

**UNIVERSIDAD DE ORIENTE.
NÚCLEO DE ANZOÁTEGUI.
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ELECTRICIDAD.**



**“ESTUDIO Y COMPARACION DE CONTROLADORES EN
CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y SISTEMAS MECÁNICOS,
UTILIZANDO CONFIGURACIONES EN CASCADA”**

REALIZADO POR:

HECTOR LAREZ

**Trabajo Especial de Grado como requisito para optar el Título de Ingeniero
Electricista.**

PUERTO LA CRUZ, MARZO DE 2010

**UNIVERSIDAD DE ORIENTE.
NÚCLEO DE ANZOÁTEGUI.
ESCUELA DE INGENIERIA Y CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ELECTRICIDAD.**



**“ESTUDIO Y COMPARACION DE CONTROLADORES EN
CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y SISTEMAS MECÁNICOS,
UTILIZANDO CONFIGURACIONES EN CASCADA”**

JURADO CALIFICADOR

Ing. Esp. Verena Mercado Polo

Asesor Académico

Ing. Manuel Maza

Jurado Principal

Ing. Alberto Urbina

Jurado Principal

PUERTO LA CRUZ, MARZO DE 2010

RESOLUCIÓN

De acuerdo al artículo 41 del reglamento de trabajos de grado de la universidad de oriente:

“Los trabajos especiales de grado son de exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente y solo podrían ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo quien lo participará al Consejo Universitario”.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, ante todas las cosas.

A Verena Mercado Polo, Ingeniero Electricista, Especialista en Automatización e Informática Industrial, por su invaluable colaboración y apoyo.

A Dayana y a Carmen por su apoyo y constantes palabras de aliento. Gracias por creer en mí.

A todas las personas y profesionales que de alguna forma me brindaron ayuda académica para desarrollar este trabajo. A mis amigos:

Giorgo Gasparini, Ramón Pérez, Henry Bucan, Atilio Martínez, Jaime Urbina, Yadira Chacón, Héctor Moisés, Maigualida, Nankly, María Luisa entre otras

RESUMEN

En este trabajo se realiza el estudio de controladores en cascada aplicado en circuitos eléctricos y sistemas mecánicos, de segundo y tercer orden, teniendo en cuenta para su diseño la respuesta del sistema utilizando como valor fundamental el factor de amortiguamiento, otro concepto importante para su diseño es la estabilidad y el error en estado estacionario. Todos estos conceptos son utilizados para el diseño de controladores en cascada en los sistemas de segundo y tercer orden. Los controladores en cascada que se estudian en este trabajo son controladores Proporcional, Integral y derivativo (PID).

Los circuitos Eléctricos y Sistemas mecánicos de segundo y tercer orden presentan características similares, en su forma y en los elementos amortiguados, sin embargo, se destaca que en la realidad sus comportamientos pueden llegar a ser diferentes, los circuitos eléctricos pueden comportarse de manera oscilatoria, subamortiguada, sobreamortiguada o críticamente amortiguada, mientras que los sistemas mecánicos normalmente son de tipo sobreamortiguado o en algunos casos subamortiguados. Se hace una comparación entre las ecuaciones diferenciales de segundo y tercer orden de los sistemas mecánicos y los circuitos eléctricos, comparando sus parámetros, es decir masa, constante del resorte, constante de fricción con los parámetros eléctricos resistencia, inductancia y capacitancia, llamando a estos elementos como acumuladores de energía. Esta comparación permite obtener ecuaciones diferenciales y funciones de transferencias generales que permitirán cambiar sus características, convirtiendo estos sistemas en lazo cerrado, con el uso de controladores PID generales para estos diferentes tipos de sistemas.

CONTENIDO

	PAG.
RESOLUCIÓN	iii
AGRADECIMIENTOS	iv
RESUMEN.....	v
CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN	12
1.1.- GENERALIDADES.....	12
1.2.- ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.....	12
1.3.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	13
1.4.- JUSTIFICACIÓN	15
1.5.- ALCANCE	16
1.6.- OBJETIVOS	16
1.6.1.- Objetivo General	16
1.6.2.- Objetivos Específicos.....	16
1.7.- METODOLOGÍA	17
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO	19
2.1.- GENERALIDADES	19
2.2.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS	19
2.2.1.- Modelo Matemático y Representación de Sistemas.....	19
2.2.2.- Análisis de Sistemas.....	20
2.2.3.- Sistemas de Control.....	22
2.2.4.- Representación en Variables de Estado.....	23
2.2.5.- Representación de estado a partir de Ecuaciones Diferenciales	25
2.2.6.- Controladores	27
2.2.7.- Configuraciones del Controlador	28
2.2.8.- Controlador PID	29
2.2.9.- Estabilidad.....	31
2.2.10.- Diseño de Sistemas de Control por Asignación de Polos	34

CAPÍTULO 3: MODELOS MATEMÁTICOS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y SISTEMAS MECÁNICOS.....	36
3.1.- GENERALIDADES	36
3.2.- SISTEMAS MECÁNICOS	36
3.2.1.- Sistema Masa-Resorte-Amortiguador de segundo Orden.....	36
3.2.2.- Sistema Masa-Resorte-Amortiguador de Tercer Orden.....	39
3.3.- CIRCUITOS ELÉCTRICOS	42
3.3.1.- Circuito RLC de Segundo Orden	42
3.3.2.- Circuito RLC de Tercer Orden.....	46
3.4.- COMPARACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS ENTRE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y SISTEMAS MECÁNICOS	50
CAPÍTULO 4: DISEÑO DE CONTROLADORES EN CONFIGURACIÓN CASCADA.....	46
4.1.- GENERALIDADES	46
4.2.- SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN	46
4.2.1.- Sistema Mecánico y Circuito Eléctrico de Segundo Orden.....	46
4.2.2.- Sistema Mecánico y Circuito Eléctrico de Tercer Orden.....	56
CAPÍTULO 5: ANALISIS DE RESULTADOS.....	70
5.1.- GENERALIDADES	70
5.2.- ANALOGIA ENTRE SISTEMAS MECANICOS Y CIRCUITOS ELECTRICOS	70
5.3.- CONTROLADORES EN CASCADA EN SISTEMAS MECANICOS Y CIRCUITOS ELECTRICOS.....	71
CONCLUSIONES.....	75
RECOMENDACIONES	77
BIBLIOGRAFÍA.....	78

LISTA DE FIGURAS

	PAG.
Figura 2.7. Respuesta dinámica	32
Figura 3.1. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador (Segundo Orden)	36
Figura 3.2. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador (Tercer Orden)	39
Figura 3.3. Circuito Serie de Segundo orden.....	43
Figura 3.4. Circuito RLC de Tercer orden	46
Figura 4.1. Diagrama de bloques en lazo abierto del sistema mecánico de segundo orden	47
Figura 4.2. Respuesta en lazo abierto del sistema mecánico de segundo orden	48
Figura 4.3. Respuesta en lazo cerrado con el controlador en cascada del sistema mecánico de segundo orden	48
Figura 4.4. Diagrama de bloques en lazo cerrado con el controlador PID del sistema mecánico de segundo orden	55
Figura 4.5. Respuesta en lazo cerrado con el controlador PID del sistema mecánico de segundo orden	55
Figura 4.6. Diagrama de bloques en lazo abierto del sistema mecánico de tercer orden	57
Figura 4.7. Diagrama de bloques en lazo abierto del sistema eléctrico de tercer orden.....	57
Figura 4.8. Respuesta en lazo abierto del sistema mecánico de tercer orden.....	58
Figura 4.9. Respuesta en lazo abierto del sistema electrico de tercer orden	58
Figura 4.10. Respuesta en lazo cerrado con el controlador en cascada del sistema mecánico de tercer orden	59
Figura 4.11. Respuesta en lazo cerrado con el controlador en cascada del sistema mecánico de tercer orden	59
Figura 4.12. Diagrama de bloques en lazo cerrado con el controlador PID del sistema eléctrico de tercer orden	68
Figura 4.13. Respuesta en lazo cerrado con el controlador PID del sistema eléctrico de tercer orden	68

LISTA DE TABLAS

	PAG.
Tabla 3.1. Resumen del sistema mecánico y circuito eléctrico de segundo orden	50
Tabla 3.2. Resumen del sistema mecánico y circuito eléctrico de Tercer orden	43
Tabla 3.3. Analogía entre variables y parámetros de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos de segundo orden.....	44
Tabla 3.4. Analogía entre variables y parámetros de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos de Tercer orden.....	45
Tabla 4.1. Ecuación de estado y función de transferencia para los sistemas mecánico y eléctrico de tercer orden.....	57
Tabla 5.1. Características de los sistemas de segundo orden en lazo cerrado y lazo abierto	72
Tabla 5.2. Características de los sistemas de tercer orden en lazo cerrado y lazo abierto	73

NOMENCLATURA

R :	Resistencia
L :	Inductancia
C :	Capacitancia
$i_L(t)$:	Corriente en el Inductor
$v_C(t)$:	Voltaje en el Capacitor
$e(t)$:	Voltaje de Entrada
$u(t)$:	Señal de Salida
$y(t)$:	Señal que se quiere medir
$x(t)$	Variable de Estado
$\dot{x}(t)$:	Primera derivada de la variable de estado
A :	Matriz de los coeficientes de las variables de estado
B :	Matriz de coeficientes de las entradas
C :	Matriz de las salidas o variables que se quieren medir
$M(s)$:	Función de transferencia del circuito
$H(s)$:	Función de transferencia
$u_\delta(t)$:	Señal de Salida linealizada
$y_\delta(t)$:	Señal que se quiere medir linealizada
$x_\delta(t)$:	Variable de Estado linealizada
$\dot{x}_\delta(t)$:	Primera derivada de la variable de estado linealizada

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

1.1.- GENERALIDADES

En este capítulo, se plantea el problema, el alcance, la justificación y la importancia del mismo. Además, se presentan cuales fueron los objetivos planteados, así como también, la metodología aplicada para el desarrollo de este trabajo.

1.2.- ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

Para la elaboración de este proyecto se revisaron una serie de bibliografías relacionadas con el tema propuesto, las cuales se mencionan a continuación:

En el año 2009, Mercado V. [1], realizó un trabajo en el que se diseñaron sistemas de control por realimentación de estados basados en conceptos de estabilidad, estos controladores se diseñaron para sistemas eléctricos de segundo y tercer orden, lineales y no lineales.

En el 2006, Heraoui M. [2], realizó un trabajo donde se desarrolla un laboratorio virtual como ayuda en la enseñanza de los sistemas de Control, utilizando el Programa Matlab. En este trabajo se presentan las respuestas de los sistemas y los diagramas Nyquist, Bode y lugar geométrico de las raíces, analizando su respuesta en el tiempo y en el dominio de la frecuencia.

En el 2005, Malo Shane Malo y Griñó Robert [3], realizaron un trabajo donde se analizan y diseñan controladores lineales para un convertidor elevador (“boost”) bidireccional en corriente, utilizando las técnicas tradicionales de control, se utiliza

además, técnicas tradicionales de linealización para obtener la función de transferencia.

1.3.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los comportamientos dinámicos de los circuitos eléctricos y de los sistemas mecánicos, puede ir desde la aparición de oscilaciones libres hasta la estabilidad en su funcionamiento, como es el caso de los circuitos oscilatorios o filtros pasa bajo y pasa alto y sistemas amortiguados o con resortes. En muchos casos, estos comportamientos no son deseados y son considerados como inestabilidades que distorsionan el funcionamiento correcto del circuito, en el control clásico estos funcionamientos pueden ser corregidos u obligados a comportarse de manera diferente, a través de técnicas de control.

Entre los objetivos del control se tiene atenuación de perturbaciones de carga o ruido, seguimiento de una referencia e imperfecciones del modelo. Las imperfecciones del modelo pueden mejorarse con el diseño de controladores, teniendo en cuenta la respuesta en el tiempo que se desee de los sistemas, por ejemplo es posible que un sistema eléctrico que tiene un comportamiento oscilatorio se convierta en un sistema sobreamortiguado y que un sistema de resorte y amortiguadores tenga un comportamiento sobreamortiguado u oscilatorio, con características de estabilidad y con un error de estado estacionario con valores muy próximos al cero.

Según lo planteado por Mercado V. (2009) “El método de diseño de controladores por realimentación de los estados puede arrojar soluciones indeseables para sistemas que posean ceros que afecten considerablemente su dinámica de respuesta, esto se debe a que esta técnica de diseño de reguladores se basa en que los ceros de una función de transferencia no influyen notablemente en la respuesta de un

sistema, sino que sus polos son los que rigen el comportamiento del mismo”. Esta apreciación se comparará con el diseño de controladores usando configuración en cascada o serie, con el fin de identificar sus características, ventajas y las propiedades que se pueden lograr con ambas configuraciones.

La teoría de control clásica o convencional está basada principalmente en la relación entrada-salida de un sistema, es decir, en la función de transferencia. Dicha teoría se aplica satisfactoriamente a sistemas con una entrada y una salida (sistema escalar), lineales e invariantes en el tiempo. El desarrollo, en épocas recientes, de sistemas más complejos y exactos con múltiples entradas y múltiples salidas (sistemas multivariables) trajo consigo la necesidad de una nueva teoría de control para el análisis y síntesis de tales sistemas. A partir de la década de los sesenta comenzó a desarrollarse la teoría de control moderna basada en el concepto de estado. Esta nueva teoría permitía analizar aspectos clásicos como son la representación del sistema, la relación entrada-salida, respuesta en el tiempo y estabilidad pero además permitió la aparición de nuevos conceptos tales como controlabilidad, observabilidad y optimización.

En el área de circuitos eléctricos, se estudian constantemente circuitos de segundo y tercer orden, los cuales presentan comportamientos especiales que requieren atención y dedicación, pues, la mayoría de estos circuitos que contienen componentes que almacenan energía y sus parámetros de voltaje y/o corriente varían con el tiempo, requieren un estudio detallado de la estabilidad. Estos circuitos eléctricos presentan analogías con los sistemas mecánicos que usan resortes y amortiguadores, tienen elementos que presentan características similares en su modelo matemático y en su funcionamiento. Este funcionamiento se refiere a su comportamiento en el tiempo de algunas variables.

En este trabajo se realiza el diseño de controladores utilizando configuraciones en serie o cascada, para la configuración en serie se utilizan controladores tipo Proporcional Integral Derivativo (PID) y se aplicarán conceptos de error en estado estacionario, estabilidad y respuesta en el tiempo. Esta configuración, tanto para circuitos eléctricos y sistemas mecánicos se simularan usando Simulink, luego se compararan y por último se analizaran para destacar las ventajas y desventajas de este configuración en el diseño de controladores para los diferentes sistemas.

1.4.- JUSTIFICACIÓN

En ingeniería, el área de circuitos eléctricos y sistemas mecánicos, tienen mucha relación en cuanto a la aplicación de las leyes fundamentales, modelos matemáticos y funciones de transferencia, estas similitudes en sus ecuaciones diferenciales pueden simplificarse, permitiendo obtener ecuaciones generales que representen sistemas de segundo y tercer orden, solamente identificando los elementos que conforman los diferentes sistemas. Mediante el estudio de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos de segundo y tercer orden se obtendrán ecuaciones que los representen y permitan generalizar sus comportamientos, a través de tablas que muestran las similitudes entre las diferentes variables y componentes, tanto eléctricos como mecánicos.

