UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

# VARIACIONES FUERTES DE LOS TEOREMAS DE WEYL Y DE BROWDER PARA OPERADORES LINEALES ACOTADOS

**Autor: MSc. Luis Eligio Vásquez Márquez**

**Tutor: Dr. José Eduardo Sanabria**

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR EN MATEMÁTICAS

Cumaná, 2022

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
DECANATO/ ESCUELA DE CIENCIAS / DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

# VEREDICTO

Nosotros, Profesores; **José Sanabria, Ramón Bruzual, Ennis Rosas y Julio Ramos** en nuestro carácter de Miembros del Jurado Examinador, a recomendación de la Comisión Coordinadora del Postgrado en Matemáticas, de la Universidad de Oriente, Núcleo de Sucre, para emitir juicio sobre el Trabajo de Grado intitulado **"Variaciones Fuertes de los Teoremas de Weyl y de Browder para Operadores Lineales Acotados"**, que ha presentado el **MSc. Luis Vásquez**, cédula de identidad **Nº 17.909.159**, como requisito parcial para optar al Título de **Doctor en Matemáticas**, decidimos que dicho Trabajo ha sido aceptado para tal fin.

Hemos interrogado al postulante y lo consideramos APROBADO

Queda constancia escrita, de que no nos hacemos solidarios con los conceptos emitidos por el postulante.

En fe de lo anterior, se levanta la presente acta en presencia del Jefe del Departamento de Matemáticas, en Cumaná a los veinticinco días del mes de julio del año dos mil veintidós.

**Dr. José Sanabria** | **Dr. Ramón Bruzual**

**Dr. Ennis Rosas** | **Dr. Julio C. Ramos Fernández**

**Dr. Lope Marín Mata**
Coordinador del Postgrado en Matemáticas

COORDINACIÓN ESTUDIOS DE POSTGRADO NÚCLEO DE SUCRE MATEMÁTICAS

# DEDICATORIA

En memoria de mi querida abuela Ana Agustina Márquez de Vásquez.

A mi hija Anabeliz Valentina Vásquez Márquez.

A mi madre Zuleima del Carmen Vásquez Márquez.

## AGRADECIMIENTO

Ante todo agradezco a Dios Todopoderoso, por darme salud y fortaleza para finalizar este trabajo.

A mi madre Zuleima Vásquez, por la enseñanza que me ha dado en mi formación como persona.

A mi hija Anabeliz Vásquez, por ser fuente de inspiración y aliento en la culminación de este trabajo.

Quiero agradecer especialmente al Doctor José Eduardo Sanabria quien dirigió la elaboración de esta tesis, por ayudarme en los momentos más críticos y animarme a seguir adelante. Por mantenerme al día en el desarrollo de los temas que hemos abordado. Por enseñarme muchas de las cosas que fue necesario aprender y por sus sugerencias en la redacción final de este material, infinitas gracias profesor.

A los Profesores Lope Marín, Ennis Rosas, Dirwin Muñoz, Jesús Guillén, Mairin Lemus, Wilmer Arzolay, Elvis Aponte, Franklin Astudillo y Oscar Castro por sus ayudas, sus apoyos y por la incesante preocupación por este trabajo.

A los miembros del Jurado Examinador Dr. Ennis Rosas, Dr. Julio Ramos y al Dr. Ramón Bruzual por sus recomendaciones y sugerencias.

Al Postgrado de Matemáticas de la Universidad de Oriente, porque fue ahí donde realicé mis estudios doctorales, y donde pasé momentos que recordaré siempre.

A todos mis colegas y compañeros, que de alguna u otra forma han participado en mi formación académica.

## Índice general


| | Pág. |
|---|---|
| **RESUMEN** | VI |
| **INTRODUCCIÓN** | VII |
| 1. **Preliminares** | 1 |
| 1.1. Operadores lineales acotados | 1 |
| 1.2. Operadores semi-Fredholm y Fredholm | 13 |
| 1.3. Propiedad de la extensión univaluada (SVEP) | 22 |
| 1.4. Operadores cuasi-Fredholm | 29 |
| 1.5. Teoremas tipo Weyl y tipo Browder | 40 |
| 1.6. Propiedades algebraicas entre $T$ y $T_n$ | 46 |
| 2. **Variaciones fuertes de teoremas tipo Weyl y tipo Browder** | 48 |
| 2.1. Variaciones de teoremas tipo Weyl y tipo Browder | 48 |
| 2.2. Propiedades $(V_E)$ y $(V_{E_a})$ | 60 |
| 2.3. Propiedad $(V_E)$ a través de la SVEP localizada | 74 |
| 3. **Estabilidad bajo sumas directas y restricciones** | 77 |
| 3.1. Variaciones fuertes para sumas directas | 77 |
| 3.2. Variaciones fuertes para restricciones | 83 |
| 4. **Estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo perturbaciones** | 90 |
| 4.1. Propiedad $(V_E)$ bajo perturbaciones que conmutan | 90 |
| 4.2. Propiedad $(V_E)$ bajo el producto tensorial | 99 |
| **CONCLUSIONES** | 106 |
| **BIBLIOGRAFÍA** | 109 |
| **ANEXOS** | 116 |

# RESUMEN

En este trabajo, se utiliza el espectro superiormente semi-Weyl y el espectro de un operador $T \in L(X)$, con $X$ un espacio de Banach, para introducir la propiedad $(V_E)$. Un operador $T$ se dice que satisface la propiedad $(V_E)$ si el espectro del operador menos el espectro superiormente semi-Weyl es igual al conjunto de todos los puntos aislados del espectro que son autovalores de $T$. Se estudian las relaciones existentes entre la propiedad $(V_E)$ y otras propiedades tales como: la propiedad $(UW_E)$, la propiedad $(UW_{E_a})$, la propiedad $(W_E)$, el Teorema generalizado de Weyl, la propiedad $(Z_{E_a})$, la propiedad $(v)$, la propiedad $(z)$, la propiedad $(gv)$, la propiedad $(gz)$, la propiedad $(Sw)$, la propiedad $(Saw)$, la propiedad $(gaw)$, el teorema $a$-Browder, entre otras; y se dan condiciones al operador $T$ para que la propiedad $(V_E)$ sea equivalente a cada una de las propiedades espectrales antes mencionadas. También, se estudia la suma directa entre dos operadores $T$ y $S$ que satisfacen la propiedad $(V_E)$, proporcionando condiciones a los operadores para que la propiedad $(V_E)$ se preserve mediante la suma directa. Asimismo, para un operador $T \in L(X)$ se buscan algunas condiciones para que la restricción $T_n$ de $T$ satisfaga la propiedad $(V_E)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Además, se estudia la estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo perturbaciones que conmutan, es decir, si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$ y $K \in L(X)$ es un operador que conmuta con $T$ (que satisface alguna condición adicional), entonces $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por último, dados dos operadores $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ que satisfacen la propiedad $(V_E)$, se estudia esta propiedad bajo el producto tensorial de $T$ y $S$, dando algunas condiciones suficientes a los operadores para garantizar que la propiedad $(V_E)$ sea trasmitida de factores tensoriales $T$ y $S$ a su producto tensorial.

## INTRODUCCIÓN

En el año 1900, se publicó el artículo *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* debido a E. Fredholm [45], el cual cambió el estudio de la solución de las ecuaciones integrales y sirvió de inspiración para que F. Riesz [66], en el año 1918, estableciera los métodos abstractos de E. Fredholm en la forma de operadores compactos, lo cual dió inicio a lo que hoy en día se conoce como la teoría de Fredholm. En esta teoría, existen dos clases de operadores que desempeñan un papel fundamental, estos son los llamados *operadores de Browder* (también conocidos clásicamente como operadores de Riez-Schauder) y los *operadores de Weyl*, los cuales han sido objeto de una gama de estudios, como se pueden ver en [1], [4], [5] . En las últimas décadas se han desarrollado numerosas investigaciones en el contexto de la teoría de Fredholm para operadores lineales acotados, las cuales han dado origen a nuevas clases de operadores denominados, *operadores semi-Fredholm*, *operadores semi-Browder* [49] y *operadores semi-Weyl* [50]. Estas clases de operadores han sido ampliamente estudiadas en los textos de P. Aiena [3, 9] empleando como herramienta fundamental la versión localizada de la *propiedad de la extensión univaluada* (abreviada SVEP, por las siglas en inglés de singled-valued extension property) introducida por J. Finch [44] en año 1975.

En 1909, H. Weyl [73] examinó los espectros de todas las perturbaciones compactas para un operador hermitiano $T$, y encontró que un punto está en el espectro de cualquier perturbación compacta $T + K$ del operador $T$, precisamente cuando dicho punto no es un punto aislado de multiplicidad finita del espectro de $T$. Este resultado clásico, fue posteriormente investigado en forma general y formulado de manera abstracta por L. Coburn [37] en el año 1966, y es conocido actualmente en la literatura como el *teorema de Weyl*. Utilizando los espectros de los operadores semi-Browder y semi-Weyl, algunos autores han introducido y estudiado varias propiedades espectrales similares al teorema de Weyl. Entre estas propiedades podemos destacar, el *teorema de Browder*, el *teorema de a-Browder* [49], el *teorema de a-Weyl*

[61] y la *propiedad* $(w)$ [11].

Basándose en la teoría de Fredhom, sobre el álgebra $L(X)$ de todos los operadores lineales acotados que actúan en un espacio de Banach complejo infinito dimensional $X$, M. Berkani [18, 20, 28] introduce las clases de los operadores semi $B$-Fredholm y semi $B$-Weyl, como una generalización de los operadores semi-Fredholm y semi-Weyl, respectivamente. El estudio de los espectros de los operadores semi $B$-Fredholm y semi $B$-Weyl, permitió a M. Berkani y J. Koliha [10] introducir cuatro propiedades espectrales: el *teorema generalizado de Weyl*, el *teorema generalizado de a-Weyl*, el *teorema generalizado de Browder* y el *teorema generalizado de a-Browder*, que son generalizaciones de los teoremas de Weyl, $a$-Weyl, Browder y $a$-Browder, respectivamente.

En los últimos quince años se han introducido y estudiado otras propiedades que involucran a los distintos espectros originados de la teoría de Fredholm y la teoría de $B$-Fredholm iniciada por M. Berkani, las cuales tienen similitud con las versiones de los teoremas de Weyl y los teoremas de Browder, y es por ello, que hoy en día, en la literatura se conocen como *teoremas tipo Weyl* y *teoremas tipo Browder*. Aunque existen varias propiedades espectrales enmarcadas dentro de los teoremas tipo Weyl y tipo Browder, se pueden destacar las de reciente aparición, como lo son: *la propiedad* $(UW_E)$ y *la propiedad* $(UW_\Pi)$ [24], *la propiedad* $(Bgw)$ y *la propiedad* $(Bgb)$ [64], *la propiedad* $(Sw)$ y *la propiedad* $(Sb)$ [65], *la propiedad* $(Z_{E_a})$ y *la propiedad* $(Z_{\Pi_a})$ [76], *la propiedad* $(Saw)$ y *la propiedad* $(Sab)$ [70].

Motivados por los trabajos donde se han estudiado los diversos teoremas tipo Weyl y tipo Browder, en este trabajo, se definen y estudian nuevas variaciones de ellos. Los resultados obtenidos se desarrollan en cuatro capítulos.

En el Capítulo 1, se proporciona una introducción de las nociones básicas generales que se emplearan a lo largo de todo el trabajo. En el Capítulo 2, se definen y estudian nuevas variaciones de teoremas tipo Weyl y tipo Browder, las cuales son más fuertes, en el sentido que, implican a las otras propiedades definidas en el marco teórico en cuestión. Específicamente, se establecen las relaciones existentes entre las propiedades espectrales introducidas en este trabajo y las conocidas en la literatura, siguiendo las técnicas empleadas por J. Sanabria, C. Carpintero, E. Rosas y O. García en [69] y [70]. En el Capítulo 3, se establecen caracterizaciones de estas nuevas propiedades espectrales mediante restricciones del operador utilizando los métodos dados por C. Carpintero, O. García, D. Muñoz, E. Rosas y J. Sanabría en [33], C. Carpintero, D. Muñoz, E. Rosas, J. Sanabría y O. García en [34] y C. Carpintero, E. Rosas, J. Rodriguez, D. Muñoz y K. Alcalá en [35]. También, se estudia la estabilidad bajo sumas directas ortogonales al estilo de los trabajos hechos por A. Arroud y H. Zariouh en [17], M. Berkani, M. Kachad, H. Zariouh y H. Zguitti en [25], M. Berkani y H. Zariouh en [32], B. P. Duggal y C.S. Kubrusly en [43]. En el Capítulo 4, se estudia la estabilidad de esta nueva propiedad espectral bajo perturbaciones por operadores nilpotentes, operadores de potencias de rango finito, operadores de Riesz y operadores algebraicos que conmutan con el operador involucrado y se analizan condiciones suficientes que permitan la estabilidad de esta nueva propiedad espectral bajo el producto tensorial de dos operadores. La mayoría de los resultados presentados en los Capítulos 2, 3 y 4 fueron publicados en los trabajos [71], [72] y [16] respectivamente.

Entre los aportes fundamentales de este trabajo, cabe señalar que se lograron:

- Introducir nuevas propiedades espectrales, denominadas $(V_E)$ y $(V_{E_a})$, como variaciones fuertes de los teoremas tipo Weyl.
- Establecer relaciones entre las propiedades $(V_E)$, $(V_{E_a})$ y otros teoremas tipo Weyl y tipo Browder.
- Caracterizar las propiedades espectrales $(V_E)$ y $(V_{E_a})$, bajo ciertas hipótesis de la SVEP en un punto.
- Estudiar la estabilidad de las propiedades $(V_E)$, $(V_\Pi)$, $(V_{\Pi_a})$, $(Saw)$, $(Sw)$, $(Sab)$ y $(Sb)$, bajo sumas directas ortogonales.

- Caracterizar las propiedades $(V_E)$, $(V_\Pi)$, $(V_{\Pi_a})$, $(Saw)$, $(Sw)$, $(Sab)$ y $(Sb)$, para un operador $T$ en términos de restricciones del referido operador.

- Estudiar la estabilidad de la propiedad $(V_E)$, bajo perturbaciones de un operador que conmutan con el mismo.

- Estudiar la estabilidad de la propiedad $(V_E)$, bajo el producto tensorial de dos operadores.

El impacto de los resultados mencionados anteriormente se ve traducido en los artículos de investigación [16], [71] y [72], que han sido publicados en revistas indexadas en MathSciNet, Scopus, Scimago Journal Rank (SJR) y Jounal Citation Report (JCR), y actualmente sirven de referencia para otros investigadores interesados en el tema.

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo se describen en forma general las nociones básicas y los resultados que serán estrictamente necesarios y de gran utilidad para el desarrollo de este trabajo. Cabe destacar, que la mayoría de estos resultados presentados en este capítulo son hechos conocidos en la literatura, por lo que en su debida oportunidad, se dan ciertas citas respecto a las referencias bibliográficas en donde se puede ahondar en mayores detalles sobre las nociones y resultados aquí tratados.

## 1.1. Operadores lineales acotados

En esta sección, se introducen y estudian ciertos parámetros asociados a un operador lineal acotado, así como también algunas relaciones importantes entre éstos y los correspondientes, a las restricciones del operador sobre algunos subespacios específicos de su dominio.

Se denotará por $L(X)$ el álgebra de los operadores lineales y acotados que actúan sobre un espacio de Banach y se supondrá a lo largo de todo el trabajo que $X$ es un espacio de Banach complejo e infinito dimensional. Dado $T \in L(X)$, es conocido que

$$\begin{aligned} N(T) &= \{x \in X : Tx = 0\}, \\ R(T) &= \{Tx : x \in X\}, \end{aligned}$$

son subespacios $T$-invariantes de $X$. Así como también lo son

$$\begin{aligned} N(T^n) &= \{x \in X : T^n x = 0\}, \\ R(T^n) &= \{T^n x : x \in X\}; \end{aligned}$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n$ denotará la restricción de $T \in L(X)$ sobre el subespacio $R(T^n) = T^n(X)$. Algunas relaciones útiles de estas restricciones se dan a continuación.

**Lema 1.1.** *Dado un operador $T \in L(X)$, entonces:*

(1) $N(T_m) \subseteq N(T_n)$ *siempre que* $m \geq n$*;*

(2) $R(T_n^m) = R(T^{m+n}) = R(T_m^n)$ *cualesquiera sean* $m$ *y* $n$*;*

(3) $(T^n)^{-1}(R(T^{n+m})) = R(T^m) + N(T^n)$ *cualesquiera sean* $n$ *y* $m$*;*

(4) $T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1})) = N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$ *para todo* $n$*,* $m$*;*

(5) $T^m(N(T^{m+n})) = N(T^n) \cap R(T^m)$ *cualesquiera sean* $n$ *y* $m$*;*

(6) $\frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} \simeq \frac{X}{R(T)+N(T^n)}$ *para todo* $n$*;*

(7) $\frac{N(T)\cap R(T^n)}{N(T)\cap R(T^{n+1})} \simeq \frac{N(T^{n+1})+R(T)}{N(T^n)+R(T)}$ *para todo* $n$*.*

*Demostración.*

(1) y (2) son consecuencias inmediatas de la definición de $T_n$.

(3) Si $x \in R(T^m) + N(T^n)$, existen $u \in R(T^m)$, $v \in N(T^n)$ y $x = u + v$. Luego, $T^n x = T^n u + T^n v = T^n u \in T^n(T^m(X)) = T^{n+m}(X) = R(T^{n+m})$. Por lo cual $x \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+m}))$. Recíprocamente, $x \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+m}))$ implica que $T^n x = T^{n+m}u$, para algún $u \in X$. Así, $T^n(x - T^m u) = 0$, por lo cual $x - T^m u \in N(T^n)$ y entonces $x = T^m u + (x - T^m u) \in R(T^m) + N(T^n)$.

(4) Si $x \in T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1}))$, $Tx \in N(T^m) \cap R(T^{n+1})$, entonces $Tx \in N(T^m)$ y $Tx \in R(T^{n+1})$. Por lo cual $Tx = T^{n+1}u$, para algún $u \in X$, lo que implica que $T^{m+1}(T^n u) = T^m(T^{n+1}u) = T^m(Tx) = 0$. Así, $T^n u \in N(T^{m+1})$ y además $T(x - T^n u) = 0$. Por lo tanto,

$$x = x - T^n u + T^n u \in N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n).$$

Recíprocamente, si $x \in N(T) + N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$, entonces existen $u \in N(T)$ y $v \in N(T^{m+1}) \cap R(T^n)$ tales que $x = u + v$. Luego, $Tx = Tv \in N(T^m) \cap R(T^{n+1})$, pues $T^{m+1}v = T^m(Tv) = 0$, de donde resulta que $x \in T^{-1}(N(T^m) \cap R(T^{n+1}))$.

(5) $x \in N(T^{m+n})$, implica que $T^n(T^m x) = T^{m+n}x = 0$. Así, $T^m x \in N(T^n) \cap R(T^m)$. Recíprocamente, si $y \in N(T^n) \cap R(T^m)$, existe $x \in X$ tal que $y = T^m x$ y además, $T^{m+n}x = T^n(T^m x) = T^n y = 0$. Es decir, $y = T^m x$ para algún $x \in N(T^{m+n})$, y se tiene que $y \in T^m(N(T^{m+n}))$.

(6) $T^n x + R(T^{n+1}) = T^n y + R(T^{n+1})$, implica que

$$T^n(x - y) = T^n x - T^n y \in R(T^{n+1}).$$

Luego, $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1})) = R(T) + N(T^n)$ y así,

$$x + (R(T) + N(T^n)) = y + (R(T) + N(T^n)).$$

Por otra parte, si $x + (R(T) + N(T^n)) = y + (R(T) + N(T^n))$, entonces $x - y \in R(T) + N(T^n) = (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$. En consecuencia,

$$T^n x - T^n y = T^n(x - y) \in R(T^{n+1}),$$

de donde sigue la igualdad $T^n x + R(T^{n+1}) = T^n y + R(T^{n+1})$. Así, se concluye que la aplicación $T^n x + R(T^{n+1}) \mapsto x + (R(T) + N(T^n))$ es un isomorfismo, cualquiera sea $n$.

(7) Por el inciso (3), sigue que

$$\frac{(T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))}{(T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))} = \frac{N(T^{n+1}) + R(T)}{N(T^n) + R(T)}.$$

Por otra parte, si $x \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$, entonces $T^{n+1}x = T^{n+2}u$, para algún $u \in X$. Esto implica que $T(T^n x - T^{n+1}u) = 0$ y como $T^{n+1}u \in R(T^{n+1}) \subseteq R(T^n)$, se tiene que $T^n x - T^{n+1}u \in N(T) \cap R(T^n)$. Así, para cada $x \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$, existe $u \in X$ tal que $T^n x - T^{n+1}u \in N(T) \cap R(T^n)$. Ahora si $y \in (T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))$ y ocurre que $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$, entonces

$$T^n x - T^n y = T^n(x - y) \in R(T^{n+1}),$$

y existen vectores $u$, $v$ en $X$, tales que

$$T^n x - T^{n+1}u - (T^n y - T^{n+1}v) = T^n(x-y) + T^{n+1}(v-u) \in R(T^{n+1}).$$

Puesto que,

$$T(T^n x - T^{n+1}u - (T^n y - T^{n+1}v)) = T^{n+1}x - T^{n+2}u - T^{n+1}y + T^{n+2}v = 0,$$

se sigue que $(T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) \in N(T) \cap R(T^{n+1})$. Recíprocamente, en caso que $(T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) \in N(T) \cap R(T^{n+1})$, se obtiene que

$$T^n x - T^n y = (T^n x - T^{n+1}u) - (T^n y - T^{n+1}v) + T^{n+1}(u-v) \in R(T^{n+1}),$$

por lo que $x - y \in (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))$. Según esto, la aplicación

$$\varphi : \frac{N(T^{n+1}) + R(T)}{N(T^n) + R(T)} = \frac{(T^{n+1})^{-1}(R(T^{n+2}))}{(T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))} \to \frac{N(T) \cap R(T^n)}{N(T) \cap R(T^{n+1})},$$

$$\varphi(x + (T^n)^{-1}(R(T^{n+1}))) = T^n x - T^{n+1}u + N(T) \cap R(T^{n+1}),$$

cualquiera sea $u \in X$ tal que $T^{n+1}x = T^{n+2}u$, es un isomorfismo. □

El parámetro que a continuación se describe permite caracterizar cuando el rango de un operador es cerrado, condición esta que se le exigirá a muchas clases importantes de operadores.

**Definición 1.1.** Sean $X$ un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador no nulo. El módulo minimal reducido de $T$, denotado $\gamma(T)$, viene dado por la expresión

$$\gamma(T) = \inf_{x \notin N(T)} \frac{\|Tx\|}{\text{dist }(x, N(T))}.$$

En la siguiente proposición se describe la relación existente entre el módulo minimal y el rango de un operador.

**Teorema 1.1.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $T \in L(X)$ un operador no nulo. Entonces,*

$$R(T) \text{ es cerrado } \Leftrightarrow \gamma(T) > 0.$$

*Demostración.* Véase [51, Proposition 36.1]. □

Es de interés observar que $\gamma(T) = \gamma(T^*)$, donde $T^* \in L(X^*)$ es el dual de $T$ (véase [59, Theorem 10.3]). Según esto, y el Teorema 1.1 se tiene que

$$R(T) \text{ es cerrado } \Leftrightarrow R^*(T^*) \text{ es cerrado.}$$

**Definición 1.2.** Sea $X$ un espacio de Banach. Un subespacio $M$ de $X$ se dice paracompleto o paracerrado, si $M$ es el rango de un operador acotado.

Observemos que para $\lambda \neq 0$ y $T \in L(X)$,

$$(\lambda I - T)(N(T)) = N(T).$$

Además, por el inciso (5) del Lema 1.1,

$$T^m(N(T^{m+n})) = N(T^n) \cap R(T^m).$$

Así, $N(T)$ y $N(T^n) \cap R(T^m)$ son subespacios paracompletos.

La siguiente proposición, conocida en la literatura matemática como el Lema de Neubauer [56], proporciona condiciones suficientes bajo las cuales subespacios paracompletos son cerrados.

**Lema 1.2.** *Sean $X$ un espacio de Banach y $M$, $N$ subespacios de $X$. Si $M$ y $N$ son subespacios paracompletos tales que $N \cap M$ y $N + M$ son cerrados, entonces $N$ y $M$ son cerrados.*

*Demostración.* Véase [56, Proposition 2.1.1.]. □

**Lema 1.3.** *Sean $T \in L(X)$ y $d \in \mathbb{N}$ tales que*

$$R(T^d) \cap N(T) = R(T^n) \cap N(T),$$

*para todo entero $n \geq d$. Entonces las siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$N(T^d) + R(T)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ son cerrados en $X$;*

(2) $R(T^{d+1})$ *es cerrado;*

(3) $R(T^n)$ *es cerrado para todo* $n \geq d$*;*

(4) $R(T^i) + N(T^j)$ *es cerrado siempre que* $i + j \geq d$*.*

*Demostración.* Véase [67, Lemma 1.1.4.]. $\square$

A partir de las sucesiones de subespacios formadas, respectivamente, con los núcleos e imágenes de las potencias de un operador lineal, se derivan también dos parámetros importantes asociados con el operador, los cuales se describen seguidamente.

**Definición 1.3.** Sean $X$ un espacio vectorial y $T : X \to X$ un operador lineal. El ascent de $T$, denotado $p(T)$, se define según

$$p(T) = \begin{cases} \min\{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} & , \text{si } \{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} \neq \emptyset \\ \\ \infty & , \text{si } \{n : N(T^n) = N(T^{n+1})\} = \emptyset. \end{cases}$$

En forma similar, el descent de $T$, denotado $q(T)$, se define como

$$q(T) = \begin{cases} \min\{n : R(T^n) = R(T^{n+1})\} & , \text{si } \{n : R(T^n) = R(T^{n+1})\} \neq \emptyset \\ \\ \infty & , \text{si } \{n : R(T^n) = R(T^{n+1})\} = \emptyset. \end{cases}$$

Observe que $p(T) = 0$ (resp. $q(T) = 0$) si y solo si $T$ es inyectivo (resp. sobreyectivo).

Si $T \in L(X)$ y $M$ es un subespacio $T$-invariante (esto es, $T(M) \subseteq M$), entonces $N(T \mid M) = N(T) \cap M$. Más aún, $N((T \mid M)^n) = N(T^n) \cap M$ para todo $n$, pues $T(M) \subseteq M$. Así, $p(T) < \infty$ implica que $p(T \mid M) < \infty$; ya que si $p = p(T) < \infty$, entonces $N(T^n) = N(T^p)$ cualquiera sea $n \geq p$. Luego $N((T \mid M)^n) = N(T^n) \cap M = N(T^p) \cap M = N((T \mid M)^p)$, por lo que $p(T \mid M) \leq p(T) < \infty$. Pero, $p(T \mid M) < \infty$ no implicará, en general, que $p(T) < \infty$. No obstante, para el caso que $M = R(T^n)$, $n \in \mathbb{N}$, se tienen los siguientes resultados.

**Lema 1.4.** *Para $T \in L(X)$, se cumplen los siguientes enunciados:*

(1) *Si $p(T)$ y $q(T)$ son ambos finitos, entonces $p(T) = q(T)$.*

(2) *Si $p(T)$ y $q(T)$ son ambos finitos, entonces $\alpha(T) = \beta(T)$.*

(3) *Si $\alpha(T) = \beta(T) < \infty$ y $p(T)$ o $q(T)$ es finito, entonces $p(T) = q(T)$.*

*Demostración.* Para consultar la prueba de (1), véase [51, Proposition 38.3]. Para las pruebas de (2) y (3), véase [51, Proposition 38.6]. $\square$

**Lema 1.5.** *Para un operador $T \in L(X)$,*

(1) *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

  (a) *$p(T) < \infty$;*

  (b) *Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p(T_j) < \infty$ para todo $j \geq i$;*

  (c) *Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N(T_j) = \{0\}$ para todo $j \geq k$.*

  *Además,*

(2) *Si $p(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces existe $j \geq i$ tal que $p(T_j) < \infty$ y $p(T_n) = p(T_j)$ cualquiera sea $n \geq j$.*

*Demostración.*

(1). (a)$\Rightarrow$(b). Suponga que $p = p(T) < \infty$, y sea $y \in N(T) \cap R(T^j)$, con $j \geq p$. Según esto, $y = T^j x$, para algún $x \in X$, y además se tiene que $T^{j+1}x = T(T^j x) = 0$. Luego $x \in N(T^{j+1}) = N(T^j)$, pues $j \geq p$, en consecuencia $y = T^j x = 0$. Así, $N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, implicando esto que $N(T_j) = N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, para todo $j \geq p$. Por lo tanto, $T_j$ es inyectivo cuando $j \geq p$, o equivalentemente $p(T_j) = 0 < \infty$, para todo $j \geq p$.

(b)$\Rightarrow$(c). Suponga que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $p(T_j) < \infty$, para todo $j \geq i$. Sea $p = p(T_j)$, $j \geq i$, procediendo de manera análoga como en el caso anterior se obtiene que $N(T_j) \cap R(T_j^m) = \{0\}$, para todo $m \geq p$. Según esto, y de acuerdo con el inciso (2) del Lema 1.1,

$$\begin{aligned} N(T_{m+j}) &= N(T) \cap R(T^{m+j}) \\ &= N(T) \cap (R(T^j) \cap R(T^{m+j})) \\ &= (N(T) \cap R(T^j)) \cap R(T_j^m) \\ &= N(T_j) \cap R(T_j^m) \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $N(T_j) = \{0\}$, siempre que $j \geq p + i$.

(c)$\Rightarrow$(a). Suponga que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N(T_j) = \{0\}$, para todo $j \geq k$. Entonces, $N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$ para $j \geq k$. Si $x \in N(T^{j+1})$, entonces $T(T^j x) = T^{j+1}x = 0$. Luego, $T^j x \in N(T) \cap R(T^j) = \{0\}$, así $x \in N(T^j)$ y resulta la igualdad $N(T^{j+1}) = N(T^j)$, de donde sigue que $p(T) < \infty$.

(2). Observe que $T_{n+1} = T_n \mid R(T^{n+1})$, para todo $n$. Según esto, y conforme a lo señalado anteriormente, si $p(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $p(T_{i+1}) < \infty$ y $p(T_{i+1}) \leq p(T_i)$. Procediendo en forma inductiva, se concluye que $p(T_n) < \infty$ y $p(T_n) \leq p(T_i)$ cualquiera sea $n \geq i$. De acuerdo con lo anterior, sigue que $(p(T_n))_{n \geq i}$ es una sucesión acotada y decreciente de enteros no negativos, por lo que existe $j \geq i$ (por la construcción) tal que $p(T_n) = p(T_j)$ para $n \geq j$. $\square$

Similarmente, también se tienen las siguientes propiedades para el descent de un operador $T$ y de sus restricciones $T_n$.

**Lema 1.6.** *Para un operador $T \in L(X)$,*

(1) *Las siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $q(T) < \infty$*;*

(b) *Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $q(T_j) < \infty$, para todo $j \geq i$;*

(c) *Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe un subespacio $Y_j$ de $X$ que satisface*

$$Y_j \subseteq N(T^{q(T)}) \quad X = Y_j \oplus R(T^j).$$

*Además,*

(2) *Si $q(T_i) < \infty$ para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces existe $j \geq i$ tal que $q(T_j) < \infty$ y $q(T_n) = q(T_j)$ para todo $n \geq j$.*

*Demostración.*

1. (a)$\Leftrightarrow$(b). Suponga que $q = q(T) < \infty$, según esto y por el inciso (2) del Lema 1.1, se tiene que para $j \geq q$,

$$R(T_j^q) = R(T^{q+j}) = R(T^{q+j+1}) = R(T_j^{q+1}).$$

En virtud de lo cual $R(T_j^q) = R(T_j^{q+1})$. Lo que implica que $q(T_j) < \infty$, para $j \geq q$. Recíprocamente, si $q = q(T_j) < \infty$ para todo $j \geq i$, se tiene que

$$R(T^{j+q}) = R(T_j^q) = R(T_j^{q+1}) = R(T^{j+q+1}).$$

De donde se concluye que $q(T) < \infty$.

(a)$\Leftrightarrow$(c). Es consecuencia de [51, Proposition 38.2.].

2. Si $q = q(T_i) < \infty$, para algún $i \in \mathbb{N}$, entonces $R(T_i^{q+1}) = R(T_i^{q+2})$. En virtud del inciso (2) del Lema 1.1, se tiene que $R(T_{i+1}^q) = R(T_{i+1}^{q+1}))$. Así, $q(T_{i+1}) \leq q(T_i) < \infty$. Procediendo en forma inductiva, se obtiene una sucesión de enteros no negativos $(q(T_n))_{n \geq i}$ que es decreciente y acotada superiormente, luego existe $j \geq i$ tal que $q(T_n) = q(T_j)$, cualquiera sea $n \geq j$. $\square$

**Lema 1.7.** *Sea $T$ un operador lineal sobre un espacio vectorial $X$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) *$p(T) < \infty$;*

(b) *Existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $T_k$ es inyectivo;*

(c) *Existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $p(T_k) < \infty$*.*

*Demostración.* Se obtiene inmediatamente del Lema 1.5. $\square$

**Lema 1.8.** *Sea* $T$ *un operador lineal sobre un espacio vectorial* $X$*. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $q(T) < \infty$*;*

(b) *Existe* $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $T_k$ *es sobreyectivo;*

(c) *Existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $q(T_k) < \infty$*.*

*Demostración.*

(a)⇔(c). Se obtiene inmediatamente del Lema 1.6.

(a)⇔(b). Suponga que $q := q(T) < 1$. Entonces,

$$T^q(X) = T^{q+1}(X) = T(T^q(X)) = R(T^q),$$

por lo que $T_q$ es sobreyectivo. Recíprocamente, si $T_k$ es sobreyectivo para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$T^{k+1}(X) = T(T^k(X)) = R(T^k) = T^k(X),$$

así $q \leq k$. $\square$

**Lema 1.9.** *Si* $T \in L(X)$ *y* $p = p(T) < \infty$*, entonces los siguientes enunciados son equivalentes*

(1) *Existe* $n \geq p + 1$ *tal que* $R(T^n)$ *es cerrado;*

(2) $R(T^n)$ *es cerrado para todo* $n \geq p$*.*

*Demostración.* Sea $c_i^{'}(T) := \dim(N(T^i)/N(T^{i+1}))$. Claramente, $p = p(T) < \infty$, lo cual implica que $c_i^{'}(T) = 0$ para todo $i \geq p$ , así, $k_i(T) := c_i^{'}(T) - c_{i+1}^{'}(T) = 0$ para todo $i \geq p$. La equivalencia sigue fácilmente de [19, Lemma 12.]. $\square$

**Observación 1.1.** Por [51, Proposition 38.1], si $p = p(T) < \infty$, entonces $T^p(X) \cap N(T) = \{0\}$. Pero, ya que $T^{p+1}(X) \subseteq T^p(X)$, se sigue que $T^{p+1}(X) \cap N(T) = T^p(X) \cap N(T)$.

Otros parámetros de utilidad asociados con un operador $T \in L(X)$, se introducen en las siguientes definiciones.

**Definición 1.4.** Sean $X$ un espacio vectorial y $T \in L(X)$. Las deficiencias de $T$ con respecto a su núcleo $N(T)$ y su imagen $R(T)$ denotadas, respectivamente, por $\alpha(T)$ y $\beta(T)$, se definen en la forma siguiente

$$\alpha(T) = \dim N(T) \quad \text{y} \quad \beta(T) = \text{codim } R(T).$$

Si las deficiencias de $T$ son finitas, se define el índice de $T$, denotado ind $(T)$, como

$$\text{ind } (T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

Con respecto a las deficiencias de las restricciones $T_n$, se tienen los resultados siguientes.

**Lema 1.10.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si $\alpha(T_i) < \infty$ para cierto $i \in \mathbb{N}$, entonces existe un entero $j \geq i$ tal que $\alpha(T_n) = \alpha(T_j) < \infty$ cualquiera sea $n \geq j$.*

(2) *Si $\beta(T_i) < \infty$ para cierto $i \in \mathbb{N}$, entonces existe un entero $j \geq i$ tal que $\beta(T_n) = \beta(T_j) < \infty$ cualquiera sea $n \geq j$.*

*Demostración.*

(1). Para algún $i \in \mathbb{N}$, $\alpha(T_i) = \dim N(T_i) < \infty$. Como $N(T_{i+1}) \subseteq N(T_i)$, resulta que $\alpha(T_{i+1}) \leq \alpha(T_i)$. Procediendo en forma inductiva, se tiene que $\alpha(T_{n+1}) \leq \alpha(T_n) < \infty$ para todo $n \geq i$. Así, $(\alpha(T_n))_{n \geq i}$ es una sucesión decreciente y acotada superiormente, por lo que existe un entero $j \geq i$ tal que $\alpha(T_n) = \alpha(T_j) < \infty$, cualquiera sea $n \geq j$.

(2). En virtud del isomorfismo $\frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} \simeq \frac{X}{R(T)+N(T^n)}$, se tiene que

$$\beta(T_n) = \dim \frac{R(T^n)}{R(T^{n+1})} = \dim \frac{X}{R(T)+N(T^n)} = \text{codim } (R(T)+N(T^n)).$$

Siendo que $R(T)+N(T^i) \subseteq R(T)+N(T^{i+1})$, resulta que

$$\text{codim } (R(T)+N(T^{i+1})) \leq \text{codim } (R(T)+N(T^i)).$$

Según esto, y siendo que $\beta(T_i) < \infty$,

$$\beta(T_{i+1}) = \text{codim } (R(T)+N(T^{i+1})) \leq \text{codim } (R(T)+N(T^i)) = \beta(T_i) < \infty.$$

Procediendo en forma inductiva, $(\beta(T_n))_{n\geq i}$ es una sucesión decreciente de enteros no negativos acotada superiormente, por lo que existe un entero $j \geq i$ tal que $\beta(T_n) = \beta(T_j) < \infty$, para todo $n \geq j$. $\square$

**Definición 1.5.** Sea $T$ un operador lineal sobre un espacio vectorial $X$. El hiper-rango de $T$, denotado por $T^\infty(X)$, se define como

$$T^\infty(X) = \bigcap_{n=0}^{\infty} R(T^n)$$

y el hiper-núcleo, denotado por $\mathcal{N}^\infty(T)$, se define como

$$\mathcal{N}^\infty(T) = \bigcap_{n=0}^{\infty} N(T^n).$$

Claramente, de la definición anterior se observa que $T^\infty(X)$ y $\mathcal{N}^\infty(T)$ son subespacios $T$-invariantes de $X$.

**Definición 1.6.** Sea $T \in L(X)$. El core analítico de $T$, denotado por $K(T)$, es el conjunto de todos los $x \in X$ para los cuales existe una sucesión $(x_n) \subseteq X$ y un número real $\delta > 0$ tales que: $x = x_0$, $Tx_{n+1} = x_n$ y $||x_n|| \leq \delta^n ||x||$, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

Es conocido que $K(T)$ es un subespacio de $X$ tal que $T(K(T)) = K(T)$ y $K(T) \subseteq T^\infty(X)$ (véase [1, Theorem 1.2.1]).

**Definición 1.7.** Sea $T \in L(X)$. La parte cuasi-nilpotente de $T$, denotada por $H_0(T)$, se define como el conjunto

$$H_0(T) = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} ||T^n x||^{1/n} = 0\}.$$

Claramente, $H_0(T)$ es un subsepacio lineal de $X$ que en general no es cerrado y es tal que $N(T^m) \subseteq \mathcal{N}^\infty(T) \subseteq H_0(T)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Además, $T$ es cuasi-nilpotente si y solo si $H_0(T) = X$ (véase [1, Theorem 1.68]).

## 1.2. Operadores semi-Fredholm y Fredholm

En esta sección, se introducen los operadores semi-Fredholm, superiormente semi-Fredholm, inferiormente semi-Fredholm y de Fredholm. Se dan algunas propiedades básicas de estos y en especial se hace mención de dos importantes tipos de operadores semi-Fredholm, como lo son, los operadores acotado inferiormente y los sobreyectivos. También, se introducen los operadores semi-Browder, Browder y de Weyl, así como los espectros determinados por dichas clases de operadores.

**Definición 1.8.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo. La clase de todos los operadores superiormente semi-Fredholm en $L(X)$, denotada $\Phi_+(X)$, se define como

$$\Phi_+(X) = \{T \in L(X) : \alpha(T) < \infty \text{ y } R(T) \text{ es cerrado}\},$$

y la clase de todos los operadores inferiormente semi-Fredholm en $L(X)$, denotada $\Phi_-(X)$, por

$$\Phi_-(X) = \{T \in L(X) : \beta(T) < \infty\},$$

Las clases de los operadores semi-Fredholm y de Fredholm en $L(X)$ se definen como $\Phi_\pm(X) = \Phi_+(X) \cup \Phi_-(X)$ y $\Phi(X) = \Phi_+(X) \cap \Phi_-(X)$, respectivamente.

**Teorema 1.2.** *Suponga que $X$ un espacio de Banach y $T,\ S \in L(X)$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si $ST \in \Phi_-(X)$, entonces $S \in \Phi_-(X)$.*

(2) *Si* $ST \in \Phi_+(X)$, *entonces* $T \in \Phi_+(X)$.

(3) *Si* $ST \in \Phi(X)$, *entonces* $T \in \Phi_+(X)$ *y* $S \in \Phi_-(X)$.

*Demostración.* Véase [3, Theorem 1.46], considerando $X = Y = Z$. □

**Teorema 1.3.** *Suponga que* $X$ *un espacio de Banach y* $T$, $S \in L(X)$. *Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si* $T \in \Phi_-(X)$ *y* $S \in \Phi_-(X)$, *entonces* $ST \in \Phi_-(X)$.

(2) *Si* $T \in \Phi_+(X)$ *y* $S \in \Phi_+(X)$, *entonces* $ST \in \Phi_+(X)$.

(3) *Si* $T \in \Phi(X)$ *y* $S \in \Phi(X)$, *entonces* $ST \in \Phi(X)$.

*En particular, si* $T$ *pertenece a una de las clases* $\Phi_-(X)$, $\Phi_+(X)$, $\Phi(X)$ *entonces* $T^n$ *pertenece a la misma clase para todo* $n \in \mathbb{N}$.

*Demostración.* Véase [3, Theorem 1.42], considerando $X = Y = Z$. □

Para la clase de los operadores semi-Fredholm, la noción de índice de un operador se define en la forma siguiente.

**Definición 1.9.** Si $T \in \Phi_\pm(X)$, el índice de $T$, denotado $\operatorname{ind}(T)$, está dado en la forma siguiente

$$\operatorname{ind}(T) = \begin{cases} \alpha(T) - \beta(T), & \text{si } \alpha(T) \text{ y } \beta(T) \text{ son finitos,} \\ \\ +\infty, & \text{si } \alpha(T) = +\infty, \\ \\ -\infty, & \text{si } \beta(T) = +\infty. \end{cases}$$

Obviamente, el índice de un operador semi-Fredholm es un número entero ó $\pm\infty$.

**Observación 1.2.** A continuación se destacan una serie de propiedades relativas a la naturaleza algebraica y topológica de las clases de los operadores semi-Fredholm y Fredholm, como subconjuntos del álgebra $L(X)$, así como también propiedades de perturbación, dualidad y algunas formas de representación de dichas clases de operadores. Para los detalles correspondientes a las afirmaciones que siguen, puede consultarse la referencia [53].

(a) $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$ son semi-grupos multiplicativos de $L(X)$.

