre-abierto.

(5) Todo conjunto m_X-pre-abierto es un conjunto m_X-δ-pre-abierto.

(6) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces todo conjunto m_X-regular abierto es m_X-δ-abierto.

(7) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces todo conjunto m_X-δ-abierto es un conjunto m_X-δ-pre-abierto.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-semi-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es m_X-semi-abierto.

(2) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}\delta\text{-}int(A) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es m_X-δ-semi-abierto.

(3) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-abierto,entonces $A = m_X$-δ-$int(A)$. Como m_X-δ-$int(A)$ es un conjunto m_X-abierto, se deduce que A es un conjunto m_X-abierto.

(4) Suponga que A es un conjunto m_X-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &= m_X\text{-}int(A) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-δ-pre-abierto.

(5) Suponga que A es un conjunto m_X-pre-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-δ-pre-abierto.

(6) Sea U un conjunto m_X-regular cerrado. $X \setminus U$ es m_X-regular abierto. Así

$$m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus U) = \bigcup_{W \subset X \setminus U} W$$

donde W es m_X-regular abierto. Como $X \setminus U$ es m_X-regular abierto entonces

$$m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus U) = X \setminus U$$

Por lo tanto $X \setminus U$ es m_X-δ-abierto y así, U es m_X-δ-cerrado. Ahora, sea W un conjunto m_X-regular abierto, entonces $X \setminus W$ es m_X-regular cerrado. Como todo conjunto m_X-regular cerrado es m_X-δ-cerrado entonces $X \setminus W$ es m_X-δ-cerrado, de donde se tiene que W es un conjunto m_X-δ-abierto.

(7) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &= m_X\text{-}\delta\text{-}int(A) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-δ-pre-abierto $\square$

De acuerdo con el Teorema 3.18 y el Teorema 3.6 se tiene el siguiente diagrama para un subconjunto A de un m-espacio X:

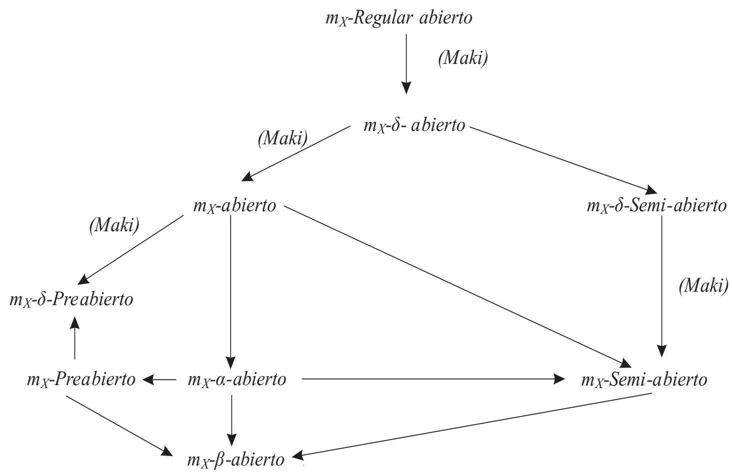

Figura 3.2: Diagrama 8

Los Ejemplos 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.12 dados en el Capítulo 1, si se toma $\tau = m_X$, muestran que los recíprocos del teorema anterior en general no son ciertos.

Definición 3.14. Un punto $x \in X$ se dice que es punto m_X-θ-semiclausura de un subconjunto A de X si m_X-$cl(U) \cap A \neq \emptyset$ para todo conjunto m_X-semi-abierto U que contenga a x. El conjunto de todos los puntos m_X-θ-semiclausura de P es denotado por m_X-θ-s-$cl(A)$. Un subconjunto A es llamado m_X-θ-semi-cerrado si $A = m_X$-θ-s-$cl(A)$. El complemento de un conjunto m_X-θ-semi-cerrado es llamado m_X-θ-semi-abierto.

Definición 3.15. Para un subconjunto R de un m-espacio X, el conjunto $\bigcap\{P \in m_X\text{-}RO(X) : R \subset P\}$ es llamado el m_X-r-kernel de R y es denotado m_X-r-$ker(R)$.

Lema 3.2. *Las siguientes propiedades para $P \subset X$ y $R \subset X$ se satisfacen:*

(1) $x \in m_X$-r-$ker(P)$ *si y solo si* $P \cap S \neq \emptyset$ *para cualquier conjunto* m_X-*regular cerrado* S, $x \in S$.

(2) $P \subset m_X$-r-$ker(P)$.

(3) $P = m_X$-r-$ker(P)$ *si* P *es* m_X-*regular abierto en* X.

(4) Si $P \subset R$ entonces m_X-r-ker$(P) \subset m_X$-r-ker(R).

Demostración:

(1) Suponga que $x \notin m_X\text{-}r\text{-}ker(P)$, entonces existe un conjunto m_X-regular abierto U, $P \subset U$ y $x \notin U$. Como $x \notin U$, entonces $x \in X \setminus U$. Como U es un conjunto m_X-regular abierto en X, $X \setminus U$ es un conjunto m_X-regular cerrado. Si se toma $S = X \setminus U$ entonces $P \cap S = \emptyset$ para cualquier conjunto m_X-regular cerrado S, $x \in S$.

Recíprocamente, suponga que para algún m_X-regular cerrado S, $x \in S$, $P \cap S = \emptyset$. Como $P \cap S = \emptyset$ y $x \notin X \setminus S$, esto dice que $P \subset X \setminus S$. Ahora $X \setminus S$ es un conjunto m_X-regular abierto que contiene a P y $x \notin X \setminus S$. Así $x \notin \bigcap\{U \in m_X\text{-}RO(X) : P \subset U\}$, esto dice que $x \notin m_X\text{-}r\text{-}ker(P)$.

(2) Observe que $P \subset m_X\text{-}r\text{-}ker(P)$ puesto que $m_X\text{-}r\text{-}ker(P)$ es la intersección de conjuntos m_X-regular abierto que contienen a P.

(3) Suponga que P es un conjunto m_X-regular abierto en X, entonces $m_X\text{-}r\text{-}ker(P) \subset P$, en consecuencia $P = m_X\text{-}r\text{-}ker(P)$.

(4) Suponga que $x \notin m_X\text{-}r\text{-}ker(R)$, entonces existe un conjunto m_X-regular abierto U, $R \subset U$ y $x \notin U$. Como $P \subset R \subset U$ entonces existe un m_X-regular abierto U, $P \subset U$ y $x \notin U$, esto dice que $x \notin m_X\text{-}r\text{-}ker(P)$. $\square$

3.3 Conjuntos e-abierto, e^*-abierto y a-abierto en m-espacios

En esta sección se consideran los conjuntos e-abierto, e^*-abierto, a-abierto, δ-abierto, δ-semi-abierto y δ-pre-abierto definidos en el Capítulo 1 y se generalizan usando la noción de estructura minimal. Se estudia la relación existente entre estos conceptos y se estudian algunas propiedades.

Definición 3.16. Un subespacio A de un m-espacio (X, m_X) es llamado:

(1) m_X-e-abierto si $A \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))$.

(2) m_X-e^*-abierto si $A \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)))$.

(3) m_X-a-abierto si $A \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)))$.

Definición 3.17. Un subespacio A de un m-espacio (X, m_X) es llamado:

(1) m_X-e-cerrado si $X \setminus A$ es m_X-e-abierto.

(2) m_X-e^*-cerrado si $X \setminus A$ es m_X-e^*-abierto.

(3) m_X-a-cerrado si $X \setminus A$ es m_X-a-abierto.

El siguiente teorema caracteriza los conjuntos m_X-e-cerrado, m_X-e^*-cerrado y m_X-a-cerrado en términos de la m_X-clausura, m_X-interior, m_X-δ-clausura y m_X-δ-interior.

Teorema 3.19. *Sea A un subconjunto de un m-espacio X. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) m_X-e-cerrado si y solo si $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cap m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \subset A$.

(2) m_X-e^*-cerrado si y solo si $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \subset A$.

(3) m_X-a-cerrado si y solo si $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \subset A$.

Demostración:

(1) Suponga que A es m_X-e-cerrado, entonces $X \setminus A$ es m_X-e-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \cup m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \cup X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que

$$m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cap m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \subset A$$

Recíprocamente, suponga que

$$m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cap m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \subset A$$

tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus (m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cap m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cup X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cup m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A)) \cup m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A)) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es m_X-e-abierto y por lo tanto A es m_X-e-cerrado.

(2) Suponga que A es m_X-e^*-cerrado, entonces $X \setminus A$ es m_X-e^*-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \subset A$. Recíprocamente, suponga que $m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus (m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(X \setminus A))) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es m_X-e^*-abierto y por lo tanto A es m_X-e^*-cerrado.

(3) Suponga que A es m_X-a-cerrado, entonces es m_X-a-abierto, es decir

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A))) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset X \setminus m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \end{aligned}$$

Tomando complemento, se tiene que $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \subset A$.
Recíprocamente, suponga que $m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \subset A$, tomando complemento se tiene que

$$\begin{aligned} X \setminus A &\subset X \setminus (m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)))) \\ &\subset m_X\text{-}int(X \setminus m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(X \setminus m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus A))) \end{aligned}$$

esto dice que $X \setminus A$ es m_X-a-abierto y por lo tanto A es m_X-a-cerrado. □

A continuación se muestra la relación existente entre los conjuntos m_X-e-abierto, m_X-e^*-abierto y m_X-a-abierto.

Teorema 3.20. *Para un subconjunto A de un m-espacio X las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) Todo conjunto m_X-a-abierto es un conjunto m_X-e-abierto.

(2) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces todo conjunto m_X-e-abierto es un conjunto m_X-e^*-abierto.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto m_X-a-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-e-abierto.

(2) Suponga que A es un conjunto m_X-e-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cup m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto m_X-e*-abierto. □

El siguiente resultado relaciona todas las nociones de conjuntos abierto en estructura minimales hasta ahora estudiados.

Teorema 3.21. *Sea X un m-espacio, A subconjunto de X. Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces todo conjunto m_X-δ-abierto es m_X-a-abierto.

(2) Todo conjunto m_X-a-abierto es m_X-δ-pre-abierto.

(3) Todo conjunto m_X-a-abierto es m_X-δ-semi-abierto.

(4) Si m_X satisface la condición (B) de Maki entonces todo conjunto m_X-a-abierto es m_X-α-abierto.

(5) Todo conjunto m_X-δ-semi-abierto es m_X-e-abierto.