A partir de las ecuaciones generales obtenidas de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos, se aplicaran conceptos de control, utilizando configuraciones en cascada. La aplicación de estas configuraciones permitirá estudiar sus diferencias en los sistemas eléctricos y mecánicos, identificando sus ventajas y desventajas, así como, identificar las similitudes entre los sistemas a estudiar.

De esta manera, esta investigación representa un estudio de gran utilidad y beneficio en el manejo y tratamiento de los circuitos eléctricos y sistemas mecánicos

en las diferentes áreas de aplicación. Además, este estudio es aplicable a procesos industriales lineales.

1.5.- ALCANCE

En este trabajo solamente se estudiarán circuitos eléctricos y sistemas mecánicos de segundo y tercer orden, lineales y abarcará los siguientes aspectos:

- Modelado matemático de circuitos eléctricos y sistemas mecánicos lineales de segundo y tercer orden.
- Determinación de las similitudes entre los sistemas mecánicos y eléctricos
- Aplicación de conceptos de estabilidad absoluta, error estacionario y respuesta transitoria en el diseño de controladores Proporcional Integral Derivativo (PID) con configuración en cascada.

1.6.- OBJETIVOS

1.6.1.- Objetivo General

Estudiar el diseño de controladores en circuitos eléctricos y sistemas mecánico de segundo y tercer orden utilizando configuraciones en cascada.

1.6.2.- Objetivos Específicos

1. Modelar matemáticamente circuitos eléctricos y sistemas mecánicos de segundo y tercer orden
2. Comparar los modelos matemáticos de los circuitos eléctricos y sistemas mecánicos.

3. Diseñar sistemas de control utilizando configuración en cascada y conceptos de estabilidad, error en estado estacionario y respuesta transitoria.
4. Obtener respuesta de los sistemas en lazo abierto y lazo cerrado a través de simulación.
5. Comparar las respuestas de los controladores PID en cascada aplicados a circuitos eléctricos y sistemas mecánicos.

1.7.- METODOLOGÍA

En este trabajo se utiliza un tipo de investigación aplicada, cuyo objetivo se basa en resolver problemas prácticos, con un margen de generalización limitado, debido a que se basa en aspectos teóricos y de simulación virtual, para identificar la mejor manera de diseñar controladores en circuitos eléctricos y sistemas mecánicos.

La metodología utilizada es cualitativa, ya que es una investigación que se basa en el análisis subjetivo e individual, esto la hace una investigación interpretativa, referida a lo particular.

Para cumplir con los objetivos trazados, se hizo necesario dividir este proyecto en cinco (5) etapas. En la primera etapa se modelaron matemáticamente circuitos eléctricos y sistemas mecánicos lineales de segundo y tercer orden, se utilizaron las leyes fundamentales de la electricidad y de las fuerzas para la obtención de las variables de estado y funciones de transferencia. En la segunda etapa se compararon los modelos y ecuaciones matemáticas de los circuitos eléctricos y sistemas mecánicos. En la tercera etapa, se aplicaron los conceptos de estabilidad, error estacionario y respuesta en el tiempo para el diseño de controladores con configuración en cascada en circuitos eléctricos y sistemas mecánicos lineales, de

segundo y tercer orden respectivamente, analizando su desempeño sin y con el controlador, utilizando herramientas computacionales como Matlab. En la cuarta etapa, se simuló la respuesta de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos en lazo abierto y lazo cerrado, con el fin de revisar y comparar el comportamiento de los circuitos. Finalmente se hizo un análisis de los métodos utilizados para el diseño de controladores y comparando sus respuestas con y sin el controlador, representando esta la quinta y última etapa del proyecto.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

2.1.- GENERALIDADES

En este capítulo, se presentan los conceptos que permiten el entendimiento de los temas utilizados en este trabajo, referentes al diseño de controladores por realimentación de estado o cascada.

2.2.- FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.2.1.- Modelo Matemático y Representación de Sistemas

“Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos, bastante bien. Tenga presente que un modelo matemático no es único para un sistema determinado. Un sistema puede representarse en muchas formas diferentes, por lo que puede tener muchos modelos matemáticos, dependiendo de cada perspectiva.” [4]

“Un sistema se llama dinámico si su salida en el presente depende de una entrada en el pasado; si su salida en curso depende solamente de la entrada en curso, el sistema se conoce como estático. La salida de un sistema estático permanece constante si la entrada no cambia y cambia solo cuando la entrada cambia. En un sistema dinámico cambia con el tiempo cuando no está en su estado de equilibrio.” [5]

“En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones de entrada-salida de componentes o de sistemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales invariantes con el tiempo. La

función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante con el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.” [4]

“Al aplicar las leyes físicas a un sistema específico, es posible desarrollar un modelo matemático que describa al sistema. Tal sistema puede incluir parámetros desconocidos, los cuales deben evaluarse mediante pruebas reales. Sin embargo, algunas veces las leyes físicas que gobiernan el comportamiento de un sistema no están completamente definidas, y la formulación de un modelo matemático es experimental. De ser así, se puede utilizar un procedimiento de modelado experimental. En este procedimiento, se somete al sistema a un conjunto de entradas conocidas y se miden sus salidas.” [4]

Se estudian diferentes sistemas dinámicos dependiendo del área de aplicación, sistemas Mecánicos, Eléctricos, Hidráulicos y Térmicos. En los sistemas eléctricos se pueden desarrollar modelos matemáticos aplicados a circuitos eléctricos, utilizando las leyes fundamentales de la electricidad Ley de Ohm, Leyes de Kirchhoff, al igual que los conceptos de potencia y energía eléctrica, los sistemas básicos considerados eléctricos pueden utilizar elementos resistivos, capacitivos e inductivos. [1]

2.2.2.- Análisis de Sistemas

Luego de la obtención del modelo matemático, existen varios métodos para el análisis del desempeño del sistema. “En el análisis y diseño de sistemas de control, se debe tener una base de comparación del desempeño de diversos sistemas de control, esta base se configura especificando las señales de entrada de prueba particulares y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada. El uso de

señales de prueba se justifica porque existe una correlación entre las características de respuesta de un sistema para una señal de entrada de prueba común y la capacidad del sistema de manejar las señales de entrada reales.” [5]

Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc. Con estas señales de prueba, es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, dado que las señales son funciones del tiempo muy simples.

Las respuestas de los sistemas pueden ser:

Respuesta transitoria y respuesta en estado estable. La respuesta en el tiempo de un sistema de control consta de dos partes: la respuesta transitoria y la respuesta en estado estable. La respuesta transitoria se refiere a la que va del estado inicial al estado final y la respuesta en estado estable, se refiere a la manera en la cual se comporta la salida del sistema conforme tiende a infinito.

“Estabilidad absoluta, estabilidad relativa y error en estado estable. Al diseñar un sistema de control, se debe ser capaz de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de los componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema de control está en equilibrio si, en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control lineal e invariante con el tiempo es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan para siempre. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial.” [6]

2.2.3.- Sistemas de Control

Los sistemas de control según la Teoría Cibernética se aplican en esencia para los organismos vivos, las máquinas y las organizaciones. Estos sistemas fueron relacionados por primera vez en 1948 por Norbert Wiener en su obra Cibernética y sociedad con aplicación en la teoría de los mecanismos de control. Un sistema de control está definido como un conjunto de componentes que pueden regular su propia conducta o la de otro sistema con el fin de lograr un funcionamiento predeterminado.

Los sistemas de control se clasifican según su comportamiento en:

- Sistema de control de lazo abierto: Es aquel sistema en el que la acción de control está muy relacionada con la entrada pero su efecto es independiente de la salida.
- Sistema de control de lazo cerrado: Son los sistemas en los que la acción de control está en cierto modo muy dependiente de la salida. Estos sistemas se caracterizan por su propiedad de retroalimentación.

“Un sistema que mantiene una relación prescrita entre la salida y la entrada de referencia, comparándolas y usando la diferencia como medio de control, se denomina sistema de control realimentado o de lazo cerrado.” [7]. Ver Figura 2.1.

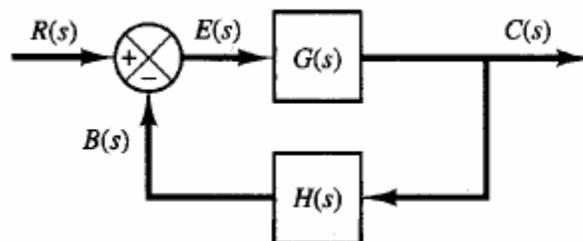


Figura 2.1. Sistema en lazo Cerrado [7]

“Los sistemas de control realimentados, se pueden clasificar en diversas formas, dependiendo del propósito de la clasificación. Por ejemplo, de acuerdo con el método de análisis y diseño, los sistemas de control se clasifican en lineales o no lineales, variantes con el tiempo o no variantes con el tiempo. De acuerdo con los tipos de señales usados en el sistema en tiempo continuo y tiempo discreto o sistemas modulados y no modulados.” [8]

2.2.4.- Representación en Variables de Estado

La representación en Variables de Estado de un proceso o sistema es sumamente útil cuando se trata de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, los cuales resultan complicados de tratar bajo el concepto de Función de Transferencia, una sola entrada-una sola salida. Cabe destacar que una Representación de Estado solamente es posible para sistemas lineales y puede expresarse en forma general para un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, en donde las variables de estado del sistema son las $x(t)$, las entradas $u(t)$ y las posibles salidas $y(t)$ tal como de muestra a continuación.

Las ecuaciones diferenciales que expresan el modelo del sistema en variables des estado son:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Relaciones que expresan las salidas en función de las variables del sistema

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t) \\
&\vdots \\
y_m(t) &= g_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Lo anterior puede ser expresado en forma matricial como se muestra a continuación, en donde las matrices A, B, C y D dependerán de las funciones f y g que determinan el modelo del sistema.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

No obstante, existe otra posible interpretación: Los sistemas dinámicos se rigen por ecuaciones diferenciales y de diferencia; este tipo de ecuaciones tienen una única solución, si se establece un conjunto de condiciones, denominadas condiciones auxiliares; usualmente éstas determinan en el instante de tiempo considerado como inicial, y por tanto se denominan condiciones iniciales.

Cualquiera que sea la interpretación que se adopte, debe tenerse presente que:

- Las variables de estado pueden tener o no sentido físico.
- Las variables de estado pueden o no ser medibles.
- Para un mismo sistema dinámico las variables de estado no son únicas; de hecho, se pueden definir infinitos conjuntos de variables que sirvan como variables de estado.

2.2.5.- Representación de estado a partir de Ecuaciones Diferenciales

Existe un procedimiento sencillo para obtener una representación en variables de estado de sistemas de una entrada y una salida de los cuales se conoce la ecuación diferencial o de diferencia que lo rige. Supóngase un sistema dinámico continuo descrito por la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \quad (2.4)$$

El comportamiento del sistema queda unívocamente determinado si se conocen las condiciones iniciales $y(0)$, $\dot{y}(0)$, ..., $y^{(n-1)}(0)$, por lo tanto se puede seleccionar las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy}{dt} = \dot{x}_1(t) \\ x_3(t) &= \frac{d^2 y}{dt^2} = \dot{x}_2(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} = \dot{x}_{n-2}(t) \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} = \dot{x}_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

De tal manera que (2.20) puede escribirse como

$$\begin{aligned} a_n \dot{x}_n(t) + a_{n-1} x_n(t) + \dots + a_1 x_2(t) + a_0 x_1(t) &= u(t) \\ \dot{x}_n(t) &= -\frac{a_0}{a_n} x_1(t) - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \dots - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \frac{1}{a_n} u(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) se escriben en forma matricial, como se muestran a continuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.7)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.8)$$

La función de transferencia de un modelo de espacio de estados continuo e invariante en el tiempo puede ser obtenida, utilizando la ecuación 2.3, en variables de estado en el dominio de frecuencia, es decir, la transformada de Laplace.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1} BU(s) \end{aligned} \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) es reemplazada en la ecuación de salida (2.3)

$$\begin{aligned} Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ Y(s) &= C((sI - A)^{-1} BU(s)) + DU(s) \end{aligned}$$

$$Y(s) = \left(CB(sI - A)^{-1} + D \right) U(s)$$

Como la función de transferencia está definida como la tasa de salida sobre la entrada de un sistema, entonces se tiene:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\left(C(sI - A)^{-1} B + D \right) U(s)}{U(s)}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (2.10)$$

2.2.6.- Controladores

Controlar un sistema dado es establecer en su funcionamiento de acuerdo con unos requisitos o especificaciones. Se analizan los cambios que se pueden lograr en un dispositivo al añadir un nuevo polo y un nuevo cero al sistema, que se introduce en un lazo de control.

Estos nuevos elementos no tienen por qué ser de las mismas características que la planta. Si la planta es un sistema mecánico, el controlador puede estar constituido por nuevos elementos mecánicos o un dispositivo eléctrico. La implementación final del compensador no importa mientras su función de transferencia, la ecuación diferencial que gobierna su comportamiento, sea la misma.

Se puede definir compensación como la modificación de la dinámica de un sistema para cumplir unas especificaciones determinadas.

2.2.7.- Configuraciones del Controlador

La mayoría de los métodos de diseño de sistemas de control convencionales se basan en el diseño de una configuración fija, en el que en un principio el diseñador decide la configuración básica del sistema diseñado completo y el lugar donde el controlador estará colocado en relación con el proceso controlado. Debido a que la mayoría de los esfuerzos de control involucran la modificación o compensación de las características y de desempeño del sistema, el diseño general que emplea una configuración fija también es llamada compensación.[6]

Los diferentes tipos de configuración son los siguientes:

- **Compensación en serie (cascada).** La figura 2.2. muestra la configuración del sistema más comúnmente utilizada, utiliza el controlador colocado en serie con el proceso o sistema controlado.
- **Compensación mediante realimentación.** En la figura 2.3 se muestra que el controlador está colocado en la trayectoria menor de realimentación.
- **Compensación mediante la realimentación de estado.** La figura 2.4. muestra un sistema que genera la señal de control mediante la realimentación de las variables de estado. En esta configuración el sistema genera la señal de control mediante la realimentación de las variables de estado a través de ganancias constantes reales.