(b) Las nociones de operadores superiormente (respectivamente, inferiormente) semi-Fredholm son mutuamente duales, en el sentido siguiente:

$$T \in \Phi_+(X) \quad \Leftrightarrow \quad T^* \in \Phi_-(X^*),$$

$$T \in \Phi_-(X) \quad \Leftrightarrow \quad T^* \in \Phi_+(X^*).$$

Más aún,

$$\alpha(T) = \beta(T^*) \quad \text{y} \quad \beta(T) = \alpha(T^*),$$

y

$$p(T) = q(T^*) \quad \text{y} \quad q(T) = p(T^*).$$

(c) $\Phi_+(X)$, $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$ son subconjuntos abiertos en $L(X)$. Esto es, para cada operador $T \in \Phi_+(X)$, existe un número $\epsilon > 0$ tal que si un operador $S \in L(X)$ satisface que $\|S\| < \epsilon$, entonces $T + S \in \Phi_+(X)$. Además,

$$\alpha(T+S) \leq \alpha(T) \quad \text{y} \quad \text{ind }(T+S) = \text{ind }(T).$$

De manera análoga, dado $T \in \Phi_-(X)$, existe un número $\epsilon > 0$ para el cual si $S \in L(X)$ satisface que $\|S\| < \epsilon$, entonces $T + S \in \Phi_-(X)$, y también se tiene que

$$\beta(T+S) \leq \beta(T) \quad \text{y} \quad \text{ind }(T+S) = \text{ind }(T).$$

De lo anterior también se tiene que la función índice

$$\text{ind} : \Phi_\pm(X) \to \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\},$$

es constante sobre las componentes conexas del abierto $\Phi_+(X)$ (resp. $\Phi_-(X)$ y $\Phi(X)$).

(d) Si $T \in \Phi_+(X)$ (resp. $\Phi_-(X)$) y $K$ es un operador de rango finito, o compacto, en $L(X)$, entonces $T+K \in \Phi_+(X)$ (resp. $\Phi_-(X)$). Más aún, ind $(T+K) =$ ind $(T)$, cualesquiera sean $T \in \Phi_\pm(X)$ y $K$ de rango finito o compacto en $L(X)$.

(e) Para un operador $T \in L(X)$, $T \in \Phi(X)$ e ind $(T) = 0$, justamente cuando $T$ tiene la forma $T = S + K$, en donde $S$ es un operador invertible y $K$ es compacto (o de rango finito) en $L(X)$. Además, $T \in \Phi_+(X)$ y ind $(T) \leq 0$ si y solo si $T = S + K$, donde $S$ es un operador inyectivo con rango cerrado y $K$ es compacto (o de rango finito) en $L(X)$. Análogamente, $T \in \Phi_-(X)$ y ind $(T) \geq 0$ equivale a la representación $T = S + K$, con $S$ un operador sobreyectivo y $K$ compacto (o de rango finito) en $L(X)$.

Seguidamente se describen ciertas partes del espectro clásico $\sigma(T)$ de un operador $T \in L(X)$, con $X$ un espacio de Banach complejo infinito dimensional, motivadas por los operadores definidos anteriormente, así como también algunas relaciones existentes entre ellas.

**Definición 1.10.** Para un operador $T \in L(X)$, el espectro superiormente semi-Fredholm está definido como

$$\sigma_{uf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_+(X)\};$$

y el espectro inferiormente semi-Fredholm se define por

$$\sigma_{lf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_-(X)\}.$$

Mientras que los espectros semi-Fredholm y de Fredholm están definidos, respectivamente, por

$$\sigma_{sf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi_\pm(X)\} \quad \text{y} \quad \sigma_f(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin \Phi(X)\}.$$

Observe que,

$$\sigma_{sf}(T) = \sigma_{uf}(T) \cap \sigma_{lf}(T), \quad \sigma_f(T) = \sigma_{uf}(T) \cup \sigma_{lf}(T).$$

En lo que resta de esta sección, se introducen otras clases particularmente importantes de operadores y sus respectivos espectros.

**Definición 1.11.** Un operador $T \in L(X)$ se dice acotado inferiormente, si $T$ es inyectivo y $R(T)$ es cerrado.

En el siguiente lema se dan algunas relaciones de interés entre las nociones de operadores sobreyectivo y acotado inferiormente.

**Lema 1.11.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *$T$ es sobreyectivo (respectivamente, acotado inferiormente) si y solo si $T^*$ es acotado inferiormente (respectivamente, sobreyectivo).*

(2) *Si $T$ es acotado inferiormente (respectivamente, sobreyectivo), entonces $\lambda I - T$ es acotado inferiormente (respectivamente, sobreyectivo), para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.*

*Demostración.*

(1). Suponga que $T$ es sobreyectivo. Entonces, trivialmente $T$ tiene rango cerrado y así, $T^*$ también tiene rango cerrado. De aquí, y por la igualdad $N(T^*) = \overline{R(T)}^{\perp}$, se obtiene que

$$N(T^*) = \overline{R(T)}^{\perp} = R(T)^{\perp} = X^{\perp} = \{0\}.$$

Luego, $N(T^*) = \{0\}$, por lo que $T^*$ es acotado inferiormente.

Recíprocamente, si $T^*$ es acotado inferiormente, entonces $N(T^*) = \{0\}$ y $R(T^*)$ es cerrado. De esto último sigue, por lo observado en el Teorema 1.1.1, que $R(T)$ es cerrado. De acuerdo con lo anterior y en virtud de la igualdad $\overline{R(T)} =^{\perp} N(T^*)$, se tiene que

$$R(T) = \overline{R(T)} =^{\perp} N(T^*) =^{\perp} \{0\} = X.$$

Es decir, $R(T) = X$ y por lo tanto $T$ es sobreyectivo.

Para el caso $T$ acotado inferiormente si y solo si $T^*$ es sobreyectivo, se procede en forma similar al caso demostrado anteriormente.

(2). De la definición de módulo minimal de $T$,

$$\gamma(T) = \inf \left\{ \frac{\|Tx\|}{\text{dist }(x, N(T))} : x \notin N(T) \right\},$$

resulta la desigualdad

$$\gamma(T)\text{dist }(x, N(T)) \leq \|Tx\| \text{ , para todo } x \in X.$$

Si $T$ acotado inferiormente, entonces $N(T) = \{0\}$ y $R(T)$ es cerrado, y se tiene que

$$\|Tx\| \geq \gamma(T)\|x\| \text{ para todo } x \in X,$$

con $\gamma(T) > 0$. Puesto que

$$\|(\lambda I - T)x\| = \|Tx - \lambda x\| \geq \|Tx\| - |\lambda|\|x\| \quad (\forall x \in X),$$

se deduce de lo anterior, la desigualdad

$$\|(\lambda I - T)x\| \geq (\gamma(T) - |\lambda|)\|x\| \text{ para todo } x \in X,$$

lo que implica que $\lambda I - T$ es inyectivo para todo $|\lambda| < \gamma(T)$. Así, $\lambda I - T$ es acotado inferiormente, para todo $|\lambda| < \gamma(T)$.

Para el caso $T$ sobreyectivo, observe que según lo demostrado en la parte (1), $T^*$ es acotado inferiormente; así $\lambda I^* - T^*$ es acotado inferiormente siempre que $|\lambda| < \gamma(T^*) = \gamma(T)$. Siguiendo de esto, nuevamente por lo demostrado en el inciso (1), que $\lambda I - T$ es sobreyectivo para cada $|\lambda| < \gamma(T)$. $\square$

**Definición 1.12.** Para un operador $T \in L(X)$, el espectro aproximado puntual de $T$, denotado por $\sigma_a(T)$, es definido como

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es acotado inferiormente}\}.$$

**Definición 1.13.** Para un operador $T \in L(X)$, el espectro sobreyectivo de $T$, denotado por $\sigma_s(T)$, se define como

$$\sigma_s(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es sobreyectivo}\}.$$

Note que en virtud del inciso (1) del Lema 1.11, el espectro aproximado puntual y el espectro sobreyectivo son duales cada uno del otro, en el sentido de las igualdades $\sigma_a(T) = \sigma_s(T^*)$ y $\sigma_a(T^*) = \sigma_s(T)$. Además, también se tiene que;

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_s(T).$$

**Definición 1.14.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo. La clase de todos los operadores superiormente semi-Browder en $L(X)$, denotada $B_+(X)$, se define como

$$B_+(X) = \{T \in \Phi_+(X) : p(T) < \infty\},$$

y la clase de los operadores inferiormente semi-Browder, denotada $B_-(X)$, por

$$B_-(X) = \{T \in \Phi_-(X) : q(T) < \infty\}.$$

Además, $B(X) = B_+(X) \cap B_-(X)$ define la clase de los operadores de Browder en $L(X)$.

Las clases $B_+(X)$ y $B_-(X)$ fueron introducidas por R. Harte en [49]. La clase de los operadores de Browder, también es conocida en la literatura como la clase de los operadores de Riesz-Schauder. Para $T \in B_+(X)$ se tiene que $ind(T) = dim N(T) - codim T(X) \leq 0$, mientras que para $T \in B_-(X)$, se tiene que $ind(T) \geq 0$. Note que un operador acotado inferiormente es un operador superiormente semi-Fredholm con rango cerrado y ascent finito. Así, todo operador acotado inferiormente es superiormente semi-Browder. Análogamente, todo operador sobreyectivo es inferiormente semi-Browder.

**Teorema 1.4.** *Sean $T \in L(X)$ y $\lambda_0$ un punto aislado de $\sigma(T)$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\lambda_0 I - T \in \Phi_\pm(X)$*;*

(2) $\lambda_0 I - T$ *es Browder;*

(3) $H_0(\lambda_0 I - T)$ *es de dimensión finita;*

(4) *$K(\lambda_0 I - T)$ es de dimensión finita.*

*Demostración.* Véase [1, Theorem 3.77]. $\square$

Seguidamente se introduce otra importante clase de operadores, conocidas como los operadores de Weyl.

**Definición 1.15.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo. La clase de los operadores superiormente semi-Weyl en $L(X)$, denotada $W_+(X)$, se define como

$$W_+(X) = \{T \in \Phi_+(X) : \text{ind }(T) \leq 0\};$$

y la clase de los operadores inferiormente semi-Weyl, $W_-(X)$, por

$$W_-(X) = \{T \in \Phi_-(X) : \text{ind }(T) \geq 0\}.$$

$W(X) = W_+(X) \cap W_-(X) = \{T \in \Phi(X) : \text{ind}(T) = 0\}$, define la clase los operadores de Weyl en $L(X)$.

Observe que $B(X) \subseteq W(X)$, ya que cada operador $T \in L(X)$ de Fredholm en $X$, con $p(T)$ y $q(T)$ finitos, necesariamente tiene índice cero.

Las distintas clases de operadores definidas anteriormente motivan, de manera natural, la definición de ciertos espectros asociados respectivamente a cada uno estos, los cuales se introducen a continuación.

**Definición 1.16.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.

$$\sigma_{ub}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_+(X)\},$$

$$\sigma_{lb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B_-(X)\},$$

$$\sigma_b(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin B(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: superiormente semi-Browder, inferiormente semi-Browder y de Browder de $T$.

Claramente,

$$\sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{lb}(T).$$

Además, de la definición anterior y las propiedades de los operadores semi-Fredholm, se tiene que

$$\sigma_{ub}(T) = \sigma_{lb}(T^*), \quad \sigma_{lb}(T) = \sigma_{ub}(T^*).$$

Por lo cual,

$$\sigma_b(T) = \sigma_b(T^*).$$

De manera natural, se introducen los espectros de Weyl, en la siguiente definición.

**Definición 1.17.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.

$$\sigma_{SF_+^-}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_+(X)\},$$

$$\sigma_{SF_-^+}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W_-(X)\},$$

$$\sigma_W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin W(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: superiormente semi-Weyl, inferiormente semi-Weyl y Weyl de un operador $T \in L(X)$.

Claramente,

$$\sigma_W(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_-^+}(T).$$
$$\sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma_a(T) \text{ y } \sigma_{SF_-^+}(T) \subseteq \sigma_{su}(T)$$

Además,

$$\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_-^+}(T^*) \text{ y } \sigma_{SF_-^+}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T^*).$$

Más aún, se tienen las siguientes inclusiones:

$$\begin{aligned}
&\sigma_f(T) \subseteq \sigma_W(T) \subseteq \sigma_b(T),\\
&\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{uf}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_b(T),\\
&\sigma_{sf}(T) \subseteq \sigma_{lf}(T) \subseteq \sigma_{lb}(T) \subseteq \sigma_b(T).
\end{aligned}$$

De manera similar a los espectros semi-Browder, se tienen las siguientes igualdades:

$$\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_-^+}(T^*),$$
$$\sigma_{SF_-^+}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T^*),$$
$$\sigma_{SF}(T) = \sigma_{SF}(T^*).$$

## 1.3. Propiedad de la extensión univaluada (SVEP)

En esta sección, se presenta la propiedad de la extensión univaluada localizada en un punto, versión introducida por J. Finch [44], y se dan caracterizaciones para esta propiedad en el caso de los operadores semi-Fredholm.

**Definición 1.18.** Un operador $T \in L(X)$ sobre un espacio de Banach complejo $X$, tiene la propiedad de la extensión univaluada en $\lambda_0$ (abreviada SVEP en $\lambda_0$), si para cada disco abierto $\mathbb{D}_{\lambda_0} \subseteq \mathbb{C}$ centrado en $\lambda_0$, la única función analítica $f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X$ que satisface la ecuación

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0},$$

es la función $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_{\lambda_0}$. Se dice que $T$ tiene la propiedad de la extensión univaluada (abreviado SVEP) si tiene la propiedad de la extensión univaluada en cada punto $\lambda \in \mathbb{C}$.

Para un operador $T \in L(X)$, se denota por

$$\Xi(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T \text{ no tiene la } SVEP\}.$$

Note que por el principio de identidad para funciones analíticas y de la Definición 1.18, sigue que $\Xi(T)$ es un conjunto abierto contenido en el interior del espectro $\sigma(T)$.

**Observación 1.3.** A continuación se listan una serie de propiedades básicas de la SVEP para un operador $T \in L(X)$, $X$ un espacio de Banach complejo, que siguen inmediatamente de la definición anterior.

(1) Si $T$ tiene la SVEP en $\lambda$, entonces para cualquier subespacio cerrado $Y$ de $X$ que sea $T$-invariante, la restricción $T \mid Y$ también tiene la SVEP en $\lambda$. Pues, si $\mathbb{D}_\lambda$ es un disco abierto centrado en $\lambda$ y $f : \mathbb{D}_\lambda \to Y$ es una función analítica tal que

$$(\mu I - T \mid Y) f(\mu) = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Se tiene que $f : \mathbb{D}_\lambda \to Y \subseteq X$ es analítica y además satisface la condición,

$$(\mu I - T) f(\mu) = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Siendo que $T$ tiene la SVEP en $\lambda$, sigue que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_\lambda$.

(2) $T$ tiene la SVEP en $\lambda$ si y solo si $\lambda I - T$ tiene la SVEP en 0.

(3) $T$ tiene la SVEP en cada punto $\lambda$ del resolvente $\rho(T)$ de $T$. En efecto, sea $\lambda \in \rho(T)$ y $f : \mathbb{D}_\lambda \to X$ es una función analítica sobre un disco $\mathbb{D}_\lambda$ centrado $\lambda$, que satisface

$$(\mu I - T) f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Puesto que $\lambda \in \rho(T)$, existe un disco abierto $\mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$, $\epsilon > 0$, para el cual $\mathbb{D}(\lambda, \epsilon) \subseteq \rho(T) \cap \mathbb{D}_\lambda$; además,

$$(\mu I - T) f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon).$$

Según esto último $f(\mu) = 0$ para cada $\mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon)$, debido a que el resolvente es inyectivo en cualquier $\mu \in \mathbb{D}(\lambda, \epsilon) \subset \rho(T)$. Por el principio de identidad para funciones analíticas se concluye que $f \equiv 0$ sobre $\mathbb{D}_\lambda$. Más aún, $T$ también tiene la SVEP en cada $\lambda \in \overline{\rho(T)}$. Para ver esto, considere un disco abierto $\mathbb{D}_\lambda$ centrado en $\lambda$ y una función analítica $f : \mathbb{D}_\lambda \to X$ tal que

$$(\mu I - T) f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_\lambda.$$

Si $\lambda \in \overline{\rho(T)}$, entonces existe una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \rho(T)$ para la cual $\lambda_n \to \lambda$ cuando $n \to \infty$. De acuerdo con esto, para algún $m \in \mathbb{Z}_+$ ocurre que

$$\lambda_n \in \mathbb{D}_\lambda \text{ siempre que } n \geq m.$$

Así, existen discos abiertos $\mathbb{D}_{\lambda_n} \subseteq \mathbb{D}_\lambda$, por cada $n \geq m$, y restricciones analíticas $f : \mathbb{D}_{\lambda_n} \to X$ que satisfacen la ecuación

$$(\mu I - T)f(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{D}_{\lambda_n}.$$

Dado que $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda_n$ se concluye, por el principio de identidad para funciones analíticas, que $f \equiv 0$ en $\mathbb{D}_\lambda$ y así $T$ tiene la SVEP en $\lambda$.

(4) $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \in \partial\sigma(T)$, ya que $\partial\sigma(T) \subseteq \overline{\rho(T)}$.

(5) $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda$ que no sea punto límite del espectro puntual de $T$, $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un autovalor de } T\}$.

(6) $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda$ que no sea punto límite del espectro aproximado puntual $\sigma_a(T)$ de $T$. Como $\sigma_s(T) = \sigma_a(T^*)$, también se tiene que $T^*$ tiene la SVEP en cada $\lambda$ que no sea punto límite del espectro sobreyectivo $\sigma_s(T)$ de $T$.

(7) Para cualquier operador $T \in L(X)$, $T$ y $T^*$ tienen la SVEP en cada punto aislado $\lambda$ del espectro $\sigma(T)$. Debido al principio de la identidad para funciones analíticas, y la igualdad $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

(8) Si $T$ es cuasi-nilpotente, entonces $T$ tiene la SVEP. Esta afirmación, sigue del hecho que para $T$ cuasi-nilpotente, $\sigma(T) = \{0\}$. Así, cada $\lambda \neq 0$ es punto aislado de $\sigma(T)$, lo que implica según lo observado en el inciso (7) que $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \neq 0$. El caso $\lambda = 0$ sigue del inciso (4), pues $0 \in \partial\sigma(T)$.

A continuación, se enuncian varios teoremas importantes relacionados con la SVEP de un operador $T \in L(X)$.

**Teorema 1.5.** *Suponga que $T \in L(X)$ y $\lambda_0 I - T$ es sobreyectivo. Entonces, $T$ tiene la SVEP en $\lambda_0$ si y solo si $\lambda_0 I - T$ es inyectivo.*

*Demostración.* Véase [1, Corollary 2.24]. □

**Teorema 1.6.** *Para $T \in L(X)$, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si $T$ tiene la SVEP, entonces $\sigma_{su}(T) = \sigma(T)$.*

(2) *Si $T^*$ tiene la SVEP, entonces $\sigma_a(T) = \sigma(T)$.*

(3) *Si $T$ y $T^*$ tienen la SVEP, entonces $\sigma(T) = \sigma_s(T) = \sigma_a(T)$.*

*Demostración.* Véase [1, Corollary 2.45]. □

**Lema 1.12.** *Para un operador $T \in L(X)$, las siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *Si $T^*$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, entonces $\sigma_W(T) = \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $\sigma_a(T) = \sigma(T)$;*

(2) *Si $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, entonces $\sigma_W(T^*) = \sigma_{SF_+^-}(T^*)$ y $\sigma_a(T^*) = \sigma(T^*)$.*

*Demostración.* Véase [29, Lemma 2.1]. □

El siguiente teorema establece relaciones entre el ascent (respectivamente, el descent) de $\lambda I - T$ y la SVEP en $\lambda \in \mathbb{C}$.

**Teorema 1.7.** *Para un operador $T \in L(X)$ y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, las siguientes implicaciones son ciertas:*

$$\begin{aligned} p(\lambda_0 I - T) < \infty \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) \cap (\lambda_0 I - T)^\infty(X) = \{\emptyset\} \\ &\Rightarrow \quad T \text{ tiene la SVEP en } \lambda_0 \end{aligned}$$

*y*

$$\begin{aligned} q(\lambda_0 I - T) < \infty \quad &\Rightarrow \quad X = \mathcal{N}^\infty(\lambda_0 I - T) \oplus (\lambda_0 I - T)^\infty(X) \\ &\Rightarrow \quad T^* \text{ tiene la SVEP en } \lambda_0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Véase [1, Theorem 3.8]. □

**Teorema 1.8.** *Sea $T \in L(X)$, $X$ un espacio de Banach y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Si $\lambda_0 I - T$ es un operador semi-Fredholm, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ tiene la SVEP en $\lambda_0$;*

(2) *$p(\lambda_0 I - T) < \infty$;*

(3) *$\sigma_a(T)$ no se acumula en $\lambda_0$.*

*Demostración.* Véase [1, Theorems 3.14, 3.16 y 3.23]. □

**Teorema 1.9.** *Sea $T \in L(X)$, $X$ un espacio de Banach y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Si $\lambda_0 I - T$ es un operador semi-Fredholm, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T^*$ tiene la SVEP en $\lambda_0$;*

(2) *$q(\lambda_0 I - T) < \infty$;*

(3) *$\sigma_s(T)$ no se acumula en $\lambda_0$.*

*Demostración.* Véase [1, Theorems 3.15, 3.17 y 3.27]. □

**Teorema 1.10.** *Sea $T \in L(X)$, $X$ un espacio de Banach y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Si $\lambda_0 I - T \in \Phi_\pm(X)$, entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si $T$ tiene la SVEP en $\lambda_0$, entonces $ind(\lambda_0 I - T) \leq 0$.*

(2) *Si $T^*$ tiene la SVEP en $\lambda_0$, entonces $ind(\lambda_0 I - T) \geq 0$.*

*En consecuencia, si $T$ y $T^*$ tienen la SVEP en $0$, entonces $\lambda_0 I - T$ tiene índice $0$.*

*Demostración.* Véase [1, Corollary 3.19]. □

**Teorema 1.11.** *Suponga que para $T \in L(X)$, $T$ o $T^*$ tiene la SVEP. Entonces*

$$\sigma_{SF_-^+}(T) = \sigma_{ub}(T) \quad y \quad \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{lb}(T).$$

*Demostración.* Véase [1, Theorem 3.66]. □

**Teorema 1.12.** *Sea $T \in L(X)$ y $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ una función análitica sobre un entorno abierto $\mathcal{U}$ of $\sigma(T)$. Si $T$ tiene la SVEP, entonces $f(T)$ tiene la SVEP. Si $f$ no es constante en cada componente conexa de $\mathcal{U}$, entonces $T$ tiene la SVEP si y solo si $f(T)$ tiene la SVEP.*

*Demostración.* Véase [1, Theorem 2.40]. □

**Observación 1.4.** Un operador $T \in L(X)$ se dice que es de Riesz si $\lambda I - T \in \Phi(X)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (véase [4, Section 2.3]). Un operador $T \in L(X)$ se dice *algebraico*, si $p(T) = 0$ para algún polinomio complejo no nulo $p$ (véase [4, Section 3.5]). Si $T$ es un operador algebraico y $\alpha(p(T)) < \infty$ para cada polinomio $p$, entonces $T^n$ tiene rango finito para algún $n \in \mathbb{N}$ (véase [4, Theorem 3.72]), y por lo tanto, $T$ es un operador de Riesz. También, $T$ es un operador algebraico si y solo si $T^*$ es algebraico.

**Teorema 1.13.** *Suponga que $T, K \in L(X)$ son operadores que conmutan, $K$ es algebraico, y $h$ un polinomio no nulo tal que $h(K) = 0$. Si $T$ tiene la SVEP en cada uno de los ceros de $h$, entonces $T - K$ tiene la SVEP en 0. En particular, si $T$ tiene la SVEP, entonces $T + K$ tiene la SVEP.*

*Demostración.* Véase [13, Theorem 2.3]. □

**Teorema 1.14.** *Suponga que $T \in L(X)$ y $K \in L(X)$ es un operador algebraico que conmuta con $T$. Si tiene la SVEP entonces $T + K$ tiene la SVEP.*

*Demostración.* Véase [11, Theorem 2.14]. □

**Teorema 1.15.** *Sea $T \in L(X)$ y $R \in L(X)$ un operador de Riesz que conmuta con $T$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $T$ tiene la SVEP en $\lambda$ si y solo si $T - R$ tiene la SVEP en $\lambda$. En particular, la SVEP es estable bajo perturbaciones de Riesz que conmutan.*

*Demostración.* Véase [4, Theorem 2.129]. □

**Lema 1.13.** *Suponga que $K \in L(X)$ es un operador algebraico que conmuta con $T \in L(X)$. Entonces:*

(1) *Si $T^*$ tiene SVEP en $\lambda \in \sigma(K)$, entonces $T^* + K^*$ tiene SVEP en $\lambda$.*

(2) *Si $T$ tiene SVEP en $\lambda \in \sigma(K)$, entonces $T + K$ tiene SVEP en $\lambda$.*

*Demostración.* Véase [13, Theorem 2.3]. □

Un operador $T \in L(X)$ se dice de *rango finito*, si su rango $R(T)$, es de dimensión finita. A continuación se presentan varios resultados relacionados con operadores de rango finito.

**Lema 1.14.** *Sea $T \in L(X)$ tal que* $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$*. Si $K \in L(X)$ es tal que $K^n$ es de rango finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces* $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K) = \emptyset$*. En consecuencia, $\sigma_a(T+K) = \sigma_a(T)$.*

*Demostración.* Véase [4, Lemma 5.106]. □

**Teorema 1.16.** *Sean $T$, $K \in L(X)$ operadores que conmutan y $K^n$ un operador de rango finito para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\sigma_a(T+K) = \sigma_a(T)$ si y solo si* $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K) = \operatorname{iso}\sigma_a(T)$*. En este caso, también se tiene que $\sigma(T+K) = \sigma(T)$.*

*Demostración.* Véase [4, Theorem 3.27]. □

**Teorema 1.17.** *Sea $T \in L(X)$ y $F$ es un operador de rango finito sobre $X$ que conmuta con $T$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *$\sigma_{SF_+^-}(T)$ es cerrado y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T+F)$.*

(2) *$\sigma_{ub}(T)$ es cerrado y $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T+F)$.*

*Demostración.* Véase [1, 4, Corollaries 3.45, 3.37]. □

**Lema 1.15.** *Sea $T \in L(X)$. Si $F$ es un operador de rango finito sobre $X$ que conmuta con $T$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{C}$:*

$$\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T+F)$$

*Demostración.* Véase [58, Lemma 2.1]. □

Un operador $T \in L(X)$ se dice que es *nilpotente* si existe un número entero positivo $n$ tal que $T^n = 0$. El número mínimo $n$ con esta propiedad se llama el *índice de nilpotencia* de $T$. Se dice que $T$ es un operador *cuasi-nilpotente* si $\sigma(T) = \{0\}$. Es conocido que todo operador nilpotente es un operador cuasi-nilpotente. A continuación se presentan varios resultados relacionados con operadores cuasi-nilpotentes.

**Teorema 1.18.** *Sea $T \in L(X)$ y sea $Q$ un operador cuasi-nilpotente que conmuta con $T$. Entonces, $\sigma_{SF_+^-}(T+Q) = \sigma_{SF_+^-}(T)$.*

*Demostración.* Véase [39, Theorem 2.13]. □

**Teorema 1.19.** *Sea $T \in L(X)$ y $Q$ un operador cuasi-nilpotente que conmuta con $T$. Entonces $\sigma_a(T+Q) = \sigma_a(T)$ y $\sigma_s(T+Q) = \sigma_s(T)$.*

*Demostración.* Véase [3, Corollary 3.24]. □

**Teorema 1.20.** *Suponga que $T \in L(X)$ tiene la SVEP y $Q$ es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con $T$. Entonces $T+Q$ tiene la SVEP.*

*Demostración.* Véase [4, Corollary 2.12]. □

El siguiente resultado muestra que los espectros de Weyl y de Fredholm son estables bajo perturbaciones por operadores de Riesz que conmutan.

**Teorema 1.21.** *Los espectros $\sigma_W(T)$, $\sigma_{SF_-^+}(T)$, $\sigma_{SF_+^-}(T)$, $\sigma_{sf}(T)$, $\sigma_{uf}(T)$ y $\sigma_{lf}(T)$ son estables bajo perturbaciones de Riesz que conmutan.*

*Demostración.* Véase [1, Corollary 3.18]. □

## 1.4. Operadores cuasi-Fredholm

En esta sección se tratan los operadores cuasi-Fredholm, introducidos por J. Labrouse en [56], se estudian algunas características y propiedades de estos operadores, las cuales serán de utilidad en las secciones siguientes.

Para $T \in L(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, se define

$$\kappa_n(T) = \dim\left((R(T^n) \cap N(T))/(R(T^{n+1}) \cap N(T))\right).$$

En virtud del inciso (7), del Lema 1.1,

$$\kappa_n(T) = \dim\left((R(T) + N(T^{n+1}))/(R(T) + N(T^n))\right).$$

En la siguiente definición, se describen los operadores cuasi-Fredholm.

**Definición 1.19.** Un operador $T \in L(X)$ se dice cuasi-Fredholm, si existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $\kappa_n(T) = 0$, para todo $n \geq d$, y vale alguna de las condiciones mencionadas en el Lema 1.3.

$QF(X)$ denotará la colección de todos los operadores cuasi-Fredholm en $X$.

**Definición 1.20.** Sean $T \in L(X)$ y $d \in \mathbb{N}$. Se dice que $T$ tiene descent uniforme para cada $n \geq d$, si $\kappa_n(T) = 0$. Si además, $R(T) + N(T^n)$ es cerrado, para $n \geq d$, se dice que $T$ tiene descent topológico uniforme.

Observe que según el Lema 1.3 y la definición anterior, sigue que todo operador cuasi-Fredholm tiene descent topológico uniforme.

**Definición 1.21.** Suponga que $T \in L(X)$ tiene descent topológico uniforme para $n \geq d$, donde $n, d \in \mathbb{N}$ y sea $V \in L(X)$ un operador acotado que conmuta con $T$. Se dice que $V - T$ es *suficientemente pequeño* si la norma de la restricción de $V - T$ sobre $R(T^d)$ es menor que el módulo minimal reducido de la restricción de $T$ sobre $R(T^d)$.

**Teorema 1.22.** *Suponga que $T \in L(X)$ tiene descent topológico uniforme para $n \geq d$, donde $n, d \in \mathbb{N}$ y sea $V \in L(X)$ es un operador acotado que conmuta con $T$. Si $V - T$ es suficientemente pequeño e invertible, entonces*

(1) *$V$ tiene rango cerrado y descent topológico uniforme para $n \geq 0$.*

(2) $\dim \dfrac{N(V^{n+1})}{N(V^n)} = \dim \dfrac{N(T^{d+1})}{N(T^d)}$ *para cada entero $n \geq 0$.*

(3) $\dim \dfrac{R(V^n)}{R(V^{n+1})} = \dim \dfrac{R(T^d)}{R(T^{d+1})}$ *para cada entero $n \geq 0$.*

*Demostración.* Véase [47, Theorem 4.7]. □

**Teorema 1.23.** *Suponga que $T \in L(X)$ tiene descent topológico uniforme para $n \geq d$, donde $n, d \in \mathbb{N}$ y sea $V \in L(X)$ es un operador que conmuta con $T$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

(1) *Si* $R(T^n) \cap N(T)$ *tiene dimensión finita, entonces* $V$ *es un operador superiormente semi-Fredholm y* $\alpha(T) = \dim(R(T^n) \cap N(T))$.

(2) *Si* $R(T) + N(T^d)$ *tiene dimensión finita, entonces* $V$ *es un operador inferiormente semi-Fredholm y* $\beta(T) = \dfrac{X}{\dim(R(T) + N(T^d))}$.

*Demostración.* Véase [47, Corollary 4.8]. □

**Teorema 1.24.** *Sea* $T \in L(X)$. *Entonces,*

$$T \in QF(X) \iff T^* \in QF(X^*)$$

*Demostración.* Véase [67, Theorem 2.11]. □

Asociados con los operadores cuasi-Fredholm, M. Berkani y A. Ouahab [27], introducen el siguiente subconjunto del espectro clásico de un operador.

**Definición 1.22.** El espectro esencialmente cuasi-Fredholm de un operador $T \in L(X)$, denotado $\sigma_{qf}(T)$, se define como

$$\sigma_{qf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es cuasi-Fredholm}\}$$

Observe que, del Teorema 1.24, se tiene que $\sigma_{qf}(T) = \sigma_{qf}(T^*)$.

A continuación se describen los operadores $B$-Fredholm, $B$-Browder y $B$-Weyl, introducidos por M. Berkani en [18] y [20], y por M. Berkani y M. Sarih en [28], los cuales constituyen, respectivamente, una generalización de los operadores de Fredholm, Browder y Weyl.

**Definición 1.23.** Un operador $T \in L(X)$ se dice superiormente (respectivamente, inferiormente) semi $B$-Fredholm, si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado en $X$ y $T_n$ es superiormente (respectivamente, inferiormente) semi-Fredholm. $T$ es un operador $B$-Fredholm, si $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ es de Fredholm, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Las clases introducidas anteriormente se denotarán, respectivamente, como: $BF_+(X)$, $BF_-(X)$ y $BF(X)$. La clase de los operadores semi $B$-Fredholm se define como $BF_\pm(X) = BF_+(X) \cup BF_-(X)$. Nótese que $BF(X) = BF_+(X) \cap BF_-(X)$.

Observe que cada operador semi-Fredholm es semi $B$-Fredholm (este es el caso donde $n = 0$). Puesto que las proyecciones continuas y los operadores nilpotentes, son operadores semi $B$-Fredholm que no son semi-Fredholm, entonces $BF_\pm(X)$ contiene propiamente a la clase $\Phi_\pm(X)$, de los operadores de semi-Fredholm en $X$.

**Observación 1.5.** Si $T_n$ es un operador semi-Fredholm, entonces $T_m$ es semi-Fredholm e $\text{ind}(T_m) = \text{ind}(T_n)$, para todo $m \geq n$ (véase [28, Proposition 2.1]). Así, el índice de un operador $T$ semi $B$-Fredholm, es definido como $\text{ind}(T) = \text{ind}(T_n)$, donde $T_n$ es una restricción de $T$ sobre cualquier $R(T^n)$ cerrado, que sea semi-Fredholm. Por otra parte, para un operador $T \in L(X)$ se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} &R(T^n) \text{ cerrado} \Leftrightarrow R(T^{*n}) \text{ cerrado}, \\ &T_n \in \Phi_+(X) \Leftrightarrow T_n^* \in \Phi_-(X), \\ &T_n \in \Phi_-(X) \Leftrightarrow T_n^* \in \Phi_+(X). \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} &T \in BF_+(X) \Leftrightarrow T^* \in BF_-(X), \\ &T \in BF_-(X) \Leftrightarrow T^* \in BF_+(X), \\ &T \in BF(X) \Leftrightarrow T^* \in BF(X). \end{aligned}$$

Además, si $T \in BF_\pm(X)$ entonces $\text{ind}(T^*) = -\text{ind}(T)$.

El siguiente resultado exhibe la relación existente entre los operadores semi $B$-Fredholm y los operadores cuasi-Fredholm.

**Teorema 1.25.** *Sea $T \in L(X)$. $T$ es un operador superiormente (respectivamente, inferiormente) semi $B$-Fredholm si y solo si $T \in QF(X)$ y $N(T) \cap R(T^d)$ (respectivamente, $N(T) \cap R(T^d)$) es de dimensión (respectivamente, codimension) finita, para algún $d \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Véase [28, Proposition 2.5]. □

De acuerdo con el resultado anterior, se tienen las siguiente implicaciones:

$$T \in \Phi_{\pm}(X) \Rightarrow T \in BF_{\pm}(X) \Rightarrow T \in QF(X)$$

La clase $BF(X)$ de todos los operadores $B$-Fredholm fue ampliamente estudiada por M. Berkani en [18]. En este trabajo el autor demostró que un operador $T \in L(X)$ es $B$-Fredholm si y solo si $T = T_0 \oplus T_1$, donde $T_0$ es un operador de Fredholm y $T_1$ es un operador nilpotente (véase [18, Theorem 2.7]). En este sentido, M. Berkani y M. Sarih [28], demostraron que si $H$ es un espacio de Hilbert, entonces $T \in L(H)$ es superiormente semi $B$-Fredholm (respectivamente, inferiormente semi $B$-Fredholm) si y solo si $T = T_0 \oplus T_1$, donde $T_0$ es un operador superiormente semi-Fredholm (respectivamente, inferiormente semi-Fredholm) y $T_1$ es un operador nilpotente (véase [28, Theorem 2.6]).

**Lema 1.16.** *Sea $T \in L(X)$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *$T$ es superiormente semi $B$-Fredholm y $\alpha(T) < \infty$ si y solo si $T \in \Phi_+(X)$.*

(2) *$T$ es inferiormente semi $B$-Fredholm y $\beta(T) < \infty$ si y solo si $T \in \Phi_-(X)$.*

*Demostración.* Véase [5, Lemma 2.4]. □

Como una extensión del Lema 1.16, se tiene el siguiente resultado (véase [72, Lemma 1.2]).

**Lema 1.17.** *Sea $T \in L(X)$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *$\lambda I - T$ es superiormente semi-Fredholm si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado, $\lambda I - T_n$ es superiormente semi $B$-Fredholm y $\alpha(\lambda I - T) < \infty$.*

(2) *$\lambda I - T$ es inferiormente semi-Fredholm si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado, $\lambda I - T_n$ es inferiormente semi $B$-Fredholm y $\beta(\lambda I - T) < \infty$.*

Ahora, se introducen los espectros correspondiente a los operadores semi $B$-Fredholm.

**Definición 1.24.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo.

$$\sigma_{ubf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BF_+(X)\},$$
$$\sigma_{lbf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BF_-(X)\},$$
$$\sigma_{sbf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BF_\pm(X)\},$$
$$\sigma_{bf}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BF(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: superiormente semi $B$-Fredholm, inferiormente semi $B$-Fredholm, semi $B$-Fredholm y $B$-Fredholm de $T$.

Claramente,

$$\sigma_{sbf}(T) = \sigma_{ubf}(T) \cap \sigma_{lbf}(T)$$
$$\sigma_{bf}(T) = \sigma_{ubf}(T) \cup \sigma_{lbf}(T)$$

A continuación se generaliza la clase de los operadores semi-Browder y se da una caracterización para esta clase de operadores.

**Definición 1.25.** Un operador $T \in L(X)$, se dice superiormente (respectivamente, inferiormente) semi $B$-Browder, denotado $T \in B(X)$, si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado en $X$ y $T_n$ es superiormente (respectivamente, inferiormente) semi-Browder. $T$ es un operador $B$-Browder (respectivamente, semi $B$-Browder), si $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ es de Browder (respectivamente, semi-Browder), para algún $n \in \mathbb{N}$.

Se denotan, respectivamente, por $BB_+(X)$, $BB_-(X)$ a las clases de los operadores superiormente semi $B$-Browder e inferiormente semi $B$-Browder. Además,

$$BB(X) = BB_+(X) \cap BB_-(X),$$
$$BB_\pm(X) = BB_+(X) \cup BB_-(X).$$

De la Definición 1.25 y los Lemas 1.7 y 1.8, se obtiene la siguiente caracterización para los operadores semi $B$-Browder.

**Teorema 1.26.** *Un operador $T \in L(X)$, es superiormente (respectivamente, inferiormente) semi $B$-Browder, si y solo existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $p(T) < \infty$ (respectivamente, $q(T) < \infty$).*

*Demostración.* Véase [67, Theorem 2.2.7]. □

Las distintas clases de operadores definidas y estudiadas anteriormente motivan, de manera natural, la definición de ciertos espectros asociados respectivamente a cada uno estos, los cuales se introducen a continuación.

**Definición 1.26.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo.

$$\sigma_{ubb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BB_+(X)\},$$
$$\sigma_{lbb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BB_-(X)\},$$
$$\sigma_{bb}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BB(X)\},$$

definen, respectivamente, los espectros: superiormente semi $B$-Browder, inferiormente semi $B$-Browder y $B$-Browder de $T$.

Claramente,

$$\sigma_{bb}(T) = \sigma_{ubb}(T) \cup \sigma_{lbb}(T)$$

Del siguiente resultado, debido a M. Berkani, se deriva la compacidad del espectro $B$-Browder de un operador.

**Teorema 1.27.** *Para cada operador $T \in L(X)$, el espectro $B$-Browder, $\sigma_{bb}(T)$ es cerrado.*

*Demostración.* Véase [19, Corollary 3.10]. □

La noción de índice mencionada en la Observación 1.5 permite la siguiente generalización de los operadores de Weyl, debida a M. Berkani y M. Sarih [28].

**Definición 1.27.** Un operador $T \in L(X)$ se dice un operador $B$-Weyl, si $T$ es $B$-Fredholm e ind $T = 0$.

Note que $T$ $B$-Weyl justamente significa que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado, $T_n$ es Fredholm e ind $T_n = 0$.

**Definición 1.28.** Un operador $T \in L(X)$ se dice superiormente (respectivamente, inferiormente) semi $B$-Weyl, si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado en $X$ y $T$ es superiormente (respectivamente, inferiormente) semi $B$-Fredholm e ind $T \leq 0$ (respectivamente, ind $T \geq 0$).

Se denotan, respectivamente, por $BW_+(X)$ y $BW_-(X)$ a las clases de los operadores superiormente semi $B$-Weyl e inferiormente semi $B$-Weyl. Además,

$$BW(X) = BW_+(X) \cap BW_-(X),$$

denota la clase de los operadores $B$-Weyl.

Como toda proyección continua es un operador $B$-Weyl y no es de Weyl, la clase $BW(X)$ contiene propiamente a la clase de los operadores de Weyl.

**Definición 1.29.** El espectro $B$-Weyl de un operador $T \in L(X)$, se define como sigue:

$$\sigma_{BW}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW(X)\}.$$

Más aún, también se tienen las inclusiones siguientes:

$$\sigma_{bf}(T) \subseteq \sigma_{BW}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T).$$

$$\sigma_{sbf}(T) \subseteq \sigma_{ubf}(T) \subseteq \sigma_{ubb}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T).$$

$$\sigma_{sbf}(T) \subseteq \sigma_{lbf}(T) \subseteq \sigma_{lbb}(T) \subseteq \sigma_{bb}(T).$$

En la siguiente definición se generalizan las nociones de los espectros aproximado puntual y sobreyectivo de Weyl.

**Definición 1.30.** Para un operador $T \in L(X)$, se definen:

$$\sigma_{SBF_+^-}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW_+(X)\},$$

$$\sigma_{SBF_-^+}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \notin BW_-(X)\}.$$

Note que

$$\sigma_{BW}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_-^+}(T).$$

Además, de la Observación 1.5, se tienen las siguientes igualdades:

$$\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_-^+}(T^*), \sigma_{SBF_-^+}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T^*) \text{ y } \sigma_{BW}(T) = \sigma_{BW}(T^*).$$

**Teorema 1.28.** *Sea $T \in L(X)$ y sea $F \in L(X)$ un operador que conmuta con $T$ tal que $F^n$ tiene rango finito para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\sigma_{BW}(T) = \sigma_{BW}(T + F)$.*

*Demostración.* Vésase [46, Theorem 3.2]. □

A continuación se introducen algunas generalizaciones de la noción de pseudoinvertibilidad, debida a M. P. Drazin [38], en el álgebra de operadores $L(X)$, tales generalizaciones son las nociones de operadores Drazin invertibles a izquierda y Drazin invertibles a derecha, así como también se presentan algunos resultados relativos a estas generalizaciones, los cuales serán utilizados en el resto del trabajo.