(6) Todo conjunto m_X-α-abierto es m_X-e-abierto.

(7) Todo conjunto m_X-pre-abierto es m_X-e-abierto.

(8) Todo conjunto m_X-semi-abierto es m_X-e*-abierto.

(9) Todo conjunto m_X-δ-pre-abierto es m_X-e-abierto.

Demostración:

(1) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &= m_X\text{-}\delta\text{-}int(A) \\ A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ m_X\text{-}int(A) &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ A = m_X\text{-}\delta\text{-}int(A) \subset m_X\text{-}int(A) &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto m_X-e-abierto.

(2) Suponga que A es un conjunto m_X-a-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto m_X-δ-pre-abierto.

(3) Suponga que A es un conjunto m_X-a-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto m_X-δ-semi-abierto.

(4) Suponga que A es un conjunto m_X-a-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A))) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto m_X-α-abierto.

(5) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-semi-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto m_X-e-abierto.

(6) Suponga que A es un conjunto m_X-α-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \end{aligned}$$

por lo tanto, A es un conjunto m_X-e-abierto.

(7) Suponga que A es un conjunto m_X-pre-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \cup m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-e-abierto.

(8) Suponga que A es un conjunto m_X-semi-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(A)) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A))) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-e^*-abierto.

(9) Suponga que A es un conjunto m_X-δ-pre-abierto, entonces

$$\begin{aligned} A &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \\ &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(A)) \cup m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(A)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es un conjunto m_X-e-abierto. $\square$

De acuerdo con el Teorema 3.7, el Teorema 3.18 y el Teorema 3.21 se tiene el siguiente diagrama para un subconjunto A de X

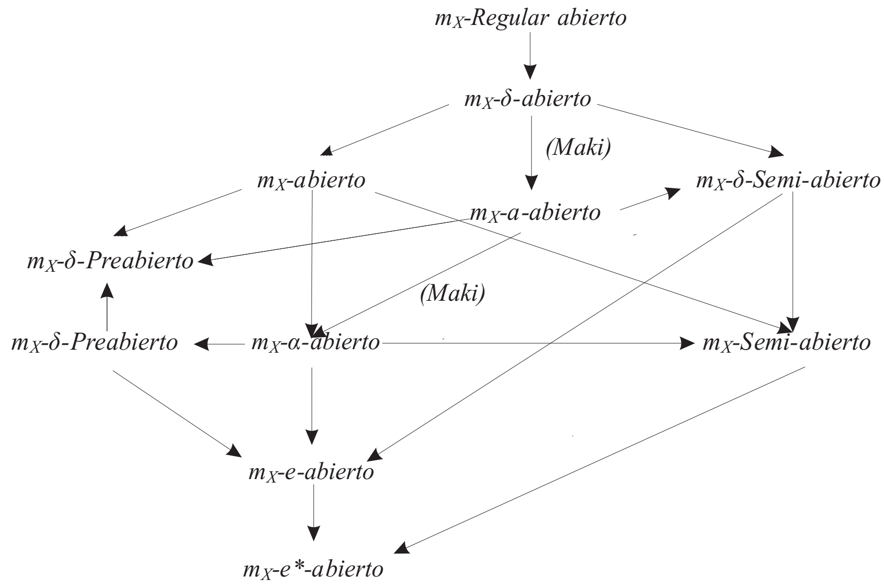

Figura 3.3: Diagrama 9

Los Ejemplos 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21, 1.22 dados en el Capítulo 1, si se toma $\tau = m_X$, muestran que los recíprocos del teorema anterior en general no son ciertos.

A continuación se muestra que las colecciones formadas por los conjuntos m_X-e-abierto, m_X-e^*-abierto y m_X-a-abierto son cerradas en estructuras minimales bajo uniones arbitrarias.

Teorema 3.22. *Para una familia de subconjuntos de X las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) La unión de cualquier familia de conjuntos m_X-e*-abierto es un conjunto m_X-e*-abierto.

(2) La unión de cualquier familia de conjuntos m_X-e-abierto es un conjunto m_X-e-abierto.

(3) La unión de cualquier familia de conjuntos m_X-a-abierto es un conjunto m_X-a-abierto.

Demostración:

(1) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos m_X-e^*-abierto, entonces para cada $\alpha \in J$, $U_\alpha \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(U_\alpha)))$, por lo que:

$$\begin{aligned} U_\alpha &\subset \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \\ m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(U_\alpha))) &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))) \\ U_\alpha &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))) \\ \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))) \end{aligned}$$

y se tiene que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ es m_X-e^*-abierto.

(2) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de conjuntos m_X-e-abierto, entonces para cada $\alpha \in J$, $U_\alpha \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(U_\alpha)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(U_\alpha))$, por lo que:

$$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in J} (m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(U_\alpha)) \cup (m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(U_\alpha))))$$

Pero,

$$\bigcup_{\alpha \in J} m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(U_\alpha)) \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))$$

y

$$\bigcup_{\alpha \in J} m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(U_\alpha)) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{\alpha \in J} (m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(U_\alpha)) \cup (m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(U_\alpha)))) \subset$$

$$m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))$$

En consecuencia

$$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha)) \cup m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha))$$

y se tiene que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ es m_X-e-abierto.

(3) Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una familia de conjuntos m_X-a-abierto, entonces para cada $\alpha \in J$, $U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(U_\alpha)))$, por lo que:

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in J}(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(U_\alpha))))$$

Pero,

$$\bigcup_{\alpha\in J}(m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(U_\alpha)))) \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$$

En consecuencia

$$\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)))$$

y se tiene que $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha$ es m_X-a-abierto. □

Teorema 3.23. *Para una familia de subconjuntos de X las siguientes propiedades se satisfacen:*

(1) La intersección de familia de conjuntos m_X-e*-cerrado es un conjunto m_X-e*-cerrado.

(2) La intersección de familia de conjuntos m_X-e-cerrado es un conjunto m_X-e-cerrado.

(3) La intersección de familia de conjuntos m_X-e-cerrado es un conjunto m_X-e-cerrado.

Demostración: Es consecuencia directa de la Definición 3.16, el Teorema 3.22 y las leyes de De Morgan. □

La familia de todos los conjuntos m_X-e*-abierto, m_X-e-abierto, m_X-a-abierto de X es denotado por m_X-e$^*O(X)$, m_X-$eO(X)$, m_X-$aO(X)$ respectivamente. La familia de todos los conjuntos m_X-e*-abierto, m_X-e-abierto, m_X-a-abierto de X que contiene un punto $x \in X$ es denotado por m_X-$e^*O(X,x)$, m_X-$eO(X,x)$, m_X-$aO(X,x)$) respectivamente.

A continuación se define la noción de m_X-clausura asociada a los conjuntos m_X-e^*-cerrado, m_X-e-cerrado, m_X-a-cerrado respectivamente.

Definición 3.18. Sea X un m-espacio, A un subconjunto de X, se define:

(1) La m_X-e^*-clausura de A, denotada por m_X-e^*-$cl(A)$ como la intersección de todos los conjuntos m_X-e^*-cerrado que contiene a A.

(2) La m_X-e-clausura de A, denotada por m_X-e-$cl(A)$ como la intersección de todos los conjuntos m_X-e-cerrado que contiene a A.

(3) La m_X-a-clausura de A, denotada por m_X-a-$cl(A)$ como la intersección de todos los conjuntos m_X-a-cerrado que contiene a A.

Teorema 3.24. *Las siguiente propiedades para un subconjunto A de un m-espacio X se cumplen:*

(1) La m_X-e^*-clausura de A, es el m_X-e^*-cerrado mas pequeño que contiene a A.

(2) La m_X-e-clausura de A, es el m_X-e-cerrado mas pequeño que contiene a A.

(3) La m_X-a-clausura de A, es el m_X-a-cerrado mas pequeño que contiene a A.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 3.18 y el Teorema 3.23. □

Definición 3.19. Sea X un m-espacio, A un subconjunto de X, se define:

(1) El m_X-e^*-interior de A, denotada por m_X-e^*-$int(A)$ como la unión de todos los conjuntos m_X-e^*-abierto contenido en A.

(2) El m_X-e-interior de A, denotada por m_X-e-$int(A)$ como la unión de todos los conjuntos m_X-e-abierto contenido a A.

(3) El m_X-a-interior de A, denotada por m_X-a-$int(A)$ como la unión de todos los conjuntos m_X-a-abierto contenido a A.

Teorema 3.25. *Las siguiente propiedades para un subconjunto A de un espacio X se cumplen:*

(1) El m_X-e*-interior de A, es el m_X-e*-abierto mas grande contenido en A.

(2) El m_X-e-interior de A, es el m_X-e-abierto mas grande contenido en A.

(3) El m_X-a-interior de A, es el m_X-a-abierto mas grande contenido en A.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 3.19 y el Teorema 3.22. $\square$

Lema 3.3. *Las siguientes propiedades para un subconjunto P de un m-espacio X se cumplen:*

(1) $X \setminus m_X$-e*-$cl(P) = m_X$-e*-$int(X \setminus P)$.

(2) $X \setminus m_X$-e-$cl(P) = m_X$-e-$int(X \setminus P)$.

(3) $X \setminus m_X$-a-$cl(P) = m_X$-a-$int(X \setminus P)$.