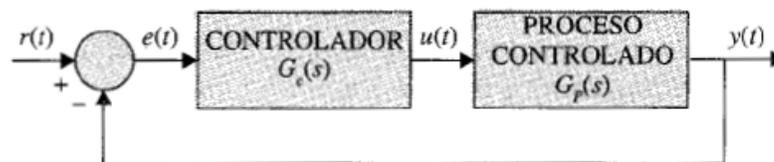


Figura 2.2. Compensación en serie o cascada [6]

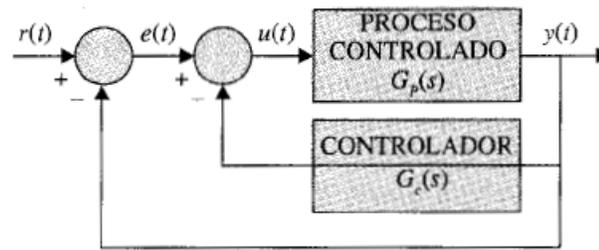


Figura 2.3. Compensación mediante realimentación [6]

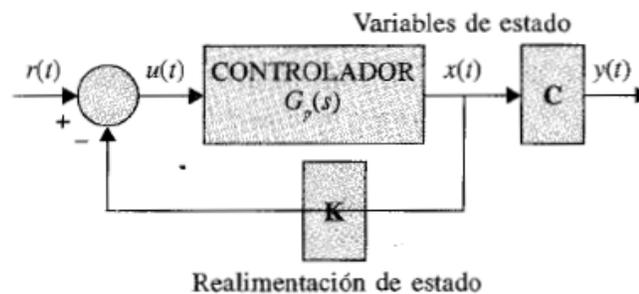


Figura 2.4. Control por realimentación de estado [6]

2.2.8.- Controlador PID

El controlador PD añade amortiguamiento a un sistema, pero no afecta la respuesta en estado estable. El controlador PI puede mejorar la estabilidad relativa y el error en estado estable al mismo tiempo, pero el tiempo de levantamiento se incrementa. En el controlador PID se emplean las mejores características de los controladores PI y PD.

Un controlador PID es un caso particular de compensador de adelanto-retraso en el que el compensador de adelanto es proporcional-derivativo y el compensador de retraso es proporcional-integral. Del producto de ambos compensadores, se obtiene un controlador con dos ceros que en general pueden ser reales o no-, un polo en el origen y una ganancia. La configuración del controlador PID, se muestra en la figura 2.5.

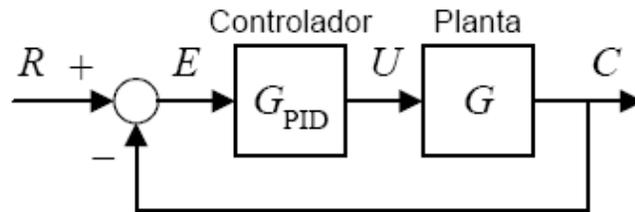


Figura 2.5. Control por realimentación de estado [10]

Una expresión equivalente es la que se presenta en (2.11), también llamada forma estándar del controlador PID.

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + s T_d \right] \quad (2.11)$$

En la ecuación (2.12) se observa la actuación temporal del controlador en la planta, que tiene tres sumandos: uno proporcional al error, otro proporcional a la integral del error y otro proporcional a la derivada del error.

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (2.12)$$

A la constante K_p se le llama ganancia proporcional y posee las unidades que relacionan la actuación con el error, T_i es la constante de tiempo integral y tiene unidades de segundos, y T_d la constante de tiempo derivativa y también tiene unidades de segundos.

La actuación del controlador se puede separar en forma de tres sumandos diferentes. Cada uno de ellos acapara respectivamente la actuación proporcional, integral y derivativa.

$$U(s) = \left[K_P + \frac{K_I}{s} + sK_D \right] E(s) \quad (2.13)$$

Las constantes K_P , K_I y K_D se obtienen fácilmente conocidos los parámetros estándar K_p , T_i y T_d . Esta forma de expresar el controlador PID se conoce como paralela porque se puede representar como aparece en la figura 2.6.

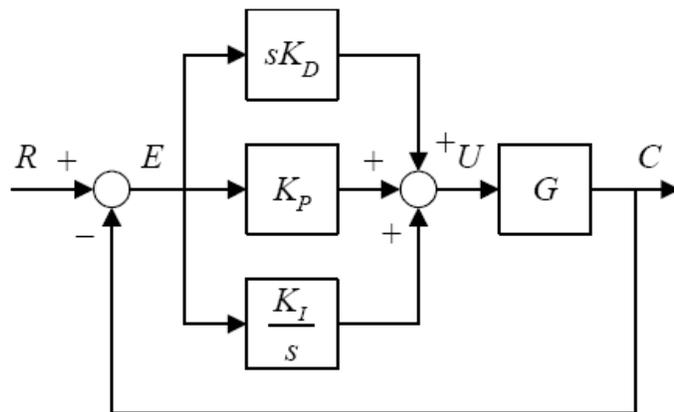


Figura 2.6. Controlador PID [10]

2.2.9.- Estabilidad

Al diseñar un sistema de control, debe poderse predecir el comportamiento dinámico del sistema. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta es decir, si el sistema es estable o inestable. Un sistema estable se define como aquel que tiene una respuesta limitada. Es decir, se dice que el sistema es estable si estando sujeto a una entrada o perturbación limitada, su respuesta es de magnitud limitada.

Si se supone que se aplica un escalón « $1/s$ » a una transferencia $G(s) = y(s) / u(s)$ de un polo « $1/(1+s/s_1)$ ». La salida será

$$y(s) = 1 / [s \cdot (1+s/s_1)]$$

$$y(t) = 1 - e^{-ts_1} \quad (2.14)$$

Se tendrán tres posibles gráficas temporales, como también sus combinaciones, se muestran en la figura 2.7 como $y(t)$ y las ubicaciones de los polos en el plano complejo «s». Donde se observa finalmente que sólo el caso primero es estable. De esta manera, se redefine el concepto de estabilidad como «aquél sistema que no tenga ningún polo en el semiplano derecho», puesto que proveerá algún exponencial creciente y no controlable a su salida. En suma, se denomina a la ecuación del denominador de toda transferencia «ecuación característica», ya sea expresada como polinomio o como el producto de sus raíces, y es la que determinará, por la ubicación de dichas raíces, la estabilidad o no del sistema.

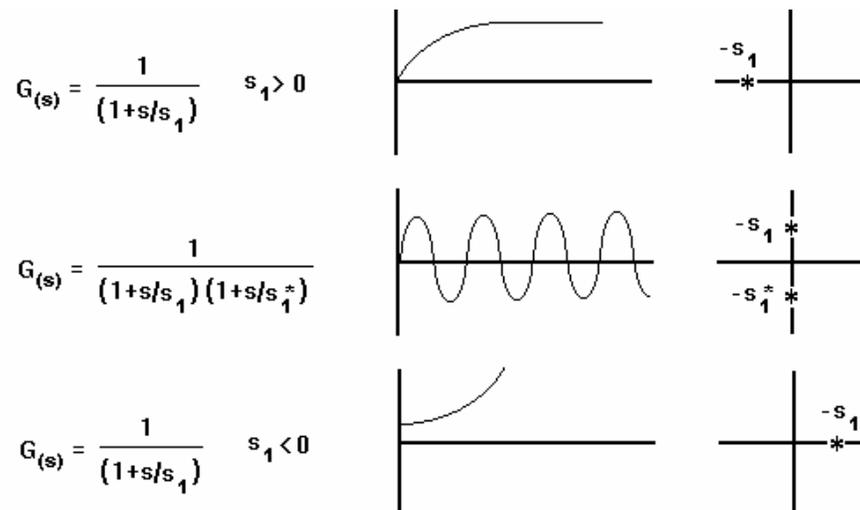


Figura 2.7. Respuesta dinámica

La definición de estabilidad adoptada y los criterios de equivalencia nos permiten decidir si una transferencia dada corresponde a un sistema estable o inestable. Basta ubicar la posición de los polos de esa transferencia para saberlo. Este es un criterio de estabilidad absoluto: es decir, nos informa si un sistema es estable o no. Muchas veces no alcanza con esa información: es necesario saber si un sistema es

estable, cuán cerca está de dejar de serlo. El concepto de estabilidad es aplicable a sistemas eléctricos de corriente alterna y se estudian tres casos:

- a) Estabilidad en casos transitorios (comprenden un período de tiempo de 0–1 seg).
- b) Estabilidad en estado dinámico (comprende un período de tiempo de 1–800 seg).
- c) Estabilidad en estado permanente (comprende un período de tiempo de 800 seg.).

De los casos anteriores el de mayor interés es el de estabilidad en estado transitorio. Se dice que un sistema es estable cuando todas sus máquinas o componentes permanecen en sincronismo o en paso.

Para que un sistema de control sea útil, lo primero que debe cumplir es que sea estable. Si el sistema es inestable no existe régimen permanente aunque numéricamente se puedan encontrar los valores de los límites en el dominio de Laplace. Por tanto, asegurar la estabilidad del sistema debe ser un paso importante en los sistemas o procesos, sea de cualquier naturaleza.

Se dice que un sistema es estable cuando:

- La respuesta del sistema al impulso tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.
- Ante una entrada finita le corresponde una salida también finita.

La localización de los polos de la función de transferencia resulta crucial en el régimen transitorio del sistema. Por tanto, no es de extrañar que la estabilidad del sistema pueda estar condicionada también por los polos del sistema. Es posible

deducir de la tabla de transformadas de Laplace que para que un sistema sea estable todos los polos deben estar localizados en el semiplano de s de parte real negativa. Evidentemente, esto se cumple cuando todos los polos tienen parte real negativa. Los polos del sistema son las raíces de la ecuación que resulta de igualar a cero el denominador de la función de transferencia del sistema. Esa ecuación se conoce con el nombre de ecuación característica del sistema. Por tanto, las raíces de la ecuación característica nos ofrecen información no sólo del transitorio del sistema, sino también de su estabilidad.

2.2.10.- Diseño de Sistemas de Control por Asignación de Polos

Es un método de diseño conocido comúnmente como técnica de ubicación, o de asignación de polos. Suponemos que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para la realimentación. Es importante destacar que si el sistema considerado es de estado completamente controlable, los polos del sistema en lazo cerrado se pueden ubicar en cualquier posición deseada mediante una realimentación del estado a través de una matriz de ganancias de realimentación del estado. La técnica de diseño empieza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria, y/o los requerimientos de la respuesta en frecuencia, tales como la velocidad, el factor de amortiguamiento relativo, o el ancho de banda, al igual que los requerimientos en estado estable. [6]

En el enfoque convencional del diseño de un sistema de control con una sola entrada y una sola salida, se diseñan un controlador (compensador) tal que los polos dominantes en lazo cerrado tengan un factor de amortiguamiento relativo ζ deseado y una frecuencia natural no amortiguada ω_n . En este enfoque, el orden del sistema aumenta en 1 o 2, a menos que ocurra una cancelación de polos o ceros. En este enfoque se supone que los efectos sobre las respuestas de los polos en lazo cerrado no dominantes son insignificantes. En lugar de especificar sólo los polos dominantes en

lazo cerrado (enfoque del diseño convencional), el enfoque actual de ubicación de polos especifica todos los polos en lazo cerrado. (Sin embargo, hay un costo asociado con ubicar todos los polos en lazo cerrado, porque hacerlo requiere de mediciones exitosas de todas las variables de estado, o bien requiere de la inclusión de un observador de estado en el sistema.) También existe un requerimiento en la parte del sistema para que los polos en lazo cerrado se ubiquen en posiciones elegidas en forma arbitraria. El requerimiento es que el sistema sea de estado completamente controlable.

CAPÍTULO 3: MODELOS MATEMÁTICOS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y SISTEMAS MECÁNICOS

3.1.- GENERALIDADES

En este capítulo se presentan los modelos matemáticos de circuitos eléctricos y sistemas mecánicos, utilizando leyes fundamentales de la electricidad y del equilibrio de fuerzas, representando las ecuaciones diferenciales y ecuaciones de variables de estado. Además, se compararan las ecuaciones diferenciales y de variables de estado de los circuitos eléctricos y sistemas mecánicos, identificando las analogías entre variables y parámetros.

3.2.- SISTEMAS MECÁNICOS

3.2.1.- Sistema Masa-Resorte-Amortiguador de segundo Orden

La figura 3.1 es un diagrama esquemático de un sistema masa-resorte-amortiguador. Se supone que la masa se mueve hacia abajo y luego se suelta.

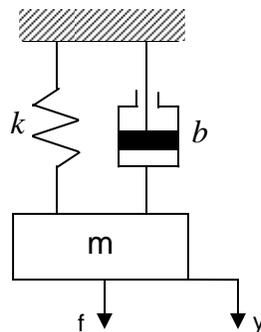


Figura 3.1. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador (Segundo Orden)

a) Modelo Matemático

La ecuación de equilibrio para la figura 3.1, es la siguiente:

$$ma + bv + ky = f \quad (3.1)$$

Donde:

a = aceleración	m = Masa del cuerpo
v = Velocidad	b = Coeficiente de fricción viscoso
y = Desplazamiento en el eje y	k = Constante o coeficiente de elasticidad del resorte
f = Fuerza Aplicada al cuerpo	

Reemplazando la aceleración y velocidad en función del desplazamiento en el eje y en la ecuación 3.1, se tiene:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = f$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f \quad (3.2)$$

b) Ecuaciones de Estado

Se utilizan las siguientes variables de estado:

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$x_2 = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$$

$$u = f$$

Utilizando las variables de estado en la ecuación (3.2) se tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.3)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \quad (3.4)$$

c) Matriz de Estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix} u(t) \quad (3.5)$$

d) Ecuación Matricial de Salida:

$$y = (1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

e) Función de Transferencia

Para obtener la función de transferencia del sistema mecánico, se utiliza la transformada de Laplace en la ecuación 3.2, de la siguiente manera:

$$ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = F(s)$$

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = F(s)$$

La función de transferencia a lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (3.7)$$

3.2.2.- Sistema Masa-Resorte-Amortiguador de Tercer Orden

La figura 3.2 es un diagrama esquemático de un sistema masa-resorte-amortiguador. Se supone que la masa se mueve hacia abajo y luego se suelta.