**Definición 1.31.** Sea $\mathcal{A}$ un álgebra. Un elemento $x \in \mathcal{A}$ se dice invertible de grado $k$ según Drazin, si existe un elemento $y \in \mathcal{A}$ tal que

$$x^k yx = x^k, yxy = y, xy = yx.$$

En el caso particular del álgebra de Banach $L(X)$, se tiene que $T$ es Drazin invertible si y solo si $p(T) = q(T) < \infty$, lo cual también es equivalente a que $T = T_0 \oplus T_1$, donde $T_0$ es un operador invertible y $T_1$ es un operador nilpotente (véase [54, Proposition A] y [57, Corollary 2.2]). Puesto que cada operador $B$-Fredholm $T$ admite la representación $T = T_0 \oplus T_1$, donde $T_0$ es Fredholm y $T_1$ es nilpotente, entonces cada operador Drazin invertible es $B$-Fredholm. En la siguiente definición se introducen generalizaciones de la noción de Drazin invertible en el álgebra $L(X)$.

**Definición 1.32.** Un operador $T \in L(X)$ se dice Drazin invertible a izquierda, si $p := p(T) < \infty$ y $R(T^{p+1})$ es cerrado, mientras que $T \in L(X)$ se dice Drazin invertible a derecha, si $q := q(T) < \infty$ y $R(T^q)$ es cerrado.

Es importante señalar que la condición $q = q(T) < \infty$ no implica que $T^q(X)$ sea cerrado. Claramente, $T \in L(X)$ es Drazin invertible a izquierda y a derecha si y solo si $T$ es Drazin invertible. En efecto, si $0 < p := p(T) = q(T) < \infty$, entonces $R(T^p) = R(T^{p+1})$ es el núcleo de la proyección espectral $P_0$ asociada al subconjunto espectral $\{0\}$ (véase [51, Proposition 50.2]).

A continuación se dan algunas caracterizaciones espectrales para los operadores semi $B$-Browder y $B$-Browder, las cuales extienden para esta clase de operadores generalizados los resultados obtenidos por P. Aiena y C. Carpintero en [8].

**Teorema 1.29.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\lambda_0 I - T$ *es Drazin invertible a izquierda;*

(2) $\lambda_0 I - T$ *es superiormente semi $B$-Browder;*

(3) $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y tiene ascent finito;*

(4) $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y $T$ tiene la SVEP en $\lambda_0$.*

*Demostración.* Véase [67, Theorem 2.3.3]. □

De manera similar se tiene a continuación un resultado dual.

**Teorema 1.30.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\lambda_0 I - T$ *es Drazin invertible a derecha;*

2. $\lambda_0 I - T$ *es inferiormente semi $B$-Browder;*

3. $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y tiene descent finito;*

4. $\lambda_0 I - T$ *es cuasi-Fredholm y $T^*$ tiene la SVEP en $\lambda_0$.*

*Demostración.* Véase [67, Theorem 2.3.4]. □

Como consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores, se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 1.1.** *Sea $T \in L(X)$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$\lambda_0 I - T$ es Drazin invertible;*

2. *$\lambda_0 I - T$ es B-Browder;*

3. *$\lambda_0 I - T$ es cuasi-Fredholm y ambos $T$, $T^*$ tienen SVEP en $\lambda_0$.*

*Demostración.* Véase [67, Corollary 2.3.2]. □

En la siguiente definición se introducen los espectros derivados de la noción de Drazin invertibilidad.

**Definición 1.33.** Sea $X$ un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$.

$$\sigma_{LD}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es drazin invertible a izquierda}\},$$

$$\sigma_{RD}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es drazin invertible a derecha}\},$$

$$\sigma_{D}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ no es drazin invertible}\},$$

definen, respectivamente, los espectros: Drazin invertible a izquierda, Drazin invertible a derecha y Drazin invertible de $T$.

Claramente, $\sigma_D(T) = \sigma_{LD}(T) \cup \sigma_{RD}(T)$. Además, de los resultados antes mostrados, se tiene que

$$\sigma_{LD}(T) \subset \sigma_a(T),\ \sigma_{RD}(T) \subset \sigma_{su}(T),$$

$$\sigma_{ubb}(T) = \sigma_{LD}(T),\ \sigma_{lbb}(T) = \sigma_{RD}(T),\ \sigma_{bb}(T) = \sigma_D(T),$$

$$\sigma_{LD}(T) = \sigma_{RD}(T^*),\ \sigma_{RD}(T) = \sigma_{LD}(T^*),\ \sigma_D(T) = \sigma_D(T^*).$$

Por lo cual, $\sigma_{bb}(T) = \sigma_{bb}(T^*),\ \sigma_{ubb}(T) = \sigma_{lbb}(T^*),\ \sigma_{lbb}(T) = \sigma_{ubb}(T^*)$.

**Lema 1.18.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) $\sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T)$ *si y solo si* $\sigma_a(T) = \sigma(T)$.

(2) $\sigma_a(T) = \sigma(T)$ *si y solo si* $\sigma_{LD}(T) = \sigma_D(T)$.

(3) $\sigma_b(T) = \sigma_{lb}(T)$ *si y solo si* $\sigma_s(T) = \sigma(T)$.

(4) $\sigma_s(T) = \sigma(T)$ *si y solo si* $\sigma_{RD}(T) = \sigma_D(T)$.

*Demostración.* Véase [15, Lemma 2.1]. □

## 1.5. Teoremas tipo Weyl y tipo Browder

En esta sección, para un operador $T \in L(X)$ se introducen los conjuntos $E^0(T)$, $E_a^0(T)$, $E(T)$, $E_a(T)$, $\Pi^0(T)$, $\Pi_a^0(T)$, $\Pi(T)$, $\Pi_a^0(T)$, el cual son necesarios para definir los teoremas tipo Weyl y tipo Browder. También se dan las nociones de operadores isoloides, polaroides, $a$-polaroides, polaroides a izquierda, polaroides a derecha, hereditariamente polaroides y las relaciones existentes entre ellos. Además, se dan caracterizaciones del teorema generalizado de Weyl y el teorema generalizado de $a$-Weyl y se presentan algunas relaciones entre estos teoremas.

**Definición 1.34.** Para $T \in L(X)$ se definen los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned}
E^0(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\},\\
E_a^0(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\},\\
E(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\},\\
E_a(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\},
\end{aligned}$$

donde $\operatorname{iso} K$ denota el conjunto de todos los puntos aislados de $K \subseteq \mathbb{C}$. También, se definen

$$\Pi^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T), \quad \Pi_a^0(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{ub}(T),$$
$$\Pi(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_D(T), \quad \Pi_a(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{LD}(T).$$

Observe que, en general, se satisfacen las inclusiones

$$\Pi^0(T) \subseteq \Pi_a^0(T) \subseteq \Pi_a(T) \subseteq E_a(T),$$
$$\Pi^0(T) \subseteq \Pi(T) \subseteq \Pi_a(T) \subseteq E_a(T),$$
$$\Pi^0(T) \subseteq \Pi_a^0(T) \subseteq E_a^0(T) \subseteq E_a(T),$$
$$\Pi^0(T) \subseteq \Pi(T) \subseteq E(T) \subseteq E_a(T),$$
$$\Pi^0(T) \subseteq E^0(T) \subseteq E(T) \subseteq E_a(T),$$
$$\Pi^0(T) \subseteq E^0(T) \subseteq E_a^0(T) \subseteq E_a(T).$$

**Definición 1.35.** Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface:

(1) El teorema de Browder, denotado $(\mathcal{B})$, si $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \Pi^0(T)$.

(2) El teorema generalizado de Browder, denotado $(g\mathcal{B})$, si $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \Pi(T)$.

(3) El teorema de $a$-Browder, denotado $(a\mathcal{B})$, si $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T)$.

(4) El teorema generalizado de $a$-Browder, denotado $(ga\mathcal{B})$, si $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a(T)$.

El teorema de Browder (respectivamente, el teorema generalizado de Browder) para $T$ y el teorema de Browder (respectivamente, el teorema generalizado de Browder) para $T^*$ son equivalentes, puesto que $\sigma_W(T) = \sigma_W(T^*)$ y $\sigma_b(T) = \sigma_b(T^*)$ (respectivamente, $\sigma_{BW}(T) = \sigma_{BW}(T^*)$ y $\sigma_{bb}(T) = \sigma_{bb}(T^*)$).

**Teorema 1.31.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ satisface el teorema de Browder;*

(2) *$T$ satisface el teorema generalizado de Browder;*

(3) *$T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{BW}(T)$;*

(4) *$T^*$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{BW}(T)$;*

(5) *$T^*$ satisface el teorema generalizado de Browder.*

*Demostración.* La equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) fue demostrada en [6], mientras que las equivalencias (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) fueron demostradas en [10]. $\square$

Observe que según el Teorema 1.31, se tiene que:

Si $T$ o $T^*$ tiene la SVEP, entonces $T$ y $T^*$ satisfacen el teorema de Browder.

Similar al teorema anterior, a continuación se dan algunas equivalencias del teorema generalizado de $a$-Browder.

**Teorema 1.32.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ satisface el teorema de a-Browder;*

(2) *$T$ satisface el teorema generalizado de a-Browder;*

(3) *$T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$;*

(4) *$T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SBF_+^-}(T)$.*

*Demostración.* La equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) fue demostrada en [6]. Para las equivalencias (1) $\Leftrightarrow$ (3) y (2) $\Leftrightarrow$ (4) véase [9] y [12]. $\square$

Otras caracterizaciones del teorema generalizado de $a$-Browder se pueden encontrar en [12]. En particular, del Teorema 1.32, se sigue que si $T$ tiene la SVEP, entonces $T$ satisface el teorema de $a$-Browder, o equivalentemente satisface el teorema generalizado de $a$-Browder. Note que también la SVEP para $T^*$ implica ambos teoremas de $a$-Browder (véase [12, Theorem 2.9]).

**Teorema 1.33.** *Si $T \in L(X)$ satisface el teorema de a-Browder y $R$ es un operador de Riesz que conmuta con $T$, entonces $T + R$ satisface el teorema de a-Browder.*

*Demostración.* Véase [60, Corollary 2.3]. $\square$

**Definición 1.36.** Un operador $T \in L(X)$ se dice que satisface:

(1) El teorema de Weyl, denotado $(\mathcal{W})$, si $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E^0(T)$.

(2) El teorema generalizado de Weyl, denotado $(g\mathcal{W})$, si $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$.

(3) El teorema de $a$-Weyl, denotado $(a\mathcal{W})$, si $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a^0(T)$.

(4) El teorema generalizado de $a$-Weyl, denotado $(ga\mathcal{W})$, si $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T)$.

A continuación se da una caracterización del teorema de Weyl para un operador $T \in L(X)$, mediante la SVEP.

**Teorema 1.34.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ satisface el teorema de Weyl;*

(2) *$T$ tiene la SVEP para cada $\lambda \notin \sigma_W(T)$ y $E^0(T) = \Pi^0(T)$.*

*En particular, si $T$ o $T^*$ tiene la SVEP, entonces $T$ satisface el teorema de Weyl si y solo si $E^0(T) = \Pi^0(T)$.*

*Demostración.* Véase [2, Theorem 3.1]. □

A continuación se da una caracterización del teorema generalizado de $a$-Weyl para un operador $T \in L(X)$, mediante la SVEP.

**Teorema 1.35.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface el teorema generalizado de a-Weyl si y solo si, $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SBF_+^-}(T)$ y $E_a^0(T) = \Pi_a^0(T)$. En consecuencia, $T$ satisface el teorema generalizado de a-Weyl si y solo si $T$ satisface el teorema generalizado de a-Browder y $E_a^0(T) = \Pi_a^0(T)$.*

*Demostración.* Véase [67, Theorem 4.2.2]. □

**Definición 1.37.** Un operador $T \in L(X)$ se dice:

(1) *Isoloide*, si cada punto aislado del espectro de $T$ es un autovalor de $T$, es decir, $\operatorname{iso}\sigma(T) = E(T)$.

(2) *Finitamente isoloide*, si cada punto aislado del espectro de $T$ es un autovalor de $T$ que tiene multiplicidad finita, es decir, $\operatorname{iso}\sigma(T) = E^0(T)$.

A continuación, se da un ejemplo de un operador que es isoloide y finitamente isoloide.

**Ejemplo 1.1.** Considere $T \in L(l^2(\mathbb{N}))$ definido por

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...\right).$$

Puesto que $\operatorname{iso}\sigma(T) = E(T) = E^0(T) = \{0\}$, se tiene que $T$ es isoloide y finitamente isoloide.

Todo operador finitamente isoloide es un operador isoloide, pero el recíproco, en general, no es cierto, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 1.2.** Considere $T \in \ell^2(\mathbb{N})$ definido por $T = 0$. Puesto que $\operatorname{iso}\sigma(T) = E(T) = \{0\}$ y $E^0(T) = \emptyset$, se tiene que $T$ es un operador isoloide pero no finitamente isoloide.

En el siguiente resultado se evidencia la estabilidad del teorema generalizado de Weyl bajo perturbaciones de rango finito que conmutan con operadores isoloides.

**Teorema 1.36.** *Sean $T \in L(X)$ un operador isoloide y $F \in L(X)$ un operador de rango finito que conmuta con $T$. Si $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl, entonces $T + F$ satisface el teorema generalizado de Weyl.*

*Demostración.* Véase [22, Theorem 3.4]. □

**Definición 1.38.** Un operador $T \in L(X)$ se dice que es *polaroide*, si $\operatorname{iso}\sigma(T) = \Pi(T)$.

**Observación 1.6.** Cada operador polaroide es isoloide, es decir cada punto aislado de $\sigma(T)$ es un autovalor de $T$. La condición de ser polaroide se puede caracterizar mediante la parte cuasi-nilpotente de la siguiente manera: $T$ es polaroide si y solo si existe $p := p(\lambda I - T) \in \mathbb{N}$ tal que $H_0(\lambda I - T) = N(\lambda I - T)^p$ para todo $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T)$ (véase [7, Teorema 2.9]).

**Definición 1.39.** Un operador $T \in L(X)$ se dice que es *a-polaroide*, si $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \Pi(T)$.

Observe que $\operatorname{iso}\sigma(T) \subseteq \sigma_a(T)$ para cada $T \in L(X)$, pues la frontera de $\sigma(T)$ está contenida en $\sigma_a(T)$. De esto, se obtiene que: $T$ es $a$-polaroide $\Rightarrow T$ es polaroide.

Seguidamente se introducen las nociones de operadores polaroides a izquierda y polaroides a derecha.

**Definición 1.40.** Un operador $T \in L(X)$ se dice *polaroide a izquierda*, si $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \Pi_a(T)$. $T \in L(X)$ se dice *polaroide a derecha*, si $\operatorname{iso}\sigma_s(T) = \Pi_a(T)$.

**Teorema 1.37.** *Sean $T \in L(X)$ y $K \in L(X)$ un operador que conmuta con $T$ tal que $K^n$ tiene dimensión finita para algún $n \in \mathbb{N}$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si $T$ es polaroide, entonces $T + K$ es polaroide.*

(2) *Si $T$ es polaroide a izquierda (respectivamente polaroide a derecha), entonces $T + K$ es polaroide a izquierda (respectivamente polaroide a derecha).*

(3) *Si $T$ es a-polaroide, entonces $T + K$ es a-polaroide.*

*Demostración.* Véase [4, Theorem 4.24]. □

Sea $\mathcal{H}_{nc}(\sigma(T))$ el conjunto de todas las funciones analíticas definidas sobre una vecindad abierta de $\sigma(T)$ tal que $f$ es no constante en cada una de las componentes de su dominio. Para cada $f \in \mathcal{H}_{nc}(\sigma(T))$, se define $f(T)$ mediante el clásico cálculo funcional.

**Teorema 1.38.** *Para un operador $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ es polaroide;*

(2) *$f(T)$ es polaroide para todo $f \in \mathcal{H}_{nc}(\sigma(T))$;*

(3) *existe un polinomio no nulo $p$ tal que $p(T)$ es polaroide;*

(4) *existe un $f \in \mathcal{H}_{nc}(\sigma(T))$ tal que $f(T)$ es polaroide.*

*Demostración.* Véase [4, Theorem 4.19]. □

**Definición 1.41.** Un operador $T \in L(X)$ se dice *hereditariamente polaroide*, si toda parte de $T$ es polaroide, donde una parte de $T$ significa la restricción de $T$ a un subespacio cerrado $T$-invariante.

**Teorema 1.39.** *Todo operador $T \in L(X)$ hereditariamente polaroide tiene la SVEP.*

*Demostración.* Véase [4, Theorem 4.31]. □

## 1.6. Propiedades algebraicas entre $T$ y $T_n$

En esta sección se presentan algunos resultados debidos a C. Carpintero et al. [33], en donde se establecen algunas propiedades algebraicas entre $T$ y $T_n$, con $T_n$ visto como un operador del espacio $R(T^n)$ en si mismo.

**Lema 1.19.** *Sea $T \in L(X)$ y $T_n$, $n \in \mathbb{N}$ la restricción del operador $T$ sobre el subespacio $R(T^n) = T^n(X)$. Entonces para todo $\lambda \neq 0$, se tiene que:*

(1) $N((\lambda I - T_n)^m) = N((\lambda I - T)^m)$, *para cualquier $m$.*

(2) $R((\lambda I - T_n)^m) = R((\lambda I - T)^m) \cap R(T^n)$, *para cualquier $m$.*

(3) $\alpha(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T)$.

(4) $p(\lambda I - T_n) = p(\lambda I - T)$.

(5) $\beta(\lambda I - T_n) = \beta(\lambda I - T)$.

(6) $q(\lambda I - T_n) < \infty \Leftrightarrow q(\lambda I - T) < \infty$.

*Demostración.* Véase [33, Lemma 2.1]. □

**Lema 1.20.** *Si* $R(T^n)$ *es cerrado en* $X$ *y* $R((\lambda I - T_n)^m)$ *es cerrado en* $R(T^n)$ *para* $\lambda \neq 0$*, entonces* $R((\lambda I - T)^m)$ *es cerrado en* $X$*.*

*Demostración.* Véase [35, Lemma 1.5]. $\square$

**Lema 1.21.** *Sea* $T \in L(X)$ *y* $T_n$*,* $n \in \mathbb{N}$ *la restricción del operador* $T$ *sobre el subespacio* $R(T^n)$*. Si* $R(T^n)$ *es cerrado, se tiene que:*

(1) $\sigma(T_n) \subseteq \sigma(T)$ *y* $\sigma_a(T_n) \subseteq \sigma_a(T)$*.*

(2) $\sigma_W(T_n) \subseteq \sigma_W(T)$ *y* $\sigma_{SF_+^-}(T_n) \subseteq \sigma_{SF_+^-}(T)$*.*

(3) *Si* $0 \notin \Pi(T)$*, entonces* $\sigma(T) = \sigma(T_n)$*.*

(4) *Si* $0 \notin \Pi_a(T)$*, entonces* $\sigma_a(T) = \sigma_a(T_n)$*.*

*Demostración.* Véase [33, Lemma 2.1] y [36, Lemma 1.5]. $\square$

**Lema 1.22.** *Si* $0$ *no es un polo del resolvente de* $T \in L(X)$ *y* $R(T^n)$ *es cerrado, entonces* $E(T) \subset E(T_n)$*.*

*Demostración.* Véase [34, Lemma 2.3]. $\square$

**Lema 1.23.** *Si* $0$ *no es un polo del resolvente de* $T \in L(X)$ *y* $R(T^n)$ *es cerrado, entonces* $E_a(T) \subset E_a(T_n)$*.*

*Demostración.* Véase [34, Lemma 2.4]. $\square$

### Capítulo 2

# Variaciones fuertes de teoremas tipo Weyl y tipo Browder

En este capítulo, se introducen ciertas propiedades espectrales que son variaciones de los teoremas tipo Weyl y tipo Browder, las cuales han sido estudiadas por varios autores. Entre estas se tienen: la propiedad $(gw)$, introducida por M. Amouch et al. en [14]; la propiedad $(w)$ introducida por V. Rakocevic en [61]; las propiedades $(Sw)$ y $(Sb)$ introducidas por M. H. M. Rashid en [65]; las propiedades $(v)$, $(gv)$, $(Sab)$, $(Saw)$, $(V_\Pi)$ y $(V_{\Pi_a})$, introducidas por J. Sanabria et al. en [68, 69, 70]; las propiedades $(W_E)$, $(UW_E)$, $(UW_{E_a})$, $(UW_\Pi)$, $(UW_{\Pi_a})$ y $(SBaw)$, introducidas por M. Berkani et al. en [23, 24, 25]; las propiedades $(z)$, $(gz)$, $(ah)$ y $(Z_{E_a})$ introducidas por H. Zariouh en [74, 75, 76]. Además, se estudian en este capítulo las nuevas propiedades espectrales $(V_E)$ y $(V_{E_a})$, estableciendo sus relaciones existentes con las propiedades espectrales antes mencionadas. Cabe señalar que la mayoría de los resultados aquí detallados están recopilados en el artículo "On strong variations of Weyl type theorems", publicado en la revista Acta Mathematica Universitatis Comenianae (2017), véase [71].

## 2.1. Variaciones de teoremas tipo Weyl y tipo Browder

En esta sección, se introducen las definiciones de las propiedades espectrales $(gw)$, $(W_E)$, $(UW_E)$, $(UW_\Pi)$, $(UW_{\Pi_a})$, $(SBaw)$, $(w)$, $(Sw)$, $(Sb)$, $(V_\Pi)$, $(V_{\Pi_a})$, $(v)$, $(gv)$, $(Sab)$, $(Saw)$, $(z)$, $(gz)$, $(ah)$, $(Z_{E_a})$ y se dan teoremas que establecen relaciones entre estas propiedades.

**Definición 2.1.** Un operador $T \in L(X)$ satisface:

(1) La propiedad $(gw)$ [14], si $E(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$.

(2) La propiedad $(W_E)$ [23], si $E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$.

(3) La propiedad $(UW_E)$ [23], si $E(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(4) La propiedad $(UW_{E_a})$ [24], si $E_a(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(5) La propiedad $(UW_{\Pi})$ [24], si $\Pi(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(6) La propiedad $(UW_{\Pi_a})$ [24], si $\Pi_a(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(7) La propiedad $(SBaw)$ [25], si $E_a^0(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$.

(8) La propiedad $(w)$ [61], si $E^0(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(9) La propiedad $(Sw)$ [65], si $E^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$.

(10) La propiedad $(Sb)$ [65], si $\Pi^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$.

(11) La propiedad $(V_{\Pi})$ [68], si $\Pi(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(12) La propiedad $(V_{\Pi_a})$ [68], si $\Pi_a(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(13) La propiedad $(v)$ [69], si $E^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(14) La propiedad $(gv)$ [69], si $E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$.

(15) La propiedad $(Sab)$ [70], si $\Pi_a^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$.

(16) La propiedad $(Saw)$ [70], si $E_a^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$.

(17) La propiedad $(z)$ [74], si $E_a^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(18) La propiedad $(gz)$ [74], si $E_a(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$.

(19) La propiedad $(ah)$ [75], si $\Pi^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

(20) La propiedad $(Z_{E_a})$ [76], si $E_a(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$.

**Observación 2.1.** Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(Sw)$, entonces $T$ satisface el teorema de Weyl (véase [65, Theorem 2.5]).

El resultado mencionado en la Observación 2.1, es necesario para establecer la relación existente entre la propiedad $(Sw)$ y la propiedad $(Sb)$ como se muestra a continuación.

**Teorema 2.1.** [65] Si $T$ satisface la propiedad $(Sw)$, entonces $T$ satisface la propiedad $(Sb)$.

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(Sw)$. Entonces, $T$ satisface el teorema de Weyl. Por el Teorema 1.34, $T$ satisface el teorema de Weyl es equivalente a $T$ satisface el teorema de Browder y $E^0(T) = \Pi^0(T)$. Puesto que $T$ satisface la propiedad $(Sw)$, se sigue que $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T)$ y así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi^0(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(Sb)$. $\square$

El siguiente teorema establece la relación entre la propiedad $(Sab)$ y la propiedad $(SBaw)$.

**Teorema 2.2.** [70] *Sea $T \in L(X)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(Saw)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(SBaw)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(Saw)$ y sea $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Puesto que $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$, se tiene que $\lambda \in E_a^0(T)$ y así, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq E_a^0(T)$. Sea $\lambda \in E_a^0(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_a(T)$ y como $T$ satisface la propiedad $(Saw)$, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$ y $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Por lo tanto, $E_a^0(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$ y así, $T$ satisface la propiedad $(SBaw)$. De acuerdo con lo anterior, se tienen las igualdades $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$ y $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.
Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(SBaw)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(Saw)$. $\square$

**Observación 2.2.** Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(SBaw)$, entonces $T$ satisface el teorema de $a$-Weyl (véase [25, Theorem 2.12]). También, si $T$ satisface el teorema de $a$-Weyl, entonces $T$ satisface el teorema de $a$-Browder y $E_a^0(T) = \Pi_a^0(T)$.

Los resultados mencionados en la Observación 2.2 junto con el Teorema 2.2, son necesarios para establecer la relación existente entre la propiedad $(Sab)$ y la propiedad $(Saw)$, como se muestra a continuación.

**Teorema 2.3.** [70] *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(Saw)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(Sab)$ y $E_a^0(T) = \Pi_a^0(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(Saw)$. Por el Teorema 2.2, $T$ satisface la propiedad $(SBaw)$. Como $T$ satisface la propiedad $(SBaw)$, se tiene que $T$ satisface el teorema de $a$-Weyl. Pero, $T$ satisface el teorema de $a$-Weyl es equivalente a $T$ satisface el teorema de $a$-Browder y $E_a^0(T) = \Pi_a^0(T)$. Puesto que $T$ satisface la propiedad $(Saw)$, se sigue que $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T) = \Pi_a^0(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(Sab)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(Sab)$ y $E_a^0(T) = \Pi_a^0(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T) = E_a^0(T)$ y se tiene que $T$ satisface la propiedad $(Saw)$. $\square$

**Observación 2.3.** Por el Teorema 2.3, la propiedad $(Saw)$ implica la propiedad $(Sab)$, pero el recíproco, en general, no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.1.** Considere $Q \in \ell^2(\mathbb{N})$ definido como

$$Q(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...\right).$$

Entonces, $\sigma(Q) = \sigma_{SBF_+^-}(Q) = E_a^0(Q) = \{0\}$ y $\Pi_a^0(T) = \emptyset$. De esta manera, $\Pi_a^0(Q) = \sigma(Q) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(Q)$ y $E_a^0(Q) \neq \sigma(Q) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(Q)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(Sab)$, pero no satisface la propiedad $(Saw)$.

El siguiente teorema establece la relación existente entre la propiedad $(UW_E)$ y la propiedad $(W_E)$.

**Teorema 2.4.** [24] *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(UW_E)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad propiedad $(W_E)$ y $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(UW_E)$ y sea $\lambda \in \sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Entonces, $\lambda I - T$ es un operador superiormente semi-Fredholm, $\lambda \in \sigma(T)$, $\alpha(\lambda I - T) < \infty$ y $R(T)$ es cerrado. Se afirma que $\alpha(\lambda I - T) = 0$. En efecto, si $\alpha(\lambda I - T) > 0$, entonces $\lambda \in \sigma_a(T)$ y como $T$ satisface la propiedad $(UW_E)$, se tiene que $\lambda \in E(T)$ y así, $\lambda \in \text{iso}\,\sigma(T)$. Luego, por los Teoremas 1.22 y 1.23, se sigue que $\text{ind}(\lambda I - T) = 0$, contradiciendo el hecho que $\lambda \in \sigma_W(T)$. Por lo tanto $\alpha(\lambda I - T) = 0$, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$ y $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$. Ahora, sea $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$. Entonces, $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$. Se afirma que $\lambda I - T$ no es un operador de Weyl. En efecto, si $\lambda I - T$ es un operador de Weyl, entonces del hecho que $\alpha(\lambda I - T) = 0$ se sigue que $\lambda I - T$ es invertible, contradiciendo que $\lambda \in \sigma(T)$. Por lo tanto, $\lambda \in \sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_a(T) \subseteq \sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. De esta manera, se concluye que $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$. Además, como se tienen las igualdades $\sigma(T) = (\sigma(T) \setminus \sigma_a(T)) \cup \sigma_a(T)$ y $E(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$, resulta que $E(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T)$ y $\sigma(T) = (\sigma(T) \setminus \sigma_a(T)) \cup \sigma_a(T) = (\sigma(T) \setminus \sigma_a(T)) \cup \sigma_{SF_+^-}(T) \cup E(T) = (\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)) \cup \sigma_{SF_+^-}(T) \cup E(T) = \sigma_W(T) \cup E(T)$. Por lo tanto, $E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(W_E)$.

Recíprocamente, si $T$ satisface la propiedad $(W_E)$ y $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_a(T)$, entonces $\sigma(T) = \sigma_W(T) \cup E(T) = (\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)) \cup \sigma_{SF_+^-}(T) \cup E(T) = (\sigma(T) \setminus \sigma_a(T)) \cup \sigma_{SF_+^-}(T) \cup E(T)$. Según esto, $\sigma_a(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) \cup E(T)$ y $E(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(UW_E)$. □

**Observación 2.4.** Por el Teorema 2.4, la propiedad $(UW_E)$ implica la propiedad $(W_E)$, pero el recíproco, en general, no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.** Sea $R$ el operador desplazamiento a derecha sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ y $U \in \ell^2(\mathbb{N})$ definido por

$$U(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_2, x_3, ...).$$

Se define el operador $T$ sobre $X = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ por $T = R \oplus U$. Entonces, $\sigma(T) = \sigma_W(T) = \mathbf{D}(0,1)$, donde $\mathbf{D}(0,1)$ denota el disco unitario cerrado en $\mathbb{C}$, $\sigma_a(T) =$

$\Gamma \cup \{0\}$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \Gamma$, donde $\Gamma$ denota el círculo unitario en $\mathbb{C}$. Además, $E_a(T) = \{0\}$ y $E(T) = \emptyset$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E(T)$ y $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T)$. Así, $T$ satisface la propiedad $(W_E)$, pero no satisface la propiedad $(UW_E)$.

**Lema 2.1.** [23] Si un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(W_E)$, entonces $E^0(T) = E(T) = \Pi(T)$.

*Demostración.* En primer término, observe que la inclusión $\Pi(T) \subseteq E(T)$ siempre es cierta. Ahora, suponga que $T$ satisface la propiedad $(W_E)$ y sea $\lambda \in E(T)$. Entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$, por lo que $T$ tiene la SVEP en $\lambda$. Como $E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$, $\lambda I - T$ es un operador de Weyl y por lo tanto, $\lambda I - T$ es superiormente semi-Fredholm. Por el Teorema 1.8, $p(\lambda I - T) < \infty$. Puesto que $\sigma(T) = \sigma(T^*)$, también $T^*$ tiene la SVEP en $\lambda$, y por el Teorema 1.9, $q(\lambda I - T) < \infty$. Esto dice que $\lambda I - T$ es un operador Drazin invertible y $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_D(T) = \Pi(T)$. De esta manera, se tiene que $E(T) \subseteq \Pi(T)$ y $\Pi(T) = E(T)$. Además, como $\lambda I - T$ es un operador superiormente semi-Fredholm, $\alpha(\lambda I - T) < \infty$ y se sigue que $\lambda \in E_0(T)$. Por lo tanto, $E(T) \subseteq E^0(T)$, y como la igualdad $E^0(T) \subseteq E(T)$ siempre es cierta, se concluye que $E^0(T) = E(T)$. Esto demuestra que $E^0(T) = E(T) = \Pi(T)$. $\square$

**Observación 2.5.** Si $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl, entonces $T$ satisface el teorema de Weyl. Recíprocamente, si $E(T) = \Pi(T)$ y $T$ satisface el teorema de Weyl, entonces $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl (véase [21, Theorem 2.9]).

Los resultados mencionados en la Observación 2.5 junto con el Lema 2.1, son necesarios para establecer la relación existente entre la propiedad $(W_E)$ y el teorema generalizado de Weyl como se muestra a continuación.

**Teorema 2.5.** [24]. *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(W_E)$ si y solo si $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl y $\sigma_{BW}(T) = \sigma_W(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(W_E)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E(T)$. Como $T$ satisface la propiedad $(W_E)$, por el Lema 2.1, se tiene que $E^0(T) =$

$E(T) = \Pi(T)$. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E^0(T)$ y $T$ satisface el teorema de Weyl. Puesto que $E(T) = \Pi(T)$, se sigue que $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$ y $\sigma_{BW}(T) = \sigma_W(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl y $\sigma_{BW}(T) = \sigma_W(T)$, entonces $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(W_E)$. $\square$

**Observación 2.6.** Por el Teorema 2.5, la propiedad $(W_E)$ implica el teorema generalizado de Weyl, pero el recíproco, en general, no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.3.** Sea $X = \ell^2(\mathbb{N})$ y $B = \{e_i | \ (\delta_i^j)_{j\in\mathbb{N}}, \ i \in \mathbb{N}\}$ la base canónica de $\ell^2(\mathbb{N})$. Sea $E$ un subespacio de $\ell^2(\mathbb{N})$, generado por el conjunto $\{e_i | \ 1 \leq i \leq n\}$. Sea $P$ la proyección ortogonal sobre $E$. Entonces $\sigma(P) = \{0, 1\}$, $\sigma_W(P) = \{0\}$, $\sigma_{BW}(P) = \emptyset$ y $E(P) = \{0, 1\}$. Luego, $\sigma(P) \setminus \sigma_W(P) \neq E(P)$, $\sigma(P) \setminus \sigma_{BW}(P) = E(P)$ y $P$ satisface el teorema generalizado de Weyl, pero no satisface la propiedad $(W_E)$.

**Lema 2.2.** [76] *Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(Z_{E_a})$, entonces*

$$E_a(T) = E_a^0(T) = \Pi_a^0(T) = \Pi_a(T) = \Pi^0(T) = \Pi(T) = E^0(T) = E(T).$$

*Demostración.* Es suficiente mostrar que $E_a(T) \subseteq \Pi^0(T)$. Suponga que $T$ satisface la propiedad $(Z_{E_a})$ y sea $\lambda \in E_a(T)$. Entonces, $\lambda \in \mathrm{iso}\sigma_a(T)$ y esto implica que $T$ tiene la SVEP en $\lambda$. Puesto que $E_a(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T)$, $\lambda I - T$ es un operador de Weyl y así, $\lambda I - T$ es semi-Fredholm. Por el Teorema 1.8, $p(\lambda I - T) < \infty$. Como $\lambda I - T$ es un operador de Weyl, se tiene que $\mathrm{ind}(\lambda I - T) = 0$ y $\alpha(\lambda I - T) = \beta(\lambda I - T) < \infty$. Por el Lema 1.4, $q(\lambda I - T) = p(\lambda I - T) < \infty$. Según esto, $\lambda I - T$ es un operador de Browder y $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = \Pi^0(T)$. Por lo tanto, $E_a(T) = E_a^0(T) = \Pi_a^0(T) = \Pi_a(T) = \Pi^0(T) = \Pi(T) = E^0(T) = E(T)$. $\square$

El siguiente teorema muestra la relación existente entre la propiedad $(v)$ y la propiedad $(w)$. También, muestra la relación entre la propiedad $(gv)$ y la propiedad $(gw)$.

**Teorema 2.6.** [69] *Sea $T \in L(X)$. Entonces:*

(1) *$T$ satisface la propiedad $(v)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(w)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

(2) *$T$ satisface la propiedad $(gv)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(gw)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

*Demostración.*

(1). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(v)$ y sea $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Dado que $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$, se tiene que $\lambda \in E^0(T)$. Así, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E^0(T)$. Ahora, si $\lambda \in E^0(T)$, entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Consecuentemente, $\lambda I - T$ no es inyectivo y por lo tanto, no es acotado inferiormente. Así, $\lambda \in \sigma_a(T)$. Como $T$ satisface la propiedad $(v)$ y $\lambda \in E^0(T)$, se sigue que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Weyl, por lo que $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Esto demuestra que $E^0(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(w)$. Luego, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$ y $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(w)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(v)$.

(2). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(gv)$ y sea $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Dado que $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$, se tiene que $\lambda \in E(T)$. Así, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq E(T)$. Ahora, si $\lambda \in E(T)$, entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T)$. Luego, $\lambda I - T$ no es inyectivo y por lo tanto, no es acotado inferiormente. Así, $\lambda \in \sigma_a(T)$. Puesto que $T$ satisface la propiedad $(gv)$ y $\lambda \in E(T)$, se sigue que $\lambda I - T$ es superiormente semi-$B$-Weyl, por lo que $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Esto demuestra que $E(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(gw)$. Según esto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$ y se concluye que $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(gw)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(gv)$. □

**Observación 2.7.** Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(z)$, entonces $T$ satisface el teorema de $a$-Weyl y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Análogamente, si $T$ satisface la propiedad $(gz)$, entonces $T$ satisface el teorema de $a$-Weyl y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ (véase [76, Theorem 2.4]).

Los resultados mencionados en la Observación 2.7 junto con el Teorema 2.6, son necesarios para establecer la equivalencia entre la propiedad $(v)$ y la propiedad $(z)$ (respectivamente la propiedad $(gv)$ y la propiedad $(gz)$), como se muestra a continuación.

**Corolario 2.1.** [69] *Sea $T \in L(X)$. Entonces:*

(1) *$T$ satisface la propiedad $(v)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(z)$.*

(2) *$T$ satisface la propiedad $(gv)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(gz)$.*

*Demostración.*

(1). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(v)$. Por el Teorema 2.6, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Luego, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T) = E_a^0(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(z)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(z)$. Entonces, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a^0(T) = E^0(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(v)$.

(2). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(gv)$. Por el Teorema 2.6, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T) = E_a(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(gz)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(gz)$. Entonces, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T) = E(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(gv)$. □

**Lema 2.3.** [23] Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$, entonces $\Pi_a^0(T) = \Pi_a(T) = E_a^0(T) = E_a(T)$.

*Demostración.* Es suficiente mostrar que $E_a(T) \subseteq \Pi_a^0(T)$. Suponga que $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$ y sea $\lambda \in E_a(T)$. Entonces, $\lambda \in \mathrm{iso}\sigma_a(T)$, y esto implica que $T$ tiene la SVEP en $\lambda$. Como $E_a(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$, $\lambda I - T$ es un operador superiormente semi-Fredholm. Por el Teorema 1.8, se tiene que $p(\lambda I - T) < \infty$ y así, $\lambda I - T$ es un operador superiormente semi-Browder y $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = \Pi_a^0(T)$. Puesto que la inclusión $\Pi_a^0(T) \subseteq E_a(T)$ siempre es cierta, se concluye que $\Pi_a^0(T) = \Pi_a(T) = E_a^0(T) = E_a(T)$. □

**Observación 2.8.** Si $T \in L(X)$ satisface el teorema generalizado de $a$-Weyl, entonces $T$ satisface el teorema de $a$-Weyl. Recíprocamente, si $E_a(T) = \Pi_a(T)$ y $T$ satisface el teorema de Weyl, entonces $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl (véase [21, Theorem 2.10]).

Los resultados mencionados en la Observación 2.8 junto con el Lema 2.3, son necesarios para establecer la relación existente entre la propiedad $(UW_{E_a})$ y el teorema generalizado de $a$-Weyl, como se muestra a continuación.

**Teorema 2.7.** [23] *Sea $T \in L(X)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$ si y solo si $T$ satisface el teorema generalizado de $a$-Weyl y $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$. Entonces, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$. Por el Lema 2.3, $\Pi_a^0(T) = \Pi_a(T) = E_a^0(T) = E_a(T)$. Luego, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a^0(T)$ y $T$ satisface el teorema de $a$-Weyl. Puesto que $E_a(T) = \Pi_a(T)$, se sigue que $T$ satisface el teorema generalizado de $a$-Weyl y $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Así, $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface el teorema generalizado de $a$-Weyl y $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T)$. Luego, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T)$. Por lo tanto, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$. □

**Observación 2.9.** Por el Teorema 2.4, la propiedad $(UW_{E_a})$ implica el teorema generalizado de $a$-Weyl, pero el recíproco, en general, no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.4.** Considere $T \in \ell^2(\mathbb{N})$ definido como

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(0, \frac{1}{2}x_1, 0, 0, ...\right).$$

Entonces, $\sigma_a(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T) = \{0\}$. Como $T$ es un operador nilpotente, $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \emptyset$. Luego, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E_a(T)$, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T)$ y $T$ satisface el teorema generalizado de $a$-Weyl pero no satisface la propiedad $(UW_{E_a})$.

**Observación 2.10.** Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(Sb)$, entonces $T$ satisface la propiedad $(Bgb)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ (véase [65, Theorem 2.28]). Análogamente, si $T$ satisface la propiedad $(Sw)$, entonces $T$ satisface la propiedad $(Bgw)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ (véase [65, Theorem 2.25]).

Los resultados mencionados en la Observación 2.10, son necesarios para establecer la relación existente entre la propiedad $(Saw)$ y la propiedad $(Sw)$ (respectivamente la propiedad $(Sab)$ y la propiedad $(Sb)$), como se muestra a continuación.

**Corolario 2.2.** [70] *Sea $T \in L(X)$. Entonces:*

(1) *$T$ satisface la propiedad $(Saw)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(Sw)$.*

(2) *$T$ satisface la propiedad $(Sab)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(Sb)$.*

*Demostración.*

(1). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(Saw)$. Por el Teorema 2.2, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T) = E^0(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(Sw)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(Sw)$. Entonces, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T) = E_a^0(T)$. Así, $T$ satisface la propiedad $(Saw)$.

(2). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(Sab)$. Por el Teorema 2.2, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T) = \Pi^0(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(Sb)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(Sb)$. Entonces, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi^0(T) = \Pi_a^0(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(Sab)$. $\square$

El siguiente teorema, muestra la relación existente entre la propiedad $(v)$ y el teorema $a$-Browder.

**Teorema 2.8.** [69] *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(v)$ si y solo si $T$ satisface el teorema de $a$-Browder y $\Pi_+^0(T) = E^0(T)$.*

*Demostración.* Se demostrará que $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$. Para esto, sea $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$. Se tienen los siguientes dos casos:

Caso 1. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, entonces $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda$.

Caso 2. Si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Puesto que $T$ satisface la propiedad $(v)$, se tiene que $\lambda \in E^0(T)$. Luego, $\lambda \in \text{iso}\sigma(T)$ y por el inciso (7) de la Observación 1.3, $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda$. Por el Teorema 1.32, $T$ satisface el teorema de $a$-Browder. Ahora, se muestra que $\Pi_+^0(T) = E^0(T)$. En efecto, $E^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = \Pi_+^0(T)$, pues $T$ satisface la propiedad $(v)$ y el teorema de $a$-Browder.

Recíprocamente, si $T$ satisface el teorema de $a$-Browder y $\Pi_+^0(T) = E^0(T)$, entonces $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = \Pi_+^0(T) = E^0(T)$. En consecuencia, $T$ satisface la propiedad $(v)$. $\square$

**Observación 2.11.** Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(UW_\Pi)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ (véase [68, Theorem 2.5]). También, $T$ satisface la propiedad $(V_{\Pi_a})$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(UW_{\Pi_a})$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ (véase [68, Theorem 2.20]). Además, las propiedades $(V_\Pi)$, $(Sab)$ y $(Sb)$ son equivalentes (véase [68, Corollary 2.5]). Estos resultados previos, hacen que las propiedades $(V_{\Pi_a})$, $(V_\Pi)$, $(Sab)$ y $(Sb)$ sean equivalentes (véase [68, Corollary 2.21]).