Demostración:

(1) Como $P \subset m_X$-e*-$cl(P)$, tomando complemento $X \setminus m_X$-e*-$cl(P) \subset X \setminus P$. Como $X \setminus m_X$-e*-$cl(P)$ es un conjunto m_X-e*-abierto contenido en $X \setminus P$ se tiene que:

$$X \setminus m_X\text{-e}^*\text{-}cl(P) \subset m_X\text{-e}^*\text{-}int(X \setminus P) \subset X \setminus P$$

Tomando complemento

$$P \subset X \setminus m_X\text{-e}^*\text{-}int(X \setminus P) \subset m_X\text{-e}^*\text{-}cl(P)$$

Como $X \setminus m_X$-e*-$int(X \setminus P)$ es un conjunto m_X-e*-cerrado que contiene a P entonces

$$m_X\text{-e}^*\text{-}cl(P) \subset X \setminus m_X\text{-e}^*\text{-}int(X \setminus P) \subset m_X\text{-e}^*\text{-}cl(P)$$

Como los extremos son iguales se tiene que

$$m_X\text{-}e^*\text{-}cl(P) = X \setminus m_X\text{-}e^*\text{-}int(X \setminus P)$$

Tomando complemento se concluye que

$$X \setminus m_X\text{-}e^*\text{-}cl(P) = m_X\text{-}e^*\text{-}int(X \setminus P)$$

(2) Como $P \subset m_X\text{-}e\text{-}cl(P)$, tomando complemento $X \setminus m_X\text{-}e\text{-}cl(P) \subset X \setminus P$. Como $X \setminus m_X\text{-}e\text{-}cl(P)$ es un conjunto m_X-e-abierto contenido en $X \setminus P$ se tiene que:

$$X \setminus m_X\text{-}e\text{-}cl(P) \subset m_X\text{-}e\text{-}int(X \setminus P) \subset X \setminus P$$

Tomando complemento

$$P \subset X \setminus m_X\text{-}e\text{-}int(X \setminus P) \subset m_X\text{-}e\text{-}cl(P)$$

Como $X \setminus m_X\text{-}e\text{-}int(X \setminus P)$ es un conjunto m_X-e-cerrado que contiene a P entonces

$$m_X\text{-}e\text{-}cl(P) \subset X \setminus m_X\text{-}e\text{-}int(X \setminus P) \subset m_X\text{-}e\text{-}cl(P)$$

Como los extremos son iguales se tiene que

$$m_X\text{-}e\text{-}cl(P) = X \setminus m_X\text{-}e\text{-}int(X \setminus P)$$

Tomando complemento se concluye que

$$X \setminus m_X\text{-}e\text{-}cl(P) = m_X\text{-}e\text{-}int(X \setminus P)$$

(3) Como $P \subset m_X\text{-}a\text{-}cl(P)$, tomando complemento $X \setminus m_X\text{-}a\text{-}cl(P) \subset X \setminus P$. Como $X \setminus m_X\text{-}a\text{-}cl(P)$ es un conjunto m_X-a-abierto contenido en $X \setminus P$ se tiene que:

$$X \setminus m_X\text{-}a\text{-}cl(P) \subset m_X\text{-}a\text{-}int(X \setminus P) \subset X \setminus P$$

Tomando complemento

$$P \subset X \setminus m_X\text{-}a\text{-}int(X \setminus P) \subset m_X\text{-}a\text{-}cl(P)$$

Como $X \setminus m_X$-e-$int(X \setminus P)$ es un conjunto m_X-a-cerrado que contiene a P entonces

$$m_X\text{-}a\text{-}cl(P) \subset X \setminus m_X\text{-}a\text{-}int(X \setminus P) \subset m_X\text{-}a\text{-}cl(P)$$

Como los extremos son iguales se tiene que

$$m_X\text{-}a\text{-}cl(P) = X \setminus m_X\text{-}a\text{-}int(X \setminus P)$$

Tomando complemento se concluye que

$$X \setminus m_X\text{-}a\text{-}cl(P) = m_X\text{-}a\text{-}int(X \setminus P)$$

□

3.4 Funciones *Almost* contra-super-continuas entre m-espacios

En esta sección usando estructuras minimales se obtienen nuevas clases de funciones, que son generalizaciones de funciones *almost* contra-super-continua, contra R-map, (δ-semi,s)-continua, (δ-pre,s)-continua. Se estudian las relaciones existentes entre nuevas clases de funciones y se obtienen algunas propiedades. También se introducen nociones de compacidad asociadas a los conjuntos m_X-e^*-abierto, m_X-e-abierto y m_X-a-abierto. Se estudia el comportamiento de estos conjuntos bajo funciones (m_X,m_Y)-e^*-continua, (m_X,m_Y)-e-continua y (m_X,m_Y)-a-continua.

Definición 3.20. Una función $f : X \to Y$ entre m-espacios se dice que es:

(1) (m_X, m_Y)-contra R-map si $f^{-1}(N)$ es m_X-regular cerrado en X para todo conjunto m_Y-regular abierto en Y.

(2) (m_X, m_Y)-*almost*-contra-super-continua si $f^{-1}(N)$ es m_X-δ-cerrado en X para todo conjunto m_Y-regular abierto en Y.

(3) (m_X, m_Y)-(δ-semi,s)-continua si $f^{-1}(N)$ es m_X-δ-semi-cerrado en X para todo conjunto m_Y-regular abierto en Y.

(4) (m_X, m_Y)-(δ-pre,s)-continua si $f^{-1}(N)$ es m_X-δ-precerrado en X para todo conjunto m_Y-regular abierto en Y.

El siguiente teorema muestra la relación existente entre las formas débiles de continuidad antes definidas.

Teorema 3.26. *Sea $f : X \to Y$ una función entre m-espacios. Se tienen las siguientes propiedades*

(1) Si f es (m_X, m_Y)-contra R-map entonces f es (m_X, m_Y)-almost-contra-super-continua.

(2) Si f es (m_X, m_Y)-almost-contra-super-continua entonces f es (m_X, m_Y)-(δ-semi,s)-continua.

(3) Si f es (m_X, m_Y)-almost-contra-super-continua entonces f es (m_X, m_Y)-(δ-pre,s)-continua.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 3.20, el Teorema 3.18 y las leyes de De Morgan. □

Se tiene el siguiente diagrama para una función $f : X \to Y$ entre m-espacios

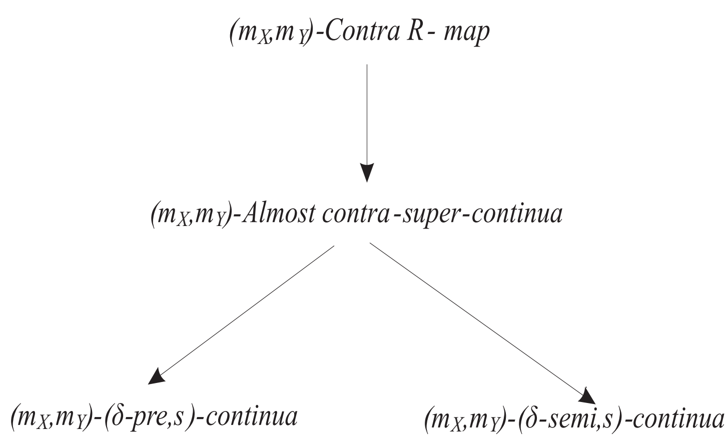

Figura 3.4: Diagrama 10

Los Ejemplos 2.1, 2.2, 2.3 dados en el capítulo 2, si se toma $\tau = m_X$, muestran que los recíprocos del teorema anterior en general no son ciertos.

Lema 3.4. *Sea $f : X \to Y$ una función entre m-espacios. Si f es (m_X, m_Y)-almost-contra-super-continua, entonces para cada $x \in X$ y para $V \in m_Y\text{-}SO(Y, f(x))$, existe un conjunto m_X-δ-abierto U en X que contiene a x tal que $f(U) \subset m_Y\text{-}cl(V)$.*

Demostración: Sea $x \in X$ y V un m_X-semi-abierto tal que $f(x) \in V$. Observe que $m_Y\text{-}cl(V) = m_Y\text{-}cl(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(V)))$, de aquí que $m_Y\text{-}cl(V)$ es un m_Y-regular cerrado en Y que contiene a $f(x)$ y por lo tanto $Y \setminus m_X\text{-}cl(V)$ es un m_Y-regular abierto en Y. Dado que f es (m_X, m_Y)-*almost* contra-super-continua se tiene que $f^{-1}(Y \setminus m_Y\text{-}cl(V))$ es m_X-δ-cerrado en X. Pero

$$f^{-1}(Y \setminus m_Y\text{-}cl(V)) = X \setminus f^{-1}(m_Y\text{-}cl(V))$$

Así $f^{-1}(m_Y\text{-}cl(V))$ es m_X-δ-abierto en X y $x \in f^{-1}(m_Y\text{-}cl(V))$, esto es

$$f^{-1}(m_Y\text{-}cl(V)) = m_X\text{-}\delta\text{-}int(f^{-1}(m_Y\text{-}cl(V)))$$

Si se toma $U = m_X\text{-}\delta\text{-}int(f^{-1}(m_Y\text{-}cl(V)))$ entonces en virtud del Teorema 3.16, U es un m_X-δ-abierto en X, $x \in U$ y $f^{-1}(m_Y\text{-}cl(V)) = U$, de donde se concluye que

$$m_Y\text{-}cl(V) \supset f(f^{-1}(m_Y\text{-}cl(V))) = f(U)$$

$\square$

Definición 3.21. Una función $f : X \to Y$ entre m-espacios se dice que es:

(1) (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua si la imagen inversa de cada conjunto m_Y-regular abierto de Y es m_X-e*-cerrado en X.

(2) (m_X, m_Y)-(e,s)-continua si la imagen inversa de cada conjunto m_Y-regular abierto de Y es m_X-e-cerrado en X.

(3) (m_X, m_Y)-(a,s)-continua si la imagen inversa de cada conjunto m_Y-regular abierto de Y es m_X-a-cerrado en X.