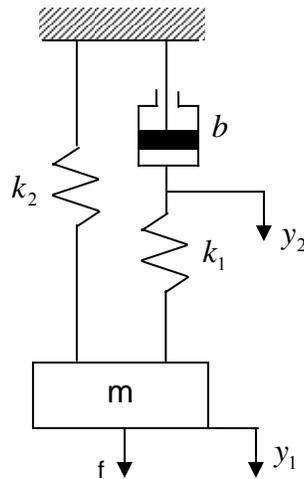


Figura 3.2. Sistema Masa-Resorte-Amortiguador (Tercer Orden)

a) Modelo Matemático

La ecuación de equilibrio para la figura 3.2, es la siguiente:

$$ma + k_1(y_1 - y_2) + k_2 y_1 = f \quad (3.8)$$

$$-k_1(y_1 - y_2) + bv = 0 \quad (3.9)$$

Donde:

a = aceleración

m = Masa del cuerpo

v = Velocidad

b = Coeficiente de fricción viscoso

y_1, y_2 = Desplazamiento en el eje y

k_1, k_2 = Constante o coeficiente de

f = Fuerza Aplicada al cuerpo

elasticidad de los resortes

Reemplazando la aceleración y velocidad en función del desplazamiento en el eje y en la ecuación 3.8 y 3.9, se tiene:

$$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k_1(y_1 - y_2) + k_2 y_1 = f \quad (3.10)$$

$$-k_1(y_1 - y_2) + b \frac{dy_2}{dt} = 0 \quad (3.11)$$

b) Ecuaciones de Estado

Se utilizan las siguientes variables de estado:

$$x_1 = y_1$$

$$\dot{x}_1 = \frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1$$

$$x_2 = \frac{dy_1}{dt} = \dot{x}_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \ddot{y}_1$$

$$x_3 = y_2$$

$$\dot{x}_3 = \frac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2$$

$$u = f$$

Reemplazando las variables de estado en las ecuaciones 3.10 y 3.11 se tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.12)$$

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right)x_1 + \frac{k_1}{m}x_3 + \frac{1}{m}f \quad (3.13)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{k_1}{b}x_1 - \frac{k_2}{b}x_3 \quad (3.14)$$

c) Matriz de Estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right) & 0 & \frac{k_1}{m} \\ \frac{k_1}{b} & 0 & -\frac{k_2}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (3.15)$$

d) Ecuación Matricial de Salida:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

e) Función de Transferencia

Para obtener la función de transferencia del sistema mecánico, se utiliza la transformada de Laplace en las ecuaciones 3.10 y 3.11, de la siguiente manera:

$$ms^2 Y_1(s) + (k_1 + k_2) Y_1(s) - k_1 Y_2(s) = F(s) \quad (3.17)$$

$$-k_1 Y_1(s) + k_1 Y_2(s) + bs Y_2(s) = 0 \quad (3.18)$$

Organizando la ecuación 3.17, se tiene

$$(ms^2 + k_1 + k_2) Y_1(s) - k_1 Y_2(s) = F(s)$$

Despejando $Y_1(s)$:

$$Y_1(s) = \frac{F(s) + k_1 Y_2(s)}{(ms^2 + k_1 + k_2)} \quad (3.19)$$

Organizando la ecuación 3.18, se tiene

$$-k_1 Y_1(s) + (bs + k_1) Y_2(s) = 0$$

Despejando $Y_1(s)$:

$$Y_1(s) = \frac{(bs + k_1)Y_2(s)}{k_1} \quad (3.20)$$

Igualando las ecuaciones 3.19 y 3.20, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{F(s) + k_1 Y_2(s)}{(ms^2 + k_1 + k_2)} &= \frac{(bs + k_1)Y_2(s)}{k_1} \\ k_1(F(s) + k_1 Y_2(s)) &= (ms^2 + k_1 + k_2)(bs + k_1)Y_2(s) \\ k_1 F(s) + k_1^2 Y_2(s) &= (mbs^3 + mk_1 s^2 + (k_1 + k_2)bs + (k_1 + k_2)k_1)Y_2(s) \\ k_1 F(s) &= \left[mbs^3 + mk_1 s^2 + (k_1 + k_2)bs + (k_1 + k_2)k_1 - k_1^2 \right] Y_2(s) \\ F(s) &= \left[\frac{mb}{k_1} s^3 + ms^2 + \frac{(k_1 + k_2)b}{k_1} s + (k_1 + k_2) - k_1 \right] Y_2(s) \\ \frac{Y_2(s)}{F(s)} &= \frac{1}{\frac{mb}{k_1} s^3 + ms^2 + \frac{(k_1 + k_2)b}{k_1} s + k_2} \\ \frac{Y_2(s)}{F(s)} &= \frac{k_1 / mb}{s^3 + \frac{k_1}{b} s^2 + \frac{(k_1 + k_2)}{m} s + \frac{k_1 k_2}{mb}} \end{aligned}$$

La función de transferencia a lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{k_1 / mb}{s^3 + \frac{k_1}{b} s^2 + \frac{(k_1 + k_2)}{m} s + \frac{k_1 k_2}{mb}} \quad (3.21)$$

3.3.- CIRCUITOS ELÉCTRICOS

3.3.1.- Circuito RLC de Segundo Orden

El circuito de la Figura 3.3, contiene elementos resistivos, inductivos y capacitivos, por tener dos elementos que varían con el tiempo se comporta como un circuito de segundo orden.

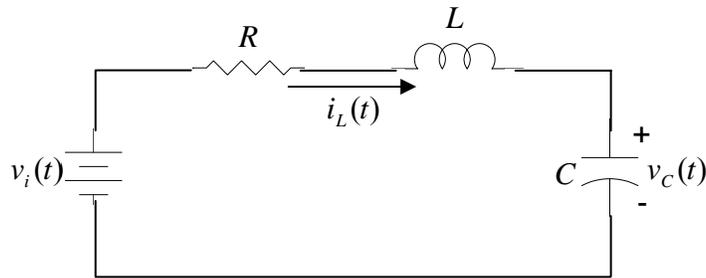


Figura 3.3. Circuito Serie de Segundo orden

a) Modelo Matemático

Utilizando las leyes de Kirchhoff, específicamente la ley de voltajes en el circuito en serie de la figura 3.3, se tiene:

$$-v_i(t) + Ri_L(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0 \quad (3.22)$$

Para colocar la ecuación 3.22 en función de $i_L(t)$ se considera:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3.23)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt \quad (3.24)$$

Reemplazando las ecuaciones 3.23 y 3.24 en la sumatoria de voltajes de la ecuación 3.22, se tiene:

$$Ri_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = v_i(t) \quad (3.25)$$

Derivando la ecuación 3.25, se tiene:

$$R \frac{di_L(t)}{dt} + L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i_C(t) = \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (3.26)$$

Organizando la ecuación 3.26, se tiene la siguiente ecuación de segundo orden:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i_L(t) = \frac{1}{L} \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (3.27)$$

Donde:

R = Resistencia

$i_L(t)$ = Corriente en el circuito

L = Inductancia

$v_i(t)$ = Voltaje de entrada

C = Capacitancia

b) Ecuaciones de Estado

Se utilizan las siguientes variables de estado:

$$x_1 = i_L(t)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$x_2 = \frac{di_L(t)}{dt} = \dot{x}_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}$$

$$u = \frac{dv_i(t)}{dt}$$

Reemplazando las variables de estado en las ecuaciones 3.27 se tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (3.28)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \quad (3.29)$$

c) Matriz de Estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u(t) \quad (3.30)$$

d) Ecuación Matricial de Salida:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

e) Función de Transferencia

Para obtener la función de transferencia del circuito eléctrico, se utiliza la transformada de Laplace en las ecuaciones 3.28 y 3.29, de la siguiente manera:

$$sX_1(s) = X_2(s) \quad (3.32)$$

$$sX_2(s) = -\frac{1}{LC} X_1(s) - \frac{R}{L} X_2(s) + \frac{1}{L} U(s) \quad (3.33)$$

Reemplazando la ecuación 3.32 en la ecuación 3.33, se tiene:

$$s^2 X_1(s) = -\frac{1}{LC} X_1(s) - \frac{R}{L} sX_1(s) + \frac{1}{L} U(s)$$

$$s^2 X_1(s) + \frac{1}{LC} X_1(s) + \frac{R}{L} sX_1(s) = \frac{1}{L} U(s)$$

$$\left[s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} \right] X_1(s) = \frac{1}{L} U(s)$$

$$X_1(s) = \frac{\frac{1}{L}}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}} U(s)$$

La función de transferencia a lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{L}}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}} \quad (3.34)$$

3.3.2.- Circuito RLC de Tercer Orden

El circuito de la Figura 3.4, contiene elementos resistivos, inductivos y capacitivos, por tener tres elementos que varían con el tiempo se comporta como un circuito de tercer orden.

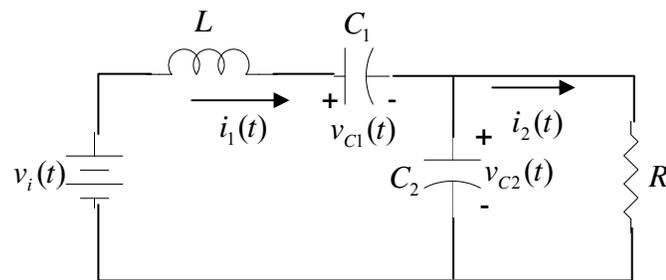


Figura 3.4. Circuito RLC de Tercer orden

a) Modelo Matemático

Utilizando las leyes de Kirchhoff, específicamente la ley de voltajes en mallas 1 y 2 de la figura 3.4, se tiene:

Malla 1:

$$-v_i(t) + v_L(t) + v_{C1}(t) + v_{C2}(t) = 0 \quad (3.35)$$

Malla 2:

$$-v_{C2}(t) + v_R = 0 \quad (3.36)$$

Para colocar la ecuación 3.22 en función de las corrientes se considera:

$$v_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} \quad (3.37)$$

$$v_{C1}(t) = \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt \quad (3.38)$$

$$v_{C_2}(t) = \frac{1}{C_2} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt \quad (3.39)$$

Reemplazando las ecuaciones 3.37, 3.38 y 3.39 en las ecuaciones 3.35 y 3.36 de la malla 1, se tiene:

$$-v_i(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt + \frac{1}{C_2} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt = 0 \quad (3.40)$$

$$-\frac{1}{C_2} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt + Ri_2(t) = 0 \quad (3.41)$$

Derivando las ecuaciones 3.40 y 3.41:

$$L \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_1(t) + \frac{1}{C_2} (i_1(t) - i_2(t)) = \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (3.42)$$

$$-\frac{1}{C_2} (i_1(t) - i_2(t)) + R \frac{di_2(t)}{dt} = 0 \quad (3.43)$$

Organizando las ecuaciones 3.42 y 3.43, se tienen las siguientes ecuaciones de segundo orden:

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) i_1(t) - \frac{1}{LC_2} i_2(t) = \frac{1}{L} \frac{dv_i(t)}{dt} \quad (3.42)$$

$$\frac{di_2(t)}{dt} - \frac{1}{RC_2} i_1(t) + \frac{1}{RC_2} i_2(t) = 0 \quad (3.43)$$

b) Ecuaciones de Estado

Se utilizan las siguientes variables de estado:

$$x_1 = i_1(t)$$

$$x_3 = i_2(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{di_1(t)}{dt} & \dot{x}_3 &= \frac{di_2(t)}{dt} \\ x_2 &= \frac{di_1(t)}{dt} = \dot{x}_1 & u &= \frac{dv_i(t)}{dt}\end{aligned}$$

Reemplazando las variables de estado en las ecuaciones 3.42 y 3.43 se tienen las siguientes ecuaciones de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{3.44}$$

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)x_1 + \frac{1}{LC_2}x_3 + \frac{1}{L}u \tag{3.45}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{RC_2}x_1 - \frac{1}{RC_2}x_3 \tag{3.46}$$

c) Matriz de Estado:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right) & 0 & \frac{1}{LC_2} \\ \frac{1}{RC_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \tag{3.47}$$

d) Ecuación Matricial de Salida:

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

e) Función de Transferencia

Para obtener la función de transferencia $X_3(s)/U(s)$ del circuito eléctrico, se utiliza la transformada de Laplace en las ecuaciones 3.44, 3.45 y 3.46, de la siguiente manera:

$$sX_1(s) = X_2(s) \quad (3.49)$$

$$sX_2(s) = -\left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)X_1(s) + \frac{1}{LC_2}X_3(s) + \frac{1}{L}sU(s) \quad (3.50)$$

$$sX_3(s) = \frac{1}{RC_2}X_1(s) - \frac{1}{RC_2}X_3(s) \quad (3.51)$$

Reemplazando la ecuación 3.49 en la ecuación 3.50, se tiene:

$$s^2X_1(s) = -\left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)X_1(s) + \frac{1}{LC_2}X_3(s) + \frac{1}{L}sU(s)$$

$$\left[s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)\right]X_1(s) = \frac{1}{LC_2}X_3(s) + \frac{1}{L}sU(s)$$

$$X_1(s) = \frac{\left[\frac{1}{LC_2}X_3(s) + \frac{1}{L}sU(s)\right]}{\left[s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)\right]} \quad (3.52)$$

Reemplazando la ecuación 3.52 en la ecuación 3.51, se tiene:

$$sX_3(s) = \frac{1}{RC_2} \frac{\left[\frac{1}{LC_2}X_3(s) + \frac{1}{L}sU(s)\right]}{\left[s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)\right]} - \frac{1}{RC_2}X_3(s)$$

$$\begin{aligned}
s \left[s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) \right] X_3(s) &= \frac{1}{RC_2} \left[\frac{1}{LC_2} X_3(s) + \frac{1}{L} sU(s) \right] - \frac{1}{RC_2} \left[s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) \right] X_3(s) \\
\left[s^3 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) s \right] X_3(s) &= \frac{1}{RLC_2^2} X_3(s) + \frac{1}{RLC_2} sU(s) - \left[\frac{1}{RC_2} s^2 + \frac{1}{RC_2} \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) \right] X_3(s) \\
\left[s^3 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) s - \frac{1}{RLC_2^2} + \frac{1}{RC_2} s^2 + \frac{1}{RC_2} \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) \right] X_3(s) &= \frac{1}{RLC_2} sU(s) \\
\left[s^3 + \frac{1}{RC_2} s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) s + \frac{1}{RLC_2} \left(\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) - \frac{1}{C_2} \right) \right] X_3(s) &= -\frac{1}{RLC_2} sU(s)
\end{aligned}$$

La función de transferencia a lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{RLC_2} s}{\left[s^3 + \frac{1}{RC_2} s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) s + \frac{1}{RLC_2} \frac{1}{C_1} \right]} \quad (3.53)$$

3.4.- COMPARACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS ENTRE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y SISTEMAS MECÁNICOS

Para comparar los modelos matemáticos entre los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos se muestra en la Tabla 3.1, un resumen de las ecuaciones diferenciales, variables de estado, ecuaciones de estado y función de transferencia, para los sistemas de segundo orden y en la Tabla 3.2, un resumen de las ecuaciones diferenciales, variables de estado, ecuaciones de estado y función de transferencia, para los sistemas de Tercer orden

Tabla 3.1. Resumen del sistema mecánico y circuito eléctrico de segundo orden

	SISTEMA MECANICO	CIRCUITO ELECTRICO
Ecuaciones generales	$ma + bv + ky = f$	$-v_i(t) + Ri_L(t) + v_L(t) + v_C(t) = 0$
Ecuación diferencial	$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = f$	$R \frac{di_L(t)}{dt} + L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i_C(t) = \frac{dv_i(t)}{dt}$
Variables de estado	$x_1 = y, \dot{x}_1 = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ $x_2 = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \dot{x}_2 = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$ $u = f$	$x_1 = i_L(t), \dot{x}_1 = \frac{di_L(t)}{dt}$ $x_2 = \frac{di_L(t)}{dt} = \dot{x}_1, \dot{x}_2 = \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}$ $u = \frac{dv_i(t)}{dt}$
Ecuaciones de estado	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{b}{m} x_2 + \frac{1}{m} u$	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$
Función de transferencia	$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$	$G(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$