**Teorema 2.9.** *Si $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$, entonces $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T) = \sigma_{LD}(T) = \sigma_D(T) = \sigma_{ub}(T) = \sigma_b(T)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

*Demostración.* Véase [68, Theorem 2.27] $\square$

**Observación 2.12.** Si $T \in L(X)$ es un operador polaroide y $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$, entonces $T$ satisface la propiedad $(w)$ (véase [15, Corollary 4.11]).

El resultado mencionado en la Observación 2.12 junto con el Teorema 2.9, son necesarios para establecer el siguiente resultado que relaciona a las propiedades $(V_\Pi)$ y $(w)$ usando la hipótesis de que el operador sea polaroide.

**Teorema 2.10.** [68] Sea $T \in L(X)$ un operador polaroide. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(w)$ y $\sigma_{LD}(T) = \sigma_b(T)$.

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(w)$, y por el Teorema 2.9, $\sigma_{LD}(T) = \sigma_b(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(w)$ y $\sigma_{LD}(T) = \sigma_b(T)$. Entonces, la igualdad $\sigma_{LD}(T) = \sigma_b(T)$ implica que $\sigma_D(T) = \sigma_b(T) = \sigma_{ub}(T)$ y por el Lema 1.18, $\sigma_a(T) = \sigma(T)$. Luego, $\sigma(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$, y como $T$ es un operador polaroide, se sigue que $E^0(T) \subseteq \Pi(T)$. Así, $\sigma(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \Pi(T)$. Por otro lado, $\Pi(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_D(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Por lo tanto, $\Pi(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$. $\square$

## 2.2. Propiedades $(V_E)$ y $(V_{E_a})$

En esta sección, se introducen dos nuevas propiedades espectrales, denominadas $(V_E)$ y $(V_{E_a})$, las cuales son el principal foco de estudio en esta tesis doctoral. Específicamente, se presentan algunos teoremas y ejemplos que establecen las relaciones precisas entre estas propiedades espectrales y las definidas previamente.

A continuación, se introduce la propiedad $(V_E)$ y posteriormente, se muestra que esta es equivalente a la propiedad $(V_{E_a})$.

**Definición 2.2.** Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$, si $E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

A continuación, se dan ejemplos de operadores que satisfacen la propiedad $(V_E)$.

**Ejemplo 2.5.** Sea $L$ el operador desplazamiento a izquierda en $\ell^2(\mathbb{N})$. Es conocido que $\sigma(L) = \sigma_{SF_+^-}(L) = \mathbf{D}(0,1)$, donde $\mathbf{D}(0,1)$ es el disco unitario cerrado en $\mathbb{C}$ y $E(L) = \emptyset$. Por lo tanto, $\sigma(L) \setminus \sigma_{SF_+^-}(L) = E(L)$ y así, $L$ satisface la propiedad $(V_E)$.

**Ejemplo 2.6.** Considere el operador de Volterra $T$ sobre el espacio de Banach $C[0,1]$ definido por $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Note que $T$ es inyectivo y cuasi-nilpotente. Así, $\sigma(T) = \{0\}$, $\alpha(T) = 0$ y por lo tanto, $E(T) = \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\} = \{\lambda \in \{0\} : 0 < \alpha(\lambda I - T)\} = \emptyset$. Como el rango $R(T)$ no es cerrado, se tiene que $\sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.

El siguiente resultado muestra la relación existente entre la propiedad $(V_E)$ y las propiedades $(UW_E)$ y $(UW_{E_a})$.

**Teorema 2.11.** *Sea $T \in L(X)$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ satisface la propiedad $(V_E)$;*

(2) *$T$ satisface la propiedad $(UW_E)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$;*

(3) *$T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ y $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Como $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$, se tiene que $\lambda \in E(T)$ y así, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E(T)$.

Para mostrar la inclusión opuesta $E(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$, sea $\lambda \in E(T)$. Entonces, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T)$ y $\alpha(\lambda I - T) > 0$, por lo que $\lambda I - T$ es acotado inferiormente y $\lambda \in \sigma_a(T)$. Como $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ y $\lambda \in E(T)$, se sigue que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Weyl. Luego, $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Así, $E(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(UW_E)$. En consecuencia, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ y $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(UW_E)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Entonces, $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$. Así, $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Puesto que la igualdad $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ implica la igualdad $E(T) = E_a(T)$, la prueba sigue de las definiciones de las propiedades $(UW_E)$ y $(UW_{E_a})$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que, en general, la propiedad $(UW_{E_a})$ no implica la propiedad $(V_E)$.

**Ejemplo 2.7.** Sea $R$ el operador desplazamiento a derecha sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ y $U \in \ell^2(\mathbb{N})$ definido por

$$U(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_2, x_3, ...).$$

Se define un operador $T$ sobre $X = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ por $T = R \oplus U$. Entonces, $\sigma(T) = \mathbf{D}(0,1)$, el disco unitario cerrado sobre $\mathbb{C}$, $\sigma_a(T) = \Gamma \cup \{0\}$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \Gamma$, donde $\Gamma$ denota el círculo unitario en $\mathbb{C}$. Además, $E_a(T) = \{0\}$ y $E(T) = \emptyset$. Por lo tanto, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T)$. Así, $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$ pero no satisface la propiedad $(V_E)$.

El siguiente ejemplo muestra que, en general, la propiedad $(UW_E)$ no implica la propiedad $(V_E)$.

**Ejemplo 2.8.** Sea $R$ el operador desplazamiento a derecha sobre $\ell^2(\mathbb{N})$. Se define el operador $T$ sobre $X = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ por $T = R \oplus 0$. Entonces, $\sigma(T) = \mathbf{D}(0,1)$, $\sigma_a(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \Gamma \cup \{0\}$ y $E(T) = \emptyset$. Por lo tanto, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T)$. Así, $T$ satisface la propiedad $(UW_E)$ pero no satisface la propiedad $(V_E)$.

El siguiente resultado muestra la relación existente entre la propiedad $(V_E)$ y la propiedad $(W_E)$.

**Teorema 2.12.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(W_E)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por el Teorema 2.11, $T$ satisface la propiedad $(UW_E)$ y por el Teorema 2.4, la propiedad $(UW_E)$ implica que $T$ satisface la propiedad $(W_E)$. Así, $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ y $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T) = E(T)$, por lo que $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(W_E)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$. Entonces, $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T)\setminus\sigma_W(T) = E(T)$ y así, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra que, en general, la propiedad $(W_E)$ no implica la propiedad $(V_E)$.

**Ejemplo 2.9.** Sea $Q$ definido sobre $\ell^1(\mathbb{N})$ por

$$Q(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ...) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_{k-1}x_{k-1}, ...),$$

donde $\alpha_i$ es una sucesión de números complejos tal que $0 < |\alpha_i| \leq 1$ y $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i < \infty$. Por [26, Example 3.12], se sigue que

$$\overline{R(Q^n)} \neq R(Q^n), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Se define el operador $T$ sobre $X = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^1(\mathbb{N})$ por $T = R \oplus 0 \oplus Q$, donde $R$ es el operador desplazamiento a derecha. Entonces, $\sigma(T) = \sigma_W(T) = \mathbf{D}(0,1)$, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \Gamma \cup \{0\}$ y $E(T) = \emptyset$, por lo que

$$\sigma(T)\setminus\sigma_W(T) = E(T) \quad \text{y} \quad \sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T).$$

Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(W_E)$ pero no satisface la propiedad $(V_E)$.

El siguiente resultado muestra la relación existente entre la propiedad $(V_E)$ y el teorema generalizado de Weyl.

**Teorema 2.13.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface propiedad $(V_E)$. Por el Teorema 2.12, $T$ satisface la la propiedad $(W_E)$. Por el Teorema 2.5, la propiedad $(W_E)$ implica que $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$. Por lo tanto, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$ y así, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. □

El recíproco del Teorema 2.13, en general, no es cierto. Para ver esto, considere el operador $T$ dado en el Ejemplo 2.9. Puesto que $T$ satisface la propiedad $(W_E)$, se tiene que $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl, pero no satisface la propiedad $(V_E)$.

El siguiente resultado muestra que la propiedad $(V_E)$ implica a la propiedad $(Z_{E_a})$.

**Teorema 2.14.** *Suponga que $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces:*

(1) *$T$ satisface la propiedad $(Z_{E_a})$.*

(2) $E_a(T) = E_a^0(T) = \Pi_a^0(T) = \Pi_a(T) = \Pi^0(T) = \Pi(T) = E^0(T) = E(T)$.

*Demostración.*

(1). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por el Teorema 2.11, se tiene que $\sigma_a(T) = \sigma(T)$ y también por el Teorema 2.12, se sigue que $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) = E_a(T)$ y así, $T$ satisface la propiedad $(Z_{E_a})$.

(2). Sigue del inciso (1) y el Lema 2.2. □

En el siguiente ejemplo se muestra que, en general, la propiedad $(Z_{E_a})$ no implica la propiedad $(V_E)$.

**Ejemplo 2.10.** Sea $R$ el operador desplazamiento a derecha sobre $\ell^2(\mathbb{N})$. Como $\sigma(R) = \sigma_W(R) = \mathbf{D}(0,1)$, $E(R) = E_a(R) = \emptyset$ y $\sigma_{SF_+^-}(R) = \Gamma$, se tiene que $\sigma(R) \setminus$

$\sigma_W(R) = \emptyset = E_a(R)$ y $\sigma(R) \setminus \sigma_{SF_+^-}(R) \neq E(R)$, por lo que $R$ satisface la propiedad $(Z_{E_a})$ pero no satisface la propiedad $(V_E)$.

El siguiente resultado muestra la relación existente entre las propiedades $(V_E)$ y $(V_\Pi)$.

**Teorema 2.15.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$ y $E(T) = \Pi(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces, $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$. Por el Teorema 2.14, se tiene que $E(T) = \Pi(T)$. Así, $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$ y $E(T) = \Pi(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$ y $E(T) = \Pi(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi(T) = E(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Observación 2.13.** Por el Teorema 2.15, la propiedad $(V_E)$ implica la propiedad $(V_\Pi)$, pero el recíproco, en general, no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.11.** Considere $T \in \ell^2(\mathbb{N})$ definido como

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...\right).$$

Puesto que $\sigma(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$ y $\Pi(T) = \emptyset$, se tiene que $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$ y como $E(T) = \{0\}$, se sigue que $T$ no satisface la propiedad $(V_E)$.

**Teorema 2.16.** *Sea $T \in L(X)$ un operador polaroide. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$.*

*Demostración.* Si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$. Como $T$ es un operador polaroide, se tiene que $E(T) = \Pi(T)$. Luego, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$.
Recíprocamente, si $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$, entonces $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi(T)$.

Como $T$ es un operador polaroide, se tiene que $E(T) = \Pi(T)$. Luego, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

El siguiente resultado muestra la relación existente entre la propiedad $(V_E)$ y las propiedades $(v)$, $(z)$, $(gv)$ y $(gz)$.

**Teorema 2.17.** *Para $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ satisface la propiedad $(V_E)$;*

(2) *$T$ satisface la propiedad $(v)$ y $E^0(T) = E(T)$;*

(3) *$T$ satisface la propiedad $(z)$ y $E^0(T) = E(T)$;*

(4) *$T$ satisface la propiedad $(gv)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$;*

(5) *$T$ satisface la propiedad $(gz)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces, por el Teorema 2.14, $E^0(T) = E(T)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) = E^0(T)$. Así, $T$ satisface la propiedad $(v)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $T$ satisface la propiedad $(v)$ y $E^0(T) = E(T)$, entonces $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T) = E(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Sigue inmediatamente de la equivalencia entre las propiedades $(v)$ y $(z)$ establecida en el Corolario 2.1.

(1) $\Rightarrow$ (4). Asuma que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por Teorema 2.11, $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$. Por Teorema 2.7, la propiedad $(UW_{E_a})$ implica que $T$ satisface el teorema generalizado de $a$-Weyl y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$. En consecuencia, $E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(gv)$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(gv)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$ y por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(4) $\Leftrightarrow$ (5). Sigue inmediatamente de la equivalencia entre las propiedades $(gv)$ y $(gz)$ establecida en el Corolario 2.1. $\square$

**Observación 2.14.** Por el Teorema 2.17, la propiedad $(V_E)$ implica las propiedades $(v)$, $(z)$, $(gv)$ y $(gz)$, pero el recíproco, en general, no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.12.** Considere el operador $T = 0$ definido sobre el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$. Entonces, $\sigma(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$, $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \emptyset$ y $E(T) = \{0\}$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T)$ y así, $T$ no satisface la propiedad $(V_E)$. Por otro lado, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(gv)$, y en consecuencia $T$ también satisface la propiedad $(v)$.

El siguiente resultado muestra la relación existente entre la propiedades $(V_E)$, $(Sw)$ y $(Saw)$.

**Teorema 2.18.** *Para $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ satisface la propiedad $(V_E)$;*

(2) *$T$ satisface la propiedad $(Sw)$ y $E^0(T) = E(T)$;*

(3) *$T$ satisface la propiedad $(Saw)$ y $E^0(T) = E(T)$.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Asuma que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces, por el Teorema 2.14, $E(T) = E^0(T)$, y por el Teorema 2.17, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) = E^0(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(Sw)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $T$ satisface la propiedad $(Sw)$ y $E^0(T) = E(T)$, entonces $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T) = E(T)$. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E(T)$.

Para mostrar la inclusión opuesta $E(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$, sea $\lambda \in E(T)$. Como $E(T) = E^0(T)$, se tiene que $\lambda \in E^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Así, $\lambda I - T$ es un operador superiormente semi-$B$-Fredholm y $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. Por el Lema 1.16, $\lambda I - T$ es superiormente semi-Fredholm, por lo que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Weyl. Luego, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Sigue inmediatamente de la equivalencia entre las propiedades $(Sw)$ y $(Saw)$ establecida en el Corolario 2.2. □

**Observación 2.15.** Por el Teorema 2.18, la propiedad $(V_E)$ implica las propiedades $(Sw)$ y $(Saw)$, pero el recíproco, en general, no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.13.** Considere el operador $Q$ del Ejemplo 2.9 y defina un operador $T$ sobre $X = l^1(\mathbb{N}) \oplus l^1(\mathbb{N})$ por $T = Q \oplus 0$. Entonces, $N(T) = \{0\} \oplus l^1(\mathbb{N})$, $\sigma(T) = \{0\}$, $E(T) = \{0\}$, $E^0(T) = \emptyset$. Puesto que $R(T^n) = R(Q^n) \oplus \{0\}$, $R(T^n)$ no es cerrado para cualquier $n \in \mathbb{N}$; luego $T$ no es un operador superiormente semi $B$-weyl ni superiormente semi-Weyl y $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$. Así, se tiene que

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T), \qquad \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T).$$

Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(Sw)$ pero no satisface la propiedad $(V_E)$.

El siguiente resultado muestra la relación existente entre la propiedad $(V_E)$ y el teorema de Weyl.

**Teorema 2.19.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T$ satisface el teorema de Weyl y $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) \setminus E^0(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces, por el Teorema 2.13, $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl y por lo tanto, satisface el teorema de Weyl. De esta manera, es suficiente mostrar que $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) \setminus E^0(T)$. Por los Teoremas 2.12 y 2.14, $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$ y $E(T) = E^0(T)$, respectivamente. Por lo tanto, $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \emptyset = E(T) \setminus E^0(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface el teorema de Weyl y $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) \setminus E^0(T)$. Puesto que $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E^0(T)$, se tiene que $\sigma(T) = E^0(T) \cup \sigma_W(T)$ y $E^0(T) \cap \sigma_W(T) = \emptyset$. Así,

$$\begin{aligned} \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) &= [E^0(T) \cup \sigma_W(T)] \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \\ &= E^0(T) \cup [\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)] \\ &= E^0(T) \cup [E(T) \setminus E^0(T)] = E(T) \end{aligned}$$

y por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. □

**Observación 2.16.** Por el Teorema 2.19, la propiedad $(V_E)$ implica el teorema de Weyl, pero el recíproco, en general, no es cierto. Considere el operador $T$ del Ejemplo 2.9. Como $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl, $T$ también satisface el teorema de Weyl, pero no satisface la propiedad $(V_E)$.

**Definición 2.3.** Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$, si $E_a(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$.

**Teorema 2.20.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

*Demostración.* Asuma que $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$. Entonces, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$.

Para mostrar que $E_a(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$, sea $\lambda \in E_a(T)$. Entonces, $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_a(T)$ y por lo tanto, $\lambda \in \sigma_a(T)$. Puesto que $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$ y $\lambda \in E_a(T)$, se sigue que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Weyl. Luego, $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y así, $E_a(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$. Según esto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$ y $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(UW_{E_a})$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$. □

**Corolario 2.3.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$. Por el Teorema 2.20, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$, por lo que $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T) = E(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por el Teorema 2.11, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ y así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) = E_a(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$. □

El siguiente teorema muestra la relación existente entre la propiedad $(V_{E_a})$ y la propiedad $(Z_{E_a})$.

**Teorema 2.21.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(Z_{E_a})$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$.*

*Demostración.* Asuma que $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$. Por el Corolario 2.3, la propiedad $(V_{E_a})$ es equivalente a la propiedad $(V_E)$, y por el Teorema 2.12, la propiedad $(V_E)$ implica que $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$. En consecuencia, $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(Z_{E_a})$.

Recíprocamente, suponga que $T$ satisface la propiedad $(Z_{E_a})$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E_a(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$. □

Similar al Teorema 2.21, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.22.** *Un operador $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$ si y solo si $T$ satisface la propiedad $(gaw)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$. Por el Corolario 2.3, la propiedad $(V_{E_a})$ es equivalente a la propiedad $(V_E)$, y por el Teorema 2.13, la propiedad $(V_E)$ implica que $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$. Luego, $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$ y así, $T$ satisface la propiedad $(gaw)$.

Recíprocamente, asuma que $T$ satisface la propiedad $(gaw)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$. Entonces, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E_a(T)$, por lo que $T$ satisface la propiedad $(V_{E_a})$. $\square$

**Observación 2.17.** Por el Teorema 1.32, los teoremas de $a$-Browder y generalizado de $a$-Browder son equivalentes. Además, el teorema de $a$-Browder para $T$ implica el teorema de Browder para $T$. También, por el Teorema 1.31, el teorema de Browder para $T$ es equivalente al teorema generalizado de Browder para $T$.

Para un operador $T \in L(X)$, se define $\Pi_+^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T)$. El siguiente teorema describe la relación existente entre el teorema de $a$-Browder y la propiedad $(V_E)$.

**Teorema 2.23.** *Para $T \in L(X)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

(2) *$T$ satisface el teorema de a-Browder y $\Pi_+^0(T) = E(T)$.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces, por los Teoremas 2.14 y 2.17, $E(T) = E^0(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(v)$, respectivamente. Por el Teorema 2.8, la propiedad $(v)$ implica que $T$ satisface el teorema de $a$-Browder y $\Pi_+^0(T) = E^0(T)$. Así, $T$ satisface el teorema de $a$-Browder y $\Pi_+^0(T) = E^0(T) = E(T)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $T$ satisface el teorema de $a$-Browder y $\Pi_+^0(T) = E(T)$, entonces $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = \Pi_+^0(T) = E(T)$. Por lo tanto, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Observación 2.18.** Por el Teorema 2.23, la propiedad $(V_E)$ implica el teorema de $a$-Browder. Sin embargo, el recíproco en general no es cierto. En efecto, el operador $T$ definido en el Ejemplo 2.13, no satisface la propiedad $(V_E)$, pero $\sigma(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$ y $\Pi_a^0(T) = \emptyset$, por lo que $T$ satisface el teorema de $a$-Browder.

**Corolario 2.4.** *Si $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, entonces $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $E(T) = \Pi_+^0(T)$.*

*Demostración.* Por Teorema 1.32, la hipótesis $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$ es equivalente a $T$ satisface el teorema de $a$-Browder. Luego, si $E(T) = \Pi_+^0(T)$, entonces $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = \Pi_+^0(T) = E(T)$. $\square$

**Observación 2.19.** Si $T^*$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, entonces $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$ y $\sigma_a(T) = \sigma(T)$. De manera análoga, si $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_-^+}(T)$, entonces $\sigma_{SF_+^-}(T^*) = \sigma_W(T^*)$ y $\sigma_a(T^*) = \sigma(T^*)$. Según esto, claramente se tiene que si $T^*$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, entonces las propiedades $(W_E)$, $(UW_E)$, $(UW_{E_a})$, $(Z_{E_a})$, $(V_E)$ y $(V_{E_a})$ son equivalentes para $T$. También, si $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_-^+}(T)$, entonces estas propiedades son equivalentes para $T^*$.

En la siguiente tabla se resume el significado de varios teoremas y propiedades que están relacionado con la propiedad $(V_E)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(W_E)$ [23] | $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T)=E(T)$ | $(W_\Pi)$ [24] | $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T)=\Pi(T)$ |
| $\mathcal{W}$ [37] | $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T)=E^0(T)$ | $\mathcal{B}$ [50] | $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T)=\Pi^0(T)$ |
| $(Z_{E_a})$ [76] | $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T)=E_a(T)$ | $(Z_{\Pi_a})$ [76] | $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T)=\Pi_a(T)$ |
| $(aw)$ [31] | $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T)=E_a^0(T)$ | $(ab)$ [31] | $\sigma(T)\setminus\sigma_W(T)=\Pi_a^0(T)$ |
| $g\mathcal{W}$ [26] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{BW}(T)=E(T)$ | $g\mathcal{B}$ [26] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{BW}(T)=\Pi(T)$ |
| $(Bw)$ [48] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{BW}(T)=E^0(T)$ | $(Bb)$ [64] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{BW}(T)=\Pi^0(T)$ |
| $(gaw)$ [31] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{BW}(T)=E_a(T)$ | $(gab)$ [31] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{BW}(T)=\Pi_a(T)$ |
| $(Baw)$ [77] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{BW}(T)=E_a^0(T)$ | $(Bab)$ [77] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{BW}(T)=\Pi_a^0(T)$ |
| $(v)$ [69] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=E^0(T)$ | $(ah)$ [75] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=\Pi^0(T)$ |
| $(z)$ [74] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=E_a^0(T)$ | $(az)$ [74] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=\Pi_a^0(T)$ |
| $(gv)$ [69] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E(T)$ | $(gah)$ [75] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\Pi(T)$ |
| $(Sw)$ [65] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E^0(T)$ | $(Sb)$ [65] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\Pi^0(T)$ |
| $(gz)$ [74] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E_a(T)$ | $(gaz)$ [74] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\Pi_a(T)$ |
| $(Saw)$ [70] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E_a^0(T)$ | $(Sab)$ [70] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\Pi_a^0(T)$ |
| $(UW_E)$ [24] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=E(T)$ | $(UW_\Pi)$ [24] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=\Pi(T)$ |
| $(w)$ [61] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=E^0(T)$ | $(b)$ [30] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=\Pi^0(T)$ |
| $(UW_{E_a})$ [23] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=E_a(T)$ | $(UW_{\Pi_a})$ [24] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=\Pi_a(T)$ |
| $a\mathcal{W}$ [62] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=E_a^0(T)$ | $a\mathcal{B}$ [40] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=\Pi_a^0(T)$ |
| $(gw)$ [14] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E(T)$ | $(gb)$ [30] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\Pi(T)$ |
| $(Bgw)$ [64] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E^0(T)$ | $(Bgb)$ [64] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\Pi^0(T)$ |
| $ga\mathcal{W}$ [26] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E_a(T)$ | $ga\mathcal{B}$ [26] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\Pi_a(T)$ |
| $(SBaw)$ [25] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=E_a^0(T)$ | $(SBab)$ [25] | $\sigma_a(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\Pi_a^0(T)$ |
| $(V_{E_a})$ [71] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=E_a(T)$ | $(V_{\Pi_a})$ [68] | $\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)=\Pi_a(T)$ |

Tabla 2.1: Propiedades espectrales relacionadas con la propiedad $(V_E)$.

**Teorema 2.24.** *Suponga que $T\in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces:*

(1) $\sigma_{SBF_+^-}(T)=\sigma_{BW}(T)=\sigma_{SF_+^-}(T)=\sigma_W(T)=\sigma_{LD}(T)=\sigma_D(T)=\sigma_{ub}(T)=$

*$\sigma_b(T)$ y $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

(2) *Todas las propiedades de la Tabla 2.1 son equivalentes, y $T$ satisface cada una de estas propiedades.*

*Demostración.*

(1). Por el Teorema 2.11, se satisface la igualdad $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Las igualdades $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{BW_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$ siguen de los Teoremas 2.12, 2.13 y 2.17. Puesto que las inclusiones $\sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq \sigma_{LD}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_b(T)$ y $\sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq \sigma_{LD}(T) \subseteq \sigma_D(T) \subseteq \sigma_b(T)$ siempre se satisfacen, es suficiente probar que $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_b(T)$. En efecto, como $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, por el Teorema 2.23, $T$ satisface el teorema generalizado de $a$-Browder o equivalentemente el teorema de $a$-Browder. Puesto que el teorema de $a$-Browder implica el teorema de Browder, se concluye que $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_W(T) = \sigma_b(T)$.

(2). Por el Teorema 2.11, $T$ satisface la propiedad $(UW_E)$ y la equivalencia entre las propiedades de la Tabla 2.1 sigue del inciso (1) y el Teorema 2.21. □

El recíproco del Teorema 2.24, en general, no es cierto como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.14.** Considere el operador $Q$ del Ejemplo 2.9. Se define el operador $T$ sobre $X = \ell^1(\mathbb{N}) \oplus \ell^1(\mathbb{N})$ por $T = Q \oplus 0$. Entonces, $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T) = \sigma_{LD}(T) = \sigma_D(T) = \sigma_{ub}(T) = \sigma_b(T) = \{0\}$, $\sigma(T) = \sigma_a(T) = E(T) = \{0\}$. Observe que se cumplen las condiciones del inciso (1) del Teorema 2.24, pero $T$ no satisface la propiedad $(V_E)$.

## 2.3. Propiedad $(V_E)$ a través de la SVEP localizada

En esta sección, se dan algunos resultados relativos a la propiedad $(V_E)$ para un operador $T$ que tiene la SVEP en cada punto que no pertenece a su espectro inferiormente semi-Weyl y iso $\sigma_a(T) = \emptyset$. De manera análoga, se dan algunos resultados de la propiedad $(V_E)$ para el operador $T^*$ en cada punto que no pertenece al espectro superiormente semi-Weyl de $T$.

**Teorema 2.25.** *Sea $T \in L(X)$. Si $T^*$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$ y* $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$*, entonces $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* La hipótesis $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$ implica que $E(T) = \emptyset$. Así, es suficiente mostrar que $\sigma(T) = \sigma_{SF_+^-}(T)$. Suponga que $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$. Como $T^*$ tiene la SVEP en $\lambda$, entonces $q(\lambda I - T) < \infty$ y $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, también $p(\lambda I - T) < \infty$. Por lo tanto, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T)$ y se sigue que $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T)$, lo cual es imposible. Así, se concluye que $\sigma(T) = \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. □

**Corolario 2.5.** *Sea $T \in L(X)$. Si $T^*$ tiene la SVEP y* $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$*, entonces $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del Teorema 2.25. □

**Corolario 2.6.** *Sea $T \in L(X)$. Si* $\operatorname{Int}(\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)) = \operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$*, entonces $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Sea $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$. Si $\lambda \notin \sigma(T)$, entonces es claro que $T^*$ tiene la SVEP en $\lambda$. Si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ y como el conjunto de todos los operadores superiormente semi-Weyl es abierto en $L(X)$, la hipótesis $\operatorname{Int}(\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)) = \emptyset$ implica que $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Por lo tanto, $T^*$ tiene la SVEP en $\lambda$ nuevamente. Ahora, por el Teorema 2.25, se concluye que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. □

**Teorema 2.26.** *Sea $T \in L(X)$. Si $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$ y* $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$*, entonces $T^*$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* La hipótesis $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$ implica que $E(T^*) = \emptyset$. Es suficiente mostrar que $\sigma(T^*) = \sigma_{SF_+^-}(T^*)$. Suponga que $\lambda \in \sigma(T^*)$ y $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T^*)$. Puesto que $T$ tiene la SVEP en $\lambda$, se tiene que $p(\lambda I - T) < \infty$ y como $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, también $q(\lambda I - T) < \infty$. Por lo tanto, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T)$ y se sigue que $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T)$, lo que contradice el hecho que $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$. Así, se concluye que $\sigma(T^*) = \sigma_{SF_+^-}(T^*)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Corolario 2.7.** *Sea $T \in L(X)$. Si $T$ tiene la SVEP y $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$, entonces $T^*$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del Teorema 2.26. $\square$

## Capítulo 3

# Estabilidad bajo sumas directas y restricciones

En este capítulo, se estudia la estabilidad bajo sumas directas y restricciones de las propiedades $(Sab)$, $(Sb)$, $(V_\Pi)$, $(V_{\Pi_a})$, $(Saw)$, $(Sw)$ y $(V_E)$. Para esto, se consideran operadores $T$ y $S$ (definidos sobre un espacio de Banach) que satisfacen estas propiedades y se dan condiciones apropiadas para que ellas se puedan transmitir a la suma directa $T \oplus S$. De igual manera, para un operador $T \in L(X)$ tal que $0 \notin \Pi(T)$, se caracterizan estas propiedades en términos de sus restricciones $T_n$ con $n \in \mathbb{N}$. Cabe destacar que estos resultados están reseñados en el artículo "Strong variations of Weyl and Browder type theorems for direct sums and restrictions", publicado en la revista Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 (2019), véase [72].

## 3.1. Variaciones fuertes para sumas directas

En esta sección, se muestra que si $T$ y $S$ son operadores (definidos sobre un espacio de Banach) que satisfacen las propiedades $(Sab)$, $(Saw)$, $(V_E)$, entonces su suma directa (ortogonal) $T \oplus S$ no necesariamente satisface las propiedades $(Sab)$, $(Saw)$, $(V_E)$, respectivamente. Además, se exploran algunas condiciones suficientes para asegurar que estas propiedades se transmitan desde los sumandos directos $T$ y $S$ a la suma directa $T \oplus S$. En lo que sigue, para un operador $T \in L(X)$ se denota por $\sigma_p^0(T)$ al conjunto de todos los autovalores de $T$ de multiplicidad finita y por $\rho_a(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma_a(T)$ al conjunto resolvente aproximado puntual de $T$.

**Teorema 3.1.** *Sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ tales que $\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$. Si $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(Sab)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$;

(2) $T \oplus S$ *satisface la propiedad* $(Sab)$.

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$. Puesto que el espectro superiormente semi-Browder de una suma directa es la unión de los espectros superiormente semi-Browder de sus componentes, esto es, $\sigma_{ub}(T \oplus S) = \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{ub}(S)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \Pi_a^0(T \oplus S) &= \sigma_a(T \oplus S) \setminus \sigma_{ub}(T \oplus S) \\ &= [\sigma_a(T) \cup \sigma_a(S)] \setminus [\sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{ub}(S)] \\ &= [\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S)] \cup [\Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T)] \cup [\Pi_a^0(T) \cap \Pi_a^0(S)]. \end{aligned}$$

La hipótesis $\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$ implica que $\Pi_a^0(T \oplus S) = \Pi_a^0(T) \cap \Pi_a^0(S)$. Por otro lado, como $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(Sab)$, se tiene que

$$[\sigma(T) \cup \sigma(S)] \setminus [\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)] = [\Pi_a^0(T) \cap \rho(S)] \cup [\Pi_a^0(S) \cap \rho(T)] \cup [\Pi_a^0(T) \cap \Pi_a^0(S)].$$

Puesto que $\Pi_a^0(T) \cap \rho(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho(T) = \emptyset$, se tiene que

$$[\sigma(T) \cup \sigma(S)] \setminus [\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)] = \Pi_a^0(T) \cap \Pi_a^0(S)$$

y por lo tanto, $[\sigma(T) \cup \sigma(S)] \setminus [\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)] = \Pi_a^0(T \oplus S)$. Como por hipótesis, $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$, se obtiene que $\sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \Pi_a^0(T \oplus S)$ y así, $T \oplus S$ satisface la propiedad $(Sab)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $T \oplus S$ satisface la propiedad $(Sab)$, entonces $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_b(T \oplus S)$ (véase [70, Teorema 2.31]). Puesto que siempre se tiene la igualdad $\sigma_b(T \oplus S) = \sigma_b(T) \cup \sigma_b(S)$, se sigue que $\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S) \subseteq \sigma_b(T) \cup \sigma_b(S) = \sigma_b(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S)$ y por lo tanto, $\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S) \subseteq \sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S)$. Dado que $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) \subseteq \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$ (véase [32, Lema 2.2]), se concluye que $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que, en general, la suma directa de dos operadores que satisfacen la propiedad $(Sab)$ no necesariamente satisface la propiedad $(Sab)$.

**Ejemplo 3.1.** Sea $Q \in L(Z)$ un operador nilpotente, con $Z$ cualquier espacio de Banach de dimensión infinita. Considere el operador $T = V \oplus I$ definido sobre $X \oplus Y$ donde $V : X \to X$ es un operador inyectivo cuasi-nilpotente que no es nilpotente y $Y$ es un espacio de Banach de dimensión finita no nulo. Entonces, $\sigma(Q) = \sigma_a(Q) = \{0\}$, $\sigma_{SBF_+^-}(Q) = \emptyset$ y $\Pi_a^0(Q) = \{0\}$ . Así, $\sigma(Q) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(Q) = \{0\} \setminus \emptyset = \{0\} = \Pi_a^0(Q)$ y $Q$ satisface la propiedad $(Sab)$. Además, $\sigma(T) = \sigma_a(T) = \{0, 1\}$, $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \{0\}$ y $\Pi_a^0(T) = \{1\}$. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \{0, 1\} \setminus \{0\} = \{1\} = \Pi_a^0(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(Sab)$. Pero la suma directa $Q \oplus T$ sobre el espacio de Banach $Z \oplus X \oplus Y$ no satisface la propiedad $(Sab)$, pues $\sigma(Q \oplus T) = \Pi_a^0(Q \oplus T) = \{0, 1\}$ y $\sigma_{SBF_+^-}(Q \oplus T) = \{0\}$, lo que implica que $\sigma(Q \oplus T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(Q \oplus T) = \{0, 1\} \setminus \{0\} = \{1\} \neq \Pi_a^0(Q \oplus T)$. Observe que $\sigma_{SBF_+^-}(Q \oplus T) = \sigma_{SBF_+^-}(Q) \cup \sigma_{SBF_+^-}(T)$, pero $\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(T) = \{1\} \neq \emptyset$.

Los siguientes tres corolarios son consecuencia inmediata del Teorema 3.1, debido a que las propiedades $(Sab)$, $(Sb)$, $(V_\Pi)$ y $(V_{\Pi_a})$ son equivalentes.

**Corolario 3.1.** *Sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ tales que $\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$. Si $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(Sb)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$;

(2) *$T \oplus S$ satisface la propiedad $(Sb)$.*

**Corolario 3.2.** *Sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ tales que $\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$. Si $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(V_\Pi)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$;

(2) *$T \oplus S$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$.*

**Corolario 3.3.** *Sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ tales que $\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$. Si $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(V_{\Pi_a})$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$;

(2) $T \oplus S$ *satisface la propiedad* $(V_{\Pi_a})$.

Similar al Teorema 3.1, en el caso de la propiedad $(Saw)$, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.2.** *Sean* $T \in L(X)$ *y* $S \in L(Y)$ *tales que* $\sigma_p^0(T) = \sigma_p^0(S)$. *Si* $T$ *y* $S$ *satisfacen la propiedad* $(Saw)$, *entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$;

(2) $T \oplus S$ *satisface la propiedad* $(Saw)$.

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$. Como $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(Saw)$,

$$\begin{aligned}
\sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) &= [\sigma(T) \cup \sigma(S)] \setminus [\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)] \\
&= [E_a^0(T) \cap \rho(S)] \cup [E_a^0(S) \cap \rho(T)] \cup [E_a^0(T) \cap E_a^0(S)].
\end{aligned}$$

Ahora, la hipótesis $\sigma_p^0(T) = \sigma_p^0(S)$ implica que $E_a^0(T) \cap \rho(S) = E_a^0(S) \cap \rho(T) = \emptyset$. Así, $\sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = E_a^0(T) \cap E_a^0(S)$. Puesto que $\sigma_p^0(T \oplus S) = \{\lambda \in \sigma_p^0(T) \cup \sigma_p^0(S) : \alpha(\lambda I - T) + \alpha(\lambda I - S) < \infty\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
E_a^0(T \oplus S) &= \operatorname{iso} \sigma_a(T \oplus S) \cap \sigma_p^0(T \oplus S) \\
&= \operatorname{iso} [\sigma_a(T) \cup \sigma_a(S)] \cap \sigma_p^0(S) \\
&= [E_a^0(T) \cap \rho_a(S)] \cup [E_a^0(S) \cap \rho_a(T)] \cup [E_a^0(T) \cap E_a^0(S)].
\end{aligned}$$

Como $E_a^0(T) \cap \rho_a(S) = E_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$, se sigue que $E_a^0(T \oplus S) = E_a^0(T) \cap E_a^0(S)$. Por lo tanto, $\sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = E_a^0(T \oplus S)$ y $T \oplus S$ satisface la propiedad $(Saw)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $T \oplus S$ satisface la propiedad $(Saw)$, entonces por el Teorema 2.3, $T \oplus S$ satisface la propiedad $(Sab)$. Por lo tanto, la igualdad de los espectros $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S)$ y $\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$ sigue del Teorema 2.9 y la prueba "(2) $\Rightarrow$ (1)" del Teorema 3.1. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que, en general, la suma directa de dos operadores que satisfacen la propiedad $(Saw)$ no necesariamente satisface la propiedad $(Saw)$.

**Ejemplo 3.2.** Sea $Q \in L(Z)$ un operador nilpotente con $Z$ un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea $T \in \ell^2(\mathbb{N})$ definido por $S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, ...)$. Entonces $\sigma(Q) = \{0\}, \sigma_{SBF_+^-}(Q) = \emptyset$ y $E_a^0(Q) = \{0\}$. Así, $\sigma(Q) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(Q) = \{0\} \setminus \emptyset = \{0\} = E_a^0(Q)$ y $Q$ satisface la propiedad $(Saw)$. Además, $\sigma(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T) = \{0\}$ y $E_a^0(T) = \emptyset$. Así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \emptyset = E_a^0(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(Saw)$. Pero la suma directa $Q \oplus T$ definida sobre el espacio de Banach $Z \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ no satisface la propiedad $(Saw)$, pues $\sigma(Q \oplus T) = \sigma_{SBF_+^-}(Q \oplus T) = E_a^0(Q \oplus T) = \{0\}$, lo que implica que $\sigma(Q \oplus T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(Q \oplus T) = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset \neq \{0\} = E_a^0(Q \oplus T)$. Note que $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$, pero $\sigma_p^0(Q) = \{0\} \neq \emptyset = \sigma_p^0(T)$.

**Corolario 3.4.** *Sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ tales que $\sigma_p(T) = \sigma_p(S)$. Si $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(Sw)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$;

(2) *$T \oplus S$ satisface la propiedad $(Sw)$.*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del Teorema 3.2, debido a que las propiedades $(Saw)$ y $(Sw)$ son equivalentes por el Corolario 2.2. $\square$

**Teorema 3.3.** *Sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ tales que $\sigma_p(T) = \sigma_p(S)$. Si $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(V_E)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)$;

(2) *$T \oplus S$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.*

(1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que $\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)$. Como $T$ y $S$ satisfacen la propiedad $(V_E)$,

$$\begin{aligned} \sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) &= [\sigma(T) \cup \sigma(S)] \setminus [\sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)] \\ &= [E(T) \cap \rho(S)] \cup [E(S) \cap \rho(T)] \cup [E(T) \cap E(S)]. \end{aligned}$$

Ahora, la hipótesis, $\sigma_p(T) = \sigma_p(S)$ implica que $E(T) \cap \rho(S) = E(S) \cap \rho(T) = \emptyset$. Así, $\sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = E(T) \cap E(S)$. Puesto que $\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)$, se tiene que

$$\begin{aligned} E(T \oplus S) &= \operatorname{iso} \sigma(T \oplus S) \cap \sigma_p(T \oplus S) \\ &= \operatorname{iso} [\sigma(T) \cup \sigma(S)] \cap \sigma_p(S) \\ &= [E(T) \cap \rho(S)] \cup [E(S) \cap \rho(T)] \cup [E(T) \cap E(S)]. \end{aligned}$$

Como $E(T) \cap \rho(S) = E(S) \cap \rho(T) = \emptyset$, se sigue que $E(T \oplus S) = E(T) \cap E(S)$. Así, $\sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = E(T \oplus S)$ y $T \oplus S$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Si $T \oplus S$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces por Teorema 2.15, $T \oplus S$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$. Por lo tanto, la igualdad de los espectros $\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)$ sigue del Teorema 2.9 y la prueba "(2) $\Rightarrow$ (1)" del Teorema 3.1. $\square$

**Observación 3.1.** En general, la suma directa de dos operadores que satisfacen la propiedad $(V_E)$ no necesariamente satisface la propiedad $(V_E)$. En efecto, considere los operadores $Q$ y $T$ definidos en el Ejemplo 3.2. Entonces, $Q$ y $T$ satisfacen la propiedad $(V_E)$, pues $\sigma(Q) \setminus \sigma_{SF_+^-}(Q) = \{0\} \setminus \emptyset = \{0\} = E(Q)$ y $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset = E(T)$. Pero la suma directa $Q \oplus T$ no satisface la propiedad $(V_E)$, pues $\sigma(Q \oplus T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(Q \oplus T) = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset \neq \{0\} = E(Q \oplus T)$. Note que $\sigma_{SF_+^-}(Q \oplus T) = \sigma_{SF_+^-}(Q) \cup \sigma_{SF_+^-}(T)$, pero $\sigma_p(Q) = \{0\} \neq \emptyset = \sigma_p(T)$.

## 3.2. Variaciones fuertes para restricciones

En esta sección, se consideran operadores $T \in L(X)$ tales que $0 \notin \Pi(T)$, y se buscan algunas condiciones para que estos operadores satisfagan la propiedad $(V_E)$ o la propiedad $(V_\Pi)$ en término de sus restricciones. Para esto, se introducen los siguientes dos lemas que serán fundamentales para obtener los resultados deseados.