Teorema 3.27. *Sea $f : X \to Y$ una función entre m-espacios. Se tienen las siguientes propiedades*

(1) *Si f es (m_X, m_Y)-almost-contra-super-continua entonces f es (m_X, m_Y)-(a,s)-continua.*

(2) *Si f es (m_X, m_Y)-(a,s)-continua entonces f es (m_X, m_Y)-(δ-semi,s)-continua.*

(3) *Si f es (m_X, m_Y)-(a,s)-continua entonces f es (m_X, m_Y)-(δ-pre,s)-continua.*

(4) *Si f es (m_X, m_Y)-(δ-semi,s)-continua entonces f es (m_X, m_Y)-(e,s)-continua.*

(5) *Si f es (m_X, m_Y)-(δ-pre,s)-continua entonces f es (m_X, m_Y)-(e,s)-continua.*

(6) *Si f es (m_X, m_Y)-(e,s)-continua entonces f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua.*

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 3.21, el Teorema 3.20, el Teorema 3.21 y las leyes de De Morgan. □

Se tiene el siguiente diagrama para una función $f : X \to Y$ entre m-espacios

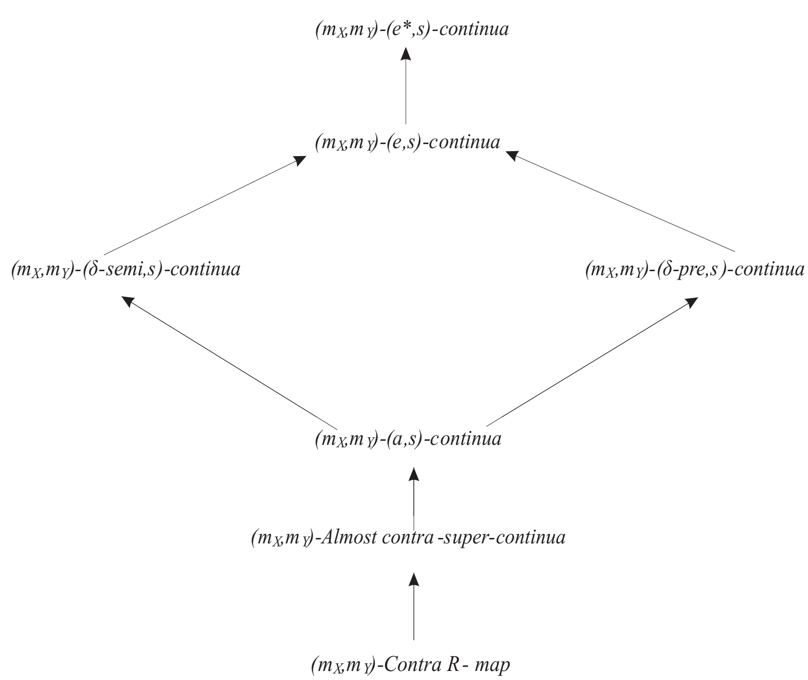

Figura 3.5: Diagrama 11

Los Ejemplos 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 dados en el Capítulo 2, si se toma $\tau = m_X$, muestran que los recíprocos del teorema anterior en general no son ciertos.

Definición 3.22. Un m-espacio (X, m_X) es llamado m_X-e^*-$T_{1/2}$ si todo conjunto m_X-e^*-cerrado es m_X-δ-cerrado.

Teorema 3.28. *Sean X, Y m-espacios. $f : X \to Y$ una función, X m_X-e^*-$T_{1/2}$. Las siguientes son equivalentes:*

(1) f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua.

(2) f es (m_X, m_Y)-(e,s)-continua.

(3) f es (m_X, m_Y)-(δ-semi,s)-continua.

(4) f es (m_X, m_Y)-(δ-pre,s)-continua.

(5) f es (m_X, m_Y)-(a,s)-continua.

(6) f es (m_X, m_Y)-almost-contra-super-continua.

Demostración:

(6) $\Rightarrow$ (5) Suponga que f es (m_X, m_Y)-*almost*-contra-super-continua. Sea W un conjunto m_Y-regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es m_X-δ-cerrado, es decir,

$$f^{-1}(W) = m_X\text{-}\delta\text{-}cl(f^{-1}(W))$$

Como

$$\begin{aligned} m_X\text{-}cl(m_X\text{-}int(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(f^{-1}(W))) &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(f^{-1}(W))) \\ &\subset m_X\text{-}\delta\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}cl(f^{-1}(W))) \\ &= m_X\text{-}\delta\text{-}cl(f^{-1}(W)) \\ &= f^{-1}(W) \end{aligned}$$

Esto dice que $f^{-1}(W)$ es m_X-a-cerrado. Por lo tanto f es (m_X, m_Y)-(a,s)-continua.

(5) $\Rightarrow$ (3) Suponga que f es (m_X, m_Y)-(a,s)-continua. Sea W un conjunto m_Y-regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es m_X-a-cerrado. $X \setminus f^{-1}(W)$ es m_X-a-abierto. Como

$$\begin{aligned} X \setminus f^{-1}(W) &\subset m_X\text{-}int(m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus f^{-1}(W))) \\ &\subset m_X\text{-}cl(m_X\text{-}\delta\text{-}int(X \setminus f^{-1}(W)) \end{aligned}$$

Esto dice que $X \setminus f^{-1}(W)$ es m_X-δ-semi-abierto. $f^{-1}(W)$ es m_X-δ-semicerrado. Por lo tanto f es (m_X, m_Y)-(δ-semi,s)-continua.

(3) $\Rightarrow$ (2) Suponga que f es (m_X, m_Y)-(δ-semi,s)-continua. Sea W un conjunto m_Y-regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es m_X-δ-semi-cerrado, como todo conjunto m_X-δ-semi-cerrado es m_X-e-cerrado entonces $f^{-1}(W)$ es m_X-e-cerrado. Por lo tanto f es (m_X, m_Y)-(e,s)-continua.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponga que f es (m_X, m_Y)-(e,s)-continua. Sea W un conjunto m_Y-regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es m_X-e-cerrado, como todo conjunto m_X-e-cerrado es m_X-e^*-cerrado, entonces $f^{-1}(W)$ es m_X-e^*-cerrado. Por lo tanto f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua.

(1) $\Rightarrow$ (4) Suponga que f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua. Sea W un conjunto m_Y-regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es m_X-e^*-cerrado, como X es m_X-e^*-$T_{1/2}$, $f^{-1}(W)$ es m_X-δ-cerrado. Como todo conjunto m_X-δ-cerrado es m_X-δ-precerrado entonces $f^{-1}(W)$ es m_X-δ-precerrado. Por lo tanto f es (m_X, m_Y)-(δ-pre,s)-continua.

(4) $\Rightarrow$ (6) Suponga que f es (m_X, m_Y)-(δ-pre,s)-continua. Sea W un conjunto m_Y-regular abierto en Y, por hipótesis $f^{-1}(W)$ es m_X-δ-precerrado, como todo conjunto m_X-δ-precerrado es m_X-e-cerrado y todo conjunto m_X-e-cerrado es m_X-e^*-cerrado, entonces $f^{-1}(W)$ es m_X-e^*-cerrado. Como X es m_X-e^*-$T_{1/2}$, $f^{-1}(W)$ es m_X-δ-cerrado. Por lo tanto f es (m_X, m_Y)-*almost*-contra-super-continua.$\square$

Definición 3.23. Una función $f : X \to Y$ entre m-espacios se dice que es:

(1) (m_X, m_Y)-e^*-continua si $f^{-1}(A)$ es m_X-e^*-abierto en X para todo conjunto m_Y-abierto A de Y.

(2) (m_X, m_Y)-*almost* e^*-continua si $f^{-1}(A)$ es m_X-e^*-abierto en X para todo conjunto m_Y-regular abierto A de Y.

(3) (m_X, m_Y)-*almost* e-continua si $f^{-1}(A)$ es m_X-e-abierto en X para todo conjunto m_Y-regular abierto A de Y.

(4) (m_X, m_Y)-*almost* a-continua si $f^{-1}(A)$ es m_X-a-abierto en X para todo conjunto m_Y-regular abierto A de Y.

Teorema 3.29. *Sea $f : X \to Y$ una función entre m-espacios. Se tienen las siguientes propiedades:*

(1) Si f es (m_X, m_Y)-continua entonces f es (m_X, m_Y)-e^*-continua.

(2) Si f es (m_X, m_Y)-e^*-continua entonces f es (m_X, m_Y)-almost e^*-continua.

(3) Si f es (m_X, m_Y)-continua entonces f es (m_X, m_Y)-almost e-continua.

(4) Si f es (m_X, m_Y)-almost a-continua entonces f es (m_X, m_Y)-almost e-continua.

(5) Si f es (m_X, m_Y)-almost e-continua entonces f es (m_X, m_Y)-almost e^*-continua.

Demostración: Es consecuencia inmediata de la Definición 3.23, el Teorema 3.6 y el Teorema 3.20. $\square$

Se tiene el siguiente diagrama para una función $f : X \to Y$ entre m-espacios

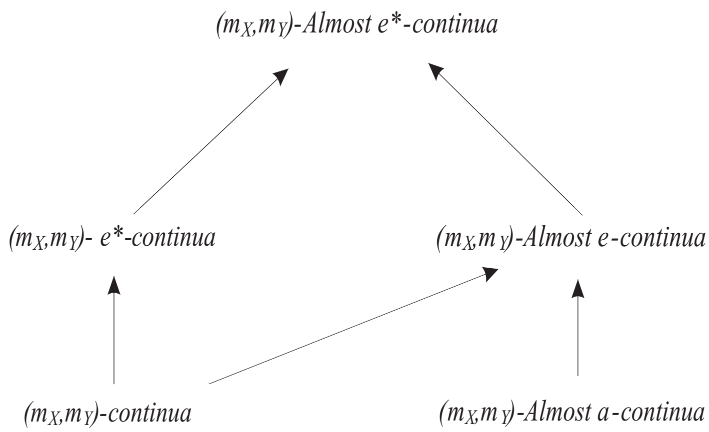

Figura 3.6: Diagrama 12

Los Ejemplos 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 dados en el Capítulo 2, si se toma $\tau = m_X$, muestran que los recíprocos del teorema anterior en general no son ciertos.

Definición 3.24. Un m-espacio (X, m_X) se dice que es extremadamente disconexo si la m_X-clausura de todo conjunto m_X-abierto de X es m_X-abierto en X.

Ejemplo 3.5. Considere $X = \{a, b, c, d\}$ y $m_X = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}\}$. El m-espacio (X, m_X) es extremadamente disconexo.

Teorema 3.30. *Sea (Y, m_Y) extremadamente disconexo. Las siguientes son equivalentes para una función $f : (X, m_X) \to (Y, m_Y)$:*

(1) f es (m_X, m_Y)-$(e^*$,$s)$-continua.

(2) f es (m_X, m_Y)-almost e^*-continua.