Tabla 3.2. Resumen del sistema mecánico y circuito eléctrico de Tercer orden

	SISTEMA MECANICO	CIRCUITO ELECTRICO
Ecuaciones generales	$ma + k_1(y_1 - y_2) + k_2 y_1 = f$ $k_1(y_1 - y_2) + bv = 0$	$-v_i(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C_1} \int i_1(t) dt + \frac{1}{C_2} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt = 0$ $-\frac{1}{C_2} \int (i_1(t) - i_2(t)) dt + Ri_2(t) = 0$
Ecuación diferencial	$m \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k_1(y_1 - y_2) + k_2 y_1 = f$ $k_1(y_1 - y_2) + b \frac{dy_2}{dt} = 0$	$L \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_1(t) + \frac{1}{C_2} (i_1(t) - i_2(t)) = \frac{dv_i(t)}{dt}$ $-\frac{1}{C_2} (i_1(t) - i_2(t)) + R \frac{di_2(t)}{dt} = 0$
Variables de estado	$x_1 = y_1 \quad \dot{x}_1 = \frac{dy_1}{dt} = \dot{y}_1 \quad x_2 = \frac{dy_1}{dt} = \dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 = \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \ddot{y}_1$ $x_3 = y_2 \quad \dot{x}_3 = \frac{dy_2}{dt} = \dot{y}_2 \quad u = f$	$x_1 = i_1(t), \quad \dot{x}_1 = \frac{di_1(t)}{dt} \quad x_2 = \frac{di_1(t)}{dt} = \dot{x}_1, \quad \dot{x}_2 = \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2}$ $x_3 = i_2(t), \quad \dot{x}_3 = \frac{di_2(t)}{dt} \quad u = \frac{dv_i(t)}{dt}$
Ecuaciones de estado	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = -\left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right)x_1 + \frac{k_1}{m}x_3 + \frac{1}{m}f$ $\dot{x}_3 = \frac{k_1}{b}x_1 - \frac{k_2}{b}x_3$	$\dot{x}_1 = x_2$ $\dot{x}_2 = -\left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)x_1 + \frac{1}{LC_2}x_3 + \frac{1}{L}u$ $\dot{x}_3 = \frac{1}{RC_2}x_1 - \frac{1}{RC_2}x_3$

		SISTEMA MECANICO	CIRCUITO ELECTRICO
Función transferencia	de	$G(s) = \frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{\frac{k_1}{mb}}{s^3 + \frac{k_1}{b}s^2 + \frac{(k_1 + k_2)}{m}s + \frac{k_1 k_2}{mb}}$	$G(s) = \frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{RLC_2} s}{\left[s^3 + \frac{1}{RC_2} s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right) s + \frac{1}{RLC_2} \frac{1}{C_1} \right]}$

De las tablas 3.1 y 3.2 se pueden sacar las similitudes de los modelos matemáticos de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos. En las tablas 3.3 y 3.4 se muestran la analogía entre los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos de segundo y tercer orden respectivamente, detallando las analogías entre variables y parámetros.

Tabla 3.3. Analogía entre variables y parámetros de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos de segundo orden

	SISTEMA MECANICO	CIRCUITO ELECTRICO
Ecuaciones generales	Ecuaciones de equilibrio (Sumatoria de fuerzas en un cuerpo en equilibrio es igual a cero)	Leyes de Kirchoff (Sumatoria de voltajes en una malla es cero)
Variable principal	Desplazamiento en el eje $y(t)$	Corriente eléctrica $i_L(t)$
Coefficientes (Parámetros)	$A_1 = \frac{k}{m}$ $A_2 = \frac{b}{m}$ $A_3 = \frac{1}{m}$	$A_1 = \frac{1}{LC}$ $A_2 = \frac{R}{L}$ $A_3 = \frac{1}{L}$
Ecuaciones diferenciales	$\frac{d^2 y}{dt^2} + A_2 \frac{dy}{dt} + A_1 y = A_3 f$	$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + A_2 \frac{di_L(t)}{dt} + A_1 i_C(t) = A_3 \frac{dv_i(t)}{dt}$
Función de transferencia	$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{A_3}{s^2 + A_2 s + A_1}$	$G(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{A_3 s}{s^2 + A_2 s + A_1}$
ANALOGIA	$y(t) \approx i_L(t)$ $m \approx L$ $b \approx R$ $k \approx \frac{1}{C}$	

Tabla 3.4. Analogía entre variables y parámetros de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos de Tercer orden

	SISTEMA MECANICO	CIRCUITO ELECTRICO
Ecuaciones generales	Ecuaciones de equilibrio (Sumatoria de fuerzas en un cuerpo en equilibrio es igual a cero)	Leyes de Kirchhoff (Sumatoria de voltajes en una malla es cero)
Variable principal	Desplazamiento 1 en el eje y $y_1(t)$ Desplazamiento 2 en el eje y $y_2(t)$	Corriente eléctrica en malla 1 $i_1(t)$ Corriente eléctrica en malla 2 $i_2(t)$
Coefficientes (Parámetros)	$A_2 = \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right)$ $A_2 = \frac{k_1}{m}$ $A_3 = \frac{1}{m}$ $B_1 = B_2 = \frac{k_1}{b}$	$A_1 = \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right)$ $A_2 = \frac{1}{LC_2}$ $A_3 = \frac{1}{L}$ $B_1 = B_2 = \frac{1}{RC_2}$
Ecuaciones diferenciales	$\frac{d^2 y_1}{dt^2} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right) y_1 + \frac{k_1}{m} y_2 = \frac{1}{m} f$	$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right) i_1(t) - \frac{1}{LC_2} i_2(t) = \frac{1}{L} \frac{dv_i(t)}{dt}$ $\frac{di_2(t)}{dt} - \frac{1}{RC_2} i_1(t) + \frac{1}{RC_2} i_2(t) = 0$
Función de transferencia	$G(s) = \frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{k_1/m}{s^3 + \frac{k_1}{b} s^2 + \frac{(k_1 + k_2)}{m} s + \frac{k_1 k_2}{mb}}$	$G(s) = \frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{RLC_2} s}{\left[s^3 + \frac{1}{RC_2} s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right) s + \frac{1}{RLC_2 C_1} \right]}$
ANALOGIA	$y_1(t) \approx i_1(t)$ $y_2(t) \approx i_2(t)$ $m \approx L$ $b \approx R$ $k_1 \approx \frac{1}{C_1}$ $k_2 \approx \frac{1}{C_2}$	

CAPÍTULO 4: DISEÑO DE CONTROLADORES EN CONFIGURACIÓN CASCADA

4.1.- GENERALIDADES

En este capítulo se desarrolla el diseño de controladores utilizando conceptos de estabilidad, error en estado estacionario y respuesta en el tiempo, mediante factor de amortiguamiento y frecuencia natural. En este capítulo se asignaran valores a los diferentes parámetros mecánicos y eléctricos y se obtendrán la respuesta en lazo abierto y en lazo cerrado con el controlador diseñado. Para las respuestas de los sistemas se utilizarán diagramas de bloques y se simularán mediante simulink.

4.2.- SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

4.2.1.- Sistema Mecánico y Circuito Eléctrico de Segundo Orden

a) Características del sistema en lazo abierto

Teniendo en cuenta las ecuaciones de estado 3.3 y 3.4 y reemplazando los siguientes valores $k = 7 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$ y $b = 2 \text{ N.s/m}$, se tiene:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -0.7x_1 - 0.2x_2 + 0.1u$$

De igual manera en las ecuaciones de estado 3.28 y 3.29 y reemplazando los siguientes valores $C = \frac{1}{7} \text{ F}$, $L = 10 \text{ H}$ y $R = 2 \Omega$, se tiene:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -0.7x_1 - 0.2x_2 + 0.1u$$

Las ecuaciones de estado son idénticas, utilizando la analogía de variables y parámetros de la tabla 3.3, aquí se considera los elementos de almacenamiento de energía y variables de estado. La matriz de estado para los sistemas eléctrico y mecánico de segundo orden será:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -0.7 & -0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} u(t) \quad (4.1)$$

La función de transferencia a lazo abierto del sistema es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.1}{s^2 + 0.2s + 0.7} \quad (4.2)$$

El diagrama de bloques del sistema mecánico de segundo orden utilizado en simulink se muestra en la figura 4.1 y la respuesta del sistema a una entrada escalón (fuerza constante) de magnitud de 1N, se muestra en la figura 4.2.

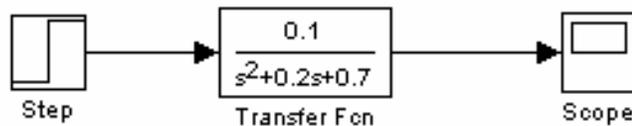


Figura 4.1. Diagrama de bloques en lazo abierto del sistema mecánico de segundo orden

En la figura 4.2 se muestra que los sistemas de segundo orden presentan una respuesta en lazo abierto de tipo subamortiguada con un factor de amortiguamiento $\zeta = 0.12$ y una frecuencia $\omega_n = 0.84$, lo que hace que el sistema resorte-amortiguador y el circuito RLC tengan un comportamiento casi oscilatorio, lo que no es adecuado, porque lo que se busca es que el sistema se estabilice en un tiempo mínimo.

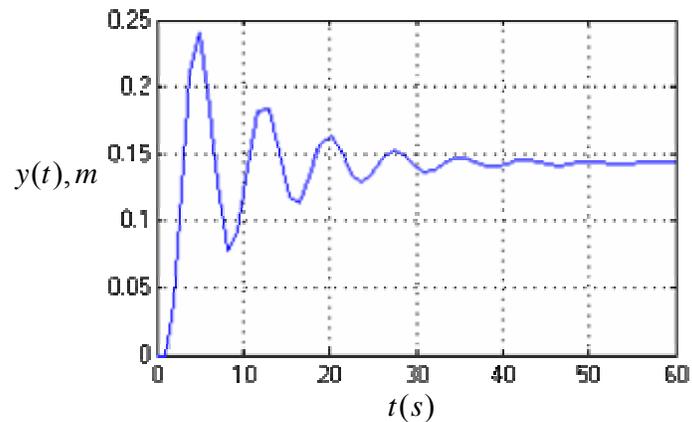


Figura 4.2. Respuesta en lazo abierto del sistema mecánico de segundo orden

b) Diseño del controlador

En la figura 4.3 se muestra el sistema mecánico en lazo cerrado con el controlador en cascada.

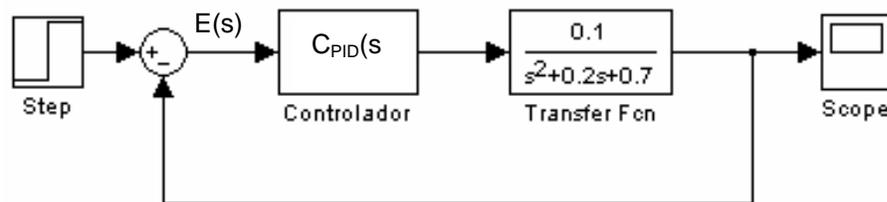


Figura 4.3. Respuesta en lazo cerrado con el controlador en cascada del sistema mecánico de segundo orden

Para el diseño del controlador se consideran las siguientes condiciones:

- Que el controlador sea de tipo PID (Proporcional Integrar Derivativo)
- Que el sistema sea estable
- Que el Error en estado estacionario sea de 1%
- Que el sistema sea sobreamortiguado y que el valor en estado estacionario se logre en un tiempo menor a 1 seg.

Se inicia el diseño del controlador considerando que $C_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$

Dado que el controlador presenta tres parámetros a conseguir K_p , T_i y T_d , estos parámetros se conseguirán con las tres condiciones anteriores de estabilidad, error y respuesta del sistema. Para que el sistema sea estable, lo primero que se hará es obtener la función de transferencia del sistema en lazo cerrado.

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\left(\frac{0.1}{s^2 + 0.2s + 0.7} \right) \left[K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \right]}{1 + \left(\frac{0.1}{s^2 + 0.2s + 0.7} \right) \left[K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \right]}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\left(\frac{0.1}{s^2 + 0.2s + 0.7} \right) \left[K_p \left(\frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s} \right) \right]}{1 + \left(\frac{0.1}{s^2 + 0.2s + 0.7} \right) \left[K_p \left(\frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s} \right) \right]}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\frac{0.1 K_p (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s (s^2 + 0.2s + 0.7)}}{1 + \frac{0.1 K_p (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s (s^2 + 0.2s + 0.7)}}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.1 K_p (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s (s^2 + 0.2s + 0.7) + 0.1 K_p (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.1 K_p (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s^3 + 0.2 T_i s^2 + 0.7 T_i s + 0.1 K_p T_i s + 0.1 K_p + 0.1 K_p T_i T_d s^2}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.1 K_p (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s^3 + (0.2 T_i + 0.1 K_p T_i T_d) s^2 + (0.7 T_i + 0.1 K_p T_i) s + 0.1 K_p}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.1 K_p \left(s + \frac{1}{T_i} + T_d s^2 \right)}{s^3 + (0.2 + 0.1 K_p T_d) s^2 + (0.7 + 0.1 K_p) s + 0.1 \frac{K_p}{T_i}}$$

Luego de obtener la función de transferencia se muestra que el polinomio característico del sistema resorte-amortiguador de segundo orden es el siguiente:

$$p_{LC}(s) = s^3 + (0.2 + 0.1K_p T_d)s^2 + (0.7 + 0.1K_p)s + 0.1\frac{K_p}{T_i} \quad (4.3)$$

Por último para hacer que el sistema sea estable se utiliza el criterio de estabilidad de Routh Hurwitz, el arreglo se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rcc} s^3 & 1 & (0.7 + 0.1K_p) \\ s^2 & (0.2 + 0.1K_p T_d) & 0.1\frac{K_p}{T_i} \\ s^1 & b_1 & b_2 \\ s^0 & c_1 & c_2 \end{array}$$

Donde:

$$b_1 = \frac{(0.2 + 0.1K_p T_d)(0.7 + 0.1K_p) - 0.1\frac{K_p}{T_i}}{(0.2 + 0.1K_p T_d)}, \quad b_2 = 0$$

$$c_1 = \frac{0.1b_1\frac{K_p}{T_i} - 0}{b_1} = 0.1\frac{K_p}{T_i}$$

Con estos valores el Arreglo queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcc} s^3 & 1 & (0.7 + 0.1K_p) \\ s^2 & (0.2 + 0.1K_p T_d) & 0.1\frac{K_p}{T_i} \\ s^1 & \frac{(0.2 + 0.1K_p T_d)(0.7 + 0.1K_p) - 0.1\frac{K_p}{T_i}}{(0.2 + 0.1K_p T_d)} & \\ s^0 & 0.1\frac{K_p}{T_i} & \end{array}$$

Para que el sistema sea estable se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$(0.2 + 0.1K_p T_d) > 0, \quad \frac{(0.2 + 0.1K_p T_d)(0.7 + 0.1K_p) - 0.1 \frac{K_p}{T_i}}{(0.2 + 0.1K_p T_d)} > 0 \quad \text{y} \quad 0.1 \frac{K_p}{T_i} > 0$$

Con las condiciones anteriores, para que el sistema sea estable deben cumplirse lo siguiente:

$$\frac{K_p}{T_i} > 0 \quad (4.4)$$

$$K_p > -\frac{2}{T_d} \quad (4.5)$$

$$T_d > \frac{1}{T_i(0.7 + 0.1K_p)} - \frac{0.2}{0.1K_p} \quad (4.6)$$

Estas condiciones serán probadas al final con los datos obtenidos de las condiciones de error en estado estacionario y respuesta del sistema.