**Lema 3.1.** *Suponga que $T \in L(X)$ y existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado. Entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si $0 \notin \Pi(T)$, entonces $\Pi^0(T) = \Pi^0(T_n)$ y $\Pi(T) = \Pi(T_n)$.*

(2) *Si $0 \notin \Pi_a(T)$, entonces $\Pi^0_a(T) = \Pi^0_a(T_n)$ y $\Pi_a(T) = \Pi_a(T_n)$.*

*Demostración.*

(1). Sea $\lambda \in \Pi(T)$. Entonces, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Como $0 \notin \Pi(T)$, se tiene que $\lambda \neq 0$. Por el Lema 1.19, $0 < p(\lambda I - T_n) = p(\lambda I - T) < \infty$ y $q(\lambda I - T_n) < \infty$. Por lo tanto, $0 < p(\lambda I - T_n) = q(\lambda I - T_n) < \infty$ y se sigue que $\lambda \in \Pi(T_n)$. En consecuencia, $\Pi(T) \subseteq \Pi(T_n)$. Sea $\lambda \in \Pi(T_n)$. Entonces $\lambda \in \sigma(T_n)$ y $0 < p(\lambda I - T_n) = q(\lambda I - T_n) < \infty$. Por los Lemas 1.7 y 1.8, $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$. Suponga que $p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) = 0$. Entonces, $\lambda \notin \sigma(T)$ y por el Lema 1.21, se sigue que $\lambda \notin \sigma(T_n)$, lo que conduce a una contradicción. Por lo tanto, $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ y $\lambda \in \Pi(T)$. Así, $\Pi(T_n) \subseteq \Pi(T)$ y se concluye que $\Pi(T) = \Pi(T_n)$. La hipótesis $0 \notin \Pi(T)$ implica que $0 \notin \Pi^0(T)$, pues $\Pi^0(T) \subseteq \Pi(T)$. Suponga que $0 \in \Pi^0(T_n)$. Entonces, $0 \in \Pi(T_n)$. Puesto que $\Pi(T) = \Pi(T_n)$, se tiene que $0 \in \Pi(T)$, lo cual es contradictorio. Polo tanto, $0 \notin \Pi^0(T_n)$. Para el caso $\lambda \neq 0$,se tiene que $\alpha(\lambda I - T) = \alpha(\lambda I - T_n)$ por el inciso (3) del Lema 1.19. Puesto que $\Pi^0(T) = \{\lambda \in \Pi(T) : \alpha(\lambda I - T) < \infty\}$ and $\Pi(T) = \Pi(T_n)$, se concluye que $\Pi^0(T) \setminus \{0\} = \Pi^0(T_n) \setminus \{0\}$ y por lo tanto, $\Pi^0(T) = \Pi^0(T_n)$.

(2). Sea $\lambda \in \Pi_a(T)$. Entonces, $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_a(T)$, $p(\lambda I - T) < \infty$ y $R((\lambda I - T)^{p(\lambda I - T)+1})$ es cerrado. Por el Lema 1.21, se tiene que $\lambda \in \sigma_a(T) = \sigma_a(T_n)$. La hipótesis $0 \notin \Pi_a(T)$

implica que $\lambda \neq 0$. Por el Lema 1.19, $p(\lambda I - T_n) = p(\lambda I - T) < \infty$ y $R((\lambda I - T_n)^{p(\lambda I - T_n)+1}) = R((\lambda I - T)^{p(\lambda I - T_n)+1}) \cap R(T^n) = R((\lambda I - T)^{p(\lambda I - T)+1}) \cap R(T^n)$ es cerrado. Por lo tanto, $\lambda \in \Pi_a(T_n)$ y así, $\Pi_a(T) \subseteq \Pi_a(T_n)$. Para mostrar que $\Pi_a(T_n) \subseteq \Pi_a(T)$, sea $\lambda \in \Pi_a(T_n)$. Aquí se consideran dos casos:

Caso 1. Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \sigma_a(T_n)$, $p(\lambda I - T_n) < \infty$ y $R((\lambda I - T_n)^{p(\lambda I - T_n)+1})$ es cerrado. Por el Lema 1.21, $\lambda \in \sigma_a(T_n) = \sigma_a(T)$. También, de los Lemas 1.19 y 1.20, se sigue que $p(\lambda I - T_n) = p(\lambda I - T) < \infty$ y $R((\lambda I - T)^{p(\lambda I - T)+1}) = R((\lambda I - T)^{p(\lambda I - T_n)+1})$ es cerrado. Por lo tanto, $\lambda \in \Pi_a(T)$.

Caso 2. Si $\lambda = 0$, entonces $0 \in \Pi_a(T_n) = \sigma_a(T_n) \setminus \sigma_{LD}(T_n)$. Como $\sigma_{LD}(T_n) = \sigma_{ubb}(T_n)$, $T_n$ es superiormente semi $B$-Browder, por lo que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $R(T_n^m) = R(T^{n+m})$ es cerrado y $T_{n[m]}$ es superiormente semi-Browder, donde $T_{n[m]}$ denota la restricción de $T$ sobre $R(T^{n+m})$. Así, $T$ es superiormente semi $B$-Browder y $0 \notin \sigma_{ubb}(T_n) = \sigma_{LD}(T_n)$. Por el Lema 1.21, se tiene que $0 \in \sigma_a(T_n) = \sigma_a(T)$ y así, $0 \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{LD}(T) = \Pi_a(T)$. Por lo tanto, $\Pi_a(T_n) \subseteq \Pi_a(T)$.

Así, en ambos casos, $\Pi_a(T_n) \subseteq \Pi_a(T)$, por lo que se concluye que $\Pi_a(T_n) = \Pi_a(T)$.

La hipótesis $0 \notin \Pi_a(T)$ implica que $0 \notin \Pi_a^0(T)$, pues $\Pi_a^0(T) \subseteq \Pi_a(T)$. Suponga que $0 \in \Pi_a^0(T_n)$. Entonces, $0 \in \Pi_a(T_n)$. Puesto que $\Pi_a(T) = \Pi_a(T_n)$, se tiene que $0 \in \Pi_a(T)$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, $0 \notin \Pi_a^0(T_n)$. Para el caso $\lambda \neq 0$, se tiene que $\alpha(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T)$ por el inciso (3) del Lema 1.19. Puesto que $\Pi_a^0(T) = \{\lambda \in \Pi_a(T) : \alpha(\lambda I - T) < \infty\}$ and $\Pi_a(T) = \Pi_a(T_n)$, se concluye que $\Pi_a^0(T) \setminus \{0\} = \Pi_a^0(T_n) \setminus \{0\}$ y por lo tanto, $\Pi_a^0(T) = \Pi_a^0(T_n)$. □

**Lema 3.2.** *Suponga que $T \in L(X)$ y existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado. Entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

1. *Si $0 \notin \Pi(T)$, entonces $E^0(T) \subseteq E^0(T_n)$ y $E(T) = E(T_n)$.*

2. *Si $0 \notin \Pi_a(T)$, entonces $E_a^0(T) \subseteq E_a^0(T_n)$ y $E_a(T) = E_a(T_n)$.*

*Demostración.*

(1). Sea $\lambda \in E(T_n)$. Entonces, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T_n)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T_n)$. Por el Lema 1.21, se tiene que $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T_n) = \operatorname{iso}\sigma(T)$ y como $N(\lambda I - T_n) \subseteq N(\lambda I - T)$, se sigue que $0 < \alpha(\lambda I - T_n) \leq \alpha(\lambda I - T)$. Así, $\lambda \in E(T)$ y por lo tanto, $E(T_n) \subseteq E(T)$. Por el Lema 1.22, se tiene que $E(T) \subseteq E(T_n)$. De esta manera, se concluye que $E(T) = E(T_n)$.

Sea $\lambda \in E^0(T)$. Entonces, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Por el Lema 1.21, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) = \operatorname{iso}\sigma(T_n)$. Aquí se consideran dos casos:

Caso 1. Si $\lambda \neq 0$, entonces por el Lema 1.19, $0 < \alpha(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T) < \infty$, por lo que $\lambda \in E^0(T_n)$.

Caso 2. Si $\lambda = 0$, entonces se afirma que $\alpha(T_n) > 0$. Suponga que $\alpha(T_n) = 0$. Entonces, $p(T_n) = 0$ y, por el Lema 1.7, $p(T) < \infty$. También, $\alpha(T^n) < \infty$, pues $\alpha(T) < \infty$. Como $R(T^n)$ es cerrado, se tiene que $T^n$ es un operador superiormente semi-Fredholm. Por el Teorema 1.2, $T$ es un operador superiormente semi-Fredholm y por el Teorema 1.3, $T^{n+1}$ es un operador superiormente semi-Fredholm. Por lo tanto, $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado. Según esto, $T_n$ es acotado superiormente y así, $T$ es un operador semi-Fredholm. Por el hecho que $0 \in \operatorname{iso}\sigma(T_n)$, $T_n^*$ tiene la SVEP en 0. Así, por el Teorema 1.9, $q(T_n) < \infty$ y por el Lema 1.8, $q(T) < \infty$. De esta manera, se tiene que $0 < p(T) = q(T) < \infty$, lo que contradice la hipótesis que $0 \notin \Pi(T)$. Por lo tanto, $\alpha(T_n) > 0$. Por otro lado, como $N(T_n) \subseteq N(T)$ y $\alpha(T) < \infty$, se tiene que $\alpha(T_n) < \infty$. Luego, $0 < \alpha(T_n) < \infty$ y así, $\lambda \in E^0(T_n)$, por lo que $E^0(T) \subseteq E^0(T_n)$. Así, en ambos casos, $E^0(T) \subseteq E^0(T_n)$, por lo que se concluye que $E^0(T) = E^0(T_n)$.

(2). Por el Lema 1.23, $E_a(T) \subseteq E_a(T_n)$. Para probar la inclusión $E_a(T_n) \subseteq E_a(T)$, sea $\lambda \in E_a(T_n)$. Entonces, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T_n)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T_n)$. Por el Lema 1.21, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T_n) = \operatorname{iso}\sigma_a(T)$. También, como $N(\lambda I - T_n) \subseteq N(\lambda I - T)$, se tiene que $0 < \alpha(\lambda I - T_n) \leq \alpha(\lambda I - T)$. Así, $\lambda \in E_a(T)$ y por lo tanto, $E_a(T_n) \subseteq E_a(T)$. Esto demuestra que $E_a(T) = E_a(T_n)$. Sea $\lambda \in E_a^0(T)$. Entonces $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T)$ y $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Como $0 \notin \Pi_a(T)$, por el Lema 1.21, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T_n) = \operatorname{iso}\sigma_a(T)$. Aquí se consideran dos casos:

Caso 1. Si $\lambda \neq 0$, entonces por el Lema 1.19, $0 < \alpha(\lambda I - T_n) = \alpha(\lambda I - T) < \infty$.

Así, $\lambda \in E_a^0(T_n)$.

Caso 2. Si $\lambda = 0$, entonces se afirma que $\alpha(T_n) > 0$. Suponga que $\alpha(T_n) = 0$. Entonces, $p(T_n) = 0$ y, por el Lema 1.7, $p(T) < \infty$. También, $\alpha(T^n) < \infty$, pues $\alpha(T) < \infty$. Como por hipótesis $R(T^n)$ es cerrado, se tiene que $T^n$ es un operador superiormente semi-Fredholm. Por el Teorema 1.2, $T$ es un operador superiormente semi-Fredholm y por el Teorema 1.3, $T^{n+1}$ es es un operador superiormente semi-Fredholm. Por lo tanto, $R(T_n) = R(T^{n+1})$ es cerrado. Según esto, $T_n$ es acotado superiormente, por lo que $0 \notin \sigma_a(T_n)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\alpha(T_n) > 0$. Por otro lado, como $N(T_n) \subseteq N(T)$ y $\alpha(T) < \infty$, se tiene que $\alpha(T_n) < \infty$. Luego, $0 < \alpha(T_n) < \infty$ y así, $\lambda \in E_a^0(T_n)$, por lo que $E_a^0(T) \subseteq E_a^0(T_n)$. Así, en ambos casos, $E_a^0(T) \subseteq E_a^0(T_n)$, por lo que se concluye que $E_a^0(T) = E_a^0(T_n)$. $\square$

**Teorema 3.4.** *Sea $T \in L(X)$ tal que $0 \notin \Pi(T)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Asuma que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(V_E)$. Sea $\lambda \in E(T)$. Por Lema 3.2, se tiene que $\lambda \in E(T_n)$ y por el Teorema 2.17, la propiedad $(V_E)$ implica que $T_n$ satisface la propiedad $(v)$ y $E(T_n) = E^0(T_n)$, por lo que $\lambda \in E^0(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T_n)$. Se afirma que $\lambda \neq 0$. En efecto, suponga que $\lambda = 0$. Entonces, $T_n$ es un operador semi-Fredholm y $0 \in \operatorname{iso} \sigma(T_n)$, luego por el Teorema 1.4, $T_n$ es un operador de Browder y por lo tanto, $0 \in \Pi^0(T_n)$, lo que implica por el Lema 3.1, que $0 \in \Pi^0(T) \subseteq \Pi(T)$, contradiciendo el hecho que $0 \notin \Pi(T)$. Así, se concluye que $\lambda \neq 0$. Ahora, como $\lambda \in E^0(T_n)$, por el Lema 1.19, se sigue que $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$. Puesto que $\lambda I - T_n$ es un operador superiormente semi-$B$-Fredholm y $R(\lambda I - T_n)$ es cerrado, por el Lema 1.17, se tiene que $\lambda I - T$ es un operador superiormente semi-Fredholm. Como $\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T)$, nuevamente por el Teorema 1.4, $\lambda I - T$ es un operador de Browder y por lo tanto, de Weyl. Así, $\lambda I - T$ es superiormente semi-Weyl y $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Esto muestra que $E(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Para mostrar la inclusión opuesta $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E(T)$, observe que bajo la hipótesis que $T_n$ satisface la propiedad $(V_E)$, por los Lemas 1.20 y 3.2, se tiene que $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T_n) = E(T_n) = E(T)$ y así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_E)$.

Recíprocamente, asuma que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces, para $n = 0$, $R(T^0) = X$ es cerrado y $T_0 = T$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Observación 3.2.** Si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$, entonces $T$ satisface la propiedad $(ah)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$ (véase [68, Theorem 2.13]). También, si $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$, entonces $\Pi(T) = \Pi^0(T)$ (véase [68, Theorem 2.10]).

Los resultados mencionados en la Observación 3.2, son necesarios para caracterizar la propiedad $(V_\Pi)$ de un operador $T \in L(X)$ en términos de una restricción $T_n$, como se muestra a continuación.

**Teorema 3.5.** *Sea $T \in L(X)$ tal que $0 \notin \Pi(T)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$ si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$.*

*Demostración.* Suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$. Entonces, $T_n$ satisface la propiedad $(ah)$ y $\Pi(T_n) = \Pi^0(T_n)$. Sea $\lambda \in \Pi(T)$. Por el Lema 3.1, $\lambda \in \Pi(T_n) = \Pi^0(T_n)$, por lo que $\lambda \in \Pi^0(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T_n)$. Así, $\lambda I - T_n$ es un operador superiormente semi-Fredholm y $0 < p(\lambda I - T_n) = q(\lambda I - T_n) < \infty$. Por los Lemas 1.4, 1.7 y 1.8, se tiene que $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ y por lo tanto, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Esto prueba que $\Pi(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Para mostrar la inclusión opuesta $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \Pi(T)$, observe que bajo la hipótesis que $T_n$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$, por los Lemas 1.20 y 3.1, se tiene que $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T_n) = \Pi(T_n) = \Pi(T)$ y así, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \Pi(T)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$.

Recíprocamente, asuma que $T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$. Entonces, para $n = 0$, $R(T^0) = X$ es cerrado y $T_0 = T$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$. $\square$

Los siguientes tres corolarios son consecuencia inmediata del Teorema 3.5, debido a que las propiedades $(Sab)$, $(Sb)$, $(V_{\Pi})$ y $(V_{\Pi_a})$ son equivalentes.

**Corolario 3.5.** *Sea $T \in L(X)$ tal que $0 \notin \Pi(T)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(V_{\Pi_a})$ si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(V_{\Pi_a})$.*

**Corolario 3.6.** *Sea $T \in L(X)$ tal que $0 \notin \Pi(T)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(Sb)$ si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(Sb)$.*

**Corolario 3.7.** *Sea $T \in L(X)$ tal que $0 \notin \Pi(T)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(Sab)$ si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(Sab)$.*

**Teorema 3.6.** *Sea $T \in L(X)$ tal que $0 \notin \Pi(T)$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(Sw)$ si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(Sw)$.*

*Demostración.* Asuma que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(Sw)$. Sea $\lambda \in E^0(T)$. Entonces, por el Lema 3.2, se tiene que $\lambda \in E^0(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T_n)$, pues $T_n$ satisface la propiedad $(Sw)$. Así, $\lambda I - T_n$ es un operador superiormente semi $B$-Fredholm y por lo tanto, cuasi-Fredholm. Se afirma que $\lambda \neq 0$. En efecto, suponga que $\lambda = 0$. Entonces, $T_n$ es cuasi-Fredholm y $0 \in \sigma(T_n) = \sigma(T_n^*)$, por lo que $T_n$ es un operador cuasi-Fredholm y ambos operadores $T_n$ y $T_n^*$ tienen la SVEP en 0. Luego, por el Corolario 1.1, $T_n$ es Drazin invertible y por lo tanto, $0 \in \sigma(T_n) \setminus \sigma_D(T_n) = \Pi(T_n)$, lo que implica, por el Lema 3.1, que $0 \in \Pi(T)$, contradiciendo el hecho que $0 \notin \Pi(T)$. Así, se concluye que $\lambda \neq 0$. Ahora, procediendo como en el Teorema 3.4, se obtiene que $\lambda I - T$ es superiormente semi-Weyl y por lo tanto, superiormente semi $B$-Weyl. Por lo tanto, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$ y así, $E^0(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Para mostrar la inclusión opuesta $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq E^0(T)$, observe que bajo la hipótesis que $T_n$ satisface la propiedad $(Sw)$, por el Teorema 2.1

y el Corolario 3.6, $T$ satisface la propiedad $(Sb)$. Por lo tanto, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi^0(T) \subseteq E^0(T)$. Esto demuestra que $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T)$ y $T$ satisface la propiedad $(Sw)$.

Recíprocamente, si $T$ satisface la la propiedad $(Sw)$, entonces 0 es un número natural tal que $R(T^0) = X$ es cerrado y $T_0 = T$ satisface la propiedad $(Sw)$. $\square$

**Corolario 3.8.** *Sea* $T \in L(X)$ *tal que* $0 \notin \Pi(T)$. *Entonces,* $T$ *satisface la propiedad* $(Saw)$ *si y solo si existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $R(T^n)$ *es cerrado y* $T_n$ *satisface la propiedad* $(Saw)$.

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del Teorema 3.6, debido que las propiedades $(Saw)$ y la propiedad $(Sw)$ son equivalentes por el Corolario 2.2. $\square$

El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento de un operador $T$ y su restricción $T_n$, cuando $0 \in \Pi(T)$.

**Ejemplo 3.3.** Sea $X$ un espacio de Banach y suponga que $Y$ y $Z$ son subespacios cerrados propios de $X$ con $X = Y \oplus Z$. Sea $T$ la proyección de $X$ sobre $Y$ que es cero sobre $Z$. Como $T^2 = T$, se tiene que $p(T) = q(T) < \infty$, por lo que $\sigma(T) = \{0, 1\}$ y $0 \in \Pi(T)$. Note que $T_n = T|_{R(T_n)}$ es el operador identidad sobre $Y$ para todo $n \geq 1$. Asuma que ni $Y$ ni $Z$ son espacios de dimensión finita. Entonces, $T$ y $T_n$ satisfacen las propiedades $(V_E)$, $(V_\Pi)$ y $(Sw)$. Ahora, si $Y$ es un espacio de dimensión infinita y $Z$ es un espacio de dimensión finita, entonces $T_n$ satisface la propiedad $(V_E)$, la propiedad $(V_\Pi)$ y la propiedad $(Sw)$ para todo $n \geq 1$. Pero $T$ no satisface ninguna de las propiedades $(V_E)$, $(V_\Pi)$ y $(Sw)$.

**Capítulo 4**

# Estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo perturbaciones

En este capítulo, se estudia la estabilidad de la propiedad $(V_E)$ para un operador $T \in L(X)$ bajo perturbaciones por operadores que son de rangos finitos, nilpotentes, cuasi-nilpotentes, compactos, de Riesz, algebraicos y hereditariamente polaroides, que conmutan con $T$. También, para dos operadores $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ se estudia la estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo el producto tensorial, dando condiciones suficientes que permitan transferir la propiedad $(V_E)$ desde los factores tensoriales $T$ y $S$ al producto tensorial $T \otimes S$. Cabe destacar que estos resultados están reseñados en el artículo "Perturbation theory for property $(V_E)$ and tensor product", publicado en la revista Mathematics (2021), véase [16].

## 4.1. Propiedad $(V_E)$ bajo perturbaciones que conmutan

En esta sección, se estudia la estabilidad de la propiedad $(V_E)$ para un operador $T \in L(X)$ bajo perturbaciones por operadores no nulos que conmutan con $T$. Para esto, se dan ciertas condiciones a un operador $T$ que satisface la propiedad $(V_E)$ de modo que al perturbarlo por operadores de rangos finitos, nilpotentes, cuasi-nilpotentes, compactos, de Riesz, algebraicos y hereditariamente polaroides, la referida propiedad se preserve.

**Teorema 4.1.** *Sea $T \in L(X)$ un operador isoloide y sea $F \in L(X)$ un operador de rango finito que conmuta con $T$. Si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces $T + F$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por el Teorema 2.13, $T$ satisface el teorema generalizado de Weyl y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$. Puesto que $T$ es isoloide, por el Teorema 1.36, $T + F$ satisface el teorema generalizado de Weyl. Además, como $F$ es de rango finito, por el Teorema 1.17, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T + F)$ y por el Teorema 1.28, $\sigma_{BW}(T) = \sigma_{BW}(T + F)$. Por lo tanto, $\sigma_{SF_+^-}(T + F) =$

$\sigma_{BW}(T+F)$. Así, $T+F$ satisface el teorema generalizado de Weyl y $\sigma_{SF_+^-}(T+F) = \sigma_{BW}(T+F)$. Nuevamente, por el Teorema 2.13, se concluye que $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Corolario 4.1.** *Sea $T \in L(X)$ un operador cuasi-nilpotente tal que 0 es un autovalor de $T$ y sea $F \in L(X)$ un operador de rango finito que conmuta con $T$. Si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* La hipótesis implica que $T$ es isoloide. Por lo tanto, la prueba sigue del Teorema 4.1. $\square$

**Teorema 4.2.** *Sea $T \in L(X)$ y $F \in L(X)$ un operador de rango finito que conmuta con $T$. Si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$;*

(2) *$E(T+F) = \Pi_+^0(T+F)$;*

(3) *$E(T+F) \cap \sigma(T) \subseteq \Pi_+^0(T)$.*

*Demostración.* (1) $\Leftrightarrow$ (2). Suponga que $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por el Teorema 2.23, se tiene que $E(T+F) = \Pi_+^0(T+F)$. Recíprocamente, suponga que $E(T+F) = \Pi_+^0(T+F)$. Como $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, por el Teorema 2.23, $T$ satisface el teorema de $a$-Browder, esto es, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{ub}(T)$. Ahora, como $F$ es un operador de rango finito, por el Teorema 1.17(1), se sigue que $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T+F)$ y como $F$ conmuta con $T$, por el Teorema 1.17(2), se tiene que $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T+F)$. Así, $\sigma_{SF_+^-}(T+F) = \sigma_{ub}(T+F)$ y por lo tanto, $T+F$ satisface el teorema de $a$-Browder. Puesto que por hipótesis, $E(T+F) = \Pi_+^0(T+F)$, nuevamente por el Teorema 2.23, se concluye que $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Suponga que $E(T+F) = \Pi_+^0(T+F)$. Sea $\lambda \in E(T+F) \cap \sigma(T)$. Entonces, $\lambda \in \Pi_+^0(T+F) \cap \sigma(T)$ y así $\lambda \notin \sigma_{ub}(T+F)$. Por el Teorema 1.17(2), se tiene que $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T+F)$ y por lo tanto, $\lambda \in \Pi_+^0(T)$. Esto muestra que

$E(T+F) \cap \sigma(T) \subseteq \Pi_+^0(T)$. Para la prueba del recíproco, observe que la inclusión $\Pi_+^0(T+F) \subseteq E(T+F)$ siempre es cierta. Así, es suficiente mostrar que $E(T+F) \subseteq \Pi_+^0(T+F)$. Sea $\lambda \in E(T+F)$. Se tienen los siguientes dos casos:

Caso 1. $\lambda \notin \sigma(T)$.

Caso 2. $\lambda \in \sigma(T)$.

En el Caso 1, $\lambda \notin \sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T+F)$ y por lo tanto, $\lambda \in \Pi_+^0(T+F)$. En el Caso 2, se tiene que $\lambda \in E(T+F) \cap \sigma(T) \subseteq \Pi_+^0(T)$ y así, $\lambda \notin \sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T+F)$, por lo que $\lambda \in \Pi_+^0(T+F)$ nuevamente. Así, en ambos casos, se tiene que $E(T+F) \subseteq \Pi_+^0(T+F)$ y por lo tanto, $E(T+F) = \Pi_+^0(T+F)$. $\square$

**Observación 4.1.** La equivalencia (1) $\Leftrightarrow$ (2) del Teorema 4.2 se satisface si se reemplaza $F$ por un operador compacto $K \in L(X)$ que conmuta con $T$.

**Corolario 4.2.** *Sea $T \in L(X)$ un operador que tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $F \in L(X)$ un operador de rango finito que conmuta con $T$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Puesto que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, por el Teorema 2.23, se tiene que $E(T) = \Pi_+^0(T)$. Así, $E(T) \cap \sigma(T) \subseteq \Pi_+^0(T)$. Por el Lema 1.15, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) \Leftrightarrow \lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T+F)$, por lo que $E(T) = E(T+F)$. Por lo tanto, $E(T+F) \cap \sigma(T) \subseteq \Pi_+^0(T)$ y por el Teorema 4.2, $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$. Recíprocamente, si $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces por simetría, se tiene que $T = (T+F) - F$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Observación 4.2.** Si $T \in L(X)$ y $N \in L(X)$ es un operador nilpotente que conmuta con $T$, entonces $\sigma(T) = \sigma(T+N)$ y $E(T) = E(T+N)$ (véase [78, Ecuaciones (3.1) y (3.4)]). De acuerdo con esto, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.3.** *Sea $T \in L(X)$ y sea $N \in L(X)$ un operador nilpotente que conmuta con $T$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T+N$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Suponga que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por el Teorema 1.18, $\sigma_{SF_+^-}(T+N) = \sigma_{SF_+^-}(T)$. Como $\sigma(T) = \sigma(T+N)$ y $E(T) = E(T+N)$, se sigue que $\sigma(T+N) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T+N) = E(T+N)$ y así, $T+N$ satisface la propiedad $(V_E)$. Recíprocamente, si $T+N$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces por simetría, se tiene que $T = (T+N) - N$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis de conmutatividad no puede ser omitida en el Teorema 4.3.

**Ejemplo 4.1.** Sean $T$ y $N$ definidos sobre $l^2(\mathbb{N})$ por

$$T(x_1, x_2, ...) = \left(0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, ...\right) \text{ y } N(x_1, x_2, ...) = \left(0, \frac{-x_1}{2}, 0, 0, ...\right).$$

Observe que $N$ es un operador nilpotente que no conmuta con $T$. Como $\sigma(T) = \{0\} = \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $E(T) = \emptyset$, se tiene que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Pero $T+N$ no satisface la propiedad $(V_E)$, pues $\sigma(T+N) = \sigma_{SF_+^-}(T+N) = \{0\} = E(T+N)$.

**Corolario 4.3.** *Sea $T \in L(X)$ un operador cuasi-nilpotente tal que $0$ no es un autovalor de $T$ y sea $F \in L(X)$ un operador de rango finito que conmuta con $T$. Entonces, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* La hipótesis sobre $T$ y $F$ implica que $F$ es nilpotente. En efecto, si $0$ no es un autovalor de $T$, entonces $T$ es inyectivo. Como $F$ conmuta con el operador cuasi-nilpotente $T$, $TF$ es un operador de rango finito cuasi-nilpotente. Así, $TF$ es un operador nilpotente, y como $T$ es inyectivo, se tiene que $F$ es nilpotente. Así, por el Teorema 4.3, se concluye que $T+F$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

La estabilidad de la propiedad $(V_E)$ dada en el Teorema 4.3 no pueden ser extendida a operadores cuasi-nilpotentes o compactos que conmutan con $T$, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.2.** Sean $T$ y $S$ definidos sobre $\ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ por

$$T = 0 \oplus Q \text{ y } S = Q \oplus 0,$$

donde $Q$ es definido sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ como $Q(x_1, x_2, ...) = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...\right)$. Observe que $S$ es un operador compacto cuasi-nilpotente y $TS = ST = 0$. Por otro lado, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, pues $\sigma(T) = \{0\} = \sigma_{SF_+^-}(T)$ y $E(T) = \emptyset$. Pero, $T + S = Q \oplus Q$ no satisface la propiedad $(V_E)$, pues $\sigma(T + S) = \sigma_{SF_+^-}(T + S) = E(T + S) = \{0\}$.

**Teorema 4.4.** *Si $T \in L(X)$ es tal que $\operatorname{Int}(\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)) = \operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$ y $Q \in L(X)$ es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con $T$, entonces $T + Q$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Por el Teorema 1.19, se tiene que $\sigma_a(T + Q) = \sigma_a(T)$ y $\sigma(T + Q) = \sigma(T)$. Como $Q$ es un operador cuasi-nilpotente, se sigue que $Q$ es un operador de Riesz y por el Teorema 1.21, se obtiene que $\sigma_{SF_+^-}(T + Q) = \sigma_{SF_+^-}(T)$. Así, $\operatorname{Int}(\sigma(T + Q) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T + Q)) = \operatorname{iso}\sigma_a(T + Q) = \emptyset$ y por el Corolario 2.6, se concluye que $T + Q$ satisface la propiedad $(V_E)$. □

**Corolario 4.4.** *Suponga que $T$, $K \in L(X)$ conmutan y $K^n$ es un operador de rango finito para algún $n \in \mathbb{N}$. Si $\operatorname{Int}(\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)) = \operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$, entonces $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Por el Lema 1.14, $\sigma_a(T + K) = \sigma_a(T)$ y por el Teorema 1.16, $\sigma(T + K) = \sigma(T)$. Puesto que $K$ es un operador de Riesz, el resto de la prueba sigue como la demostración del Teorema 4.4. □

**Observación 4.3.** Un operador $R \in L(X)$ satisface $\sigma_{ub}(T) = \sigma_{ub}(T + R)$ para todo operador $T \in L(X)$ tal que $RT = TR$ si y solo si $R$ es un operador de Riesz (véase [63, Theorem 7]). También, $\sigma_b(T) = \sigma_b(T + R)$ (véase [63, Corollary 7]). En el caso que $T$ satisfaga la propiedad $(V_E)$, se tiene que $\sigma_{ub}(T) = \sigma_b(T)$ y así, $\sigma_{ub}(T + R) = \sigma_b(T + R)$. En particular, estos resultados se satisfacen si $R$ es un operador de rango finito.

**Teorema 4.5.** *Sea $T \in L(X)$ un operador finitamente isoloide que satisface la propiedad $(V_E)$ y $K$ un operador de Riesz que conmuta con $T$ tal que $\sigma(T) = \sigma(T + K)$. Entonces, $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $E(T) = E(T + K)$.*

*Demostración.* La prueba sigue de la hipótesis que $\sigma(T) = \sigma(T + K)$ y el hecho que $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T + K)$ por el Teorema 1.21. $\square$

**Teorema 4.6.** *Sea $T \in L(X)$ un operador que satisface la propiedad $(V_E)$ y $K \in L(X)$ un operador de Riesz que conmuta con $T$. Entonces, $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $E(T + K) = \Pi_+^0(T + K)$.*

*Demostración.* Suponga que $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por el Teorema 2.23, se tiene que $E(T + K) = \Pi_+^0(T + K)$. Recíprocamente, suponga que $E(T + K) = \Pi_+^0(T + K)$. Como $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces por el Teorema 2.23, $T$ satisface el teorema de $a$-Browder. Así, por el Teorema 1.33, $T + K$ satisface el teorema de $a$-Browder. Puesto que $E(T + K) = \Pi_+^0(T + K)$, nuevamente por el Teorema 2.23, $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Teorema 4.7.** *Sea $T \in L(X)$ un operador finitamente isoloide que satisface la propiedad $(V_E)$. Si $K$ un operador de Riesz que conmuta con $T$ y $\sigma(T) = \sigma(T + K)$, entonces $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Si $K$ un operador de Riesz que conmuta con $T$, entonces por el Teorema 1.21, se tiene que $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T + K)$. Sea $\lambda \in E(T)$. Puesto que $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T + K)$ y así, $R(\lambda I - T - K)$ es cerrado. También, se tiene que $\lambda \in \text{iso}\sigma(T) = \text{iso}\sigma(T + K) \subseteq \text{iso}\sigma_a(T + K)$, por lo que $\alpha(\lambda I - T - K) > 0$ y así, $\lambda \in E(T + K)$. Por lo tanto, $E(T) \subseteq E(T + K)$ y se sigue que $\sigma(T + K) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T + K) \subseteq E(T + K)$, pues $\sigma(T) = \sigma(T + K)$. Por otro lado, si $\lambda \in E(T + K)$, entonces $\lambda \in \text{iso}\sigma(T + K) = \text{iso}\sigma(T)$ y como $T$ es isoloide, se tiene que $\alpha(\lambda I - T) > 0$ y $\lambda \in E(T)$. Consecuentemente, $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T + K)$ y por lo tanto, $\lambda \in \sigma(T + K) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T + K)$. Así, $E(T + K) \subseteq \sigma(T + K) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T + K)$. Esto demuestra que $E(T + K) = \sigma(T + K) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T + K)$ y $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

Para $T \in L(X)$, se denota $\mathcal{H}(\sigma(T))$ al conjunto de todas las funciones analíticas definidas sobre un entorno abierto de $\sigma(T)$.

**Teorema 4.8.** *Sea* $T \in L(X)$*,* $K$ *un operador algebraico que conmuta con* $T$ *y* $f \in \mathcal{H}(\sigma(T+K))$*. Entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si* $T^*$ *tiene la SVEP y* $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K) = \emptyset$*, entonces* $f(T+K)$ *satisface la propiedad* $(V_E)$*.*

(2) *Si* $T$ *tiene la SVEP y* $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K) = \emptyset$*, entonces* $f(T^*+K^*)$ *satisface la propiedad* $(V_E)$*.*

*Demostración.*

(1). Suponga que $K$ es un operador algebraico. Entonces, $K^*$ es algebraico y como $T^*$ tiene la SVEP, por el Teorema 1.13, se sigue que $T^*+K^* = (T+K)^*$ tiene la SVEP. Luego, por el Teorema 1.12, se tiene que $f((T+K)^*)$ tiene la SVEP, y como $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K) = \emptyset$, por el Corolario 2.5, se concluye que $f(T+K)$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(2). Asuma que $K$ es un operador algebraico. Como $T$ tiene la SVEP, por el Teorema 1.13, se sigue que $T+K$ tiene la SVEP. Luego, por el Teorema 1.12, se tiene que $f(T+K)$ tiene la SVEP, y puesto que $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K) = \emptyset$, por el Corolario 2.7, se deduce que $f(T^*+K^*)$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Teorema 4.9.** *Sea* $T \in L(X)$ *un operador que tiene la SVEP y* $f \in \mathcal{H}(\sigma(T))$*. Entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si* $Q$ *es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con* $T$ *y* $\operatorname{iso}\sigma_a(T) = \emptyset$*, entonces* $f(T)^* + Q^*$ *y* $f(T^*+Q^*)$ *satisfacen la propiedad* $(V_E)$*.*

(2) *Si* $K$ *es un operador algebraico que conmuta con* $T$ *y* $\operatorname{iso}\sigma_a(f(T)+K) = \emptyset$*, entonces* $f(T)^* + K^*$ *satisface la propiedad* $(V_E)$*.*

(3) *Si* $R$ *es un operador de Riesz que conmuta con* $T$ *y* $\operatorname{iso}\sigma_a(f(T)+R) = \emptyset$*, entonces* $f(T)^* + R^*$ *satisface la propiedad* $(V_E)$*.*

*Demostración.*

(1). Si $T$ tiene la SVEP, entonces por el Teorema 1.12, $f(T)$ tiene la SVEP. Como $Q$ es un operador cuasi-nilpotente que conmuta con $T$, por el Teorema 1.20, se sigue que $T+Q$ y $f(T)+Q$ tienen la SVEP. Por el Teorema 1.19, se tiene que $\sigma(T+Q)=\sigma(T)$ y por lo tanto, $f(T+Q)$ tiene la SVEP. Observe que $\operatorname{iso}\sigma_a(f(T))=\emptyset$. Nuevamente, por el Teorema 1.19, se tiene que $\sigma_a(T+Q)=\sigma_a(T)$ y $\sigma_a(f(T)+Q)=\sigma_a(f(T))$, por lo que $\operatorname{iso}\sigma_a(f(T)+Q)=\emptyset$ y así, $\operatorname{iso}\sigma_a(f(T+Q))=\operatorname{iso}\sigma_a(f(T)+Q)=\emptyset$. Por el Corolario 2.7, se concluye que $f(T)^*+Q^*$ y $f(T^*+Q^*)$ satisfacen la propiedad $(V_E)$.

(2). Como $K$ es un operador algebraico que conmuta con $T$ y $f(T)$ tiene la SVEP, por el Teorema 1.14, se sigue que $f(T)+K$ tiene la SVEP. Así, por el Corolario 2.7, se deduce que $f(T)^*+K^*$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(3). Puesto que $R$ es un operador de Riesz que conmuta con $T$ y $f(T)$ tiene la SVEP, por el Teorema 1.15, se sigue que $f(T)+R$ tiene la SVEP. Así, por el Corolario 2.7, se concluye que $f(T)^*+R^*$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Observación 4.4.** Para un operador $T\in L(X)$ y $f\in\mathcal{H}_{nc}(\sigma(T))$. Si $T^*$ tiene la SVEP, entonces las propiedades $(w)$ y $(gw)$ se satisfacen para $f(T)$. Si $T$ tiene la SVEP, entonces las propiedades $(w)$ y $(gw)$ se satisfacen para $f(T^*)$ (véase [5, Theorem 3.12]).

Los resultados mencionados en la Observación 4.4, son necesarios para la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 4.10.** *Suponga que $K\in L(X)$ es un operador algebraico que conmuta con $T\in L(X)$ y sea $f\in\mathcal{H}_{nc}(\sigma(T+K))$. Si $T+K$ es finitamente isoloide, entonces los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si $T^*$ es hereditariamente polaroide, entonces $f(T+K)$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

(2) *Si $T$ es hereditariamente polaroide, entonces $f(T^*+K^*)$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.*

(1). Puesto que $T^*$ un operador hereditariamente polaroide, por el Teorema 1.39, $T^*$ tiene la SVEP y como $K^*$ es algebraico, por el Teorema 1.13, se sigue que $T^*+K^* = (T+K)^*$ tiene la SVEP. También, $T^*$ es polaroide, o equivalentemente, $T$ es polaroide, lo que implica por el Teorema 1.37, que $T+K$ es polaroide, o equivalentemente, $f(T+K)$ es polaroide, por el Teorema 1.38. Ahora, como $T+K$ es polaroide y $(T+K)^*$ tiene la SVEP, por la Observación 4.4, se tiene que $f(T+K)$ satisface la propiedades $(w)$ y $(gw)$. Puesto que $T+K$ es finitamente isoloide y polaroide, $\sigma_{LD}(T+K) = \sigma_b(T+K)$ y por lo tanto, $\sigma_{LD}(f(T+K)) = f(\sigma_{LD}(T+K)) = f(\sigma_b(T+K)) = \sigma_b(f(T+K))$. Pero, como $f(T+K)$ es polaroide, por el Teorema 2.10, se obtiene que $f(T+K)$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$, y por el Teorema 2.16, se concluye que $f(T+K)$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(2). Dado que $T$ un operador hereditariamente polaroide, por el Teorema 1.39, $T$ tiene la SVEP y como $K$ es algebraico, por el Teorema 1.13, se sigue que $T+K$ tiene la SVEP. Además, $T$ es polaroide, o equivalentemente, $T^*$ es polaroide, lo que implica por el Teorema 1.37, que $T^*+K^*$ es polaroide, o equivalentemente, $f(T^*+K^*)$ es polaroide, por el Teorema 1.38. Ahora, puesto que $T^*+K^*$ es polaroide y $T+K$ tiene la SVEP, por la Observación 4.4, se tiene que $f(T^*+K^*)$ satisface la propiedades $(w)$ y $(gw)$. Como $T^*+K^*$ es finitamente isoloide y polaroide, $\sigma_{LD}(T^*+K^*) = \sigma_b(T^*+K^*)$ y así, $\sigma_{LD}(f(T^*+K^*)) = f(\sigma_{LD}(T^*+K^*)) = f(\sigma_b(T^*+K^*)) = \sigma_b(f(T^*+K^*))$. Pero, como $f(T^*+K^*)$ es polaroide, por el Teorema 2.10, se tiene que $f(T^*+K^*)$ satisface la propiedad $(V_\Pi)$, y por el Teorema 2.16, se concluye que $f(T^*+K^*)$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Teorema 4.11.** *Suponga que $K \in L(X)$ es un operador algebraico que conmuta con $T \in L(X)$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) \cap \sigma(K) = \emptyset$. Si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$,* iso $\sigma_a(T+K) = \emptyset$ *y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T+K)$, entonces $T+K$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces $T^*$ tiene la SVEP en $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$. Como $K$ es algebraico y $\sigma_{SF_+^-}(T) \cap \sigma(K) = \emptyset$, por el Lema 1.13, se sigue que $T^* + K^* = (T+K)^*$ tiene la SVEP en $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T+K)$. Así, por el Teorema 2.25, $T+K$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

Similar al Teorema 2.26, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.12.** *Suponga que $K \in L(X)$ es un operador algebraico que conmuta con $T \in L(X)$ y $\sigma_{SF_-^+}(T) \cap \sigma(K) = \emptyset$. Si $T^*$ satisface la propiedad $(V_E)$,* iso $\sigma_a(T+K) = \emptyset$ *y $\sigma_{SF_-^+}(T) = \sigma_{SF_-^+}(T+K)$, entonces $T^* + K^*$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Si $T^*$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces $T$ tiene la SVEP en $\lambda \notin \sigma_{SF_-^+}(T)$. Como $K$ es algebraico y $\sigma_{SF_-^+}(T) \cap \sigma(K) = \emptyset$, por el Lema 1.13, se sigue que $T+K$ tiene la SVEP en $\lambda \notin \sigma_{SF_-^+}(T+K)$. Así, por el Teorema 2.26, $T^* + K^*$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

## 4.2. Propiedad $(V_E)$ bajo el producto tensorial

Sean $X$ y $Y$ dos espacios de Banach y $X \otimes Y$ la completación algebraica (en alguna norma tensorial razonable) del producto tensorial de $X$ y $Y$. El producto tensorial de $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ sobre $X \otimes Y$ es el operador definido como $(T \otimes S)(\sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i Tx_i \otimes Sy_i$ para cada $\sum_i x_i \otimes y_i \in X \otimes Y$. En esta sección, se analizan algunas condiciones que permiten que la propiedad $(V_E)$ se transmita de los factores tensoriales $T$ y $S$ al producto tensorial $(T \otimes S)$ y viceversa. Para ello, se consideran los siguientes seis lemas.

**Lema 4.1.** *Si $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ satisfacen el teorema de Browder, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T \otimes S$ satisface el teorema de Browder;*

(2) *$\sigma_W(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma_W(S) \cup \sigma_W(T)\sigma(S)$.*

*Demostración.* Véase [42, Theorem 3]. $\square$

**Lema 4.2.** *Si $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$, entonces*

$$\sigma_{SF_+^-}(T \otimes S) \subseteq \sigma_{SF_+^-}(T)\sigma_a(S) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)\sigma_a(T).$$

*Demostración.* Véase [42, Lemma 5]. □

**Lema 4.3.** *Si $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$, entonces*

$$\sigma_b(T \otimes S) = \sigma_b(T)\sigma(S) \cup \sigma_b(S)\sigma(T).$$

*Demostración.* Véase [52, Theorem 4.2]. □

**Lema 4.4.** *Sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$. Entonces, los siguientes enunciados se satisfacen:*

(1) *Si* $\operatorname{iso}\sigma(T) \neq \emptyset$ *y* $\operatorname{iso}\sigma(S) \neq \emptyset$, *entonces* $\operatorname{iso}\sigma(T \otimes S) \subsetneqq \operatorname{iso}\sigma(T)\operatorname{iso}\sigma(S)$.