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea $U \in m_Y$-$RO(Y)$. Como Y es extremadamente disconexo entonces U es m_Y-abierto y m_Y-cerrado. En efecto, sea U un conjunto m_Y-regular abierto, entonces $U = m_Y$-$int(m_Y$-$cl(U))$. Pero la m_Y-clausura de U es un m_Y-abierto, resulta que la m_Y-clausura es m_Y-abierto y m_Y-cerrado. Luego $U = m_Y$-$cl(U)$

lo que prueba que U es m_Y-abierto y m_Y-cerrado. Como U es m_Y-regular cerrado, entonces $f^{-1}(U)$ es m_X-e^*-abierto. Por lo tanto, f es (m_X, m_Y)-*almost* e^*-continua.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $W \in m_Y$-$RC(Y)$. Como Y es extremadamente disconexo, W es m_Y-regular abierto. Como f es (m_X, m_Y)-*almost* e^*-continua entonces $f^{-1}(W)$ es m_X-e^*-abierto. Por lo tanto f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua. $\square$

Teorema 3.31. *Sea Y un m-espacio regular y $f : X \to Y$ una función. Si f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua entonces f es (m_X, m_Y)-e^*-continua.*

Demostración: Sea $x \in X$ y A un conjunto m_Y-abierto en Y que contiene a $f(x)$. Como Y es regular, existe un conjunto m_Y-abierto G de Y que contiene a $f(x)$ tal que $f(x) \in m_Y$-$cl(G) \subset A$. Como f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua, existe $U \in m_X$-$e^*O(X, x)$ tal que $f(U) \subset m_Y$-$cl(G)$. Como $f(U) \subset m_Y$-$cl(G) \subset A$ se tiene que f es (m_X, m_Y)-e^*-continua. $\square$

Teorema 3.32. *Sea $f : X \to Y$ una función entre m-espacios. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(a) f *es* (m_X, m_Y)-*(e^*,s)-continua.*

(b) La imagen inversa de un conjunto m_Y-regular cerrado de Y es m_X-e^*-abierto.

(c) $f^{-1}(m_X\text{-}e^*\text{-}cl(U)) \subset m_Y\text{-}r\text{-}ker(f(U))$ *para todo* $U \subset X$.

(d) $m_X\text{-}e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}r\text{-}ker(A))$ *para todo* $A \subset Y$.

(e) Para cada $x \in X$ y cada $A \in m_Y$-$SO(Y, f(x))$, existe un conjunto m_X-e^*-abierto U en X, $x \in U$ tal que $f(U) \subset m_Y$-$cl(A)$.

(f) $f(m_X\text{-}e^*\text{-}cl(P)) \subset m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(f(P))$ *para todo* $P \subset X$.

(g) $m_X\text{-}e^*\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset Y$.

(h) m_X-e^*-$cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-$\theta$-$s$-$cl(A))$ *para todo subconjunto* m_Y*-abierto* A *de* Y*.*

(i) m_X-e^*-$cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-$s$-$cl(A))$ *para todo subconjunto* m_X*-abierto* A *de* Y*.*

(j) m_X-e^*-$cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-$int(m_X$-$cl(A)))$ *para todo subconjunto* m_Y*-abierto* A *de* Y*.*

(k) *La imagen inversa de un conjunto* m_Y*-*θ*-semi-abierto de* Y *es* m_X*-*e^**-abierto.*

(l) $f^{-1}(A) \subset m_X$-e^*-$int(f^{-1}(m_Y$-$cl(A)))$ *para todo* $A \in m_Y$-$SO(Y)$*.*

(m) *La imagen inversa de un conjunto* m_Y*-*θ*-semi-cerrado de* Y *es* m_X*-*e^**-cerrado.*

(n) $f^{-1}(m_Y$-$int(m_Y$-$cl(A)))$ *es* m_X*-*e^**-cerrado para todo subconjunto* m_Y*-abierto* A *de* Y*.*

(o) $f^{-1}(m_Y$-$cl(m_Y$-$int(F)))$ *es* m_X*-*e^**-abierto para todo subconjunto* m_Y*-cerrado* F *de* Y*.*

(p) $f^{-1}(m_Y$-$cl(U))$ *es* m_X*-*e^**-abierto para todo* $U \in m_Y$-$\beta O(Y)$*.*

(r) $f^{-1}(m_Y$-$cl(U))$ *es* m_X*-*e^**-abierto para todo* $U \in m_Y$-$SO(Y)$*.*

(s) $f^{-1}(m_Y$-$int(m_Y$-$cl(U)))$ *es* m_X*-*e^**-cerrado para todo* $U \in m_Y$-$PO(Y)$*.*

Demostración:

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea W un conjunto m_Y-regular cerrado en Y, así $Y \setminus W$ es conjunto m_Y-regular abierto en Y. Como f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua entonces $f^{-1}(Y \setminus W)$ es m_X-e^*-cerrado. Pero

$$f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$$

que es m_X-e^*-cerrado y así $f^{-1}(W)$ es m_X-e^*-abierto. Por lo tanto, la imagen inversa de un conjunto m_X-regular cerrado de Y es m_X-e^*-abierto.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sea W un conjunto m_Y-regular abierto en Y, así $Y \setminus W$ es m_Y-regular cerrado en Y. Usando la hipótesis, la imagen inversa de un conjunto m_Y-regular cerrado de Y es m_X-e^*-abierto entonces $f^{-1}(Y \setminus W)$ es m_X-e^*-abierto. Pero

$$f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$$

Así $f^{-1}(W)$ es m_X-e^*-cerrado. Por lo tanto f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $U \subset X$, y suponga que $y \notin m_Y$-r-$ker(f(U))$. Entonces existe un conjunto m_Y-regular cerrado F, $y \in F$ tal que $f(U) \cap F = \emptyset$. Así, se obtiene que $U \cap f^{-1}(F) = \emptyset$ y m_X-e^*-$cl(U) \cap f^{-1}(F) = \emptyset$. Por lo tanto, $f(m_X$-e^*-$cl(U)) \cap F = \emptyset$ y $y \notin f(m_X$-e^*-$cl(U))$ y se concluye que $f^{-1}(m_X$-e^*-$cl(U)) \subset m_Y$-r-$ker(f(U))$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sea $A \subset Y$. Por (c), $f(m_X$-e^*-$cl(f^{-1}(A))) \subset m_Y$-$r$-$ker(A)$. Así, m_X-e^*-$cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-$r$-$ker(A))$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Sea $A \subset m_Y$-$RO(Y)$. Por hipótesis m_X-e^*-$cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-$r$-$ker(A)) = f^{-1}(A)$, como $f^{-1}(A) \subset m_X$-e^*-$cl(f^{-1}(A))$ se obtiene que m_X-e^*-$cl(f^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$. Por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es m_X-e^*-cerrado en X.

$(e) \Rightarrow (f)$ Sea $P \subset X$ y $x \in m_X$-e^*-$cl(P)$ y $G \in m_Y$-$SO(Y, f(x))$. Por (e) existe $U \in m_X$-$e^*O(X, x)$ tal que $f(U) \subset m_Y$-$cl(G)$. Como $x \in m_X$-e^*-$cl(P)$, $U \cap P \neq \emptyset$ y $\emptyset \neq f(U) \cap f(P) \subset m_Y$-$cl(G) \cap f(P)$. Así $f(x) \in m_Y$-θ-s-$cl(f(P))$ y por lo tanto $f(m_X$-e^*-$cl(P)) \subset m_Y$-θ-s-$cl(f(P))$.

$(f) \Rightarrow (g)$ Sea $R \subset Y$. Se tiene que $f(m_X$-e^*-$cl(f^{-1}(R))) \subset m_Y$-$\theta$-$s$-$cl(f(f^{-1}(R))) \subset m_Y$-$\theta$-$s$-$cl(R)$ y m_X-e^*-$cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y$-$\theta$-$s$-$cl(R))$.

$(g) \Rightarrow (e)$ Sea $A \in m_Y$-$SO(Y, f(x))$. Como m_Y-$cl(A) \cap (Y \setminus m_Y$-$cl(A)) = \emptyset$, se tiene que $f(x) \notin m_Y$-θ-s-$cl(Y \setminus m_Y$-$cl(A))$ y $x \notin f^{-1}(m_Y$-θ-s-$cl(Y \setminus m_Y$-$cl(A)))$. Por (g) $x \notin m_X$-e^*-$cl(f^{-1}(Y \setminus m_Y$-$cl(A)))$ y por lo tanto existe $U \in m_X$-$e^*O(X, x)$ tal que $U \cap f^{-1}(Y \setminus m_Y$-$cl(A)) = \emptyset$ y $f(U) \cap (Y \setminus m_Y$-$cl(A)) = \emptyset$. De esto se deduce que $f(U) \subset m_Y$-$cl(A)$.

$(g) \Rightarrow (h)$ Como m_X-e^*-$cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y$-$\theta$-$s$-$cl(R))$ para todo $R \subset Y$, en general se cumple para todo subconjunto m_Y-abierto A de Y. Por lo tanto,

$$m_X\text{-}e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(A)).$$

$(h) \Rightarrow (i)$ Como m_X-θ-s-$cl(A) = m_X$-s-$cl(A)$ para un conjunto m_X-abierto A, entonces

$$m_X\text{-}e^*\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_X\text{-}s\text{-}cl(A)).$$

$(i) \Rightarrow (j)$ Como m_Y-s-$cl(A) = m_Y$-$int(m_Y$-$cl(A))$ para todo conjunto m_Y-abierto A de Y, entonces m_X-e^*-$cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-$int(m_Y$-$cl(A)))$.

$(j) \Rightarrow (a)$ Sea $A \in m_Y$-$RO(Y)$. Por (j) m_X-e^*-$cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-$int(m_Y$-$cl(A))) = f^{-1}(A)$. Por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es m_X-e^*-cerrado y por lo tanto f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua.

$(b) \Rightarrow (k)$ Como cualquier conjunto m_X-θ-semi-abierto es una unión de conjuntos m_X-regular cerrado entonces esta se mantiene.

$(k) \Rightarrow (e)$ Sea $x \in X$ y $A \in m_Y$-$SO(Y, f(x))$. Como m_Y-$cl(A)$ es m_Y-θ-semi-abierto en Y, entonces existe un conjunto m_X-e^*-abierto U en X, tal que $x \in U \subset f^{-1}(m_Y$-$cl(A))$. Por lo tanto $f(U) \subset m_Y$-$cl(A)$.

$(e) \Rightarrow (l)$ Sea $A \in m_Y$-$SO(Y)$ y $x \in f^{-1}(A)$. Se tiene que $f(x) \in A$, entonces existe un conjunto m_X-e^*-abierto U en X, que contiene a x tal que $f(U) \subset m_Y$-$cl(A)$. Así, se tiene que $x \in U \subset f^{-1}(A)$ y por lo tanto $x \in m_X$-$e^*int(f^{-1}(A))$. Así

$$f^{-1}(A) \subset m_X\text{-}e^*\text{-}int(f^{-1}(A)).$$

$(l) \Rightarrow (b)$ Sea F cualquier conjunto m_Y-regular cerrado de Y. Como $F \in m_Y$-$SO(Y)$, entonces $f^{-1}(F) \subset m_X$-e^*-$int(f^{-1}(F))$. Esto demuestra que $f^{-1}(F)$ es m_X-e^*-abierto en X.