Para que el error en estado estacionario sea de 1%, se hace uso de la figura 3.7, siguiendo el procedimiento que a continuación se muestra:

$$E(s) = U(s) - Y(s) \quad (4.7)$$

$$Y(s) = \frac{0.1C_{PID}E(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7} \quad (4.8)$$

Se reemplaza la ecuación 3.60 en 3.61.

$$Y(s) = \frac{0.1C_{PID}[U(s) - Y(s)]}{s^2 + 0.2s + 0.7}$$

$$Y(s) = \frac{0.1C_{PID}U(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7} - \frac{0.1C_{PID}Y(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7}$$

$$Y(s) + \frac{0.1C_{PID}Y(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7} = \frac{0.1C_{PID}U(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7}$$

$$\left[1 + \frac{0.1C_{PID}}{s^2 + 0.2s + 0.7} \right] Y(s) = \frac{0.1C_{PID}U(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7}$$

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{0.1C_{PID}U(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7} \frac{1}{\left[1 + \frac{0.1C_{PID}}{s^2 + 0.2s + 0.7}\right]} \\
 Y(s) &= \frac{0.1C_{PID}U(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7} \frac{s^2 + 0.2s + 0.7}{s^2 + 0.2s + 0.7 + 0.1C_{PID}} \\
 Y(s) &= \frac{0.1C_{PID}U(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7 + 0.1C_{PID}} \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

El error en estado estacionario está definido por:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[U(s) - Y(s)] \tag{4.10}$$

Reemplazando la ecuación 3.61 en la ecuación 3.62.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[U(s) - \frac{0.1C_{PID}U(s)}{s^2 + 0.2s + 0.7 + 0.1C_{PID}} \right]$$

Si se considera que la entrada $U(s) = 1/s$, es decir, tipo escalón unitario, se tendrá el siguiente error:

$$\begin{aligned}
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{0.1C_{PID}}{s^2 + 0.2s + 0.7 + 0.1C_{PID}} \right] \frac{1}{s} \\
 e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.1C_{PID}}{s^2 + 0.2s + 0.7 + 0.1C_{PID}} \right] \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Se reemplaza el controlador PID en la ecuación 3.63.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.1K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)}{s^2 + 0.2s + 0.7 + 0.1K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)} \right]$$

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\frac{0.1K_p}{T_i s} (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{s^2 + 0.2s + 0.7 + \frac{0.1K_p}{T_i s} (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)} \right] \\
e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\frac{0.1K_p}{T_i s} (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{\frac{T_i s^3 + 0.2T_i s^2 + 0.7T_i s + 0.1K_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{T_i s}} \right] \\
e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.1K_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{T_i s^3 + 0.2T_i s^2 + 0.7T_i s + 0.1K_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)} \right] \\
e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.1K_p (T_i(0) + 1 + T_d T_i(0)^2)}{T_i(0)^3 + 0.2T_i(0)^2 + 0.7T_i(0) + 0.1K_p (T_i(0) + 1 + T_d T_i(0)^2)} \right] \\
e_{ss} &= \frac{0.1K_p}{0.1K_p} = 1\% \tag{4.12}
\end{aligned}$$

La última condición está referida a la respuesta del sistema en lazo cerrado, la cual deberá ser de tipo sobreamortiguada y que se estabilice en un tiempo menor de 1seg, para su comparación se utilizará el polinomio característico de la ecuación 4.3 y se propone el polinomio con las características deseadas, considerando un factor de amortiguamiento de 1.3, para la frecuencia se tiene en cuenta que el tiempo de estabilidad sea de 0.8 s, menor al de 1s.

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 0.8s \quad ; \quad \omega_n = 3.85 \text{ rad/s}$$

Con los datos de factor de amortiguamiento y frecuencia natural, se tendrá el siguiente polinomio característico deseado:

$$\begin{aligned}
p_{LC}(s) &= (s + \alpha)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \\
p_{LC}(s) &= (s + \alpha)(s^2 + 10.01s + 14.82)
\end{aligned}$$

Se considera $\alpha = \zeta\omega_n = 1.3(3.85) = 5$, por lo tanto el polinomio deseado queda como sigue:

$$p_{LC}(s) = (s + 5)(s^2 + 10.01s + 14.82)$$

$$p_{LC}(s) = s^3 + 15.01s^2 + 64.87s + 74.1 \quad (4.14)$$

Comparando los polinomios deseados y característicos del sistema de las ecuaciones 3.56 y 3.66.

$$0.2 + 0.1K_p T_d = 15.01 \quad (4.15)$$

$$0.7 + 0.1K_p = 64.87 \quad (4.16)$$

$$0.1 \frac{K_p}{T_i} = 74.1 \quad (4.17)$$

De las ecuaciones 3.67, 3.68 y 3.69 se obtienen los parámetros necesarios para el controlador PID. Los parámetros son:

$$K_p = 641.7$$

$$T_d = 0.23$$

$$T_i = 0.87$$

Con estos valores se tendrá el siguiente controlador PID:

$$C_{PID}(s) = 641.7 \left(1 + \frac{1}{0.87s} + 0.23s \right)$$

$$C_{PID}(s) = \frac{147.6s^2 + 641.7s + 737.6}{s}$$

$$C_{PID}(s) = 147.6s + 641.7 + \frac{737.6}{s}$$

El diagrama de bloques del sistema mecánico de segundo orden con el controlador utilizado en simulink se muestra en la figura 4.4 y la respuesta del sistema a una entrada escalón (fuerza constante) de magnitud de 1N, se muestra en la figura 4.5.

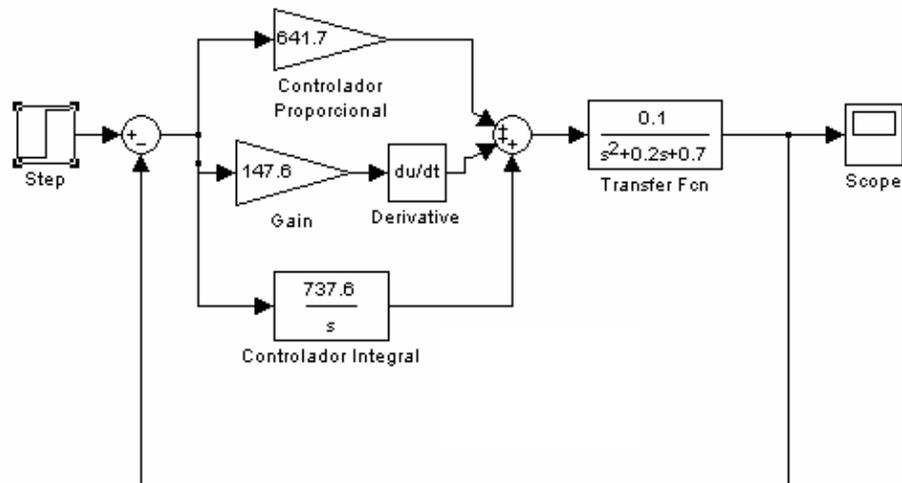


Figura 4.4. Diagrama de bloques en lazo cerrado con el controlador PID del sistema mecánico de segundo orden

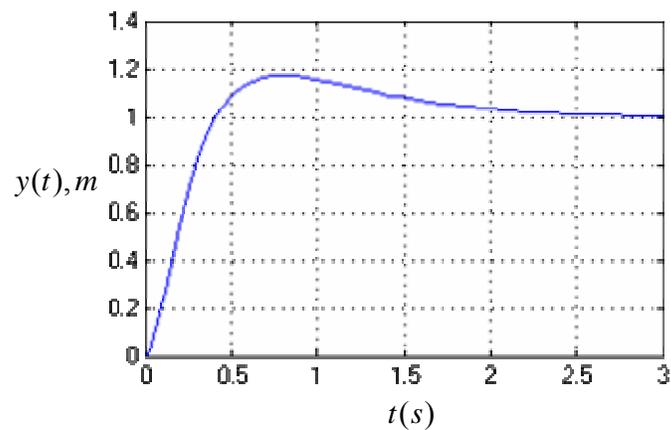


Figura 4.5. Respuesta en lazo cerrado con el controlador PID del sistema mecánico de segundo orden

4.2.2.- Sistema Mecánico y Circuito Eléctrico de Tercer Orden

a) Características del sistema en lazo abierto

Teniendo en cuenta las ecuaciones de estado 3.12, 3.13 y 3.14 y reemplazando los siguientes valores $k_1 = 5 \text{ N/m}$, $k_2 = 5 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$ y $b = 2 \text{ N.s/m}$, se tiene:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.18)$$

$$\dot{x}_2 = -1x_1 + 0.5x_3 + 0.1f \quad (4.19)$$

$$\dot{x}_3 = 2.5x_1 - 2.5x_3 \quad (4.20)$$

De igual manera en las ecuaciones de estado 3.44, 3.45 y 3.46 y reemplazando los siguientes valores $C_1 = \frac{1}{5} F$, $C_2 = \frac{1}{5} F$, $L = 10 H$ y $R = 2 \Omega$, se tiene:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.21)$$

$$\dot{x}_2 = -1x_1 + 0.5x_3 + 0.1u \quad (4.22)$$

$$\dot{x}_3 = 2.5x_1 - 2.5x_3 \quad (4.23)$$

Las ecuaciones de estado 4.18, 4.19 y 4.21 y 4.21 son idénticas, lo que arrojará funciones de transferencia iguales y por lo tanto polinomios característicos iguales. Esta similitud en las ecuaciones se debe a la utilización de la analogía de variables y parámetros de la tabla 3.3, aquí se consideran los elementos de almacenamiento de energía y variables de estado. La matriz de estado y la función de transferencia para cada sistema se muestra a en la tabla 4.1.

Tabla 4.1. Ecuación de estado y función de transferencia para los sistemas mecánico y eléctrico de tercer orden

Sistema mecánico:	Ecuación de Estado	$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5 \\ 2.5 & 0 & -2.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$
	Función de Transferencia	$G(s) = \frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{0.25}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}$
Circuito eléctrico	Ecuación de Estado	$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0.5 \\ 2.5 & 0 & -2.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$
	Función de Transferencia	$G(s) = \frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{0.25s}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}$

El diagrama de bloques de los sistemas mecánico y eléctrico de tercer orden serán utilizando en simulink se muestran en las figuras 4.6 y 4.7 respectivamente y la respuesta del sistema a una entrada escalón (fuerza y tensión eléctrica) de magnitud de 1N y 1V respectivamente, se muestran en las figuras 4.8 y 4.9.

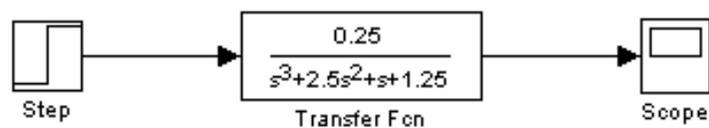


Figura 4.6. Diagrama de bloques en lazo abierto del sistema mecánico de tercer orden

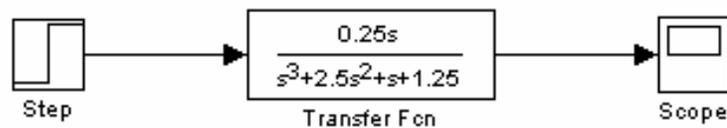


Figura 4.7. Diagrama de bloques en lazo abierto del sistema eléctrico de tercer orden

En la figura 4.8 se muestra que el sistema de tercer orden mecánico presenta una respuesta en lazo abierto de tipo subamortiguada con un factor de amortiguamiento $\zeta = 0.8$ y una frecuencia $\omega_n = 1.2$, lo que hace que el sistema resorte-amortiguador se estabilice alrededor de los 50 seg. En la figura 4.9 se muestra que el circuito RLC presenta un comportamiento también subamortiguado, pero con mucha oscilación y esto se debe a la presencia del cero en cero, lo que ocasiona que el circuito sea marginalmente estable, aunque los polinomios característicos del sistema mecánico y el circuito eléctrico sean iguales.

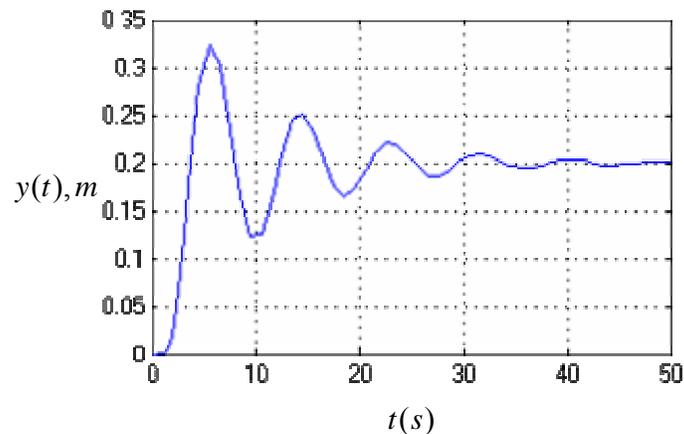


Figura 4.8. Respuesta en lazo abierto del sistema mecánico de tercer orden

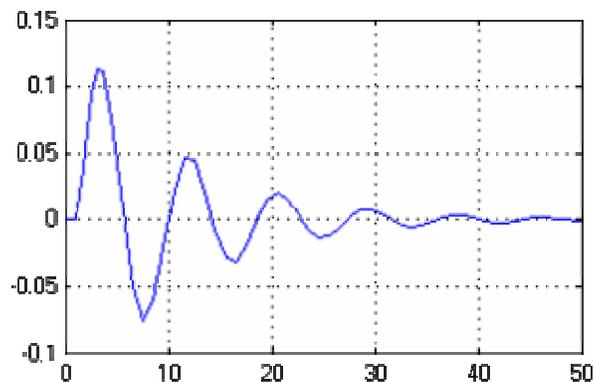


Figura 4.9. Respuesta en lazo abierto del sistema eléctrico de tercer orden

Se diseñará un controlador PID para que el sistema mecánico y eléctrico se vuelvan sobreamortiguado con un tiempo de estabilidad menor y un pico máximo positivo.

c) Diseño del controlador

En la figura 4.10 y 4.11 se muestran el sistema mecánico y el circuito eléctrico en lazo cerrado con el controlador en cascada.

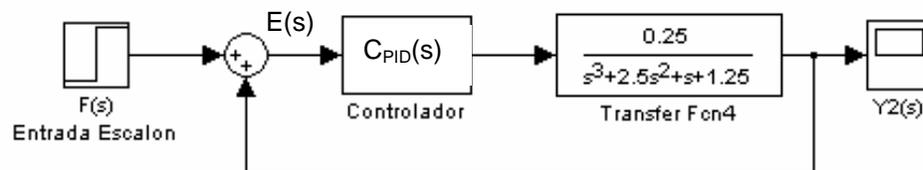


Figura 4.10. Respuesta en lazo cerrado con el controlador en cascada del sistema mecánico de tercer orden

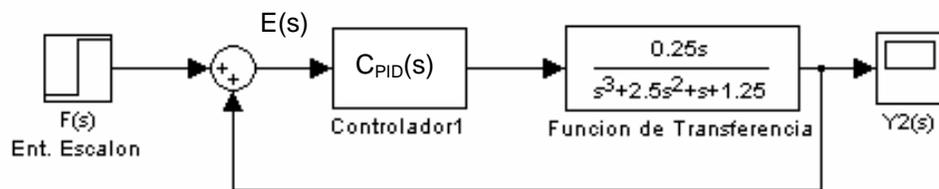


Figura 4.11. Respuesta en lazo cerrado con el controlador en cascada del sistema mecánico de tercer orden

Para el diseño del controlador se consideran las siguientes condiciones:

- Que el controlador sea de tipo PID (Proporcional Integrar Derivativo)
- Que el sistema sea estable
- Que el error en estado estacionario sea de 1%
- Que el sistema sea sobreamortiguado y que el valor en estado estacionario se logre en un tiempo menor a 3 seg.