(2) *Si* $\operatorname{iso}\sigma(T) = \emptyset$ *o* $\operatorname{iso}\sigma(S) = \emptyset$, *entonces* $\operatorname{iso}\sigma(T \otimes S) \subsetneqq \{0\}$.

(3) *Si* $\operatorname{iso}\sigma(T \otimes S) = \{0\}$, *entonces* $0 \in \operatorname{iso}\sigma(T) \cup \operatorname{iso}\sigma(S)$.

(4) *Si* $\operatorname{iso}\sigma(T) = \operatorname{iso}\sigma(S) = \emptyset$, *entonces* $\operatorname{iso}\sigma(T \otimes S) = \emptyset$.

*Demostración.* Véase [55, Proposition 3]. □

**Lema 4.5.** *Si $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$, entonces*

$$\begin{aligned} \sigma_{SF_+^-}(T \otimes S) &\subseteq \sigma_{SF_+^-}(T)\sigma(S) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)\sigma(T) \\ &\subseteq \sigma_b(T)\sigma(S) \cup \sigma_b(S)\sigma(T) = \sigma_b(T \otimes S). \end{aligned}$$

*Demostración.* Puesto que $\sigma_a(R) \subseteq \sigma(R)$ y $\sigma_{SF_+^-}(R) \subseteq \sigma_b(R)$ para cualquier operador $R$, por los Lemas 4.2 y 4.3, se concluye que $\sigma_{SF_+^-}(T \otimes S) \subseteq \sigma_{SF_+^-}(T)\sigma_a(S) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)\sigma_a(T) \subseteq \sigma_{SF_+^-}(T)\sigma(S) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)\sigma(T) \subseteq \sigma_b(T)\sigma(S) \cup \sigma_b(S)\sigma(T) = \sigma_b(T \otimes S)$. □

En lo que sigue, para un operador $T \in L(X)$ se denota por $\sigma_p(T)$ al conjunto de todos los autovalores de $T$.

**Lema 4.6.** *Si $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ son operadores isoloides tales que $0 \notin \sigma_p(T \otimes S)$, entonces*

$$E(T \otimes S) \subseteq E(T)E(S).$$

*Demostración.* Puesto que $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ son operadores isoloides, $T \otimes S$ es un operador isoloide. Según esto, se tiene que $E(T) = \operatorname{iso}\sigma(T)$, $E(S) = \operatorname{iso}\sigma(S)$ y $E(T \otimes S) = \operatorname{iso}\sigma(T \otimes S)$. Suponga que $\operatorname{iso}\sigma(T) \subseteq \{0\}$ o $\operatorname{iso}\sigma(S) \subseteq \{0\}$. Por el Lema 4.4, $\operatorname{iso}\sigma(T \otimes S) \subseteq \{0\}$ y como $0 \notin \sigma_p(T \otimes S)$, se sigue que $E(T \otimes S) = \emptyset$ y por lo tanto, $E(T \otimes S) \subseteq E(T)E(S)$. Ahora, suponga que $\operatorname{iso}\sigma(T) \nsubseteq \{0\}$ y $\operatorname{iso}\sigma(S) \nsubseteq \{0\}$. Entonces, por el inciso (1) del Lema 4.4, se concluye que $E(T \otimes S) \subseteq E(T)E(S)$. □

**Teorema 4.13.** *Suponga que $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ satisfacen la propiedad $(Sb)$. Entonces, $T \otimes S$ satisface la propiedad $(Sb)$ si y solo si*

$$\sigma_{SBF_+^-}(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma_{SBF_+^-}(S) \cup \sigma_{SBF_+^-}(T)\sigma(S).$$

*Demostración.* Por el Teorema 2.11, se tiene que las propiedades $(Sb)$ y $(V_\Pi)$ son equivalentes. También, por el Teorema 2.9, la propiedad $(V_\Pi)$ implica la igualdad entre los espectros de Browder y superiormente semi $B$-Weyl. Así, la prueba es una consecuencia inmediata de la igualdad $\sigma_b(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma_b(S) \cup \sigma_b(T)\sigma(S)$ dada en el Lema 4.3. □

**Teorema 4.14.** *Suponga que $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ son dos operadores isoloides que satisfacen la propiedad $(V_E)$ y $0 \notin \sigma_p(T \otimes S)$. Entonces, $T \otimes S$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si*

$$\sigma_{SF_+^-}(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma_{SF_+^-}(S) \cup \sigma_{SF_+^-}(T)\sigma(S).$$

*Demostración.* Por el Teorema 2.24, la propiedad $(V_E)$ implica la igualdad entre los espectros de Browder y superiormente semi-Weyl. Por lo tanto, la implicación directa es inmediata por el Lema 4.3. Recíprocamente, suponga que la identidad

$$\sigma_{SF_+^-}(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma_{SF_+^-}(S) \cup \sigma_{SF_+^-}(T)\sigma(S)$$

se satisface. Entonces, nuevamente por el Teorema 2.24, se tiene que

$$\sigma_{SF_+^-}(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma_b(S) \cup \sigma_b(T)\sigma(S) = \sigma_b(T \otimes S).$$

Así, se concluye que $\sigma(T\otimes S)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T\otimes S)=\Pi^0(T\otimes S)\subseteq E(T\otimes S)$. Por otra parte, se tiene que $E(T\otimes S)\subseteq\sigma(T\otimes S)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T\otimes S)$. En efecto, si $\lambda\in E(T\otimes S)$ entonces, por el Lema 4.6, $\lambda\in E(T)E(S)$. Por lo tanto, si $\lambda=\mu\nu$ con $\mu\in\sigma(T)$ y $\nu\in\sigma(S)$, entonces $\mu\in\sigma(T)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T)$ y $\nu\in\sigma(S)\setminus\sigma_{SF_+^-}(S)$. Puesto que $\sigma_{SF_+^-}(T\otimes S)=\sigma(T)\sigma_{SF_+^-}(S)\cup\sigma_{SF_+^-}(T)\sigma(S)$, se obtiene que $\lambda\in\sigma(T\otimes S)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T\otimes S)$. Por lo tanto, $T\otimes S$ satisface la propiedad $(V_E)$. $\square$

**Observación 4.5.** Si $Q_1\in L(X)$ y $Q_2\in L(Y)$ son operadores cuasi-nilpotentes que conmutan con $T\in L(X)$ y $S\in L(Y)$, respectivamente, entonces

$$(T+Q_1)\otimes(S+Q_2)=(T\otimes S)+Q,$$

donde $Q=Q_1\otimes S+T\otimes Q_2+Q_1\otimes Q_2\in L(X\otimes Y)$ es un operador cuasi-nilpotente.

**Teorema 4.15.** *Sean $Q_1\in L(X)$ y $Q_2\in L(Y)$ operadores cuasi-nilpotentes que conmutan con $T\in L(X)$ y $S\in L(Y)$, respectivamente. Si $T\otimes S$ es un operador isoloide que satisface la propiedad $(V_E)$, entonces $(T+Q_1)\otimes(S+Q_2)$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Es conocido que

$$\begin{aligned}\sigma((T+Q_1)\otimes(S+Q_2)) &= \sigma(T\otimes S),\\ \sigma_{SF_+^-}((T+Q_1)\otimes(S+Q_2)) &= \sigma_{SF_+^-}(T\otimes S).\end{aligned}$$

Además, se tiene que un operador satisface la SVEP si y solo si cualquier perturbación de él, por un operador cuasi-nilpotente que conmuta tiene la SVEP. Suponga que $T\otimes S$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces,

$$\begin{aligned}E(T\otimes S) &= \sigma(T\otimes S)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T\otimes S)\\ &= \sigma((T+Q_1)\otimes(S+Q_2))\setminus\sigma_{SF_+^-}((T+Q_1)\otimes(S+Q_2)).\end{aligned}$$

Se demostrará que $E(T\otimes S)=E((T+Q_1)\otimes(S+Q_2))$. Para esto, sea $\lambda\in E(T\otimes S)$. Entonces, $\lambda\in\sigma((T+Q_1)\otimes(S+Q_2))\setminus\sigma_{SF_+^-}((T+Q_1)\otimes(S+Q_2))$ y $\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(T\otimes S)$.

Puesto que $\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(T \otimes S)$, implica que $(T^* + Q_1^*) \otimes (S^* + Q_2^*)$ tiene la SVEP en $\lambda$, se sigue que $\lambda \notin \sigma_W((T + Q_1) \otimes (S + Q_2))$ y así, $\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma((T + Q_1) \otimes (S + Q_2))$. Por lo tanto, $\lambda \in E((T + Q_1) \otimes (S + Q_2))$ y así, $E(T \otimes S) \subseteq E((T + Q_1) \otimes (S + Q_2))$. Para probar la inclusión $E((T+Q_1)\otimes(S+Q_2)) \subseteq E(T\otimes S)$, sea $\lambda \in E((T+Q_1)\otimes(S+Q_2))$. Entonces, $\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(T \otimes S)$ y como $T \otimes S$ es isoloide, $\lambda \in E(T \otimes S)$. Por lo tanto, $E((T + Q_1) \otimes (S + Q_2)) \subseteq E(T \otimes S)$ y se concluye que $(T + Q_1) \otimes (S + Q_2)$ satisface la propiedad $(V_E)$. □

El siguiente lema, muestra la estabilidad del teorema de $a$-Browder bajo el producto tensorial para dos operadores $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$.

**Lema 4.7.** *Si $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ satisfacen el teorema de a-Browder, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *$T \otimes S$ satisface el teorema de a-Browder;*

(2) *$\sigma_{SF_+^-}(T \otimes S) = \sigma_a(T)\sigma_{SF_+^-}(S) \cup \sigma_{SF_+^-}(T)\sigma_a(S)$.*

*Demostración.* Véase [41, Lema 1]. □

**Teorema 4.16.** *Sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ dos operadores isoloides que satisfacen la propiedad $(V_E)$ y sean $R_1 \in L(X)$ y $R_2 \in L(Y)$ dos operadores de Riesz que conmutan con $T$ y $S$, respectivamente. Suponga que $\sigma(T + R_1) = \sigma(T)$, $\sigma(S + R_2) = \sigma(S)$ y $T \otimes S$ satisface la propiedad $(V_E)$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *El teorema de a-Browder se transfiere desde $T + R_1$ y $S + R_2$ a su producto tensorial;*

(2) *$(T + R_1) \otimes (S + R_2)$ satisface la propiedad $(V_E)$.*

*Demostración.* Por el Teorema 4.7, se tiene que $T + R_1$ y $S + R_2$ satisfacen la propiedad $(V_E)$, por lo que $\sigma(T + R_1) = \sigma_a(T + R_1)$, $\sigma(S + R_2) = \sigma_a(S + R_2)$,

$\sigma_{SF_+^-}(T+R_1)=\sigma_b(T+R_1)$ y $\sigma_{SF_+^-}(S+R_2)=\sigma_b(S+R_2)$. Además, como $T$, $S$ y $T\otimes S$ satisfacen la propiedad $(V_E)$, se obtiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{SF_+^-}(T\otimes S) &= \sigma_b(T\otimes S)=\sigma_b(T)\sigma(S)\cup\sigma_b(S)\sigma(T)\\ &= \sigma(T)\sigma_{SF_+^-}(S)\cup\sigma_{SF_+^-}(T)\sigma(S)\\ &= \sigma(T+R_1)\sigma_{SF_+^-}(S+R_2)\cup\sigma_{SF_+^-}(T+R_1)\sigma(S+R_2).\end{aligned}$$

Ahora, se demostrará la equivalencia requerida en el teorema.

(1) $\Rightarrow$ (2). Suponga que el teorema de $a$-Browder se transfiere desde $T+R_1$ y $S+R_2$ a $(T+R_1)\otimes(S+R_2)$. Entonces, por Lema 4.7 y lo mencionado anteriormente, se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma_{SF_+^-}(T\otimes S) &= \sigma(T+R_1)\sigma_{SF_+^-}(S+R_2)\cup\sigma_{SF_+^-}(T+R_1)\sigma(S+R_2)\\ &= \sigma_a(T+R_1)\sigma_{SF_+^-}(S+R_2)\cup\sigma_{SF_+^-}(T+R_1)\sigma_a(S+R_2)\\ &= \sigma_{SF_+^-}((T+R_1)\otimes(S+R_2))\end{aligned}$$

y

$$E(T\otimes S)=\sigma((T+R_1)\otimes(S+R_2))\setminus\sigma_{SF_+^-}((T+R_1)\otimes(S+R_2)).$$

Así, para concluir esta parte de la demostración solo falta ver que $E(T\otimes S)=E((T+R_1)\otimes(S+R_2))$. Para esto, sea $\lambda\in E(T\otimes S)$. Entonces, existe $\mu\in\sigma(T+R_1)\setminus\sigma_{SF_+^-}(T+R_1)$ y $\nu\in\sigma(S+R_2)\setminus\sigma_{SF_+^-}(S+R_2)$ tales que $\lambda=\mu\nu$. Puesto que $T+R_1$ y $S+R_2$ satisfacen la propiedad $(V_E)$, se sigue que $\mu\in E(T+R_1)$ y $\nu\in E(S+R_2)$. Así, $\lambda=\mu\nu\in\sigma_p(T+R_1)\sigma_p(S+R_2)\subseteq\sigma_p((T+R_1)\otimes(S+R_2))$ y usando el hecho que $\lambda\in\sigma(T\otimes S)=\sigma((T+R_1)\otimes(S+R_2))$, se concluye que $\lambda\in E((T+R_1)\otimes(S+R_2))$. Recíprocamente, si $\lambda\in E((T+R_1)\otimes(S+R_2))$, entonces $\lambda\in\operatorname{iso}\sigma((T+R_1)\otimes(S+R_2))$ y como $\sigma((T+R_1)\otimes(S+R_2))=\sigma(T\otimes S)$, se tiene que $\lambda\in\operatorname{iso}\sigma(T\otimes S)$. Además, dado que $T$ y $S$ son operadores isoloides, $T\otimes S$ es isoloide y se sigue que $\lambda\in E(T\otimes S)$. Por lo tanto, $E((T+R_1)\otimes(S+R_2))=E(T\otimes S)=\sigma((T+R_1)\otimes(S+R_2))\setminus\sigma_{SF_+^-}((T+R_1)\otimes(S+R_2))$ y así, $(T+R_1)\otimes(S+R_2)$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Puesto que la propiedad $(V_E)$ implica el teorema de $a$-Browder, se tiene que $(T+R_1)\otimes(S+R_2)$ satisface el teorema de $a$-Browder. Como $T+R_1$ y $S+R_2$ satisfacen la propiedad $(V_E)$, esto significa que el teorema de $a$-Browder es transmitido desde $T+R_1$ y $S+R_2$ al producto tensorial $(T+R_1)\otimes(S+R_2)$. $\square$

## CONCLUSIONES

En este trabajo, el objetivo principal se centraba en introducir y estudiar una nueva propiedad espectral como una variación de los teoremas tipo Weyl y de Browder para operadores lineales acotados, la cual se denominó propiedad $(V_E)$. Para esto, se dieron caracterizaciones de esta propiedad y se estableció su relación con las propiedades mencionadas en la Sección 2.1 del Capítulo 2. Luego, se demostró que la propiedad $(V_E)$ implica cada una de estas propiedades espectrales, inclusive al clásico teorema de Weyl, por lo que la hace una propiedad más fuerte en un cierto sentido. Seguidamente, se estudió la estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo la suma directa de dos operadores $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$. En este caso, se dió una condición de igualdad entre el espectro puntual de $T$ y el espectro puntual de $S$ para que la propiedad $(V_E)$ se transmitiera desde los operadores $T$ y $S$ a la suma directa $T + S$. También, se caracterizó la propiedad $(V_E)$ para un operador $T$ en términos de su restricción $T_n$ con $n \in \mathbb{N}$. En este sentido, se formuló la hipótesis que 0 no sea un polo del resolvente para garantizar que su restricción $T_n$ satisface la propiedad $(V_E)$ cuando $T$ satisface la propiedad $(V_E)$. Posteriormente, se estudió la estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo perturbaciones, dando algunas condiciones necesarias para garantizar la estabilidad de la referida propiedad. En este caso, se probó que la propiedad $(V_E)$ es estable bajo perturbaciones que conmutan por operadores nilpotentes, de rango finito cuando el operador es isoloide, de Riesz cuando el operador es isoloide y el espectro del operador coincide con el espectro de la suma del operador con la perturbación de Riesz, y algebraico cuando el operador tiene la SVEP en cada punto del espectro de la perturbación algebraica. Por último, se estudió la estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo el producto tensorial, es decir, dados dos operadores $T \in L(X)$, $S \in L(Y)$, se dieron condiciones suficientes a estos operadores para que la propiedad $(V_E)$ se transfiriera desde ellos a su producto tensorial. Como producto de esta investigación realizada, se publicaron tres artículos en revistas especializadas en el área (véase [16, 71, 72]), los cuales sirvieron como base fundamental en la elaboración de esta tesis.

Cabe destacar que cada uno de los objetivos específicos planteados en el proyecto de investigación se cumplieron como se estableció en un principio. Entre los aportes principales que destacaron durante el desarrollo de este trabajo de investigación tenemos:

(1) La caracterización de la propiedad $(V_E)$: Si $T$ tiene SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, entonces $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $E(T) = \Pi_+^0(T)$.

(2) La caracterización de la propiedad $(V_E)$ en términos de suma directa: Las siguientes propiedades son equivalentes:

   (a) $\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)$.

   (b) $T \oplus S$ satisface la propiedad $(V_E)$,

   cualesquiera sean $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ tales que $\sigma_p(T) = \sigma_p(S)$.

(3) La caracterización de la propiedad $(V_E)$ para un operador $T \in L(X)$ en término de su restricción: Para un operador $T \in L(X)$ tal que $0 \notin \Pi(T)$, $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $R(T^n)$ es cerrado y $T_n$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(4) La estabilidad de la propiedad $(V_E)$ dado un operador $T \in L(X)$:

   (a) Para $F \in L(X)$ un operador de rango finito que conmuta con $T$. Si $T$ tiene la SVEP en cada $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, entonces $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T + F$ satisface la propiedad $(V_E)$.

   (b) Para $K \in L(X)$ un operador compacto que conmuta con $T$. Si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$, entonces $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $E(T + K) = \Pi_+^0(T + K)$.

   (c) Para $N \in L(X)$ un operador nilpotente que conmuta con $T$. $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si $T + N$ satisface la propiedad $(V_E)$.

   (d) Para $K \in L(X)$ un operador algebraico que conmuta con $T$.

(I) Si $T^*$ tiene SVEP con $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K)=\emptyset$, entonces $f(T+K)$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(II) Si $T$ tiene SVEP con $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K)=\emptyset$, entonces $f(T^*+K^*)$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(e) Para $K \in L(X)$ un operador algebraico que conmuta con $T$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) \cap \sigma(K) = \emptyset$. Si $T$ satisface la propiedad $(V_E)$ con $\operatorname{iso}\sigma_a(T+K) = \emptyset$ y $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T+K)$, entonces $T+K$ satisface la propiedad $(V_E)$.

(5) La estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo el producto tensorial para operadores $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$: Si $T$ y $S$ son dos operadores isoloid que satisfacen la propiedad $(V_E)$ con $0 \notin \sigma_p(T \otimes S)$, entonces $T \otimes S$ satisface la propiedad $(V_E)$ si y solo si

$$\sigma_{SF_+^-}(T \otimes S) = \sigma(T)\sigma_{SF_+^-}(S) \cup \sigma_{SF_+^-}(T)\sigma(S).$$

**Bibliografía**

[1] P. Aiena. "Fredholm and local spectral theory, with applications to multipliers". Kluwer academic publishers, Dordrecht, 2004.

[2] P. Aiena. Classes of operators satysfying $a$-Weyl's theorem. *Studia Mathematica.* **169** (2005), 105-122.

[3] P. Aiena."Semi-Fredholm operators, perturbation theory and localized SVEP". IVIC, Venezuela, 2007.

[4] P. Aiena. "Fredholm and local spectral theory II with applications to Weyl-type theorems". Springer, Switzerland, 2018.

[5] P. Aiena, E. Aponte and E. Bazan. Weyl type theorems for left and right polaroid operators. *Integral Equations and Operator Theory.* **66** (2010), 1-20.

[6] P. Aiena, M.T. Biondi and C. Carpintero. On Drazin invertibility. *Proceedings of the American Mathematical Society.* **136** (2008), 2839-2848.

[7] P. Aiena, M. T. Biondi and F. Villafañe. Property $(w)$ and perturbations III. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **353** (2009), 205-214.

[8] P. Aiena and C. Carpintero. Single valued extension property and semi-Browder spectra. *Acta Scientiarum Mathematicarum.* **20** (2003), 1027-1040.

[9] P. Aiena, C. Carpintero and E. Rosas. Some characterization of operators satisfying $a$-Browder's theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* **311** (2005), 530-544.

[10] P. Aiena and O. García. Generalized Browder's theorem and SVEP. *Mediterranean Journal of Mathematics.* **4** (2007), 215-228.

[11] P. Aiena, J. Guillén and P. Peña. Property $(w)$ for perturbations of polaroid operators. *Linear Algebra and its Applications.* **428** (2008), 1791-1802.

[12] P. Aiena and L. Miller. On generalized $a$-Browder's theorem. *Studia Mathematica.* **180** (2007), 285-299.

[13] P. Aiena and M.M. Neumann. On the stability of the localized single-valued extension property under commuting perturbations. *Proceedings of the American Mathematical Society.* **141** (2012), nro. 6, 2039-2050.

[14] M. Amouch and M. Berkani. On the property $(gw)$. *Mediterranean Journal of Mathematics.* **5** (2008), 371-378.

[15] E. Aponte, J. Macías, J. Sanabria and J. Soto. Further characterizations of property $(V_{\Pi})$ and some applications. *Proyecciones Journal of Mathematics.* **39** (2020), nro.6, 1445-1466.

[16] E. Aponte, J. Sanabria and L. Vásquez. Perturbation theory for property $(V_E)$ and tensor product. *Mathematics.* **9** (2021), nro. 21, ID: 2775.

[17] A. Arroud and H. Zariouh. Browder-type theorems for direct sums of operators. *Functional Analysis, Approximation and Computation.* **7** (2015), nro.1, 77-84.

[18] M. Berkani. On a class of quasi-Fredholm operators. *Integral Equations and Operator Theory.* **34** (1999), 244-249.

[19] M. Berkani. Restriction of an operator to the range of its powers. *Studia Mathematica.* **140** (2000), nro.2, 163-175.

[20] M. Berkani. Index of $B$-Fredholm operators and gereralization of a Weyl theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society.* **130** (2001), nro. 6, 1717-1723.

[21] M. Berkani. On the equivalence of Weyl and generalized Weyl theorem. *Acta Mathematica Sinica.* **23** (2007), nro. 1, 103-110.

[22] M. Berkani and A. Arroud. Generalized Weyl's theorem and hyponormal operators. *Journal of the Australian Mathematical Society.* **76** (2004), 291-302.

[23] M. Berkani and M. Kachad. New Weyl-type theorems-I. *Functional Analysis, Approximation and Computation.* **4** (2012), nro. 2, 41-47.

[24] M. Berkani and M. Kachad. New Browder and Weyl type theorems. *Bulletin of the Korean Mathematical Society.* **52** (2015), nro. 2, 439-452.

[25] M. Berkani, M. Kachad, H. Zariouh and H. Zguitti. Variations on $a$-Browder-type theorems. *Sarajevo Journal of Mathematics.* **9** (2013), 271-281.

[26] M. Berkani and J. Koliha. Weyl type theorems for bounded linear operators. *Acta Scientiarum Mathematicarum.* **69** (2003), 359-376.

[27] M. Berkani and A. Ouahab. Théorème de l'application spectrale pour le spectre essentiel quasi-Fredholm. *Proceedings of the American Mathematical Society.* **125** (1997), 763-774.

[28] M. Berkani and M. Sarih. On semi $B$-Fredholm operators. *Glasgow Mathematical Journal.* **43** (2001), nro. 3, 457-465.

[29] M. Berkani, M. Sarih and H. Zariouh. Browder-type theorems and SVEP. *Mediterranean Journal of Mathematics.* **8** (2011), 399-409.

[30] M. Berkani and H. Zariouh. Extended Weyl type theorems. *Mathematica Bohemica.* **134** (2009), 369-378.

[31] M. Berkani and H. Zariouh. New extended Weyl type theorems. *Matematički Vesnik.* **62** (2010), 145-154.

[32] M. Berkani and H. Zariouh. Weyl type-theorems for direct sums. *Bulletin of the Korean Mathematical Society.* **49** (2012), nro. 5, 1027-1040.

[33] C. Carpintero, O. García, D. Muñoz, E. Rosas and J. Sanabria. Weyl type theorems and restrictions for bounded linear operators. *Extracta Mathematicae.* **28** (2013), nro. 1, 127-139.

[34] C. Carpintero, D. Muñoz, E. Rosas, J. Sanabria and O. García. Weyl type theorems and restrictions. *Mediterranean Journal of Mathematics.* **11** (2014), nro. 4, 1215-1228.

[35] C. Carpintero, E. Rosas, J. Rodríguez, D. Muñoz and K. Alcalá. Spectral properties and restrictions of bounded linear operators. *Annals of Functional Analysis.* **6** (2015), nro. 2, 173-183.

[36] L. Chen. A note Weyl-type theorems and restrictions. *Annals of Functional Analysis.* **8** (2017), nro. 2, 190-198.

[37] L.A. Coburn. Weyl's theorem for nonnormal operators. *Michigan Mathematical Journal.* **13** (1966), 285-288.

[38] M.P. Drazin. Pseudoinverse in associative rings and semigroups. *The American Mathematical Monthly.* **65** (1958), 506-514.

[39] D.S. Djordjević and S.V. Djordjević. On $a$-Weyl's theorem. *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees.* **44** (2000), 361-369.

[40] S.V. Djordjević and Y.M. Han. Browder's theorems and spectral continuity. *Glasgow Mathematical Journal.* **42** (2000), 479-486.

[41] B.P. Duggal. Tensor products and property $(w)$. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **60** (2011), 23-30.

[42] B.P. Duggal, S.V. Djordjević and C.S. Kubrusly. On the $a$-Browder and $a$-Weyl spectra of tensor products. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **44** (2010), 473-481.

[43] B.P. Duggal and C.S. Kubrusly. Weyl's theorem for direct sums. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.* **44** (2007), 275-290.

[44] J.K. Finch. The single valued extension property on a Banach space. *Pacific Journal of Mathematics.* **58** (1975), 61-69.

[45] E. Fredholm. “Sur une nouvelle méthode pour la résolution du probléme de Dirichlet”. Swedish Academy of Sciences, Stockholm, 1900.

[46] O. García, C. Carpintero, E. Rosas and J. Sanabria. Semi $B$-Fredholm and semi $B$-Weyl spectrum under perturbations. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.* **20** (2014), 39-47.

[47] S. Grabiner. Uniform ascent and descent of bounded operators. *Journal of the Mathematical Society of Japan.* **34** (1982), nro. 2, 317-337.

[48] A. Gupta and N. Kashayap. Property $(Bw)$ and Weyl type theorems. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications.* **3** (2011), 1-7.

[49] R. Harte. “Invertibility and singularity for bounded linear operators”. Wiley, New York, 1988.

[50] R. Harte and W. Lee. Another note on Weyl's theorem. *Transactions of the American Mathematical Society.* **349** (2002), 2115-2124.

[51] H. Heuser. “Functional Analysis”. Marcel Dekker, New York, 1982.

[52] T. Ichinose. Spectral properties of linear operators I. *Transactions of the American Mathematical Society.* **235** (1978), 75-113.

[53] T. Kato. “Perturbation theory for linear operators”. Springer, Berlin, 1966.

[54] J.J. Koliha. Isolated spectral points. *Proceedings of the American Mathematical Society.* **124** (1996), 3417-3424.

[55] C.S. Kubrusly and B.P. Duggal. On Weyl and Browder spectra of tensor products. *Glasgow Mathematical Journal.* **50** (2008), 289-302.

[56] J.P. Labrousse. Les opérateurs quasi Fredholm: Une généralization des opérateurs semi Fredholm. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **29** (1980), nro. 2, 161-258.

[57] D.C. Lay. Spectral analysis using ascent, nullity and defect. *Mathematische Annalen.* **184** (1970), 197-214.

[58] W.Y. Lee and S.H. Lee. On Weyl's theorem II. *Mathematica Japonica.* **43** (1996), 549-553.

[59] V. Müller. "Spectral theory of linear operators and spectral systems in Banach algebras". Birkhäauser Verlag, Berlin, 2003.

[60] M. Oudghiri. $a$-Weyl's theorem and perturbations. *Studia Mathematica.* **173** (2006), 193-201.

[61] V. Rakočević. On a class of operators. *Matematički Vesnik.* **37** (1985), 423-426.

[62] V. Rakočević. Operators obeying $a$-Weyl's theorem. *Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees.* **34** (1989), 915-919.

[63] V. Rakočević. Semi-Browder operators and perturbations. *Studia Mathematica.* **122** (1997), 131-137.

[64] M.H.M. Rashid and T. Prasad. Variations of Weyl type theorems. *Annals of Functional Analysis.* **4** (2013), 40-52.

[65] M.H.M. Rashid and T. Prasad. Property $(Sw)$ for bounded linear operators. *Asian-European Journal of Mathematics.* **8** (2015), nro. 1, 1550012.

[66] F. Riesz. Über lineare Funktionalgleichungen. *Acta Mathematica.* **41** (1918), 71-98.

[67] J. Sanabria. Invertibilidad según Drazin y propiedad de la extensión univaluada, Tesis Doctoral, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 2011.

[68] J. Sanabria, C. Carpintero, J. Rodríguez, E. Rosas and O. García. On new strong versions of Browder type theorems. *Open Mathematics.* **16** (2018), nro. 1, 289-297.

[69] J. Sanabria, C. Carpintero, E. Rosas and O. García. On generalized property $(v)$ for bounded linear operators. *Studia Mathematica.* **212** (2012), 141-154.

[70] J. Sanabria, C. Carpintero, E. Rosas and O. García. On property $(Saw)$ and others spectral properties type Weyl-Browder theorems. *Revista Colombiana de Matemáticas.* **51** (2017), nro. 2, 153-171.

[71] J. Sanabria, L. Vásquez, C. Carpintero, E. Rosas and O. García. On strong variations of Weyl type theorems. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae.* **86** (2017), nro. 2, 345-356.

[72] J. Sanabria, L. Vásquez, C. Carpintero, E. Rosas and O. García. Strong variations of Weyl and Browder type theorems for direct sums and restrictions. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **68** (2019), nro. 1, 153-161.

[73] H. Weyl. Über beschränkte quadratische formen, deren differenz vollstetig ist. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **27** (1909), 373-392.

[74] H. Zariouh. Property $(gz)$ for bounded linear operators. *Matematički Vesnik.* **65** (2013), 94-103.

[75] H. Zariouh. New version of property $(az)$. *Matematički Vesnik.* **66** (2014), 317-322.

[76] H. Zariouh. On the property $(Z_{E_a})$. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **65** (2016), nro. 2, 323-331.

[77] H. Zariouh and H. Zguitti. Variations on Browder's theorem. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae.* **81** (2012), 255-264.

[78] Q. Zeng, Q. Jiang and H. Zhong, Spectra originated from semi $B$-Fredholm theory and commuting perturbations. *Studia Mathematica.* **219** (2013), 1-18.

# ANEXOS

# Anexo 1

**Artículo:** *On strong variations of Weyl type theorems*

**Revista:** Acta Mathematica Universitatis Comenianae.

**Volumen:** LXXXVI.

**Número:** 2.

**Año:** 2017.

**Páginas:** 345-356.

**Autores:** José Sanabria, Luis Vásquez, Carlos Carpintero, Ennis Rosas y Orlando García.

Acta Math. Univ. Comenianae
Vol. LXXXVI, 2 (2017), pp. 345–356


# ON STRONG VARIATIONS OF WEYL TYPE THEOREMS

J. SANABRIA, L. VÁSQUEZ, C. CARPINTERO, E. ROSAS AND O. GARCÍA

Abstract. An operator $T$ acting on a Banach space $X$ satisfies the property $(UW_E)$ if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$, where $\sigma_a(T)$ is the aproximate point spectrum of $T$, $\sigma_{SF_+^-}(T)$ is the upper semi-Weyl spectrum of $T$ and $E(T)$ is the set of all eigenvalues of $T$ that are isolated in the spectrum $\sigma(T)$ of $T$. In this paper, we introduce and study two new spectral properties, namely $(V_E)$ and $(V_{E_a})$, in connection with Weyl type theorems. Among other results, we have that $T$ satisfies property $(V_E)$ if and only if $T$ satisfies property $(UW_E)$ and $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

## 1. Introduction and preliminaries

Throughout this paper, $L(X)$ denotes the algebra of all bounded linear operators acting on an infinite-dimensional complex Banach space $X$. We refer to [**25**] for details about notations and terminologies. However, we give the following notations that will be useful in the sequel:

- Browder spectrum: $\sigma_b(T)$
- Weyl spectrum: $\sigma_W(T)$
- Upper semi-Browder spectrum: $\sigma_{ub}(T)$
- Upper semi-Weyl spectrum: $\sigma_{SF_+^-}(T)$
- Drazin invertible spectrum: $\sigma_D(T)$
- B-Weyl spectrum: $\sigma_{BW}(T)$
- Left Drazin invertible spectrum: $\sigma_{LD}(T)$
- Upper semi-B-Weyl spectrum: $\sigma_{SBF_+^-}(T)$
- approximate point spectrum: $\sigma_a(T)$
- surjectivity spectrum: $\sigma_s(T)$

In this paper, we introduce two new spectral properties of type Weyl theorems, namely, the properties $(V_E)$ and $(V_{E_a})$, respectively. In addition, we establish the precise relationships between these properties and other variants of Weyl's theorem recently introduced in [**8**], [**9**], [**24**], [**25**], [**26**], [**27**] and [**29**].

Received October 21, 2016; revised January 10, 2017.
2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary Primary 47A10, 47A11; Secondary 47A53, 47A55.
*Key words and phrases.* Semi-Fredholm operator; Weyl's theorem; property $(W_E)$; property $(UW_E)$; property $(V_E)$.
Research Partially Suported by Consejo de Investigación UDO.

Recall that an operator $T \in L(X)$ is said to have the *single valued extension property* at $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (abbreviated SVEP at $\lambda_0$) if for every open disc $\mathbb{D}_{\lambda_0} \subseteq \mathbb{C}$ centered at $\lambda_0$, the only analytic function $f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X$ which satisfies the equation

$$(\lambda I - T)f(\lambda) = 0 \qquad \text{for all } \lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0},$$

is $f \equiv 0$ on $\mathbb{D}_{\lambda_0}$ (see [**17**]). The operator $T$ is said to have SVEP if it has SVEP at every point $\lambda \in \mathbb{C}$. Evidently, every $T \in L(X)$ has SVEP at each point of the resolvent set $\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Moreover, $T$ has SVEP at every point of the boundary $\partial\sigma(T)$ of the spectrum. In particular, $T$ has SVEP at every isolated point of the spectrum. Note that (see [**1**, Theorem 3.8])

$$p(\lambda I - T) < \infty \quad \Longrightarrow \quad T \text{ has SVEP at} \lambda, \tag{1}$$

and dually,

$$q(\lambda I - T) < \infty \quad \Longrightarrow \quad T^* \text{ has SVEP at } \lambda. \tag{2}$$

It is easily seen from definition of localized SVEP that

$$\lambda \notin \operatorname{acc} \sigma_a(T) \quad \Longrightarrow \quad T \text{ has SVEP at } \lambda, \tag{3}$$

where $\operatorname{acc} K$ means the set of all accumulation points of $K \subseteq \mathbb{C}$, and

$$\lambda \notin \operatorname{acc} \sigma_s(T) \quad \Longrightarrow \quad T^* \text{ has SVEP at } \lambda. \tag{4}$$

**Remark 1.1.** If $\lambda I - T$ is a semi $B$-Fredholm operator, then the implications (1)–(4) are equivalences (see [**2**]).

**Lemma 1.2.** ([**3**, Lemma 2.4]) *Let $T \in L(X)$. Then*
(i) *$T$ is upper semi $B$-Fredholm and $\alpha(T) < \infty$ if and only if $T \in \Phi_+(X)$.*
(ii) *$T$ is lower semi $B$-Fredholm and $\beta(T) < \infty$ if and only if $T \in \Phi_-(X)$.*

Denote by $\operatorname{iso} K$, the set of all isolated points of $K \subseteq \mathbb{C}$. If $T \in L(X)$, define

$$\begin{aligned} E^0(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\ E^0_a(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_a(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\ E(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}, \\ E_a(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso} \sigma_a(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}. \end{aligned}$$

Also, define

$$\begin{aligned} \Pi^0(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_b(T), \qquad & \Pi^0_a(T) &= \sigma_a(T) \setminus \sigma_{ub}(T), \\ \Pi(T) &= \sigma(T) \setminus \sigma_D(T), \qquad & \Pi_a(T) &= \sigma_a(T) \setminus \sigma_{LD}(T). \end{aligned}$$

Let $T \in L(X)$. Following Coburn [**15**], $T$ is said to satisfy *Weyl's theorem*, in symbols $(\mathcal{W})$, if $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E^0(T)$. Following Rakočević [**21**], $T$ is said to satisfy *a-Weyl's theorem*, in symbols $(a\mathcal{W})$, if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0_a(T)$. According to Berkani and Koliha [**11**], $T$ is said to satisfy *generalized Weyl's theorem*, in symbols $(g\mathcal{W})$, if $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$. Similarly, $T$ is said to satisfy *generalized a-Weyl's theorem*, in symbol $(ga\mathcal{W})$, if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T)$.

Now, we describe several spectral properties introduced recently in [**14**], [**24**], [**25**], [**26**] and [**27**].

**Definition 1.3.** An operator $T \in L(X)$ is said to have:

(i) *property* $(gaw)$ [**14**] if $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E_a(T)$.
(ii) *property* $(z)$ [**27**] if $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a^0(T)$.
(iii) *property* $(gz)$ [**27**] if $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T)$.
(iv) *property* $(v)$ [**25**] if $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$.
(v) *property* $(gv)$ [**25**] if $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$.
(vi) *property* $(Sw)$ [**24**] if $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T)$.
(vii) *property* $(Saw)$ [**26**] if $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$.

Property $(gv)$ (resp., $(v)$) is also called property $(gt)$ (resp., $(t)$) in [**22**], and property $(gh)$ (resp., $(h)$) in [**28**]. It was proved in [**25**, Corollary 2.12], that property $(gv)$ (resp., $(v)$) is equivalent to property $(gz)$ (resp., $(z)$). Also, it was proved in [**26**, Corollary 2.9], that properties $(Sw)$ and $(Saw)$ are equivalent.

## 2. Properties $(V_E)$ and $(V_{E_a})$.

According to [**8**], $T \in L(X)$ has *property* $(W_E)$ (resp., *property* $(UW_{E_a})$) if $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E(T)$ (resp. $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$). It was shown in [**8**, Theorem 2.3] (resp., [**8**, Theorem 3.5]) that property $(W_E)$ (resp. $(UW_{E_a})$) implies generalized Weyl's theorem (resp., property $(W_E)$) but not conversely. Following to [**9**], an operator $T \in L(X)$ is said to have *property* $(UW_E)$ if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$. It was shown in [**9**, Theorem 3.5] that property $(UW_E)$ implies property $(W_E)$ but not conversely. Also in [**9**], it is shown that properties $(UW_{E_a})$ and $(UW_E)$ are independient. According to [**29**], $T \in L(X)$ has *property* $(Z_{E_a})$ if $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E_a(T)$. It was proved in [**29**, Corollary 2.5] that property $(Z_{E_a})$ also implies property $(W_E)$. In this section, we introduce and study two equivalent spectral properties that are stronger than the properties $(UW_{E_a})$, $(UW_E)$ and $(Z_{E_a})$.

**Definition 2.1.** An operator $T \in L(X)$ is said to have *property* $(V_E)$ if $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$.

**Example 2.2.** 1. Let $L$ be the unilateral left shift operator on $\ell^2(\mathbb{N})$. It is well known that $\sigma(L) = \sigma_{SF_+^-}(L) = \mathbf{D}(0,1)$, the closed unit disc on $\mathbb{C}$ and $E(L) = \emptyset$. Therefore, $\sigma(L) \setminus \sigma_{SF_+^-}(L) = E(L)$, and so $L$ satisfies property $(V_E)$.

2. Consider the Volterra operator $V$ on the Banach space $C[0,1]$ defined by $V(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ for all $f \in C[0,1]$. Note that $V$ is injective and quasinilpotent. Thus, $\sigma(V) = \{0\}$, $\alpha(V) = 0$ and hence $E(V) = \emptyset$. Since the range $R(V)$ is not closed, then $\sigma_{SF_+^-}(V) = \{0\}$. Therefore, $\sigma(V) \setminus \sigma_{SF_+^-}(V) = E(V)$, that means $V$ has property $(V_E)$.

**Theorem 2.3.** *For $T \in L(X)$, the following statements are equivalent:*

(i) *$T$ has property $(V_E)$,*
(ii) *$T$ has property $(UW_E)$ and $\sigma(T) = \sigma_a(T)$,*

(iii) *$T$ has property $(UW_{E_a})$ and $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Suppose that $T$ satisfies property $(V_E)$ and let $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Since $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$, we have $\lambda \in E(T)$ and so, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E(T)$.

To show the opposite inclusion $E(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$, let $\lambda \in E(T)$. Then, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(\mathrm{T})$ and $\alpha(\lambda I - T) > 0$, so $\lambda I - T$ is not bounded below and hence, $\lambda \in \sigma_a(T)$. As $T$ satisfies property $(V_E)$ and $\lambda \in E(T)$, it follows that $\lambda I - T$ is upper semi-Weyl. Therefore, $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Thus, $E(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ and $T$ satisfies property $(UW_E)$. Consequently, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ and $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$. Therefore, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ and $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Suppose that $T$ satisfies property $(UW_E)$ and $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Then, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$. Thus, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ and $T$ satisfies property $(V_E)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Obvious. □

The next example shows that, in general, property $(UW_{E_a})$ does not imply property $(V_E)$.

**Example 2.4.** Let $R$ be the unilateral right shift operator on $\ell^2(\mathbb{N})$ and $U \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ be defined by

$$U(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_2, x_3, \cdots).$$

Define an operator $T$ on $X = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ by $T = R \oplus U$. Then, $\sigma(T) = \mathbf{D}(0,1)$, the closed unit disc on $\mathbb{C}$, $\sigma_a(T) = \Gamma \cup \{0\}$, where $\Gamma$ denotes the unit circle of $\mathbb{C}$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \Gamma$. Moreover, $E_a(T) = \{0\}$ and $E(T) = \emptyset$. Therefore, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$ and $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T)$. Thus, $T$ satisfies properties $(UW_{E_a})$, but $T$ does not satisfy property $(V_E)$.

The next example shows that, in general, property $(UW_E)$ does not imply property $(V_E)$.

**Example 2.5.** Let $R$ be the unilateral right shift operator on $\ell^2(\mathbb{N})$. Define an operator $T$ on $X = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ by $T = R \oplus 0$. Then, $\sigma(T) = \mathbf{D}(0,1)$, $\sigma_a(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \Gamma \cup \{0\}$ and $E(T) = \emptyset$. Therefore, $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ and $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T)$. Thus, $T$ satisfies property $(UW_E)$, but $T$ does not satisfy property $(V_E)$.