$(k) \Rightarrow (m)$ Sea W un conjunto m_Y-θ-semi-cerrado en Y. $Y \setminus W$ es m_Y-θ-semi-abierto. Por hipótesis $f^{-1}(Y \setminus W)$ es m_X-e^*-abierto. Pero $f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$ que es m_X-e^*-abierto. Por lo tanto, $f^{-1}(W)$ es m_X-e^*-cerrado.

$(m) \Rightarrow (k)$ Sea W un conjunto m_Y-θ-semi-abierto en Y. $Y \setminus W$ es m_Y-θ-semi-cerrado. Por hipótesis $f^{-1}(Y \setminus W)$ es m_X-e^*-cerrado. Pero $f^{-1}(Y \setminus W) = X \setminus f^{-1}(W)$ que es m_X-e^*-cerrado. Por lo tanto, $f^{-1}(W)$ es m_X-e^*-abierto.

$(a) \Rightarrow (n)$ Sea A un subconjunto m_Y-abierto de Y. Como m_Y-$int(m_Y$-$cl(A))$ es m_Y-regular abierto, se tiene que $f^{-1}(m_Y$-$int(m_Y$-$cl((A)))$ es m_X-e^*-cerrado.

$(n) \Rightarrow (a)$ Sea A un conjunto m_Y-regular abierto de Y. Por hipótesis, $f^{-1}(A)$ es m_X-e^*-cerrado en X. Pero $f^{-1}(A) = f^{-1}(m_Y$-$int(m_Y$-$cl((A)))$. Por lo tanto $f^{-1}(m_Y$-$int(m_Y$-$cl((A)))$ es m_X-e^*-cerrado.

$(b) \Rightarrow (o)$ Sea F un conjunto m_Y-regular cerrado en Y. Por hipótesis $f^{-1}(F)$ es m_X-e^*-abierto. Como $f^{-1}(F) = f^{-1}(m_Y$-$cl(m_Y$-$int((F)))$ entonces $f^{-1}(m_Y$-$cl(m_Y$-$int((F)))$ es m_X-e^*-abierto.

$(o) \Rightarrow (b)$ Sea F conjunto m_Y-regular cerrado en Y. Por hipótesis $f^{-1}(m_Y$-$cl(m_Y$-$int((F)))$ es m_X-e^*-abierto. Pero $f^{-1}(F) = f^{-1}(m_Y$-$cl(m_Y$-$int((F)))$ que es m_X-e^*-abierto. Por lo tanto, $f^{-1}(F)$ es m_X-e^*-abierto.

$(b) \Rightarrow (p)$ Sea $U \in m_Y$-$\beta O(Y)$. Siempre ocurre que m_Y-$int(m_Y$-$cl(U)) \subset m_Y$-$cl(U)$, por lo que

$$m_Y\text{-}cl(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U))) \subset m_Y\text{-}cl(U)$$

Por otro lado, como $U \in m_Y$-$\beta O(Y)$ entonces $U \subset m_Y$-$cl(m_Y$-$int(m_Y$-$cl(U)))$, por lo que

$$m_Y\text{-}cl(U) \subset m_Y\text{-}cl(m_Y\text{-}cl(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U)))) = m_Y\text{-}cl(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U)))$$

Así m_Y-$cl(U) = m_Y$-$cl(m_Y$-$int(m_Y$-$cl(U)))$, lo que dice que m_Y-$cl(U)$ es m_X-regular cerrado y por lo tanto $f^{-1}(m_Y$-$cl(U))$ es m_X-e^*-abierto.

$(p) \Rightarrow (r)$ Como m_Y-$SO(Y) \subset m_Y$-$\beta O(Y)$ entonces $f^{-1}(m_Y$-$cl(U))$ es m_X-e^*-abierto.

$(r) \Rightarrow (s)$ Sea $U \in m_Y$-$PO(Y)$. Como $Y \setminus m_Y$-$int(m_Y$-$cl(U))$ es m_Y-regular cerrado y por lo tanto es m_Y-semi-abierto, Se tiene que:

$$X \setminus f^{-1}(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U))) = f^{-1}(Y \setminus m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U))) =$$

$$f^{-1}(m_Y\text{-}cl(Y \setminus m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U)))) \in m_X\text{-}e^*O(X)$$

Así $f^{-1}(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U)))$ es m_X-e^*-cerrado.

$(s) \Rightarrow (a)$ Sea $U \in m_Y\text{-}RO(Y)$. Entonces $U \in m_Y\text{-}PO(Y)$ y por lo tanto $f^{-1}(U) = f^{-1}(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U)))$ es m_X-e^*-cerrado en X. □

Teorema 3.33. *Sea $f : X \to Y$ una función entre m-espacios. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(a) f *es* (m_X, m_Y)*-(e,s)-continua.*

(b) La imagen inversa de un conjunto m_Y*-regular cerrado de* Y *es* m_X*-e-abierto.*

(c) $f^{-1}(m_X\text{-}e\text{-}cl(U)) \subset m_Y\text{-}r\text{-}ker(f(U))$ *para todo* $U \subset X$.

(d) $m_X\text{-}e\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}r\text{-}ker(A))$ *para todo* $A \subset Y$.

(e) Para cada $x \in X$ *y cada* $A \in m_Y\text{-}SO(Y, f(x))$*, existe un conjunto* m_X*-e-abierto* U *en* X*,* $x \in U$ *tal que* $f(U) \subset m_Y\text{-}cl(A)$.

(f) $f(m_X\text{-}e\text{-}cl(P)) \subset m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(f(P))$ *para todo* $P \subset X$.

(g) $m_X\text{-}e\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset Y$.

(h) $m_X\text{-}e\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(A))$ *para todo subconjunto* m_Y*-abierto* A *de* Y.

(i) $m_X\text{-}e\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}s\text{-}cl(A))$ *para todo subconjunto* m_X*-abierto* A *de* Y.

(j) $m_X\text{-}e\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}int(m_X\text{-}cl(A)))$ *para todo subconjunto* m_Y*-abierto* A *de* Y.

(k) La imagen inversa de un conjunto m_Y*-θ-semi-abierto de* Y *es* m_X*-e-abierto.*

(l) $f^{-1}(A) \subset m_X\text{-}e\text{-}int(f^{-1}(m_Y\text{-}cl(A)))$ *para todo* $A \in m_Y\text{-}SO(Y)$.

(m) *La imagen inversa de un conjunto m_Y-θ-semi-cerrado de Y es m_X-e-cerrado.*

(n) $f^{-1}(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(A)))$ *es m_X-e-cerrado para todo subconjunto m_Y-abierto A de Y.*

(o) $f^{-1}(m_Y\text{-}cl(m_Y\text{-}int(F)))$ *es m_X-e-abierto para todo subconjunto m_Y-cerrado F de Y.*

(p) $f^{-1}(m_Y\text{-}cl(U))$ *es m_X-e-abierto para todo $U \in m_Y\text{-}\beta O(Y)$.*

(r) $f^{-1}(m_Y\text{-}cl(U))$ *es m_X-e-abierto para todo $U \in m_Y\text{-}SO(Y)$.*

(s) $f^{-1}(m_Y\text{-}int(m_Y\text{-}cl(U)))$ *es m_X-e-cerrado para todo $U \in m_Y\text{-}PO(Y)$.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.32. □

Teorema 3.34. *Sea $f : X \to Y$ una función entre m-espacios. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(a) *f es (m_X, m_Y)-(a,s)-continua.*

(b) *La imagen inversa de un conjunto m_Y-regular cerrado de Y es m_X-a-abierto.*

(c) $f^{-1}(m_X\text{-}a\text{-}cl(U)) \subset m_Y\text{-}r\text{-}ker(f(U))$ *para todo $U \subset X$.*

(d) $m_X\text{-}a\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}r\text{-}ker(A))$ *para todo $A \subset Y$.*

(e) *Para cada $x \in X$ y cada $A \in m_Y\text{-}SO(Y, f(x))$, existe un conjunto m_X-a-abierto U en X, $x \in U$ tal que $f(U) \subset m_Y\text{-}cl(A)$.*

(f) $f(m_X\text{-}a\text{-}cl(P)) \subset m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(f(P))$ *para todo $P \subset X$.*

(g) $m_X\text{-}a\text{-}cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo $R \subset Y$.*

(h) $m_X\text{-}a\text{-}cl(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(A))$ *para todo subconjunto m_Y-abierto A de Y.*

(i) m_X-*a*-*cl*$(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-*s*-*cl*$(A))$ *para todo subconjunto* m_X-*abierto* A *de* Y.

(j) m_X-*a*-*cl*$(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(m_Y$-*int*$(m_X$-*cl*$(A)))$ *para todo subconjunto* m_Y-*abierto* A *de* Y.

(k) La imagen inversa de un conjunto m_Y-θ-*semi-abierto de* Y *es* m_X-*a-abierto.*

(l) $f^{-1}(A) \subset m_X$-*a*-*int*$(f^{-1}(m_Y$-*cl*$(A)))$ *para todo* $A \in m_Y$-$SO(Y)$.

(m) La imagen inversa de un conjunto m_Y-θ-*semi-cerrado de* Y *es* m_X-*a-cerrado.*

(n) $f^{-1}(m_Y$-*int*$(m_Y$-*cl*$(A)))$ *es* m_X-*a-cerrado para todo subconjunto* m_Y-*abierto* A *de* Y.

(o) $f^{-1}(m_Y$-*cl*$(m_Y$-*int*$(F)))$ *es* m_X-*a-abierto para todo subconjunto* m_Y-*cerrado* F *de* Y.

(p) $f^{-1}(m_Y$-*cl*$(U))$ *es* m_X-*a-abierto para todo* $U \in m_Y$-$\beta O(Y)$.

(r) $f^{-1}(m_Y$-*cl*$(U))$ *es* m_X-*a-abierto para todo* $U \in m_Y$-$SO(Y)$.

(s) $f^{-1}(m_Y$-*int*$(m_Y$-*cl*$(U)))$ *es* m_X-*a-cerrado para todo* $U \in m_Y$-$PO(Y)$.

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.32. □

Corolario 3.1. *Sea* $f : X \to Y$ *una función entre m-espacios. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) f *es* (m_X, m_Y)-*(e*,s)-continua.*

(2) $f^{-1}(m_Y$-α-*cl*$(A))$ *es* m_X-e^*-*abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$\beta O(Y)$.