Para el diseño del controlador se tomará el caso del circuito eléctrico por tener un cero marginalmente estable, esto asegurará que tanto para el sistema mecánico como para el eléctrico se consiguen las condiciones de sobreamortiguamiento y tiempo de estabilidad.

Se inicia el diseño del controlador considerando que $C_{PID}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$

Dado que el controlador presenta tres parámetros a conseguir K_p , T_i y T_d , estos parámetros se conseguirán con las tres condiciones anteriores de estabilidad, error y respuesta del sistema. Para que el sistema sea estable, lo primero que se hará es obtener la función de transferencia del sistema en lazo cerrado.

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\left(\frac{0.25s}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} \right) \left[K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \right]}{1 + \left(\frac{0.25s}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} \right) \left[K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \right]}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\left(\frac{0.25s}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} \right) \left[K_p \left(\frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s} \right) \right]}{1 + \left(\frac{0.25s}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} \right) \left[K_p \left(\frac{T_i s + 1 + T_i T_d s^2}{T_i s} \right) \right]}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\frac{0.25K_p s (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s (s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25)}}{1 + \frac{0.25K_p s (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s (s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25)}}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.25K_p s (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s (s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25) + 0.25K_p s (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.25K_p s (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s^4 + 2.5T_i s^3 + T_i s^2 + 1.25T_i s + 0.25K_p T_i s^2 + 0.25K_p s + 0.25K_p T_i T_d s^3}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.25K_p s(T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s^4 + (2.5T_i + 0.25K_p T_i T_d)s^3 + (T_i + 0.25K_p T_i)s^2 + (1.25T_i + 0.25K_p)s}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.25K_p (T_i s + 1 + T_i T_d s^2)}{T_i s^3 + (2.5T_i + 0.25K_p T_i T_d)s^2 + (T_i + 0.25K_p T_i)s + (1.25T_i + 0.25K_p)}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.25K_p \left(s + \frac{1}{T_i} + T_d s^2 \right)}{s^3 + (2.5 + 0.25K_p T_d)s^2 + (1 + 0.25K_p)s + (1.25 + 0.25 \frac{K_p}{T_i})}$$

Luego de obtener la función de transferencia se muestra que el polinomio característico del sistema resorte-amortiguador de segundo orden es el siguiente:

$$p_{LC}(s) = s^3 + (2.5 + 0.25K_p T_d)s^2 + (1 + 0.25K_p)s + (1.25 + 0.25 \frac{K_p}{T_i}) \quad (4.24)$$

Por último para hacer que el sistema sea estable se utiliza el criterio de estabilidad de Routh Hurwitz, el arreglo se muestra a continuación:

s^3	1	$(1 + 0.25K_p)$
s^2	$(2.5 + 0.25K_p T_d)$	$(1.25 + 0.25 \frac{K_p}{T_i})$
s^1	b_1	b_2
s^0	c_1	c_2

Donde:

$$b_1 = \frac{(2.5 + 0.25K_p T_d)(1 + 0.25K_p) - (1.25 + 0.25 \frac{K_p}{T_i})}{(2.5 + 0.25K_p T_d)}, \quad b_2 = 0$$

$$c_1 = \frac{b_1(1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i}) - 0}{b_1} = (1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})$$

Con estos valores el Arreglo queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ (2.5 + 0.25K_p T_d) \\ \frac{(2.5 + 0.25K_p T_d)(1 + 0.25K_p) - (1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})}{(2.5 + 0.25K_p T_d)} \\ (1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i}) \end{array} \begin{array}{r} (1 + 0.25K_p) \\ (1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i}) \end{array}$$

Para que el sistema sea estable se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$(2.5 + 0.25K_p T_d) > 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{(2.5 + 0.25K_p T_d)(1 + 0.25K_p) - (1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})}{(2.5 + 0.25K_p T_d)} > 0 \quad (4.26)$$

$$(1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i}) > 0 \quad (4.27)$$

De la ecuación 4.25 se tiene lo siguiente:

$$0.25K_p T_d > -2.5$$

$$K_p > -\frac{10}{T_d} \quad (4.28)$$

De la ecuación 4.27 se tiene lo siguiente:

$$0.25\frac{K_p}{T_i} > -1.25$$

$$T_i > -\frac{5}{K_p} \quad (4.29)$$

De la ecuación 4.26 se tiene lo siguiente:

$$(2.5 + 0.25K_p T_d)(1 + 0.25K_p) > (1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})$$

$$(2.5 + 0.25K_p T_d)(1 + 0.25K_p) > (1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})$$

$$(2.5 + 0.25K_p T_d) > \frac{(1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})}{(1 + 0.25K_p)}$$

$$0.25K_p T_d > \frac{(1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})}{(1 + 0.25K_p)} - 2.5$$

$$T_d > \frac{(1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})}{0.25K_p(1 + 0.25K_p)} - \frac{2.5}{0.25K_p}$$

$$T_d > \frac{\frac{1}{0.25K_p}(1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})}{(1 + 0.25K_p)} - \frac{10}{K_p}$$

$$T_d > \frac{\left(\frac{5}{K_p} + \frac{1}{T_i}\right)}{(1 + 0.25K_p)} - \frac{10}{K_p} \quad (4.30)$$

Estas condiciones serán probadas al final con los datos obtenidos de las condiciones de error en estado estacionario y respuesta del sistema.

Para que el error en estado estacionario sea cero, se hace uso de la figura 4.11, siguiendo el procedimiento que a continuación se muestra:

$$e_{ss} = E(s) = U(s) - Y_2(s) \quad (4.31)$$

$$Y_2(s) = \frac{0.25sC_{PID}E(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} \quad (4.32)$$

Se reemplaza la ecuación 4.31 en 4.32.

$$Y_2(s) = \frac{0.25sC_{PID}[U(s) - Y_2(s)]}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}$$

$$Y_2(s) = \frac{0.25sC_{PID}U(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} - \frac{0.25sC_{PID}Y_2(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}$$

$$Y_2(s) + \frac{0.25sC_{PID}Y_2(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} = \frac{0.25sC_{PID}U(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}$$

$$\left[1 + \frac{0.25sC_{PID}}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}\right] Y_2(s) = \frac{0.25sC_{PID}U(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}$$

$$Y_2(s) = \frac{0.25sC_{PID}U(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} \frac{1}{\left[1 + \frac{0.25sC_{PID}}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}\right]}$$

$$Y_2(s) = \frac{0.25sC_{PID}U(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25} \frac{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25 + 0.25sC_{PID}}$$

$$Y_2(s) = \frac{0.25sC_{PID}U(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25 + 0.25sC_{PID}} \quad (4.33)$$

Reemplazando la ecuación 4.33 en la ecuación 4.10, ecuación del error en estado estacionario.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[U(s) - \frac{0.25sC_{PID}U(s)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25 + 0.25sC_{PID}} \right]$$

Si se considera que la entrada $U(s) = 1/s$, es decir, tipo escalón unitario, se tendrá el siguiente error:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{0.25sC_{PID}}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25 + 0.25sC_{PID}} \right] \frac{1}{s}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.25sC_{PID}}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25 + 0.25sC_{PID}} \right] \quad (4.34)$$

Se reemplaza el controlador PID en la ecuación 4.34.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.25sK_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25 + 0.25sK_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)} \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\frac{0.25s}{T_i s} K_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25 + \frac{0.25sK_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{T_i s}} \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\frac{0.25s}{T_i s} K_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{\frac{(s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25)T_i s + 0.25sK_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{T_i s}} \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.25sK_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{(s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25)T_i s + 0.25sK_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)} \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.25sK_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{s[(s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25)T_i + 0.25K_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)]} \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{0.25K_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)}{[(s^3 + 2.5s^2 + s + 1.25)T_i + 0.25K_p (T_i s + 1 + T_d T_i s^2)]} \right]$$

$$e_{ss} = \left[1 - \frac{0.25K_p (T_i(0) + 1 + T_d T_i(0)^2)}{[(0)^3 + 2.5(0)^2 + (0) + 1.25]T_i + 0.25K_p (T_i(0) + 1 + T_d T_i(0)^2)} \right]$$

$$e_{ss} = 1 - \frac{0.25K_p}{[1.25T_i + 0.25K_p]} = 1\% \quad (4.35)$$

Haciendo que el error en estado estacionario sea del 1% en la ecuación 4.35, se tiene:

$$\begin{aligned}
 e_{ss} &= \frac{1.25T_i + 0.25K_p - 0.25K_p}{1.25T_i + 0.25K_p} = \frac{1}{100} \\
 \frac{1.25T_i}{1.25T_i + 0.25K_p} &= 0.01 \\
 1.25T_i &= 0.01(1.25T_i + 0.25K_p) \\
 1.25T_i &= 0.0125T_i + 0.0025K_p \\
 1.25T_i - 0.0125T_i &= 0.0025K_p \\
 1.2375T_i &= 0.0025K_p \\
 K_p &= \frac{1.2375T_i}{0.0025} \\
 K_p &= 495T_i
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

La última condición está referida a la respuesta del sistema en lazo cerrado, la cual deberá ser de tipo sobreamortiguada y que se estabilice en un tiempo menor de 3seg, se utilizará el polinomio característico de la ecuación 4.24 y se propone un polinomio con las características deseadas, considerando un factor de amortiguamiento de 1.2, para la frecuencia se tiene en cuenta que el tiempo de estabilidad sea de 2.5 s, menor al de 3s.

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2.5 \text{seg} \quad ; \quad \omega_n = 1.33 \text{rad/s}$$

Con los datos de factor de amortiguamiento y frecuencia natural, se tendrá el siguiente polinomio característico deseado:

$$\begin{aligned}
 p_{LC}(s) &= (s + \alpha)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \\
 p_{LC}(s) &= (s + \alpha)(s^2 + 3.192s + 1.77) \\
 p_{LC}(s) &= s^3 + (3.192 + \alpha)s^2 + (1.77 + 3.192\alpha)s + 1.77\alpha
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Comparando los polinomios deseados y característicos de la ecuaciones 4.37 y 4.24, respectivamente, se tiene:

$$2.5 + 0.25K_p T_d = 3.192 + \alpha \quad (4.38)$$

$$1 + 0.25K_p = 1.77 + 3.192\alpha \quad (4.39)$$

$$1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i} = 1.77\alpha \quad (4.40)$$

De las ecuaciones 4.36, 4.38, 4.39 y 4.40 se obtienen los parámetros necesarios para el controlador PID y el polo real del polinomio característico. Los parámetros son:

$$\alpha = 125$$

$$K_p = 1600$$

$$T_d = 0.31$$

$$T_i = 3.23$$

Con los valores anteriores se comprueban las condiciones estabilidad:

$$K_p > -\frac{10}{T_d} \Rightarrow K_p > -32.25$$

$$T_i > -\frac{5}{K_p} \Rightarrow T_i > 0.0031$$

$$T_d > \frac{\left(\frac{5}{K_p} + \frac{1}{T_i}\right)}{(1 + 0.25K_p)} - \frac{10}{K_p} \Rightarrow T_d > 0.005$$

Se han comprobado las condiciones de estabilidad, lo que asegura que el sistema es estable.

Por lo tanto con los valores obtenidos con el error en estado estacionario y el sistema deseado, el controlador PID queda de la siguiente manera:

$$C_{PID}(s) = 1600 \left(1 + \frac{1}{3.23s} + 0.31s \right)$$

$$C_{PID}(s) = 1600 + \frac{495.4}{s} + 496s$$

El diagrama de bloques del sistema mecánico de tercer orden con el controlador utilizado en simulink se muestra en la figura 4.12 y la respuesta del sistema a una entrada escalón (fuerza constante) de magnitud de 1N, se muestra en la figura 4.13.

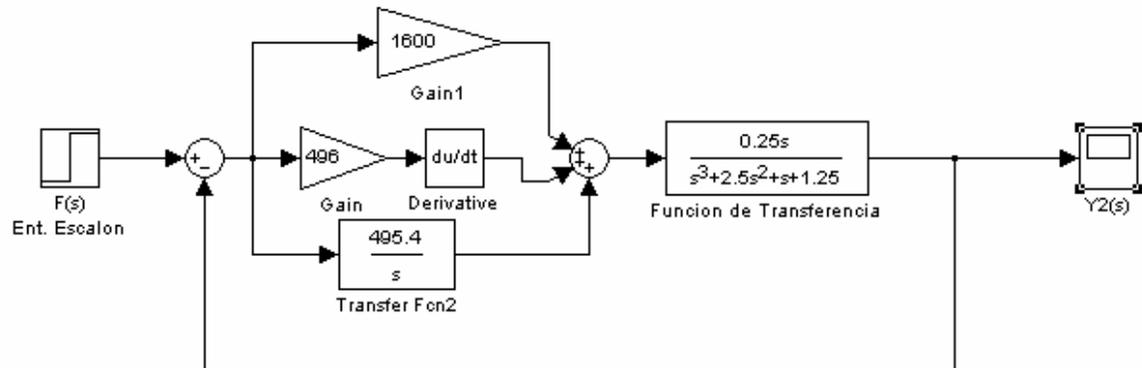


Figura 4.12. Diagrama de bloques en lazo cerrado con el controlador PID del sistema eléctrico de tercer orden

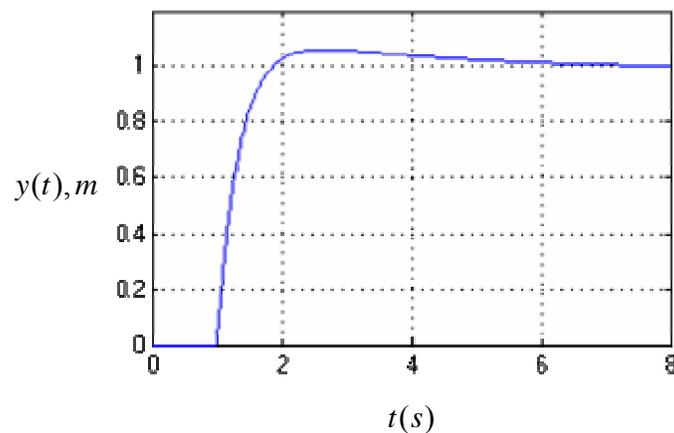


Figura 4.13. Respuesta en lazo cerrado con el controlador PID del sistema eléctrico de tercer orden

En la figura 4.13 se observa que el sistema en lazo cerrado con el controlador en cascada se comporta con las condiciones deseadas, estabilidad, error en estado estacionario y sobreamortiguado. Es importante resaltar que el controlador en cascada mejora las condiciones de estabilidad, aun considerando que la función de transferencia en lazo abierto, inicialmente tenía un cero marginalmente estable.