The next result gives the relationship between the properties $(V_E)$ and $(W_E)$.

**Theorem 2.6.** *Let $T \in L(X)$. Then $T$ has property $(V_E)$ if and only if $T$ has property $(W_E)$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$.*

*Proof.* Sufficiency: Suppose that $T$ satisfies property $(V_E)$, then by Theorem 2.3, $T$ satisfies property $(UW_E)$. Property $(UW_E)$ implies by [**9**, Theorem 3.2] that

$T$ satisfies property $(W_E)$. Consequently, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ and $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E(T)$. Therefore, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$.

Necessity: Suppose that $T$ satisfies property $(W_E)$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$. Then, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E(T)$, and so $T$ satisfies property $(V_E)$. $\square$

The next example shows that, in general, property $(W_E)$ does not imply property $(V_E)$.

**Example 2.7.** Let $Q$ be defined on $\ell^1(\mathbb{N})$ by

$$Q(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_{k-1} x_{k-1}, \dots),$$

where $(\alpha_i)$ is a sequence of complex numbers such that $0 < |\alpha_i| \leq 1$ and $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty$. It follows from [**11**, Example 3.12], that

$$\overline{R(Q^n)} \neq R(Q^n), \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Define the operator $T$ on $X = \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^1(\mathbb{N})$ by $T = R \oplus 0 \oplus Q$, where $R$ is the unilateral right shift operator. Then, $\sigma(T) = \sigma_W(T) = \mathbf{D}(0,1)$, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \Gamma \cup \{0\}$ and $E(T) = \emptyset$. We then have,

$$\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E(T), \qquad\qquad \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T).$$

Hence, $T$ satisfies property $(W_E)$, but $T$ does not satisfy property $(V_E)$.

The next result gives the relationship between the property $(V_E)$ and generalized Weyl's theorem.

**Theorem 2.8.** *Let $T \in L(X)$. Then $T$ has property $(V_E)$ if and only if $T$ satisfies generalized Weyl's theorem and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$.*

*Proof.* Sufficiency: Property $(V_E)$ implies by Theorem 2.6, that $T$ satisfies property $(W_E)$, and property $(W_E)$ implies by [**8**, Theorem 2.3], that $T$ satisfies generalized Weyl's theorem. Consequently, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ and $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$. Therefore, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$.

Necessity: Assume that $T$ satisfies generalized Weyl's theorem and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$. Then, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$, that means $T$ satisfies property $(V_E)$. $\square$

**Remark 2.9.** From Theorem 2.8, property $(V_E)$ implies generalized Weyl's theorem. However, the converse is not true in general. Consider the operator $T$ in Example 2.7, since $T$ satisfies property $(W_E)$, then it also satisfies generalized Weyl's theorem, but does not satisfy property $(V_E)$.

**Theorem 2.10.** *Suppose that $T \in L(X)$ has property $(V_E)$. Then:*

(i) *$T$ has property $(Z_{E_a})$,*
(ii) *$E_a(T) = E_a^0(T) = \Pi_a^0(T) = \Pi_a(T) = \Pi^0(T) = \Pi(T) = E^0(T) = E(T)$.*

*Proof.* (i) Property $(V_E)$ implies by Theorem 2.3, that $\sigma(T) = \sigma_a(T)$, and also implies by Theorem 2.6 that $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$. Hence, $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) = E_a(T)$ and so $T$ satisfies property $(Z_{E_a})$.

(ii) Follows from (i) and [**29**, Lemma 2.3]. □

**Example 2.11.** Let $R$ be the unilateral right shift operator defined on $\ell^2(\mathbb{N})$. Since $\sigma(R) = \sigma_W(R) = \mathbf{D}(0,1)$, $E(R) = E_a(R) = \emptyset$ and $\sigma_{SF_+^-}(R) = \Gamma$, then $R$ satisfies property $(Z_{E_a})$, but does not satisfy property $(V_E)$.

**Theorem 2.12.** *For $T \in L(X)$, the following statements are equivalent:*

(i) *$T$ has property $(V_E)$,*
(ii) *$T$ has property $(v)$ and $E^0(T) = E(T)$,*
(iii) *$T$ has property $(z)$ and $E^0(T) = E(T)$,*
(iv) *$T$ has property $(gv)$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$.*
(v) *$T$ has property $(gz)$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$.*

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Suppose that $T$ satisfies property $(V_E)$. Then by Theorem 2.10, $E^0(T) = E(T)$, and hence $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) = E^0(T)$, that means $T$ has property $(v)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). If $T$ satisfies property $(v)$ and $E^0(T) = E(T)$, then $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T) = E(T)$ and $T$ satisfies property $(V_E)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). The equivalence between the properties $(z)$ and $(v)$ have been proved in [**25**, Corollary 2.12].

(i) $\Rightarrow$ (iv). Assume that $T$ satisfies property $(V_E)$. By Theorem 2.3, $T$ satisfies property $(UW_{E_a})$. Property $(UW_{E_a})$ implies by [**8**, Theorem 3.2] that $T$ satisfies generalized $a$-Weyl's theorem and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Consequently, $E(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$, and hence $T$ satisfies property $(gv)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Suppose that $T$ satisfies property $(gv)$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Then $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$, and hence $T$ satisfies property $(V_E)$.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v). The equivalence between the properties $(gz)$ and $(gv)$ have been proved in [**25**, Corollary 2.12]. □

The following example shows that, in general, property $(gv)$ (resp. $(v)$) does not imply property $(V_E)$.

**Example 2.13.** Consider the operator $T = 0$ defined on the Hilbert space $\ell^2(\mathbb{N})$. Then, $\sigma(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$, $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \emptyset$ and $E(T) = \{0\}$. Therefore, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T)$ and $T$ does not satisfy property $(V_E)$. On the other hand, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$, that means $T$ satisfies property $(gv)$, in consequence $T$ also satisfies property $(v)$.

The next result gives the relationship between the properties $(V_E)$ and $(Sw)$.

**Theorem 2.14.** *For $T \in L(X)$, the following statements are equivalent:*

(i) *$T$ has property $(V_E)$,*
(ii) *$T$ has property $(Sw)$ and $E^0(T) = E(T)$,*
(iii) *$T$ has property $(Saw)$ and $E^0(T) = E(T)$.*

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Assume that $T$ satisfies property $(V_E)$. Then by Theorem 2.10, $E(T) = E^0(T)$, and by Theorem 2.12, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Therefore $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) = E^0(T)$, that means $T$ satisfies property $(Sw)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). If $T$ satisfies property $(Sw)$ and $E(T) = E^0(T)$, then $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T) = E(T)$. This shows $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E(T)$.

To show the opposite inclusion $E(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$, let $\lambda \in E(T)$. Since $E(T) = E^0(T)$, then $\lambda \in E^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T)$. Thus $\lambda I - T$ is an upper semi $B$-Fredholm operator and $\alpha(\lambda I - T) < \infty$. By Lemma 1.2, $\lambda I - T$ is upper semi-Fredholm, and hence upper semi-Weyl. Therefore, $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ and consequently $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). The equivalence between the properties $(z)$ and $(v)$ have been proved in [**26**, Corollary 2.9]. $\square$

The following example shows that, in general, property $(Sw)$ does not imply property $(V_E)$.

**Example 2.15.** Consider the operator $Q$ defined in Example 2.7 and define an operator $T$ on $X = \ell^1(\mathbb{N}) \oplus \ell^1(\mathbb{N})$ by $T = Q \oplus 0$. Then, $N(T) = \{0\} \oplus \ell^1(\mathbb{N})$, $\sigma(T) = \{0\}$, $E(T) = \{0\}$, $E^0(T) = \emptyset$. Since $R(T^n) = R(Q^n) \oplus \{0\}$, $R(T^n)$ is not closed for any $n \in \mathbb{N}$; in consequence $T$ is not an upper semi $B$-Weyl (resp. upper semi-Weyl) operator and $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \{0\}$ (resp. $\sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$). Then, we have

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T), \qquad \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \neq E(T).$$

Hence, $T$ satisfies property $(Sw)$, but $T$ does not satisfy property $(V_E)$.

The next result gives the relationship between property $(V_E)$ and Weyl's theorem.

**Theorem 2.16.** *Let $T \in L(X)$. Then $T$ has property $(V_E)$ if and only if $T$ satisfies Weyl's theorem and $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) \setminus E^0(T)$.*

*Proof.* Sufficiency: Suppose that $T$ satisfies property $(V_E)$. It follows by Theorem 2.8, $T$ satisfies generalized Weyl's theorem. Since generalized Weyl's theorem implies Weyl's theorem, it is enough to show that $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) \setminus E^0(T)$. By Theorems 2.6 and 2.10, $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$ and $E(T) = E^0(T)$, respectively. Thus, we conclude that $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \emptyset = E(T) \setminus E^0(T)$.

Necessity: Assume that $T$ satisfies Weyl's theorem and $\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) \setminus E^0(T)$. Since $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E^0(T)$, $\sigma(T) = E^0(T) \cup \sigma_W(T)$ and $E^0(T) \cap \sigma_W(T) = \emptyset$. Thus,

$$\begin{aligned}\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) &= [E^0(T) \cup \sigma_W(T)] \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)\\ &= E^0(T) \cup [\sigma_W(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)]\\ &= E^0(T) \cup [E(T) \setminus E^0(T)] = E(T)\end{aligned}$$

and hence $T$ satisfies property $(V_E)$. □

**Remark 2.17.** By Theorem 2.16, property $(V_E)$ implies Weyl's theorem. However, the converse is not true in general. Consider the operator $T$ in Remark 2.9, since $T$ satisfies generalized Weyl's theorem, then it also satisfies Weyl's theorem, but does not satisfy property $(V_E)$.

**Definition 2.18.** An operator $T \in L(X)$ is said to have *property* $(V_{E_a})$ if $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$.

**Theorem 2.19.** *Let $T \in L(X)$. Then $T$ has property $(V_{E_a})$ if and only if $T$ has property $(UW_{E_a})$ and $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.*

*Proof.* Sufficiency: Assume that $T$ satisfies property $(V_{E_a})$. Then

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T) \text{ and so } \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E_a(T).$$

To show the opposite inclusion $E_a(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$, let $\lambda \in E_a(T)$. Then, $\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{T})$ and hence $\lambda \in \sigma_a(T)$. As $T$ satisfies property $(V_{E_a})$ and $\lambda \in E_a(T)$, it follows that $\lambda I - T$ is upper semi-Weyl. Therefore, $\lambda \in \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. Thus, $E_a(T) \subseteq \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ and $T$ satisfies property $(UW_{E_a})$. Consequently, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$ and $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$. Therefore, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$ and $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

Necessity: Suppose that $T$ satisfies property $(UW_{E_a})$ and $\sigma(T) = \sigma_a(T)$. Then, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$, in consequence $T$ satisfies property $(V_{E_a})$. □

**Corollary 2.20.** *Let $T \in L(X)$. Then $T$ has property $(V_{E_a})$ if and only if $T$ has property $(V_E)$.*

*Proof.* Sufficiency: Suppose that $T$ satisfies property $(V_{E_a})$. By Theorem 2.19, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$, it follows that $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T) = E(T)$, hence $T$ satisfies property $(V_E)$.

Necessity: Assume that $T$ satisfies property $(V_E)$. By Theorem 2.3, $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ and so, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T) = E_a(T)$. Therefore, $T$ satisfies property $(V_{E_a})$. □

The next result gives the relationship between property $(V_{E_a})$ (or equivalently $(V_E)$) and property $(Z_{E_a})$.

**Theorem 2.21.** *Let $T \in L(X)$. Then $T$ has property $(V_{E_a})$ if and only if $T$ has property $(Z_{E_a})$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$.*

*Proof.* Sufficiency: Assume that $T$ satisfies property $(V_{E_a})$. By Corollary 2.20, property $(V_{E_a})$ is equivalent to property $(V_E)$, and by Theorem 2.6, property $(V_E)$ implies that $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$. Consequently, $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$. Therefore, $T$ satisfies property $(Z_{E_a})$.

Necessity: Assume that $T$ satisfies property $(Z_{E_a})$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$. Then, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E_a(T)$, that means $T$ satisfies property $(V_{E_a})$. $\square$

Similar to Theorem 2.21, we have the following result.

**Theorem 2.22.** *Let $T \in L(X)$. Then $T$ has property $(V_{E_a})$ if and only if $T$ has property $(gaw)$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T)$.*

Recall that $T \in L(X)$ is said to satisfy *a-Browder's theorem* (resp., *generalized a-Browder's theorem*) if $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T)$ (resp., $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a(T)$). From [**7**, Theorem 2.2] (see also [**4**, Theorem 3.2(ii)]), $a$-Browder's theorem and generalized $a$-Browder's theorem are equivalent. It is well known that $a$-Browder's theorem for $T$ implies Browder's theorem for $T$, i.e., $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \Pi^0(T)$. Also by [**7**, Theorem 2.1], Browder's theorem for $T$ is equivalent to generalized Browder's theorem for $T$, i.e. $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \Pi(T)$.

For $T \in L(X)$, define $\Pi_+^0(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T)$. The following theorem describes the relationship between $a$-Browder's theorem and property $(V_E)$.

**Theorem 2.23.** *For $T \in L(X)$, the following statements are equivalent:*
(i) *$T$ has property $(V_E)$,*
(ii) *$T$ satisfies a-Browder's theorem and $\Pi_+^0(T) = E(T)$.*

*Proof.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Assume that $T$ satisfies property $(V_E)$. Then $E(T) = E^0(T)$ and $T$ satisfies property $(v)$ by Theorems 2.10 and 2.12, respectively. Property $(v)$ implies by [**25**, Theorem 2.17] that $T$ satisfies $a$-Browder's theorem and $\Pi_+^0(T) = E^0(T)$. Consequently, $T$ satisfies $a$-Browder's theorem and $\Pi_+^0(T) = E^0(T) = E(T)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) If $T$ satisfies $a$-Browder's theorem and $\Pi_+^0(T) = E(T)$, then $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = \Pi_+^0(T) = E(T)$. Therefore, $T$ satisfies property $(V_E)$. $\square$

**Remark 2.24.** By Theorem 2.23, property $(V_E)$ implies $a$-Browder's theorem. However, the converse is not true in general. Indeed, the operator $T$ defined in Example 2.15 does not satisfy property $(V_E)$, but $\sigma_a(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\}$ and $\Pi_a^0(T) = \emptyset$, it follows that $T$ satisfies $a$-Browder's theorem.

**Corollary 2.25.** *If $T \in L(X)$ has SVEP at each $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$, then $T$ has property $(V_E)$ if and only if $E(T) = \Pi_+^0(T)$.*

*Proof.* By Theorem [**5**, Teorema 2.3], the hypothesis $T$ has SVEP at each $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$ is equivalent to $T$ satisfies $a$-Browder's theorem. Therefore, if $E(T) = \Pi_+^0(T)$, then $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = \Pi_+^0(T) = E(T)$. □

**Remark 2.26.** It was proved in [**12**, Lemma 2.1], that if $T^*$ has SVEP at every $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$ (resp., $T$ has SVEP at every $\lambda \notin \sigma_{SF_-^+}(T)$), then $\sigma_W(T) = \sigma_{SF_+^-}(T)$ and $\sigma_a(T) = \sigma(T)$ (resp., $\sigma_W(T^*) = \sigma_{SF_+^-}(T^*)$ and $\sigma_a(T^*) = \sigma(T^*)$). Under the above results, clearly we have that if $T^*$ has SVEP at every $\lambda \notin \sigma_{SF_+^-}(T)$ (resp. $T$ has SVEP at every $\lambda \notin \sigma_{SF_-^+}(T)$), then the properties $(W_E)$, $(UW_E)$, $(UW_{E_a})$, $(Z_{E_a})$, $(V_E)$ and $(V_{E_a})$ are equivalent for $T$ (resp. for $T^*$).

In the following table summarizes the meaning of various theorems and properties that are related with property $(V_E)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(W_E)$ [**8**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E(T)$ | $(W_\Pi)$ [**9**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \Pi(T)$ |
| $\mathcal{W}$ [**15**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E^0(T)$ | $\mathcal{B}$ [**19**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \Pi^0(T)$ |
| $(Z_{E_a})$ [**29**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E_a(T)$ | $(Z_{\Pi_a})$ [**29**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \Pi_a(T)$ |
| $(aw)$ [**14**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = E_a^0(T)$ | $(ab)$ [**14**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_W(T) = \Pi_a^0(T)$ |
| $g\mathcal{W}$ [**11**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E(T)$ | $g\mathcal{B}$ [**11**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \Pi(T)$ |
| $(Bw)$ [**18**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E^0(T)$ | $(Bb)$ [**23**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \Pi^0(T)$ |
| $(gaw)$ [**14**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E_a(T)$ | $(gab)$ [**14**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \Pi_a(T)$ |
| $(Baw)$ [**30**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = E_a^0(T)$ | $(Bab)$ [**30**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \Pi_a^0(T)$ |
| $(v)$ [**25**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$ | $(ah)$ [**28**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi^0(T)$ |
| $(z)$ [**27**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a^0(T)$ | $(az)$ [**27**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T)$ |
| $(gv)$ [**25**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$ | $(gah)$ [**28**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi(T)$ |
| $(Sw)$ [**24**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T)$ | $(Sb)$ [**24**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi^0(T)$ |
| $(gz)$ [**27**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T)$ | $(gaz)$ [**27**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a(T)$ |
| $(Saw)$ [**26**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$ | $(Sab)$ [**26**] | $\sigma(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T)$ |
| $(UW_E)$ [**9**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ | $(UW_\Pi)$ [**9**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi(T)$ |
| $(w)$ [**20**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$ | $(b)$ [**13**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi^0(T)$ |
| $(UW_{E_a})$ [**8**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$ | $(UW_{\Pi_a})$ [**9**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi_a(T)$ |
| $a\mathcal{W}$ [**21**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E_a^0(T)$ | $a\mathcal{B}$ [**16**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T)$ |
| $(gw)$ [**6**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E(T)$ | $(gb)$ [**13**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi(T)$ |
| $(Bgw)$ [**23**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T)$ | $(Bgb)$ [**23**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi^0(T)$ |
| $ga\mathcal{W}$ [**11**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a(T)$ | $ga\mathcal{B}$ [**11**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a(T)$ |
| $(SBaw)$ [**10**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$ | $(SBab)$ [**10**] | $\sigma_a(T) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T)$ |

**Table 1.**

**Theorem 2.27.** *Suppose that $T \in L(X)$ has property $(V_E)$. Then:*

(i) $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T) = \sigma_{LD}(T) = \sigma_D(T) = \sigma_{ub}(T) = \sigma_b(T)$ *and* $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

(ii) *All properties given in Table 1 are equivalent, and $T$ satisfies each of these properties.*

*Proof.* (i) By Theorem 2.3, the equality $\sigma(T) = \sigma_a(T)$ holds. The equalities $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_{BW}(T) = \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma_W(T)$ follows from Theorems 2.6, 2.8 and 2.12. Since the inclusions $\sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq \sigma_{LD}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T) \subseteq \sigma_b(T)$ and $\sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq \sigma_{LD}(T) \subseteq \sigma_D(T) \subseteq \sigma_b(T)$ hold, it is sufficient to prove $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_b(T)$. Indeed, since $T$ has property $(V_E)$, by Theorem 2.23, $T$ satisfies generalized $a$-Browder's theorem or equivalently $a$-Browder's theorem. As $a$-Browder's theorem implies Browder's theorem, it follows that $\sigma_{SBF_+^-}(T) = \sigma_W(T) = \sigma_b(T)$,

(ii) By Theorem 2.3, $T$ satisfies property $(UW_E)$, and the equivalence between all properties follows from (i) and Theorem 2.10. □

## References


**1.** Aiena P., *Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers*, Kluwer, 2004.

**2.** Aiena P., *Quasi-Fredholm operators and localized SVEP*, Acta Sci. Math. (Szeged) **73** (2007), 251–263.

**3.** Aiena P., Aponte E. and Balzan E., *Weyl type Theorems for left and right polaroid operators*, Integr. Equ. Oper. Theory **66** (2010), 1–20.

**4.** Aiena P., Biondi M. T. and Carpintero C., *On Drazin invertibility*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 2839–2848.

**5.** Aiena P., Carpintero C. and Rosas E., *Some characterization of operators satisfying a-Browder's theorem*, J. Math. Anal. Appl. **311** (2005), 530–544.

**6.** M. Amouch and M. Berkani, *On the property (gw)*, Mediterr. J. Math. 5 (2008), 371–378.

**7.** Amouch M. and Zguitti H., *On the equivalence of Browder's theorem and generalized Browder's theorem*, Glasgow Math. J. **48** (2006), 179–185.

**8.** Berkani M. and Kachad M., *New Weyl-type Theorems - I*, Funct. Anal. Approx. Comput. **4(2)** (2012), 41–47.

**9.** Berkani M. and Kachad M., *New Browder and Weyl type theorems*, Bull. Korean Math. Soc. **52(2)** (2015), 439–452.

**10.** Berkani M., Kachad M., Zariouh H. and Zguitti H., *Variations on a-Browder-type theorems*, Sarajevo J. Math. **9** (2013), 271–281.

**11.** Berkani M. and Koliha J., *Weyl type theorems for bounded linear operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 359–376.

**12.** Berkani M., Sarih M. and Zariouh H., *Browder-type theorems and SVEP*, Mediterr. J. Math. **8** (2011), 399–409.

**13.** Berkani M. and Zariouh H., *Extended Weyl type theorems*, Math. Bohemica **134** (2009), 369–378.

**14.** Berkani M. and Zariouh H., *New extended Weyl type theorems*, Mat. Vesnik **62** (2010), 145–154.

**15.** Coburn L. A., *Weyl's theorem for nonnormal operators*, Michigan Math. J. **13** (1966), 285–288.

**16.** Djordjević S. V. and Han Y. M., *Browder's theorems and spectral continuity*, Glasgow Math. J. **42** (2000), 479–486.

**17.** Finch J. K., *The single valued extension property on a Banach space*, Pacific J. Math. **58** (1975), 61–69.

**18.** A. Gupta and N. Kashayap, *Property* $(Bw)$ *and Weyl type theorems*, Bull. Math. Anal. Appl. **3** (2011), 1–7.

**19.** Harte R. and Lee W. Y., *Another note on Weyls theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2115-2124.

**20.** Rakočević V., *On a class of operators*, Mat. Vesnik **37** (1985), 423–426.

**21.** Rakočević V., *Operators obeying a-Weyl's theorem*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **34** (1989), 915–919.

**22.** Rashid M. H. M., *Properties* $(t)$ *and* $(gt)$ *for bounded linear operators*, Mediterr. J. Math. **11** (2014), 729–744.

**23.** Rashid M. H. M. and Prasad T., *Variations of Weyl type theorems*, Ann Funct. Anal. Math. **4** (2013), 40-52.

**24.** Rashid M. H. M. and Prasad T., *Property* $(Sw)$ *for bounded linear operators*, Asia-European J. Math. **8** (2015), 14 pages.

**25.** Sanabria J., Carpintero C., Rosas E. and García O., *On generalized property* $(v)$ *for bounded linear operators*, Studia Math. **212** (2012), 141–154.

**26.** Sanabria J., Carpintero C., Rosas E. and García O., *On property* $(Saw)$ *and other spectral properties type Weyl-Browder theorems*, Submitted.

**27.** Zariouh H., *Property* $(gz)$ *for bounded linear operators*, Mat. Vesnik **65** (2013), 94–103.

**28.** Zariouh H., *New version of property* $(az)$, Mat. Vesnik **66** (2014), 317–322.

**29.** Zariouh H., *On the property* $(Z_{E_a})$, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser **65(2)** (2016) 323–331.

**30.** Zariouh H. and Zguitti H., *Variations on Browder's theorem*, Acta Math. Univ. Comenianae **81** (2012), 255–264.



J. Sanabria, L. Vásquez, C. Carpintero, E. Rosas and O. García, Departamento de Matemáticas, Escuela de Ciencias, Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela, *e-mail*: `jesanabri@gmail.com (José Sanabria), eligiovm85@gmail.com (Luís Vásquez), carpintero.carlos@gmail.com (Carlos Carpintero), ennisrafael@gmail.com (Ennis Rosas), ogarciam554@gmail.com (Orlando García)`

# Anexo 2

**Artículo:** *Strong variations of Weyl and Browder type theorems for direct sums and restrictions.*

**Revista:** Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

**Volumen:** 68.

**Número:** 1.

**Año:** 2019.

**Páginas:** 153-161.

**Autores:** José Sanabria, Luis Vásquez, Carlos Carpintero, Ennis Rosas y Orlando García.

Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser
https://doi.org/10.1007/s12215-018-0348-8

# Strong variations of Weyl and Browder type theorems for direct sums and restrictions

**J. Sanabria**[1,2] · **L. Vásquez**[1] · **C. Carpintero**[1,3] · **E. Rosas**[1,4] · **O. García**[1,5]

Received: 23 August 2017 / Accepted: 27 April 2018


**Abstract** In this paper, we study the stability under direct sums and restrictions of some strong variations of Weyl and Browder type theorems recently introduced in Rashid and Prasad (Asia-Eur J Math 8:14, 2015. https://doi.org/10.1142/S1793557115500126), Sanabria et al. (Rev Colomb Mat 51(2):153–171, 2017a, Acta Math Univ Comen (NS) 86(2):345–356, 2017b, Open Math 16(1):289–297, 2018).

**Keywords** Semi-Fredholm operator · Property $(V_E)$ · Direct sums · Restrictions

**Mathematics Subject Classification** Primary 47A10 · 47A11; Secondary 47A53 · 47A55

---

Research Partially Suported by Consejo de Investigación UDO.

✉ J. Sanabria
jesanabri@gmail.com

L. Vásquez
eligiovm85@gmail.com

C. Carpintero
carpintero.carlos@gmail.com

E. Rosas
ennisrafael@gmail.com; erosas@cuc.edu.co

O. García
ogarciam554@gmail.com

1 Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná, Venezuela

2 Facultad de Ciencias Básicas, Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia

3 Vicerrectoría de Investigación, Universidad Autónoma del Caribe, Barranquilla, Colombia

4 Departamento de Ciencias Naturales y Exactas, Universidad de la Costa, Barranquilla, Colombia

5 Departamento de Ciencias Básicas, Ingeniería y Arquitectura, Corporación Universitaria del Caribe-CECAR, Sincelejo, Colombia

Published online: 07 May 2018

## 1 Introduction and preliminaries

Throughout this paper, $L(X)$ denotes the algebra of all bounded linear operators acting on an infinite-dimensional complex Banach space $X$. Given $n \in \mathbb{N}$, we denote by $T_n$ the restriction of $T \in L(X)$ on the subspace $R(T^n) = T^n(X)$. The study of the Weyl and Browder type theorems for the orthogonal direct sum $T \oplus S$, where $T, S \in L(X)$, have been considered by several authors, among which we can mention Duggal and Kubrusly [14], Berkani et al. [7,8], Gupta and Kashyap [16], Arroud and Zariouh [4], Liu [18]. On the other hand, the study of the existent relations between the Weyl and Browder type theorems for $T$ and the respective theorems for $T_n$ were initiated by Carpintero et al. in the papers [9] and [11]. Recently, the study of these classes, have been extended by Carpintero et al. [12] and, Chen and Su [13], involving new spectral properties. This work continues in the same line of investigation of the authors mentioned above, but in our case, we consider some spectral properties introduced recently by Rashid and Prasad [19] and Sanabria et al. [21–23].

We refer to [20] for details about notations and terminologies. However, we give the following notations that will be useful in the sequel:

- Browder spectrum: $\sigma_b(T)$
- Upper semi-Browder spectrum: $\sigma_{ub}(T)$
- Upper semi-Weyl spectrum: $\sigma_{SF_+^-}(T)$
- Drazin invertible spectrum: $\sigma_D(T)$
- Left Drazin invertible spectrum: $\sigma_{LD}(T)$
- Upper semi B-Weyl spectrum: $\sigma_{SBF_+^-}(T)$
- approximate point spectrum: $\sigma_a(T)$

We denote also by $\sigma_p^0(T)$ the set of all eigenvalues of $T$ of finite multiplicity and by $\rho_a(T) = \mathbb{C}\backslash\sigma_a(T)$ the approximate point resolvent set of $T$.

A class of operators related with semi B-Fredholm operators is the class of quasi-Fredholm operators defined in the sequel. Previously, we consider the following set:

$$\Delta(T) := \{n \in \mathbb{N} : m \geq n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow T^n(X) \cap N(T) \subseteq T^m(X) \cap N(T)\}.$$

The *degree of stable iteration* is defined as $\operatorname{dis}(T) := \inf \Delta(T)$ if $\Delta(T) \neq \emptyset$, while $\operatorname{dis}(T) = \infty$ if $\Delta(T) = \emptyset$.

**Definition 1.1** $T \in L(X)$ is said to be *quasi-Fredholm of degree $d$*, if there exists $d \in \mathbb{N}$ such that:

(a) $\operatorname{dis}(T) = d$,
(b) $T^n(X)$ is a closed subspace of $X$ for each $n \geq d$,
(c) $T(X) + N(T^d)$ is a closed subspace of $X$.

It should be noted that by Proposition 2.5 of [5] every semi B-Fredholm operator is quasi-Fredholm. For further informations on quasi-Fredholm operators we refer to [6] and [2].

Now, we introduce an important property in local spectral theory. The localized version of this property has been introduced by Finch [15], and in the framework of Fredholm theory, this property has been characterized in several ways, see Chapter 3 of [1]. A bounded operator $T \in L(X)$ is said to have *the single valued extension property* at $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ (abbreviated, SVEP at $\lambda_0$), if for every open disc $\mathbb{D}_{\lambda_0} \subseteq \mathbb{C}$ centered at $\lambda_0$ the only analytic function $f : \mathbb{D}_{\lambda_0} \to X$ which satisfies the equation

$$(\lambda I - T) f(\lambda) = 0 \quad \text{for all } \lambda \in \mathbb{D}_{\lambda_0},$$

is the function $f \equiv 0$ on $\mathbb{D}_{\lambda_0}$. The operator $T$ is said to have SVEP if $T$ has the SVEP at every point $\lambda \in \mathbb{C}$. Evidently, $T \in L(X)$ has SVEP at every point of the resolvent $\rho(T) := \mathbb{C}\backslash\sigma(T)$. Moreover, from the identity theorem for analytic functions it is easily seen that $T$ has SVEP at every point of the boundary $\partial\sigma(T)$ of the spectrum. In particular, $T$ has SVEP at every isolated point of the spectrum. (See [1] for more details about this concept.)

The following lemmas will be used in the sequel.

**Lemma 1.2** *Let $T \in L(X)$. Then we have:*

(i) *$\lambda I - T$ is upper semi-Fredholm if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed, $\lambda I - T_n$ is upper semi $B$-Fredholm and $\alpha(\lambda I - T) < \infty$.*
(ii) *$\lambda I - T$ is lower semi-Fredholm if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed, $\lambda I - T_n$ is lower semi $B$-Fredholm and $\beta(\lambda I - T) < \infty$.*

*Remark 1.3* Note that the above result is a trivial extension of [3, Lemma 2.4], because for the case in which $n = 0$ and $\lambda = 0$, we obtain the mentioned lemma.

Denote by iso K, the set of all isolated points of $K \subseteq \mathbb{C}$. If $T \in L(X)$, define

$$\begin{aligned} E^0(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\ E_a^0(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty\}, \\ E(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}, \\ E_a(T) &= \{\lambda \in \operatorname{iso}\sigma_a(T) : 0 < \alpha(\lambda I - T)\}. \end{aligned}$$

Also, define

$$\Pi^0(T) = \sigma(T)\backslash\sigma_b(T), \quad \Pi_a^0(T) = \sigma_a(T)\backslash\sigma_{ub}(T),$$
$$\Pi(T) = \sigma(T)\backslash\sigma_D(T), \quad \Pi_a(T) = \sigma_a(T)\backslash\sigma_{LD}(T).$$

Observe that $\Pi(T)$ (resp. $\Pi^0(T)$, $\Pi_a(T)$, $\Pi_a^0(T)$) is the set of all poles of the resolvent of $T$ (resp. poles of the resolvent of $T$ of finite rank, left poles of $T$, left poles of $T$ of finite rank).

**Lemma 1.4** *Suppose that $T \in L(X)$ and there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed. Then the following statements hold:*

(i) *If $0 \notin \Pi(T)$, then $\Pi^0(T) = \Pi^0(T_n)$ and $\Pi(T) = \Pi(T_n)$,*
(ii) *If $0 \notin \Pi_a(T)$, then $\Pi_a^0(T) = \Pi_a^0(T_n)$ and $\Pi_a(T) = \Pi_a(T_n)$.*

*Proof* (i) The equalities $\Pi^0(T) = \Pi^0(T_n)$ and $\Pi(T) = \Pi(T_n)$ were proved in [13, Lemma 2.10] and [13, Lemma 2.8], respectively.

(ii) The equalities $\Pi_a^0(T) = \Pi_a^0(T_n)$ and $\Pi_a(T) = \Pi_a(T_n)$ were proved in [13, Lemma 2.11] and [13, Lemma 2.9], respectively. ◻

**Lemma 1.5** *Suppose that $T \in L(X)$ and there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed. Then the following statements hold:*

(i) *If $0 \notin \Pi(T)$, then $E^0(T) \subseteq E^0(T_n)$ and $E(T) = E(T_n)$,*
(ii) *If $0 \notin \Pi_a(T)$, then $E_a^0(T) \subseteq E_a^0(T_n)$ and $E_a(T) = E_a(T_n)$.*

*Proof* (i) The inclusion $E^0(T) \subseteq E^0(T_n)$ was shown in [12, Lemma 2.2]. The equality $E(T) = E(T_n)$ easily follows from [11, Lemma 2.3] and [13, Theorem 2.3].

(ii) The inclusion $E_a^0(T) \subseteq E_a^0(T_n)$ was shown in [12, Lemma 2.2]. Since $0 \notin \Pi_a(T)$ implies that $0 \notin \Pi(T)$, the equality $E_a(T) = E_a(T_n)$ easily follows from [11, Lemma 2.4] and [13, Theorem 2.4]. ◻

Let $T \in L(X)$. Following Zariouh [24] (resp. Sanabria et al. [20]), we say that $T$ satisfies *property* $(ah)$ (resp. $(v)$) if $\sigma(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi^0(T)$ (resp. $\sigma(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) = E^0(T)$). According to Rashid and Prasad [19], we say that $T$ satisfies *property* $(Sw)$ (resp. $(Sb)$) if $\sigma(T)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(T) = E^0(T)$ (resp. $\sigma(T)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi^0(T)$). In [19, Theorem 2.7], it is shown that property $(Sw)$ implies property $(Sb)$, but the converse is not true in general. Following Sanabria et al. [21], we say that $T$ satisfies *property* $(Saw)$ (resp. $(Sab)$) if $\sigma(T)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(T) = E_a^0(T)$ (resp. $\sigma(T)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi_a^0(T)$). In [21, Corollary 2.9], it is shown that property $(Saw)$ (resp. $(Sab)$) is equivalent to property $(Sw)$ (resp. $(Sb)$).

According to [22], an operator $T \in L(X)$ is said to satisfy *property* $(V_E)$ (resp. $(V_{E_a})$) if $\sigma(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ (resp. $\sigma(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) = E_a(T)$). In [22, Corollary 2.20], it is shown that property $(V_E)$ is equivalent to property $(V_{E_a})$ and it is proved in [22, Theorem 2.12] that an operator $T \in L(X)$ satisfies property $(V_E)$ if and only if $T$ satisfies property $(v)$ and $E^0(T) = E(T)$. Following [23], we say that $T \in L(X)$ satisfies *property* $(V_\Pi)$ (resp. $(V_{\Pi_a})$) if $\sigma(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi(T)$ (resp. $\sigma(T)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi_a(T)$). In [23, Theorem 2.3], it is shown that property $(V_E)$ implies property $(V_\Pi)$, but the converse is not true in general. Also, in [23, Corollary 2.21], it is shown that property $(V_\Pi)$ is equivalent to properties $(V_{\Pi_a})$, $(Sb)$ and $(Sab)$.

## 2 Strong variations for direct sums

In this section, we show that if $T$ and $S$ are operators (defined on Banach spaces) which satisfy the property $(Sab)$ (resp. $(Saw)$, $(V_E)$), then not necessarily its (orthogonal) direct sum $T \oplus S$ satisfies the property $(Sab)$ (resp. $(Saw)$, $(V_E)$). Moreover, we explore some sufficient conditions to ensure that these properties are transmitted from the direct summands $T$ and $S$ to the direct sum $T \oplus S$.

**Theorem 2.1** *Let $T \in L(X)$ and $S \in L(Y)$ be such that $\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$. If both $T$ and $S$ satisfies property $(Sab)$, then the following statements are equivalent:*

(i) $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$.
(ii) *$T \oplus S$ satisfies property $(Sab)$.*

*Proof* (i)⇒(ii) Assume that $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$. We know that the upper semi-Browder spectrum of a direct sum is the union of the upper semi-Browder spectra of its components, that is, $\sigma_{ub}(T \oplus S) = \sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{ub}(S)$, then

$$\begin{aligned}
&\Pi_a^0(T \oplus S) \\
&\quad = \sigma_a(T \oplus S)\backslash\sigma_{ub}(T \oplus S) \\
&\quad = [\sigma_a(T) \cup \sigma_a(S)]\backslash[\sigma_{ub}(T) \cup \sigma_{ub}(S)] \\
&\quad = [\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S)] \cup [\Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T)] \cup [\Pi_a^0(T) \cap \Pi_a^0(S)].
\end{aligned}$$

By hypothesis, $\Pi_a^0(T) \cap \rho_a(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$, it follows that $\Pi_a^0(T \oplus S) = \Pi_a^0(T) \cap \Pi_a^0(S)$. On the other hand, as $T$ and $S$ both satisfies property $(Sab)$, then

$$\begin{aligned}
&[\sigma(T) \cup \sigma(S)]\backslash[\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)] \\
&\quad = [\Pi_a^0(T) \cap \rho(S)] \cup [\Pi_a^0(S) \cap \rho(T)] \cup [\Pi_a^0(T) \cap \Pi_a^0(S)].
\end{aligned}$$

Since $\Pi_a^0(T) \cap \rho(S) = \Pi_a^0(S) \cap \rho(T) = \emptyset$, it follows that

$$[\sigma(T) \cup \sigma(S)]\backslash[\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)] = \Pi_a^0(T) \cap \Pi_a^0(S)$$

and hence $[\sigma(T)\cup\sigma(S)]\setminus[\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)] = \Pi_a^0(T\oplus S)$. Since by hypothesis, $\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)=\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)$, then $\sigma(T\oplus S)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)=\Pi_a^0(T\oplus S)$ and $T\oplus S$ satisfies property $(Sab)$.

(ii)⇒(i) If $T\oplus S$ satisfies property $(Sab)$, then $\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)=\sigma_b(T\oplus S)$ by [21, Theorem 2.31]. Always, we have $\sigma_b(T\oplus S)=\sigma_b(T)\cup\sigma_b(S)$, then $\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)\subset\sigma_b(T)\cup\sigma_b(S)=\sigma_b(T\oplus S)=\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)$ and hence $\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)\subset\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)$. Because by [8, Lemma 2.2] the inclusion $\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)\subset\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)$ is always true, we conclude that $\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)=\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)$. □

The following example shows that, in general, the direct sum of two operators satisfying property $(Sab)$ does not necessarily satisfy property $(Sab)$.

*Example 2.2* Let $Q\in L(Z)$ be a nilpotent operator, with $Z$ be any infinite-dimensional Banach space. Consider the operator $T=V\oplus I$ defined on $X\oplus Y$, where $V:X\to X$ is an injective quasi-nilpotent operator which is not nilpotent and $Y$ is a non-zero finite-dimensional Banach space. Then, $\sigma(Q)=\sigma_a(Q)=\{0\}$, $\sigma_{SBF_+^-}(Q)=\emptyset$ and $\Pi_a^0(Q)=\{0\}$. Thus, $\sigma(Q)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(Q)=\{0\}\setminus\emptyset=\{0\}=\Pi_a^0(Q)$ and $Q$ satisfies property $(Sab)$. Moreover, $\sigma(T)=\sigma_a(T)=\{0,1\}$, $\sigma_{SBF_+^-}(T)=\{0\}$ and $\Pi_a^0(T)=\{1\}$. Thus, $\sigma(T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(T)=\{0,1\}\setminus\{0\}=\{1\}=\Pi_a^0(T)$ and $T$ satisfies property $(Sab)$. But the direct sum $Q\oplus T$ defined on the Banach space $Z\oplus X\oplus Y$ does not satisfy property $(Sab)$, because $\sigma(Q\oplus T)=\Pi_a^0(Q\oplus T)=\{0,1\}$ and $\sigma_{SBF_+^-}(Q\oplus T)=\{0\}$, which implies that $\sigma(Q\oplus T)\setminus\sigma_{SBF_+^-}(Q\oplus T)=\{0,1\}\setminus\{0\}=\{1\}\neq\{0,1\}=\Pi_a^0(Q\oplus T)$. Observe that $\sigma_{SBF_+^-}(Q\oplus T)=\sigma_{SBF_+^-}(Q)\cup\sigma_{SBF_+^-}(T)$, but $\Pi_a^0(T)\cap\rho_a(Q)=\{1\}\neq\emptyset$. □

**Corollary 2.3** *Let $T\in L(X)$ and $S\in L(Y)$ be such that $\Pi_a^0(T)\cap\rho_a(S)=\Pi_a^0(S)\cap\rho_a(T)=\emptyset$. If both $T$ and $S$ satisfies property $(Sb)$ (resp. $(V_\Pi)$, $(V_{\Pi_a})$), then the following statements are equivalent:*

(i) $\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)=\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)$,
(ii) *$T\oplus S$ satisfies property $(Sb)$ (resp. $(V_\Pi)$, $(V_{\Pi_a})$).*

Similarly to Theorem 2.1, in the case of property $(Saw)$, we have the following result.

**Theorem 2.4** *Let $T\in L(X)$ and $S\in L(Y)$ be such that $\sigma_p^0(T)=\sigma_p^0(S)$. If both $T$ and $S$ satisfies property $(Saw)$, then the following statements are equivalent:*

(i) $\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)=\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)$,
(ii) *$T\oplus S$ satisfies property $(Saw)$.*

*Proof* (i)⇒(ii) Assume that $\sigma_{SBF_+^-}(T\oplus S)=\sigma_{SBF_+^-}(T)\cup\sigma_{SBF_+^-}(S)$. Since $T$ and $S$ both satisfies property $(Saw)$, then

$$
\begin{aligned}
&\sigma(T \oplus S)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) \\
&\quad = [\sigma(T) \cup \sigma(S)]\backslash[\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)] \\
&\quad = [E_a^0(T) \cap \rho(S)] \cup [E_a^0(S) \cap \rho(T)] \cup [E_a^0(T) \cap E_a^0(S)].
\end{aligned}
$$

Now, the hypothesis, $\sigma_p^0(T) = \sigma_p^0(S)$ implies that, $E_a^0(T) \cap \rho(S) = E_a^0(S) \cap \rho(T) = \emptyset$. Thus, $\sigma(T \oplus S)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = E_a^0(T) \cap E_a^0(S)$. Because we know that $\sigma_p^0(T \oplus S) = \{\lambda \in \sigma_p^0(T) \cup \sigma_p^0(S) : \alpha(\lambda I - T) + \alpha(\lambda I - S) < \infty\}$, then

$$
\begin{aligned}
&E_a^0(T \oplus S) \\
&\quad = \mathrm{iso}\, \sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{T} \oplus \mathrm{S}) \cap \sigma_{\mathrm{p}}^0(\mathrm{T} \oplus \mathrm{S}) \\
&\quad = \mathrm{iso}\, [\sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{T}) \cup \sigma_{\mathrm{a}}(\mathrm{S})] \cap \sigma_{\mathrm{p}}^0(\mathrm{S}) \\
&\quad = [E_a^0(T) \cap \rho_a(S)] \cup [E_a^0(S) \cap \rho_a(T)] \cup [E_a^0(T) \cap E_a^0(S)].
\end{aligned}
$$

Since $E_a^0(T) \cap \rho_a(S) = E_a^0(S) \cap \rho_a(T) = \emptyset$, it follows that $E_a^0(T \oplus S) = E_a^0(T) \cap E_a^0(S)$. Therefore, $\sigma(T \oplus S)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = E_a^0(T \oplus S)$ and $T \oplus S$ satisfies property $(Saw)$.