(3) $f^{-1}(m_Y$-*p*-*cl*$(A))$ *es* m_X-e^*-*abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$SO(Y)$.

(4) $f^{-1}(m_Y$-*s*-*cl*$(A))$ *es* m_X-e^*-*abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$PO(Y)$.

(5) m_X-e^*-*cl*$(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y$-$\theta$-*s*-*cl*$(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$SO(Y)$.

(6) m_X-e^*-$cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$PO(Y)$.

(7) m_X-e^*-$cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$\beta O(Y)$.

Demostración: Es consecuencia directa del Lema 3.1, Teorema 3.32, Teorema 3.12 y el Teorema 3.13. □

Corolario 3.2. *Sea* $f : X \to Y$ *una función entre m-espacios. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) f *es* (m_X, m_Y)*-(e,s)-continua.*

(2) $f^{-1}(m_Y\text{-}\alpha\text{-}cl(A))$ *es* m_X*-e-abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$\beta O(Y)$.

(3) $f^{-1}(m_Y\text{-}p\text{-}cl(A))$ *es* m_X*-e-abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$SO(Y)$.

(4) $f^{-1}(m_Y\text{-}s\text{-}cl(A))$ *es* m_X*-e-abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$PO(Y)$.

(5) m_X-e-$cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$SO(Y)$.

(6) m_X-e-$cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$PO(Y)$.

(7) m_X-e-$cl(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y\text{-}\theta\text{-}s\text{-}cl(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$\beta O(Y)$.

Demostración: Es consecuencia directa del Lema 3.1, Teorema 3.33, Teorema 3.12 y el Teorema 3.13. □

Corolario 3.3. *Sea* $f : X \to Y$ *una función entre m-espacios. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

(1) f *es* (m_X, m_Y)*-(a,s)-continua.*

(2) $f^{-1}(m_Y\text{-}\alpha\text{-}cl(A))$ *es* m_X*-a-abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$\beta O(Y)$.

(3) $f^{-1}(m_Y\text{-}p\text{-}cl(A))$ *es* m_X*-a-abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$SO(Y)$.

(4) $f^{-1}(m_Y\text{-}s\text{-}cl(A))$ *es* m_X*-a-abierto en* X *para todo* $A \in m_Y$-$PO(Y)$.

(5) m_X-a-cl$(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y$-$\theta$-s-cl$(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$SO(Y)$.

(6) m_X-a-cl$(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y$-$\theta$-s-cl$(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$PO(Y)$.

(7) m_X-a-cl$(f^{-1}(R)) \subset f^{-1}(m_Y$-$\theta$-s-cl$(R))$ *para todo* $R \subset m_Y$-$\beta O(Y)$.

Demostración: Es consecuencia directa del Lema 3.1, Teorema 3.34, Teorema 3.12 y el Teorema 3.13. □

Definición 3.25. Un subespacio A de un m-espacio X se dice m_X-e^*-compacto relativo a X si para todo cubrimiento $\{P_i : i \in I\}$ de A por subconjuntos m_X-e^*-abierto de X, existe un subconjunto I_0 finito de I tal que $A \subset \bigcup\{P_i : i \in I_0\}$. Un m-espacio X se dice m_X-e^*-compacto si para todo cubrimiento m_X-e^*-abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

Definición 3.26. Un subespacio A de un m-espacio X se dice m_X-e-compacto relativo a X si para todo cubrimiento $\{P_i : i \in I\}$ de A por subconjuntos m_X-e-abierto de X, existe un subconjunto I_0 finito de I tal que $A \subset \bigcup\{P_i : i \in I_0\}$. Un m-espacio X se dice m_X-e-compacto si para todo cubrimiento m_X-e-abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

Definición 3.27. Un subespacio A de un m-espacio X se dice m_X-a-compacto relativo a X si para todo cubrimiento $\{P_i : i \in I\}$ de A por subconjuntos m_X-a-abierto de X, existe un subconjunto I_0 finito de I tal que $A \subset \bigcup\{P_i : i \in I_0\}$. Un m-espacio X se dice m_X-a-compacto si para todo cubrimiento m_X-a-abierto de X tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 3.35. *Sea* (X,m_X) *un* m-*espacio,* A *subconjunto de* X. *Entonces*

(1) *Si* A *es* m_X-e^*-*compacto entonces* A *es* m_X-*compacto.*

(2) *Si* A *es* e^*-*compacto entonces* A *es e-compacto, si satisface la condición* (B) *de Maki.*

(3) *Si* A *es* m_X-*e-compacto entonces* A *es* m_X-*a-compacto.*

Demostración:

(1) Sea A un subconjunto de X m_X-e^*-compacto. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos m_X-abiertos de X. Como todo conjunto m_X-abierto es m_X-e^*-abierto, entonces $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos m_X-e^*-abierto de X. Como A es m_X-e^*-compacto, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ que cubre a A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Por lo tanto, A es m_X-compacto.

(2) Sea A un subconjunto de X m_X-e^*-compacto. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos m_X-e-abiertos de X. Como todo conjunto m_X-e-abierto es m_X-e^*-abierto, entonces $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos m_X-e^*-abierto de X. Como A es e^*-compacto, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ que cubre a A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Por lo tanto, A es m_X-e-compacto.

(3) Sea A un subconjunto de X m_X-e-compacto. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos m_X-a-abiertos de X. Como todo conjunto m_X-a-abierto es m_X-e-abierto, entonces $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ es un cubrimiento de A por subconjuntos m_X-e-abierto de X. Como A es m_X-e-compacto, existe una subcolección finita $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$ que cubre a A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$. Por lo tanto, A es m_X-a-compacto. $\square$

Teorema 3.36. *Todo subconjunto m_X-e^*-cerrado A de un m-espacio m_X-e^*-compacto X es m_X-e^*-compacto relativo a X.*

Demostración: Sea A un subconjunto de X m_X-e^*-cerrado y X un m-espacio m_X-e^*-compacto. Sea $\{M_i : i \in I\}$ un cubrimiento de A por subconjuntos m_X-e^*-abierto de X. Esto implica que $A \subset \bigcup_{i \in I} M_i$ y $(X \setminus A) \cup (\bigcup_{i \in I} M_i) = X$. Como X es m_X-e^*-compacto, existe un subconjunto finito I_0 de I tal que $(X \setminus A) \cup (\bigcup_{i \in I_0} M_i) = X$.

Así $A \subset \bigcup_{i \in I_0} M_i$ y por lo tanto A es m_X-e*-compacto relativo a X. $\square$

Teorema 3.37. *Todo subconjunto m_X-e-cerrado A de un m-espacio m_X-e-compacto X es m_X-e-compacto relativo a X.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.36. $\square$

Teorema 3.38. *Todo subconjunto m_X-a-cerrado A de un m-espacio m_X-a-compacto X es m_X-a-compacto relativo a X.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.36. $\square$

Definición 3.28. Un subespacio A de un m-espacio X se dice m_X-s-cerrado si para todo cubrimiento m_X-regular cerrado de X tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 3.39. *Sea $f : X \to Y$ sobreyectiva y (m_X, m_Y)-(e*,s)-continua. Si X es m_X-e* compacto entonces Y es m_Y-s-cerrado.*

Demostración: Sea X un m-espacio m_X-e*-compacto, $f : X \to Y$ una función (m_X, m_Y)(e*,s)-continua y sobreyectiva. Sea $\{M_i : i \in I\}$ un cubrimiento de Y por conjuntos m_Y-regular cerrado. Como f es (m_X, m_Y)-(e*,s)-continua, entonces $\{f^{-1}(M_i) : i \in I\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos m_X-e*-abierto. Como X es m_X-e*-compacto, existe un subconjunto finito I_0 de I tal que $X = \bigcup_{i \in I_0} f^{-1}(M_i)$. Como f es sobreyectiva, $Y = \bigcup_{i \in I_0} M_i$. Así Y es m_Y-s-cerrado. $\square$

Teorema 3.40. *Sea $f : X \to Y$ sobreyectiva y (m_X, m_Y)-(e,s)-continua. Si X es m_X-e-compacto entonces Y es m_Y-s-cerrado.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.39. $\square$

Teorema 3.41. *Sea $f : X \to Y$ sobreyectiva y (m_X, m_Y)-(a,s)-continua. Si X es m_X-a-compacto entonces Y es m_Y-s-cerrado.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.39. □

Teorema 3.42. *Sean X, Y m-espacios, f una función (m_X, m_Y)-e^*-continua. Si A es m_X-e^*-compacto relativo a X, entonces la imagen $f(A)$ es m_Y-compacto relativo a Y.*

Demostración: Sea $A \subset X$ m_X-e^*-compacto y $f : X \to Y$ una función (m_X, m_Y)-e^*-continua. Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ un cubrimiento de $f(A)$ por conjuntos m_Y-abiertos. Como f es (m_X, m_Y)-e^*-continua, entonces $\{f^{-1}(U_\alpha) : i \in J\}$ es un cubrimiento de A por conjuntos m_X-e^*-abierto. Como A es m_X-e^*-compacto, existe una subcolección finita $\{f^{-1}(U_{\alpha_1}), f^{-1}(U_{\alpha_2}), ..., f^{-1}(U_{\alpha_n})\}$ que cubre a A tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})$. Luego

$$f(A) \subset f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\alpha_i})) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

Así $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ y por lo tanto $f(A)$ es m_Y-compacto relativo a Y. □

Teorema 3.43. *Sean X, Y m-espacios, f una función (m_X, m_Y)-e-continua. Si A es m_X-e-compacto relativo a X, entonces la imagen $f(A)$ es m_Y-compacto relativo a Y.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.42. □

Teorema 3.44. *Sean X, Y m-espacios, f una función (m_X, m_Y)-a-continua. Si A es m_X-a-compacto relativo a X, entonces la imagen $f(A)$ es m_Y-compacto relativo a Y.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.42. □

Definición 3.29. Un m-espacio X se dice que es:

(1) m_X-e^*-T_1 si para cada par de puntos distintos de X, existen conjuntos m_X-e^*-abierto M y N que contienen a x e y respectivamente tal que $y \notin M$ y $x \notin N$.

(2) m_X-e-T_1 si para cada par de puntos distintos de X, existen conjuntos m_X-e-abierto M y N que contienen a x e y respectivamente tal que $y \notin M$ y $x \notin N$.