CAPÍTULO 5: ANALISIS DE RESULTADOS

5.1.- GENERALIDADES

En este capítulo se muestran las similitudes en el manejo de sistemas mecánicos y circuitos eléctricos de segundo y tercer orden, los parámetros y variables análogos que pueden tratarse de manera similar. Además, en este capítulo se muestran las ventajas del diseño de controladores en cascada usando el criterio de estabilidad, error en estado estacionario y respuesta del sistema, que permite hacer del sistema, un sistema con característica de frecuencia y amortiguamiento deseados. Además, de estas características, se puede a través de este criterio disminuir o aumentar el tiempo para que el sistema llegue a las condiciones de estabilidad requeridas. Otro punto importante es el de mostrar que el sistema con ceros o polos marginalmente estables pueden convertirse en sistemas estables.

Se analizarán las características de respuesta en lazo abierto y cerrado de los diferentes sistemas mecánicos y eléctricos, así como, las características de la variable controlada, comparándola con las características de lazo abierto..

5.2.- ANALOGIA ENTRE SISTEMAS MECANICOS Y CIRCUITOS ELECTRICOS

En el capítulo 3 se obtuvieron las ecuaciones diferenciales de los sistemas mecánicos y circuitos eléctricos de segundo y tercer orden, estas ecuaciones diferenciales presentan características similares, que para este trabajo de investigación se asumieron similares los desplazamientos (y) y los flujos de corriente, esta comparación basó en las características de movimiento.

Otros parámetros que se asumieron similares fueron $m \approx L$, $b \approx R$, y $k \approx \frac{1}{C}$, considerados en este trabajo como parámetros almacenadores de energía, por presentar características de resistencia y acumuladores.

Estas analogías permiten en sistemas diferentes llegar a ecuaciones de estado iguales y por supuesto a funciones de transferencia, también, iguales, lo que ahorra tiempo a la hora de revisar y cambiar características de lazo abierto y lazo cerrado.

Tanto los sistemas mecánicos como los circuitos eléctricos pueden presentar características similares en lazo abierto, que si no son las deseadas pueden ser modificadas con la incorporación de un controlador en cascada y una realimentación que permita la comparación de la entrada con la salida.

5.3.- CONTROLADORES EN CASCADA EN SISTEMAS MECANICOS Y CIRCUITOS ELECTRICOS

Los controladores PID son utilizados frecuentemente en la industria y en diferentes tipos de sistemas por presentar acciones de tipo Proporcional, Integral y Derivativo. Todos los métodos de diseño conducen a determinar los valores de K_p , T_i y T_d que hacen que el sistema de lazo cerrado tenga la respuesta adecuada, medida en términos del cumplimiento de las especificaciones de diseño (error en régimen permanente o estado estacionario, velocidad y tiempo de respuesta y estabilidad).

En la Tabla 5.1 se muestran las características de los sistemas de segundo y en la tabla 5.2 se muestran las características de los sistemas de tercer orden en lazo cerrado y lazo abierto, obtenidas en el capítulo 4.

Tabla 5.1. Características de los sistemas de segundo orden en lazo cerrado y lazo abierto

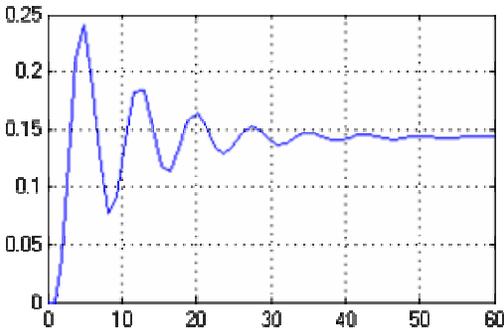
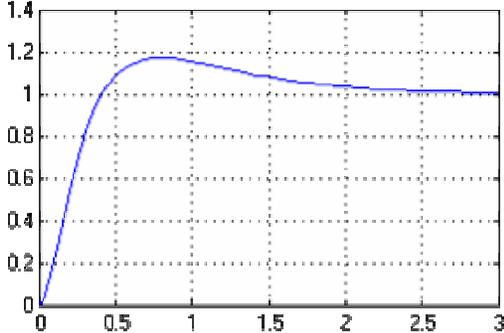
	Lazo abierto	Lazo Cerrado
Función de Transferencia	$G(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$ $G(s) = \frac{\frac{1}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$	<p>Con $k = 7 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$, $b = 2 \text{ N.s/m}$ y $C = \frac{1}{7} \text{ F}$, $L = 10 \text{ H}$ y $R = 2 \Omega$</p> $G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{0.1K_p \left(s + \frac{1}{T_i} + T_d s^2 \right)}{s^3 + (0.2 + 0.1K_p T_d)s^2 + (0.7 + 0.1K_p)s + 0.1 \frac{K_p}{T_i}}$
Respuesta del Sistema		

Tabla 5.2. Características de los sistemas de tercer orden en lazo cerrado y lazo abierto

	Lazo abierto	Lazo Cerrado
Función de Transferencia	$G(s) = \frac{k_1/m}{s^3 + \frac{k_1}{b}s^2 + \frac{(k_1 + k_2)}{m}s + \frac{k_1 k_2}{mb}}$ $G(s) = \frac{\frac{1}{RLC_2}s}{\left[s^3 + \frac{1}{RC_2}s^2 + \left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2} \right)s + \frac{1}{RLC_2} \frac{1}{C_1} \right]}$	<p>Se considera el circuito eléctrico por presentar un cero marginalmente estable, con $C_1 = \frac{1}{5}F$, $C_2 = \frac{1}{5}F$, $L = 10H$ y $R = 2\Omega$</p> $G_{LC}(s) = \frac{0.25K_p \left(s + \frac{1}{T_i} + T_d s^2 \right)}{s^3 + (2.5 + 0.25K_p T_d)s^2 + (1 + 0.25K_p)s + (1.25 + 0.25\frac{K_p}{T_i})}$
Respuesta del Sistema		

De las tablas 5.1 y 5.2 se puede observar que las características de los sistemas de segundo y tercer orden pueden cambiar considerablemente, agregando un controlador PID en cascada y buscando los parámetros K_p , T_i y T_d con las condiciones de estabilidad, error en estado estacionario y respuesta del sistema con amortiguamiento y tiempo de respuesta deseados. El controlador PID en cascada es efectivo cuando existen polos inestables o marginalmente estables, comparándolo con controladores por realimentación de estado, dado que en el de realimentación de estado el efecto de los polos inestables o marginalmente estables no se logran corregir, como se estudió en el trabajo de grado realizado por V. Mercado en el 2009.

CONCLUSIONES

Luego de realizado el estudio y comparación de los controladores utilizando en cascada en sistemas mecánicos y circuitos eléctricos, de segundo y tercer orden lineales y no lineales, se concluye lo siguiente:

- Para la obtención de los modelos matemáticos se utilizan las ecuaciones básicas de la física y electricidad, donde el equilibrio de fuerzas y de identidades es el concepto clave utilizado.
- Para la comparación de los sistemas mecánicos y circuitos es muy conveniente partir de las ecuaciones diferenciales, que permite en tomar variables similares, como en este caso es el desplazamiento en el eje y con el flujo de corriente en cada malla o lazo cerrado.
- Los parámetros de inductancias, capacitancias y resistencias tienen comportamientos similares a los elementos de los sistemas mecánicos, dado que son tomados como elementos almacenadores de energía, es por esto que la resistencia se considera similar al coeficiente de fricción, la inductancia al inverso de la masa y la capacitancia al inverso de la constante del resorte.
- Con las comparaciones de los sistemas es posible obtener ecuaciones de estado y funciones de transferencia iguales. Lo que permite ahorrar tiempo a la hora de analizar sistemas.
- Los controladores PID son utilizados frecuentemente en la industria y en diferentes tipos de sistemas por presentar acciones de tipo Proporcional, Integral y Derivativo. Todos los métodos de diseño conducen a determinar los valores de K_p , T_i y T_d que hacen que el sistema de lazo cerrado tenga la respuesta adecuada, medida en términos del cumplimiento de las especificaciones de diseño (error en régimen permanente o estado estacionario, velocidad y tiempo de respuesta y estabilidad).

- Los controladores PID tiene una ventaja comparado con los controladores por realimentación de estado, esta diferencia radica en que con el controlador PID en cascada se pueden corregir inestabilidades provocadas por los ceros de las funciones de transferencia, detalle que no puede lograrse con los controladores por realimentación de estado, dado que en el de realimentación de estado el efecto de los ceros inestables o marginalmente estables no se logran corregir, como se estudio en el trabajo de grado realizado por V. Mercado en el 2009.

RECOMENDACIONES

Se recomienda realizar el estudio y comparación de controladores en cascada y por realimentación de estado en procesos y sistemas industriales.

Este trabajo podrá extenderse para sistemas y procesos industriales no lineales, del tipo mecánico, hidráulico, neumático, térmico o de control de nivel, con el fin de identificar la veracidad del criterio de asignación de polos para el diseño de sistemas de control.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Mercado V., Estudio y aplicación de la estabilidad en circuitos eléctricos. Universidad de Oriente. Venezuela. (2009)

- [2]. Heraoui M., Laboratorio Virtual de Sistemas de Control Realimentados. Universidad de Oriente. Venezuela. (2006)

- [3]. Malo S. y Griñó R., Análisis y diseño de controladores lineales para el convertidor elevador (“boost”) bidireccional en corriente. Universidad Politécnica de Cataluña. España. (2005)

- [4]. Ogata, Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. Tercera Edición. México. (1998)

- [5]. Smith C. y Corripio A., Control Automático de Procesos, Teoría y Practica. Editorial Limusa. Primera Edición. (1991)

- [6]. Kuo B., Sistemas de Control Automático. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. Séptima Edición. Traducido del ingles de la obra Automatic Control Systems, Primera Edición. (1996).

- [7]. Dominguez S., Campoy P., Sebastian J. y Jimenez A. Control en el Espacio de Estado. Universidad Politecnica de Madrid. España. (2002)

- [8]. Sira H., Marquez R. Rivas-Echeverria F. y Orestes-Santiago O. Control de Sistemas no Lineales, Linealización Aproximada, Extendida y exacta. Universidad de los Andes y ISPJAE. Venezuela. (2005)

- [9]. De la Cruz F. Análisis de Sistemas Lineales Continuos en el Espacio de Estado. Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre. (1998)
- [10]. Gil J. y Diaz A. Ingeniería de Control, Control de Sistemas Continuos. Universidad de Navarra. España. (2004)

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

TÍTULO	ESTUDIO Y COMPARACION DE CONTROLADORES EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS Y SISTEMAS MECÁNICOS, UTILIZANDO CONFIGURACIONES EN CASCADA
SUBTÍTULO	

AUTOR (ES):

APELLIDOS Y NOMBRES	CÓDIGO CULAC / E MAIL
LAREZ HECTOR	CVLAC: 5.190.195 E MAIL: verenamercadoyahoo.com

PALÁBRAS O FRASES CLAVES:

PALABRAS:

CONTROLADOR, CASCADA, LAZO CERRADO, LAZO ABIERTO, PROPORCIONAL, INTEGRAL, DERIVATIVO, ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO, RESPUESTA TRANSITORIA, ESTABILIDAD, RETROALIMENTACION.

FRASES:

CONTROLABILIDAD NO SIGNIFICA QUE UNA VEZ ALCANZADO UN ESTADO ES POSIBLE MANTENERLO AHÍ, SINO SOLAMENTE QUE PUEDE ALCANZARSE ESE ESTADO.

EL DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL POR ASIGNACIÓN DE POLOS BUSCA LOGRAR LA COMPENSACIÓN DE DISTURBIOS PARA DEVOLVERLO A UNA CONDICIÓN INICIAL DE EQUILIBRIO.

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

ÀREA	SUBÀREA
<u>Pregrado en Ingeniería Eléctrica</u>	<u>Ingeniería Electrica</u>

RESUMEN (ABSTRACT):

Los circuitos Eléctricos y Sistemas mecánicos de segundo y tercer orden presentan características similares, en su forma y en los elementos amortiguados, sin embargo, se destaca que en la realidad sus comportamientos pueden llegar a ser diferentes, los circuitos eléctricos pueden llegar a comportarse de manera oscilatoria, subamortiguada, sobreamortiguada o críticamente amortiguada, mientras que los sistemas mecánicos normalmente son de tipo sobreamortiguado o en algunos casos subamortiguados. Se hace una comparación entre las ecuaciones diferenciales de segundo y tercer orden de los sistemas mecánicos y los circuitos eléctricos, sacando comparando sus parámetros, es decir masa, constante del resorte, constante de fricción con los parámetros eléctricos resistencia, inductancia y capacitancia, llamando estos elementos acumuladores de energía. Esta comparación permite obtener ecuaciones diferenciales y funciones de transferencias generales que permitirán obtener controladores PID generales para estos diferentes tipos de sistemas.

APELLIDOS Y NOMBRES	ROL / CÓDIGO CVLAC / E_MAIL				
MERCADO POLO VERENA	ROL	CA	AS x	TU	JU
	CVLAC:	82.235.587			
	E_MAIL				
	E_MAIL				
URBINA ALBERTO	ROL	CA	AS	TU	JU x
	CVLAC:	3.955.565			
	E_MAIL				
	E_MAIL				
MAZA MANUEL	ROL	CA	AS	TU	JU x
	CVLAC:	8.266.951			
	E_MAIL				
	E_MAIL				
	ROL	CA	AS	TU	JU
	CVLAC:				
	E_MAIL				
	E_MAIL				

FECHA DE DISCUSIÓN Y APROBACIÓN:

2010	03	26
AÑO	MES	DÍA

LENGUAJE. SPA

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

ARCHIVO (S):

NOMBRE DE ARCHIVO	TIPO MIME
Tesis.H.doc	Application/msword

CARACTERES EN LOS NOMBRES DE LOS ARCHIVOS: A B C D E F G H I J K L M N O P
Q R S T U V W X Y Z . a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z . 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 .

ALCANCE

ESPACIAL: _____ . (opcional)

TEMPORAL: 1 año _____ (opcional)

TÍTULO O GRADO ASOCIADO CON EL TRABAJO:

INGENIERO ELECTRICISTA

NIVEL ASOCIADO CON EL TRABAJO:

Pre-Grado

ÁREA DE ESTUDIO:

Departamento de Electricidad

INSTITUCIÓN:

Universidad De Oriente. Núcleo de Anzoátegui

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

DERECHOS

DE ACUERDO AL ARTICULO 41 DEL REGLAMENTO DE TRABAJO DE GRADO: “LOS TRABAJOS DE GRADO SON DE EXCLUSIVA PROPIEDAD DE LA UNIVERSIDAD Y SÓLO PODRÁN SER UTILIZADOS A OTROS FINES, CON EL CONSENTIMIENTO DEL CONSEJO DE NÚCLEO RESPECTIVO, EL CUAL LO PARTICIPARÁ EL CONSEJO UNIVERSITARIO”.

Héctor Larez

AUTOR

Ing. Esp. Verena Mercado P.

TUTOR

Ing. Alberto Urbina

JURADO

Ing. Manuel Maza

JURADO

POR LA SUBCOMISION DE TESIS