(3) m_X-a-T_1 si para cada par de puntos distintos de X, existen conjuntos m_X-a-abierto M y N que contienen a x e y respectivamente tal que $y \notin M$ y $x \notin N$.

Definición 3.30. Un m-espacio X se dice que es débilmente *Hausdorff* si cada elemento de X es un intersección de conjuntos m_X-regular cerrado.

Teorema 3.45. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (m_X, m_Y)-(e*,s)-continua y Y es débilmente Hausdorff, entonces X es m_X-e*-T_1.*

Demostración: Para $x \neq y$ en X, como f es inyectiva $f(x) \neq f(y)$ en Y, así existen $P, R \in m_Y\text{-}RC(Y)$ tal que $f(x) \in P$, $f(y) \notin P$, $f(x) \notin R$ y $f(y) \in R$. Como f es (m_X, m_Y)-(e^*,s)-continua, $f^{-1}(P)$ y $f^{-1}(R)$ son subconjuntos m_X-e^*-abierto de X tal que $x \in f^{-1}(P)$, $y \notin f^{-1}(P)$, $x \notin f^{-1}(R)$ y $y \in f^{-1}(R)$. Así X es m_X-e^*-T_1.
□

Teorema 3.46. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (m_X, m_Y)-(e,s)-continua y Y es débilmente Hausdorff, entonces X es m_X-e-T_1.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.45. □

Teorema 3.47. *Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es inyectiva y (m_X, m_Y)-(a,s)-continua y Y es débilmente Hausdorff, entonces X es m_X-a-T_1.*

Demostración: Se prueba de manera similar al Teorema 3.45. □

Definición 3.31. *Un m-espacio X se dice que es:*

(1) m_X-e-T_2 si para cada par de puntos distintos x e y en X, existe $M \in m_X$-e*$O(X, x)$ y $N \in m_X$-e*$O(X, y)$ tal que $M \cap N = \emptyset$.*

(2) m_X-e-T_2 si para cada par de puntos distintos x e y en X, existe $M \in m_X$-e$O(X, x)$ y $N \in m_X$-e$O(X, y)$ tal que $M \cap N = \emptyset$.

(3) m_X-*a*-T_2 *si para cada par de puntos distintos* x *e* y *en* X*, existe* $M \in m_X$-$aO(X,x)$ *y* $N \in m_X$-$aO(X,y)$ *tal que* $M \cap N = \emptyset$*.*

Definición 3.32. Un m-espacio X se dice *s-Urysohn* si para cada par de puntos distintos x e y en X, existe $M \in m_X$-$SO(X,x)$ y $N \in m_X$-$SO(X,y)$ tal que m_X-$cl(M) \cap m_X$-$cl(N) = \emptyset$.

Teorema 3.48. *Sea* $f : X \to Y$ *una función. Si* f *es inyectiva y* (m_X, m_Y)*-(e***,s)-continua y* Y *es s-Urysohn, entonces* X *es* m_X*-e***-*T_2*.*

Demostración: Sea Y *s-Urysohn*. Para cualquier par de puntos distintos x e y en X, $f(x) \neq f(y)$. Como Y es *s-Urysohn*, entonces existe $P \in m_Y$-$SO(Y, f(x))$ y $R \in m_Y$-$SO(Y, f(y))$ tal que m_Y-$cl(P) \cap m_Y$-$cl(R) = \emptyset$. Como f es (m_X, m_Y)-(e*,s)-continua, entonces existen conjuntos A y B m_X-e*-abierto en X que contienen a x e y, respectivamente, tal que $f(A) \subset m_X$-$cl(P)$ y $f(B) \subset m_X$-$cl(R)$ tal que $A \cap B = \emptyset$. Así, X es m_X-e*-T_2. □

Teorema 3.49. *Sea* $f : X \to Y$ *una función. Si* f *es inyectiva y* (m_X, m_Y)*-(e,s)-continua y* Y *es s-Urysohn, entonces* X *es* m_X*-e-*T_2*.*

Demostración: Se prueba de manera similar a Teorema 3.48. □

Teorema 3.50. *Sea* $f : X \to Y$ *una función. Si* f *es inyectiva y* (m_X, m_Y)*-(a,s)-continua y* Y *es s-Urysohn, entonces* X *es* m_X*-a-*T_2*.*

Demostración: Se prueba de manera similar a Teorema 3.48. □

Es de observar que todas las definiciones y teoremas introducidos en este capítulo generalizan los conceptos y teoremas dado en los Capítulos 1 y 2, en el sentido de que si la m_X-estructura considerada es una topología entonces los conceptos del presente capítulo coinciden con los conceptos de los Capítulos 1 y 2.

CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó un estudio detallado de las clases de funciones denominadas funciones (e^*,s)-continua, (e,s)-continua y (a,s)-continua utilizando la noción de conjuntos e^*-abierto, e-abierto y a-abierto las cuales generalizan las funciones *almost* contra-super-continuas. Se estableció la relación existente entre estas clases de funciones y se estudiaron algunas propiedades que son preservadas por estas clases de funciones.

Finalmente se introduce el concepto de estructura minimal y usando esta noción se definen nuevos conjuntos abiertos, que generalizan de manera natural los conceptos de conjuntos e^*-abierto, e-abierto y a-abierto. En base a estos nuevos conjuntos abiertos se definieron nuevas clases de funciones denominadas (m_X,m_Y)-(e^*,s)-continua, (m_X,m_Y)-(e,s)-continua y (m_X,m_Y)-(a,s)-continua, se probó que dichas funciones generalizan las funciones (e^*,s)-continua, (e,s)-continua y (a,s)-continua respectivamente, en el sentido de que cuando las estructuras minimales son topologías, entonces se recuperan los conceptos de funciones (e^*,s)-continua, (e,s)-continua y (a,s)-continua.

BIBLIOGRAFÍA

Abd El-Monsef, M y El-Deeb, S y Mahmoud, R. 1983. β-open sets and β-continuous mappings. *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ., 12*: 77-90.

Andrijevic D. 1984. Some of the topology of α-sets. *Mat. Vesnik, 36*: 1-10.

Andrijevic D. 1986. Semipreopen sets. *Mat. Vesnik, 38*: 24-32.

Arya S y Bhamini M. 1987. Some generalizations of pairwise Urysohn spaces. *Indian J. Pure Appl. Math., 18*: 1088-1093.

Crossley S y Hildebrand S. 1971. Semi-closure. *Texas J. Sci., 22*: 99-112.

Ekici E. 2004. On contra R-continuity and a weak form. *Indian J. Math., 46*: 267-281.

Ekici E. 2004. Almost contra-super-continuous functions. *Studii si Cercerati Stiintifice, Seria: Matematica, Univ. din Bacau, 14*: 31-42.

Ekici E. 2004. (δ-pre,s)-continuous functions. *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc., 27 (2)*: 237-251.

Ekici E. 2006. Another form of contra-continuity. *Kochi Journal of Mathematics, 1*: 21-29.

El-Deeb N y Hasainen I y Mashhour A y Noiri T. 1983. On p-regular spaces. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie, 27 (75)*: 311-315.

Joseph J y Kwach M. 1980. On S-closed spaces. *Proc. Amer. Math. Soc., 80*: 341-348.

Levine N. 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces. *Amer. Math. Monthly, 70*:36-41.

Maio G y Noiri T. 1987. On s-closed spaces. *Indian J. Pure Appl. Math., 18*: 226-233.

Mashhour A y Abd El-Monsef M y El-Deeb S. 1982. On precontinuous and weak precontinuous mappings. *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53*:47-53.

Njastad O. 1965. On some classes of nearly open sets. *Pacific J. Math., 15*:961-970.

Noiri T. 1989. On almost continuous functions. *Indian J. Pure Appl. Math., 20*: 571-576.

Pal M y Bhattacharyya P. 1995. Faint precontinuous functions. *Soochow J. Math., 21*: 273-289.

Park J y Lee B y Son M. 1997. On δ-semiopen sets in topological space. *J. Indian Acad. Math., 19 (1)*: 59-67.

Raychaudhuri S y Mukherjee M. 1993. On δ-almost continuity and δ-preopen sets. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 21*: 357-366.

HOJA DE METADATOS

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/5

Título	**ALGUNAS GENERALIZACIONES DE FUNCIONES *ALMOST* CONTRA-SUPER-CONTINUAS**
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	**Código CVLAC / e-mail**	
Vásquez M., Luis E.	**CVLAC**	17.909.159
	e-mail	*eligiovm85@gmail.com*
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Topología
Conjuntos abiertos generalizados
Funciones continuas generalizadas
Estructuras minimales

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/5

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias Básicas	Matemáticas

Resumen (abstract):

En este trabajo se estudia una generalización de algunos tipos de funciones, que guardan relación con el concepto clásico de continuidad, usando los conceptos, de conjuntos abiertos generalizados, tales como las funciones *almost* contra-super-continuas, contra R-maps, (δ-pre,s)-continuas, (δ-semi,s)-continuas. Se introduce la noción de estructura minimal y se definen y estudian nuevas clases de funciones que generalizan los conceptos antes mencionados.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/5

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Rosas R., Ennis R.	**ROL**	CA [ ] AS [x] TU [ ] JU [ ]
	CVLAC	**4.049.607**
	e-mail	*ennisrafael@gmail.com*
	e-mail	
Salas B., Margot Del V.	**ROL**	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	**13.016.711**
	e-mail	*salasbrown@gmail.com*
	e-mail	
Carpintero F., Carlos R.	**ROL**	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	**8.443.180**
	e-mail	*carpintero.carlos@gmail.com*
	e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [ ]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2010	06	09

Lenguaje: spa

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/5

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
Tesis-vásquezle.pdf	Aplication / pdf

Alcance:

Espacial : Universal (Opcional)

Temporal: Intemporal (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciado en Matemáticas

Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciado

Área de Estudio: Matemáticas

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

UNIVERSIDAD DE ORIENTE

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/5

Derechos:

Yo, Luis Eligio Vásquez Márquez, autor de la tesis de grado titulada: Algunas Generalizaciones De Funciones *Almost* Contra-Super-Continuas, autorizo la publicación del título y resumen de este trabajo.

Br. Luis Vásquez
AUTOR 1

Dr. Rosas Ennis	**M.Sc. Salas Margot**	**Dr. Carpintero Carlos**
TUTOR	**JURADO 1**	**JURADO 2**

POR LA SUBCOMISIÓN DE TESIS:

M.Sc. Juan González

UNIVERSIDAD DE ORIENTE