(ii)⇒(i) If $T \oplus S$ satisfies property $(Saw)$, then $T \oplus S$ satisfies property $(Sab)$ by [21, Theorem 2.18]. Hence the equality of the spectra $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S)$ and $\sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$ follows from the proof of "(ii)⇒(i)" of Theorem 2.1. □

The following example shows that, in general, the direct sum of two operators satisfying property $(Saw)$ does not necessarily satisfy property $(Saw)$.

*Example 2.5* Let $Q \in L(Z)$ be a nilpotent operator, with $Z$ be any infinite-dimensional Banach space. Let $T \in L(\ell^2(\mathbb{N}))$ be defined by $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \ldots\right)$. Then, $\sigma(Q) = \{0\}$, $\sigma_{SBF_+^-}(Q) = \emptyset$ and $E_a^0(Q) = \{0\}$. Thus, $\sigma(Q)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(Q) = \{0\}\backslash\emptyset = \{0\} = E_a^0(Q)$ and $Q$ satisfies property $(Saw)$. Moreover, $\sigma(T) = \sigma_{SBF_+^-}(T) = \{0\}$ and $E_a^0(T) = \emptyset$. Thus, $\sigma(T)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(T) = \emptyset = E_a^0(T)$ and $T$ satisfies property $(Saw)$. But direct sum $Q \oplus T$ defined on the Banach space $Z \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ does not satisfy property $(Saw)$, because $\sigma(Q \oplus T) = \sigma_{SBF_+^-}(Q \oplus T) = E_a^0(Q \oplus T) = \{0\}$, which implies that $\sigma(Q \oplus T)\backslash\sigma_{SBF_+^-}(Q \oplus T) = \{0\}\backslash\{0\} = \emptyset \neq \{0\} = E_a^0(Q \oplus T)$. Note that $\sigma_{SBF_+^-}(Q \oplus T) = \sigma_{SBF_+^-}(Q) \cup \sigma_{SBF_+^-}(T)$, but $\sigma_p^0(Q) = \{0\} \neq \emptyset = \sigma_p^0(T)$. □

**Corollary 2.6** *Let $T \in L(X)$ and $S \in L(Y)$ be such that $\sigma_p^0(T) = \sigma_p^0(S)$. If both $T$ and $S$ satisfies property $(Sw)$, then the following statements are equivalent:*

(i) $\sigma_{SBF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SBF_+^-}(T) \cup \sigma_{SBF_+^-}(S)$,
(ii) *$T \oplus S$ satisfies property $(Sw)$.*

**Theorem 2.7** *Let $T \in L(X)$ and $S \in L(Y)$ be such that $\sigma_p(T) = \sigma_p(S)$. If both $T$ and $S$ satisfies property $(V_E)$, then the following statements are equivalent:*

(i) $\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)$,
(ii) *$T \oplus S$ satisfies property $(V_E)$.*

*Proof* (i)⇒(ii) Assume that $\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = \sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)$. Since $T$ and $S$ both satisfies property $(V_E)$, then

$$
\begin{aligned}
&\sigma(T \oplus S)\backslash\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) \\
&\quad = [\sigma(T) \cup \sigma(S)]\backslash[\sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)] \\
&\quad = [E(T) \cap \rho(S)] \cup [E(S) \cap \rho(T)] \cup [E(T) \cap E(S)].
\end{aligned}
$$

Now, the hypothesis $\sigma_p(T) = \sigma_p(S)$ implies that $E(T) \cap \rho(S) = E(S) \cap \rho(T) = \emptyset$. Thus, $\sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = E(T) \cap E(S)$. Since $\sigma_p(T \oplus S) = \sigma_p(T) \cup \sigma_p(S)$, then

$$\begin{aligned} &E(T \oplus S) \\ &\quad = \mathrm{iso}\,\sigma(\mathrm{T} \oplus \mathrm{S}) \cap \sigma_{\mathrm{p}}(\mathrm{T} \oplus \mathrm{S}) \\ &\quad = \mathrm{iso}\,[\sigma(\mathrm{T}) \cup \sigma(\mathrm{S})] \cap \sigma_{\mathrm{p}}(\mathrm{S}) \\ &\quad = [E(T) \cap \rho(S)] \cup [E(S) \cap \rho(T)] \cup [E(T) \cap E(S)]. \end{aligned}$$

Since $E(T) \cap \rho(S) = E(S) \cap \rho(T) = \emptyset$, it follows that $E(T \oplus S) = E(T) \cap E(S)$. Therefore, $\sigma(T \oplus S) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T \oplus S) = E(T \oplus S)$ and $T \oplus S$ satisfies property $(V_E)$.

(ii)$\Rightarrow$(i) If $T \oplus S$ satisfies property $(V_E)$, then $T \oplus S$ satisfies property $(V_\Pi)$ by [23, Theorem 2.3]. Hence the equality of the spectra $\sigma_{SF_+^-}(T \oplus S)$ and $\sigma_{SF_+^-}(T) \cup \sigma_{SF_+^-}(S)$, follows from [23, Theorem 2.27] and the proof of "(ii)$\Rightarrow$(i)" of Theorem 2.1. □

*Remark 2.8* Observe that, in general, the direct sum of two operators satisfying property $(V_E)$ does not necessarily satisfy property $(V_E)$. Indeed, if we consider the operators $Q$ and $T$ defined in Example 2.5, then $Q$ and $T$ satisfy property $(V_E)$, since $\sigma(Q) \setminus \sigma_{SF_+^-}(Q) = \{0\} \setminus \emptyset = \{0\} = E(Q)$ and $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset = E(T)$. But the direct sum $Q \oplus T$ does not satisfy property $(V_E)$, because $\sigma(Q \oplus T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(Q \oplus T) = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset \neq \{0\} = E(Q \oplus T)$. Note that $\sigma_{SF_+^-}(Q \oplus T) = \sigma_{SF_+^-}(Q) \cup \sigma_{SF_+^-}(T)$, but $\sigma_p(Q) = \{0\} \neq \emptyset = \sigma_p(T)$. □

## 3 Strong Variations for restrictions

In this section we consider operators $T \in L(X)$ for which $0 \notin \Pi(T)$, and we look for some conditions which imply that these operator satisfy property $(V_E)$ or property $(V_\Pi)$, in terms of its restrictions.

**Theorem 3.1** *Let $T \in L(X)$ be such that $0 \notin \Pi(T)$. Then, $T$ satisfies property $(V_E)$ if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and $T_n$ satisfies property $(V_E)$.*

*Proof* Sufficiency: Assume that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and $T_n$ satisfies property $(V_E)$. Let $\lambda \in E(T)$, then by Lemma 1.5, we have $\lambda \in E(T_n)$ and as property $(V_E)$ implies by [22, Theorem 2.12] that $T_n$ satisfies property $(v)$ and $E(T_n) = E^0(T_n)$, it then follows that $\lambda \in E^0(T_n) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T_n)$. We assert that $\lambda \neq 0$. Indeed, suppose that $\lambda = 0$. Then $T_n$ is a semi-Fredholm operator and $0 \in \mathrm{iso}\,\sigma(\mathrm{T_n})$, so by [1, Theorem 3.77], $T_n$ is a Browder operator and hence $0 \in \Pi^0(T_n)$, which implies by Lemma 1.4 that $0 \in \Pi^0(T) \subseteq \Pi(T)$, contradicting that $0 \notin \Pi(T)$. Thus, we conclude that $\lambda \neq 0$. Now, since $\lambda \in E^0(T_n)$, by [11, Lemma 2.1] it follows that $0 < \alpha(\lambda I - T) < \infty$ and as $\lambda I - T_n$ is an upper semi $B$-Fredholm operator and $R(\lambda I - T_n)$ is closed, then by Lemma 1.2, we have $\lambda I - T$ is an upper semi-Fredholm operator. Since $\lambda \in \mathrm{iso}\,\sigma(\mathrm{T})$, again by [1, Theorem 3.77], $\lambda I - T$ is Browder and hence Weyl. Therefore, $\lambda I - T$ is upper semi-Weyl and so $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. This shows that $E(T) \subseteq \sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T)$. To show opposite inclusion $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E(T)$, observe that under the hypothesis that $T_n$ satisfies property $(V_E)$, by [12, Lemma 1.5] and Lemma 1.5, we have $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T_n) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T_n) = E(T_n) = E(T)$ and so, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq E(T)$. Therefore, $\sigma(T) \setminus \sigma_{SF_+^-}(T) = E(T)$ and $T$ satisfies property $(V_E)$.

Necessity: Assume that $T$ satisfies property $(V_E)$. Then for $n = 0$, $R(T^0) = X$ is closed and $T_0 = T$ satisfies property $(V_E)$. $\square$

**Theorem 3.2** *Let $T \in L(X)$ be such that $0 \notin \Pi(T)$. Then, $T$ satisfies property $(V_\Pi)$ if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and $T_n$ satisfies property $(V_\Pi)$.*

*Proof* Sufficiency: Suppose that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and $T_n$ satisfies property $(V_\Pi)$. Let $\lambda \in \Pi(T)$, then by Lemma 1.4, we have $\lambda \in \Pi(T_n)$ and as property $(V_\Pi)$ implies by [23, Theorem 2.13] that $T_n$ satisfies property $(ah)$ and implies by [23, Theorem 2.10] that $\Pi(T_n) = \Pi^0(T_n)$, it follows that $\lambda \in \Pi^0(T_n) = \sigma(T_n) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T_n)$. Thus, $\lambda I - T_n$ is an upper semi-Fredholm operator and $0 < p(\lambda I - T_n) = q(\lambda I - T_n) < \infty$. By [10, Lemmas 2 and 3] and [17, Proposition 38.6], we have $0 < p(\lambda I - T) = q(\lambda I - T) < \infty$ and hence $\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_b(T) \subseteq \sigma(T) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T)$. This shows that $\Pi(T) \subseteq \sigma(T) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T)$. To show the opposite inclusion $\sigma(T) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \Pi(T)$, observe that, since $T_n$ satisfies $(V_\Pi)$, by [12, Lemma 1.5] and Lemma 1.4, we have $\sigma(T) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T) = \sigma(T_n) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \sigma(T_n) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T_n) = \Pi(T_n) = \Pi(T)$ and so, $\sigma(T) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T) \subseteq \Pi(T)$. Therefore, $\sigma(T) \backslash \sigma_{SF_+^-}(T) = \Pi(T)$ and $T$ satisfies property $(V_\Pi)$.

Necessity: Assume that $T$ satisfies property $(V_\Pi)$. Then for $n = 0$, $R(T^0) = X$ is closed and $T_0 = T$ satisfies property $(V_\Pi)$. $\square$

**Corollary 3.3** *Let $T \in L(X)$ be such that $0 \notin \Pi(T)$. Then, $T$ satisfies property $(V_{\Pi_a})$ (resp. $(Sb)$, $(Sab)$) if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and $T_n$ satisfies property $(V_{\Pi_a})$ (resp. $(Sb)$, $(Sab)$).*

**Theorem 3.4** *Let $T \in L(X)$ be such that $0 \notin \Pi(T)$. Then, $T$ satisfies property $(Sw)$ if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and $T_n$ satisfies property $(Sw)$.*

*Proof* Sufficiency: Assume that there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and $T_n$ satisfies property $(Sw)$. Let $\lambda \in E^0(T)$. Then, by Lemma 1.5, we have $\lambda \in E^0(T_n) = \sigma(T_n) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(T_n)$ because $T_n$ satisfies property $(Sw)$. Thus $\lambda I - T_n$ is an upper semi $B$-Fredholm operator and hence, it is quasi-Fredholm. We assert that $\lambda \neq 0$. Indeed, suppose that $\lambda = 0$. Then $T_n$ is quasi-Fredholm and $0 \in \operatorname{iso} \sigma(\mathrm{T_n}) = \operatorname{iso} \sigma(\mathrm{T_n^*})$, so $T_n$ is a quasi-Fredholm operator and both $T_n$ and $T_n^*$ have SVEP in 0, so, by [10, Corollary 1], $T_n$ is Drazin invertible and hence $0 \in \sigma(T_n) \backslash \sigma_D(T_n) = \Pi(T_n)$, which implies, by Lemma 1.4, that $0 \in \Pi(T)$, contradicting that $0 \notin \Pi(T)$. Thus, we conclude that $\lambda \neq 0$. Now, proceeding as in Theorem 3.1, we obtain that $\lambda I - T$ is upper semi-Weyl and hence upper semi $B$-Weyl. Therefore, $\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(T)$ and so $E^0(T) \subseteq \sigma(T) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(T)$. To show the opposite inclusion $\sigma(T) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(T) \subseteq E^0(T)$, observe that under the hypothesis that $T_n$ satisfies property $(Sw)$, by [19, Theorem 2.7], we have $T_n$ satisfies property $(Sb)$ and, by Corollary 3.3, $T$ satisfies property $(Sb)$. Therefore, $\sigma(T) \backslash \sigma_{SBF_+^-}(T) = \Pi^0(T) \subseteq E^0(T)$ and $T$ satisfies property $(Sw)$.

Necessity: Assume that $T$ satisfies property $(Sw)$. Then for $n = 0$, $R(T^0) = X$ is closed and $T_0 = T$ satisfies property $(Sw)$. $\square$

**Corollary 3.5** *Let $T \in L(X)$ be such that $0 \notin \Pi(T)$. Then, $T$ satisfies property $(Saw)$ if and only if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $R(T^n)$ is closed and $T_n$ satisfies property $(Saw)$.*

We given an illustrative example for the behavior of an operator $T$ and its restrictions $T_n$, when $0 \in \Pi(T)$.

*Example 3.6* Let $X$ be an Banach space, and suppose that $Y$ and $Z$ are proper closed subspaces of $X$ with $X = Y \oplus Z$. Let $T$ be the projection of $X$ on $Y$ which is zero on $Z$. Since $T^2 = T$, then $p(T) = q(T) < \infty$, follows that $\sigma(T) = \{0, 1\}$ and $0 \in \Pi(T)$. Note that $T_n = T|_{R(T_n)}$ is the identity operator on $Y$ for all $n \geq 1$. Thus $\sigma(T_n) = \{1\}$ for all $n \geq 1$. Assuming that neither $Y$ nor $Z$ are finite dimensional, then both $T$ and $T_n$ satisfies the properties $(V_E)$, $(V_\Pi)$ and $(Sw)$. Now, if $Y$ is infinite dimensional and $Z$ is finite dimensional, then $T_n$ satisfies the properties $(V_E)$, $(V_\Pi)$ and $(Sw)$, for all $n \geq 1$. But $T$ does not satisfy the properties $(V_E)$, $(V_\Pi)$ and $(Sw)$.

**Acknowledgements** The authors thank the referee for his valuable comments and suggestions which have greatly contributed to this paper.

## References

1. Aiena, P.: Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2004)
2. Aiena, P.: Quasi-Fredholm operators and localized SVEP. Acta Sci. Math. (Szeged) **73**(1–2), 251–263 (2007)
3. Aiena, P., Aponte, E., Balzan, E.: Weyl type Theorems for left and right polaroid operators. Integr. Equ. Oper. Theory **66**(1), 1–20 (2010)
4. Arroud, A., Zariouh, H.: Browder-type theorems for direct sums of operators. Funct. Anal. Approx. Comput. **7**(1), 77–84 (2015)
5. Berkani, M.: On a class of quasi-Fredholm operators. Integr. Equ. Oper. Theory **34**(2), 244–249 (1999)
6. Berkani, M.: Restriction of an operator to the range of its powers. Studia Math. **140**(2), 163–175 (2000)
7. Berkani, M., Kachad, M., Zariouh, H.: Extended Weyl-type theorems for direct sums. Demonstr. Math. **47**(2), 411–422 (2014)
8. Berkani, M., Zariouh, H.: Weyl type-theorems for direct sums. Bull. Korean Math. Soc. **49**(5), 1027–1040 (2012)
9. Carpintero, C., García, O., Muñoz, D., Rosas, E., Sanabria, J.: Weyl type theorems for restrictions of bounded linear operators. Extracta Math. **28**(1), 127–139 (2013)
10. Carpintero, C., García, O., Rosas, E., Sanabria, J.: $B$-Browder spectra and localized SVEP. Rend. Circ. Mat. Palermo **57**(2), 241–255 (2008)
11. Carpintero, C., Muñoz, D., Rosas, E., Sanabria, J., García, O.: Weyl type theorems and restrictions. Mediterr. J. Math. **11**(4), 1215–1228 (2014)
12. Carpintero, C., Rosas, E., Rodríguez, J., Muñoz, D., Alcalá, K.: Spectral properties and restrictions of bounded linear operators. Ann. Funct. Anal. **6**(2), 173–183 (2015)
13. Chen, L., Su, W.: A note on Weyl-type theorems and restrictions. Ann. Funct. Anal. **8**(2), 190–198 (2017)
14. Duggal, B.P., Kubrusly, C.S.: Weyl's theorem for direct sums. Studia Sci. Math. Hungar. **44**(2), 275–290 (2007)
15. Finch, J.K.: The single valued extension property on a Banach space. Pac. J. Math. **58**(1), 61–69 (1975)
16. Gupta, A., Kashyap, N.: Generalized $a$-Weyl theorem for direct sums. Mat. Vesn. **62**(4), 265–270 (2010)
17. Heuser, H.: Functional Analysis. Marcel Dekker, New York (1982)
18. Liu, A.: A note on property $(W_E)$. Acta Math. Hungar. (2017). https://doi.org/10.1007/s10474-017-0707-5
19. Rashid, M.H.M., Prasad, T.: Property $(Sw)$ for bounded linear operators. Asia-Eur. J. Math. **8**, 14 (2015). https://doi.org/10.1142/S1793557115500126
20. Sanabria, J., Carpintero, C., Rosas, E., García, O.: On generalized property $(v)$ for bounded linear operators. Studia Math. **212**(2), 141–154 (2012)
21. Sanabria, J., Carpintero, C., Rosas, E., García, O.: On property $(Saw)$ and others spectral properties type Weyl–Browder theorems. Rev. Colomb. Mat. **51**(2), 153–171 (2017a)
22. Sanabria, J., Vásquez, L., Carpintero, C., Rosas, E., García, O.: On strong variations of Weyl type theorems. Acta Math. Univ. Comen. (N.S.) **86**(2), 345–356 (2017b)
23. Sanabria, J., Carpintero, C., Rodríguez, J., Rosas, E., García, O.: On new strong versions of Browder type theorems. Open Math. **16**(1), 289–297 (2018)
24. Zariouh, H.: New version of property $(az)$. Mat. Vesn. **66**(3), 317–322 (2014)

# Anexo 3

**Artículo:** *Perturbation theory for property* $(V_E)$ *and tensor product.*

**Revista:** Mathematics.

**Volumen:** 9.

**Número:** 21.

**Año:** 2021.

**ID:** 2775.

**Autores:** Elvis Aponte, José Sanabria y Luis Vásquez.

*mathematics*

*Article*

# Perturbation Theory for Property $(V_E)$ and Tensor Product

**Elvis Aponte [1,*], José Sanabria [2] and Luis Vásquez [3]**

[1] Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL), Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Campus Gustavo Galindo km. 30.5 Vía Perimetral, Guayaquil EC090112, Ecuador
[2] Departamento de Matemáticas, Facultad de Educación y Ciencias, Universidad de Sucre, Carrera 28 No. 5-267 Barrio Puerta Roja, Sincelejo 700001, Colombia; jesanabri@gmail.com
[3] Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña-ISFODOSU, Recinto Emilio Prud'Homme, Calle R.C. Tolentino # 51, Esquina 16 de Agosto, Los Pepines, Santiago de los Caballeros 51000, Dominican Republic; luis.vasquez@isfodosu.edu.do
* Correspondence: ecaponte@espol.edu.ec

**Abstract:** Given a complex Banach space $\mathcal{X}$, we investigate the stable character of the property $(V_E)$ for a bounded linear operator $\mathcal{T}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, under commuting perturbations that are Riesz, compact, algebraic and hereditarily polaroid. We also analyze sufficient conditions that allow the transfer of property $(V_E)$ from the tensorial factors $\mathcal{T}$ and $\mathcal{S}$ to its tensor product.

**Keywords:** semi-Fredholm operator; property $(V_E)$; commuting perturbations; tensor product

check for updates

**Citation:** Aponte, E.; Sanabria, J.; Vásquez, L. Perturbation Theory for Property $(V_E)$ and Tensor Product. *Mathematics* **2021**, *9*, 2775. https://doi.org/10.3390/math9212775

Academic Editor: Juan Benigno Seoane-Sepúlveda

Received: 22 September 2021
Accepted: 27 October 2021
Published: 1 November 2021



## 1. Introduction

In 1900, E. Fredholm published his famous article *On a new method for the solution of Dirichlet's problem*, which changed the study of the solution of integral equations. This article served as inspiration for F. Riesz, in 1918, to establish Fredholm's abstract methods in the form of compact operators, thereby initiating what is now known as Fredholm theory for operators. In this theory, there are two classes of operators that play a fundamental role; these are the so-called Browder operators (also classically known as Riez–Schauder operators) and the Weyl operators, which have been the subject of a range of studies. In the last decades, numerous investigations have been developed on Fredholm theory, where some authors have introduced and studied several spectral properties similar to Weyl's theorem formulated by L. Coburn in [1]. The study of the spectra of the semi $B$-Fredholm and $B$-Weyl operators allowed M. Berkani and J. Koliha [2] to introduce two properties known as the generalized Weyl's and generalized $a$-Weyl's theorems, which are generalizations of the classical versions of the Weyl's and $a$-Weyl's theorems, respectively. Recently, other properties have been introduced and studied involving the different spectra of the Fredholm and $B$-Fredholm theories (started by M. Berkani), which together with the classical properties are known today as Weyl-type theorems. The stability of strong variations of Weyl-type theorems under direct sums and restrictions has been studied, as well as the transmission of spectral properties between a Drazin invertible operator and its Drazin inverse; for example, see [3,4]. In addition, the study of Weyl-type theorems under commuting perturbations has been considered by several authors, among which we can mention Oudghiri [5,6], Berkani et al. [7,8], Aiena and Triolo [9]. Elsewhere, the stability of Weyl's theorem under the tensor product has been studied by Kubrusly and Duggal in [10]. Subsequently, studies in this direction have been expanded by Duggal [11], Rashid [12] and Rashid and Prasad [13], involving new Weyl-type theorems. This article follows the same line of research as the works referenced above, but now we consider a strong variation of the Weyl-type theorems that was introduced by Sanabria et al. [3,14], namely property $(V_E)$. According to [14], if an operator $\mathcal{T}$ satisfies property $(V_E)$, then $\mathcal{T}$ satisfies equivalently another forty-four spectral properties, among which are Weyl-type theorems such as the properties $(V_{\Pi})$ and $(gaz)$ recently studied in [15,16], respectively. This arouses the interest of studying property $(V_E)$ from different points of view. In this paper, we focus our interest on obtaining conditions so that the property $(V_E)$ remains stable under perturbations that are commutative and tensor products for some classes of operators.

## 2. Preliminaries

Let $\mathcal{L}(\mathcal{X}) = \{\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X} | \, \mathcal{T}$ is a bounded linear operator$\}$, where $\mathcal{X}$ is a complex Banach space. For $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, let $\mathcal{T}^*$, $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ and $N(\mathcal{T})$ be the dual operator, the range and the kernel of $\mathcal{T}$, respectively. We will use the following spectra of $\mathcal{T}$: $\sigma(\mathcal{T})$ (classical), $\sigma_a(\mathcal{T})$ (approximate point), $\sigma_s(\mathcal{T})$ (surjectivity), $\sigma_p(\mathcal{T})$ (point), $\sigma_e(\mathcal{T})$ (essential), $\sigma_{SF_+}(\mathcal{T})$ (upper semi-Fredholm), $\sigma_{SF_-}(\mathcal{T})$ (lower semi-Fredholm), $\sigma_b(\mathcal{T})$ (Browder), $\sigma_{ub}(\mathcal{T})$ (upper semi-Browder), $\sigma_{lb}(\mathcal{T})$ (lower semi-Browder), $\sigma_W(\mathcal{T})$ (Weyl), $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$ (upper semi-Weyl), $\sigma_{SF_-^+}(\mathcal{T})$ (lower semi-Weyl), $\sigma_{BF}(\mathcal{T})$ ($B$-Fredholm), $\sigma_{SBF_+}(\mathcal{T})$ (upper semi $B$-Fredholm), $\sigma_{SBF_-}(\mathcal{T})$ (lower semi $B$-Fredholm), $\sigma_D(\mathcal{T})$ (Drazin invertible), $\sigma_{LD}(\mathcal{T})$ (left Drazin invertible), $\sigma_{RD}(\mathcal{T})$ (right Drazin invertible), $\sigma_{BW}(\mathcal{T})$ ($B$-Weyl) and $\sigma_{SBF_+^-}(\mathcal{T})$ (upper semi $B$-Weyl). See [17,18] for definitions and other details.

For $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, let $\beta(\mathcal{T})$ be the codimension of $\mathcal{T}(\mathcal{X})$, $\alpha(\mathcal{T})$ the dimension of $N(\mathcal{T})$, $p(\mathcal{T})$ the ascent of $\mathcal{T}$ and $q(\mathcal{T})$ the descent of $\mathcal{T}$. The resolvent set of $\mathcal{T}$ is denoted by $\rho(\mathcal{T})$ and the quasi-nilpotent part of $\mathcal{T}$ by $H_0(\mathcal{T}) := \{x \in \mathcal{X} : \lim_{n\to\infty} \|\mathcal{T}^n x\|^{1/n} = 0\}$. In addition, we put:

$$\Delta(\mathcal{T}) := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{T}^n(\mathcal{X}) \cap N(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}^m(X) \cap N(\mathcal{T}) \text{ if } m \geq n\}$$

and

$$\operatorname{dis}(\mathcal{T}) := \begin{cases} \inf \Delta(\mathcal{T}), & \text{if } \Delta(\mathcal{T}) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{if } \Delta(\mathcal{T}) = \emptyset. \end{cases}$$

**Definition 1.** *An operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ is* quasi-Fredholm (of degree $k$) *if for some $k \in \mathbb{N}$:*

1. $\operatorname{dis}(\mathcal{T}) = k$,
2. *For any $n \geq k$, $\mathcal{T}^n(\mathcal{X})$ is a closed subspace of $\mathcal{X}$,*
3. *$\mathcal{T}(\mathcal{X}) + N(\mathcal{T}^k)$ is a closed subspace of $\mathcal{X}$.*

In [19], Finch introduced the following property. An operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ checks *the single valued extension property* at $\mu_0 \in \mathbb{C}$ (briefly, SVEP at $\mu_0$), if for each open disc $\mathbb{D}_{\mu_0} \subseteq \mathbb{C}$ with center at $\mu_0$ the unique analytic function $f : \mathbb{D}_{\mu_0} \to \mathcal{X}$, which satisfies the equation

$$(\mu I - \mathcal{T}) f(\mu) = 0 \quad \text{for each } \mu \in \mathbb{D}_{\mu_0},$$

is $f \equiv 0$ on $\mathbb{D}_{\mu_0}$. We say that $\mathcal{T}$ satisfies SVEP if $\mathcal{T}$ satisfies SVEP at each point $\mu \in \mathbb{C}$. We put

$$\Sigma(\mathcal{X}, \mu) := \{\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : \mathcal{T} \text{ satisfies SVEP at } \mu\},$$

$$\Sigma(\mathcal{X}, \mathcal{A}) := \{\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : \mathcal{T} \text{ satisfies SVEP at each } \lambda \in \mathcal{A}\}$$

and

$$\Sigma(\mathcal{X}) := \{\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : \mathcal{T} \text{ satisfies SVEP}\}.$$

Obviously, $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \rho(\mathcal{T}))$. In addition, $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \operatorname{Fr} \sigma(\mathcal{T}))$, where $\operatorname{Fr} \sigma(\mathcal{T})$ is the frontier of $\sigma(\mathcal{T})$. Note that, $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu)$ and $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu)$ for all $\mu$ being an isolated point of the spectrum of $\mathcal{T}$. We also have

$$p(\mu I - \mathcal{T}) \text{ is finite } \Rightarrow \mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu) \tag{1}$$

and dually,

$$q(\mu I - \mathcal{T}) \text{ is finite } \Rightarrow \mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu), \tag{2}$$

see [17] (Theorem 3.8). Furthermore,

$$\mu \text{ is not a limit point of } \sigma_a(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu), \tag{3}$$

and dually,

$$\mu \text{ is not a limit point of } \sigma_s(\mathcal{T}) \Rightarrow \mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu). \tag{4}$$

Observe that, in general, $H_0(\mathcal{T})$ is not necessarily closed, and by [17] (Theorem 2.31),

$$H_0(\mu I - \mathcal{T}) \text{ is closed} \Rightarrow \mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu). \tag{5}$$

**Remark 1.** It is well known that if $\mu I - \mathcal{T}$ is quasi-Fredholm, the implications (1)–(5) become equivalences; in particular, this happens when $\mu I - \mathcal{T}$ is a semi $B$-Fredholm operator [20].

Let $\operatorname{Iso}\mathcal{D} := \{\mu \in \mathbb{C} | \, \mu \text{ is an isolated point of } \mathcal{D}\}$. For $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, we consider the following sets:

$$E^0(\mathcal{T}) := \{\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}) : \, 0 < \alpha(\mu I - \mathcal{T}) < \infty\},$$
$$E(\mathcal{T}) := \{\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}) : \, 0 < \alpha(\mu I - \mathcal{T})\}.$$

We also define

$$\Pi_a^0(\mathcal{T}) := \sigma_a(\mathcal{T}) \setminus \sigma_{ub}(\mathcal{T}), \quad \Pi_+^0(\mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T}) \setminus \sigma_{ub}(\mathcal{T}),$$
$$\Pi^0(\mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T}) \setminus \sigma_b(\mathcal{T}), \quad \Pi(\mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T}) \setminus \sigma_D(\mathcal{T}).$$

According to [21], $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ has the *a-Browder's theorem* if $\sigma_a(\mathcal{T}) \setminus \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = \Pi_a^0(\mathcal{T})$. Following [2], $\mathcal{T}$ has the *generalized Weyl's theorem* if $\sigma(\mathcal{T}) \setminus \sigma_{BW}(\mathcal{T}) = E(\mathcal{T})$. Following [22] (resp. [23]), $\mathcal{T}$ is said to satisfy *property* $(w)$ (resp. *property* $(gw)$) if $\sigma_a(\mathcal{T}) \setminus \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = E^0(\mathcal{T})$ (resp. $\sigma_a(\mathcal{T}) \setminus \sigma_{SBF_+^-}(\mathcal{T}) = E(\mathcal{T})$).

## 3. Perturbation Theory for Property $(V_E)$

For $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, put $\Delta_+(\mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T}) \setminus \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$. Following [14], $\mathcal{T}$ satisfies *property* $(V_E)$ if $\Delta_+(\mathcal{T}) = E(\mathcal{T})$. Next, we establish several results related to property $(V_E)$ for an operator $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}^*$) satisfying SVEP at each point that does not belong to the lower (resp. upper) semi-Weyl spectrum of $\mathcal{T}$ and such that $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$. Later, these results will be useful to analyze the stability of property $(V_E)$ for certain perturbations. Let $V_E(\mathcal{X}) := \{\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : \, \mathcal{T} \text{ satisfies property } (V_E)\}$.

**Theorem 1.** *Let $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ with $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$. If $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu)$ for each $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$, then $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** As $E(\mathcal{T}) = \emptyset$ whenever $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$, it remains to show that $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$. Now, if $\mu \in \sigma(\mathcal{T})$ and $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$, then $q(\mu I - \mathcal{T}) < \infty$ (since $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu)$) and as $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$, also $p(\mu I - \mathcal{T}) < \infty$. Hence, $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T})$, so then $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T})$, which is not possible. Thus, $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$ and hence $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$. □

**Corollary 1.** *$\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ whenever $\operatorname{Int}(\Delta^+(\mathcal{T})) = \operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$.*

**Proof.** Let $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$. If $\mu \notin \sigma(\mathcal{T})$, obviously $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu)$. If $\mu \in \sigma(\mathcal{T})$, then $\mu \in \Delta^+(\mathcal{T})$ and since the set of all upper semi-Weyl operators is open in $\mathcal{L}(\mathcal{X})$, from hypothesis $\operatorname{Int}(\Delta^+(\mathcal{T})) = \emptyset$ it follows that $\mu \in \operatorname{Fr}\sigma(\mathcal{T})$. Hence, $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu)$ again. Now, by Theorem 1, $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$. □

The following example points out that the converse of the previous theorem is not true.

**Example 1.** Let $\mathcal{T}$ be the Volterra operator on $\mathbf{C}[0,1]$ given by $\mathcal{T}(g)(z) := \int_0^z g(w)dw$ for each $g \in \mathbf{C}[0,1]$. Observe that $\mathcal{T}$ is quasinilpotent and injective. So, $\sigma(\mathcal{T}) = \{0\}$, $\alpha(\mathcal{T}) = 0$ and hence $E(\mathcal{T}) = \emptyset$. As $R(\mathcal{T})$ is not closed, we have $\sigma_a(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = \{0\}$ and $\sigma(\mathcal{T}) \setminus \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = E(\mathcal{T})$, i.e., $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$. However, $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) \neq \emptyset$. Note that $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$, because it is quasinilpotent.

**Theorem 2.** *If $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu)$ for each $\mu \notin \sigma_{SF_-^+}(\mathcal{T})$ and $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$, then $\mathcal{T}^* \in V_E(\mathcal{X}^*)$.*

**Proof.** Clearly, since $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$, we have $E(\mathcal{T}^*) = \emptyset$. Assume that $\mu \in \sigma(\mathcal{T}^*)$ and $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}^*)$. According to this, $\mu \in \sigma(\mathcal{T})$ and $\mu \notin \sigma_{SF_-^+}(\mathcal{T})$. As $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu)$, $p(\mu I - \mathcal{T}) < \infty$ and since $\mu \notin \sigma_{SF_-^+}(\mathcal{T})$, $q(\mu I - \mathcal{T}) < \infty$. Thus, $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T})$ and therefore $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T})$, contradicting that $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$. Therefore, $\sigma(\mathcal{T}^*) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}^*)$ and we conclude that $\mathcal{T}^* \in V_E(\mathcal{X}^*)$. □

**Corollary 2.** *For $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ such that $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$, we have:*

1. *If $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X})$, then $\mathcal{T}^* \in V_E(\mathcal{X}^*)$.*
2. *If $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$, then $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Corollary 3.** *If $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu)$ for each $\mu \notin \sigma_{SF_+}(\mathcal{T})$ and $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$, then we have the following equalities:* $\sigma_{SF_+}(\mathcal{T}) = \sigma_e(\mathcal{T}) = \sigma_W(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_-^+}(\mathcal{T}) = \sigma_{ub}(\mathcal{T}) = \sigma_b(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}) = \sigma_a(\mathcal{T}) = \sigma_D(\mathcal{T}) = \sigma_{SBF_+}(\mathcal{T}) = \sigma_{BF}(\mathcal{T}) = \sigma_{SBF_+^-}(\mathcal{T}) = \sigma_{BW}(\mathcal{T}) = \sigma_{LD}(\mathcal{T}) \overset{*}{=} \sigma_{RD}(\mathcal{T}) = \sigma_{lb}(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_-}(\mathcal{T})$.

**Proof.** The equalities before $\overset{*}{=}$ are followed by [24] (Corollary 2.18). By hypothesis and Theorem 2, $\mathcal{T}^* \in V_E(\mathcal{X}^*)$, so from [24] (Theorem 2.10), $\sigma_{SF_-}(\mathcal{T}) = \sigma_e(\mathcal{T})$. Hence, we deduce that equalities after $\overset{*}{=}$ are valid (see [14] (Theorem 2.27)). □

The exploration of the perturbations is very important in the spectral theory of the linear operators, because through them is studied the behavior of the spectral properties when the operators undergo a small change. This topic has occupied a place in applied mathematics, and over time has evolved into a self-interested mathematical discipline. An outstanding aspect of conducting studies of operators under commuting perturbations is that these could be used in harmonic analysis; for example, concerning the Wiener–Pitt phenomenon. In what follows, we mainly analyze the stable character of property $(V_E)$ through a perturbation that commutes with the operator and is of finite range (resp. Riesz, compact, algebraic). We say that $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ is *isoloid* if each $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T})$ is an eigenvalue of $\mathcal{T}$; while $\mathcal{T}$ is called *finitely isoloid* if each $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T})$ is an eigenvalue of $\mathcal{T}$ with finite multiplicity.

**Theorem 3.** *If $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ is isoloid and $\mathcal{F}$ is a finite rank operator such that $\mathcal{T}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{T}$, then $\mathcal{T} + \mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** By hypothesis and [14] (Theorem 2.8), $\mathcal{T}$ has the generalized Weyl's theorem and $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = \sigma_{BW}(\mathcal{T})$. Since $\mathcal{T}$ is isoloid, by [25] (Theorem 3.4), $\mathcal{T} + \mathcal{F}$ has the generalized Weyl's theorem. Moreover, as $\mathcal{F}$ is of finite rank, by [17] (Theorem 3.39), $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T} + \mathcal{F}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$, and by [26] (Theorem 3.2), we get that $\sigma_{BW}(\mathcal{T}) = \sigma_{BW}(\mathcal{T} + \mathcal{F})$. Thus, $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T} + \mathcal{F}) = \sigma_{BW}(\mathcal{T} + \mathcal{F})$, and again, by [14] (Theorem 2.8), we deduce that $\mathcal{T} + \mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$. □

**Corollary 4.** *If $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ is quasi-nilpotent, which has 0 as an eigenvalue, and $\mathcal{F}$ is of finite rank such that $\mathcal{T}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{T}$, then $\mathcal{T} + \mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** From hypothesis $\mathcal{T}$ is isoloid, so the proof is completed using Theorem 3. □

According to [27] (Theorem 7), $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ satisfies $\sigma_{ub}(\mathcal{T}+\mathcal{R}) = \sigma_{ub}(\mathcal{T})$ for each $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ such that $\mathcal{R}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{R}$ if and only if $\mathcal{R}$ is a Riesz operator. In addition, $\sigma_b(\mathcal{T}+\mathcal{R}) = \sigma_b(\mathcal{T})$ by [27] (Corollary 7). In the case that $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$, $\sigma_{ub}(\mathcal{T}) = \sigma_b(\mathcal{T})$ and $\sigma_{ub}(\mathcal{T}+\mathcal{R}) = \sigma_b(\mathcal{T}+\mathcal{R})$. In particular, these results hold for finite rank operators.

**Theorem 4.** *Let $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ and $\mathcal{F}$ be of finite rank such that $\mathcal{T}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{T}$. The following are equivalent:*

1. $\mathcal{T}+\mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$.
2. $E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) = \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F})$.
3. $E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) \cap \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \Pi_+^0(\mathcal{T})$.

**Proof.** (1)⇔(2) Since $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ if and only if $E(\mathcal{T}) = \Pi_+^0(\mathcal{T})$ and $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = \sigma_{ub}(\mathcal{T})$ (see [14] (Theorem 2.23)), the proof is completed using the fact that for finite rank operators, $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{F}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$, see [17] (Theorem 3.39).

(2)⇔(3) Assume that $E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) = \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. If $\mu \in E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) \cap \sigma(\mathcal{T})$, then $\mu \in \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F}) \cap \sigma(\mathcal{T})$, whereby $\mu \notin \sigma_{ub}(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. However, we have $\sigma_{ub}(\mathcal{T}+\mathcal{F}) = \sigma_{ub}(\mathcal{T})$, so $\mu \in \Pi_+^0(\mathcal{T})$. Therefore, $E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) \cap \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \Pi_+^0(\mathcal{T})$. Reciprocally, since $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$, $\sigma_{ub}(\mathcal{T}+\mathcal{F}) = \sigma_b(\mathcal{T}+\mathcal{F})$ and hence, $\Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F}) = \Pi^0(\mathcal{T}+\mathcal{F}) \subseteq E(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. Thus, it remains to show that $E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) \subseteq \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. If $\mu \in E(\mathcal{T}+\mathcal{F})$, then $\mu \in \sigma(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. First, we note that $\mathcal{F}$ is Riesz, and this way $\sigma_{ub}(\mathcal{T}) = \sigma_{ub}(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. Now, we consider two cases.

Case 1: $\mu \notin \sigma(\mathcal{T})$.

Case 2: $\mu \in \sigma(\mathcal{T})$.

For Case 1, obviously $\mu \notin \sigma_{ub}(\mathcal{T}) = \sigma_{ub}(\mathcal{T}+\mathcal{F})$, whereby $\mu \in \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. For Case 2, we have $\mu \in E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) \cap \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \Pi_+^0(\mathcal{T})$ and so, $\mu \notin \sigma_{ub}(\mathcal{T}) = \sigma_{ub}(\mathcal{T}+\mathcal{F})$, which implies that $\mu \in \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F})$ again. Thus, by both cases, if $\mu \in E(\mathcal{T}+\mathcal{F})$ then $\mu \in \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F})$ and hence, we deduce that $E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) = \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. □

**Remark 2.** The equivalence (1)⇔(2) of Theorem 4 holds if we replace $\mathcal{F}$ by $\mathcal{K} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ being compact and commuting with $\mathcal{T}$.

**Corollary 5.** *Let $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu)$ for each $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$ and $\mathcal{F}$ be of finite rank commuting with $\mathcal{T}$. Then, $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ is equivalent to $\mathcal{T}+\mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** Since $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$, $E(\mathcal{T}) = \Pi_+^0(\mathcal{T})$, thus $E(\mathcal{T}) \cap \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \Pi_0^+(\mathcal{T})$. By [28] (Lemma 2.1), $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{F})$, which implies that $E(\mathcal{T}) = E(\mathcal{T}+\mathcal{F})$. Therefore, $E(\mathcal{T}+\mathcal{F}) \cap \sigma(\mathcal{T}) \subseteq \Pi_+^0(\mathcal{T})$, and by Theorem 4, $\mathcal{T}+\mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$. Reciprocally, assume that $\mathcal{T}+\mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$. So, using symmetry, we have $\mathcal{T} = (\mathcal{T}+\mathcal{F}) - \mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$. □

It is well known that if $\mathcal{N}$ is a nilpotent operator that commutes with $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, we have $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = \sigma(\mathcal{T})$ and $E(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = E(\mathcal{T})$, see [29]. According to this, we establish the next result.

**Theorem 5.** *Assume that $\mathcal{N} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ is nilpotent and commutes with $\mathcal{T}$. Then, $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ is equivalent to $\mathcal{T}+\mathcal{N} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** Assume that $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$. By [30] (Theorem 2.13), $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$. Since $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = \sigma(\mathcal{T})$ and $E(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = E(\mathcal{T})$, then $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{N}) \setminus \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = E(\mathcal{T}+\mathcal{N})$ and hence, $\mathcal{T}+\mathcal{N} \in V_E(\mathcal{X})$. The converse is obtained by symmetry. □

In the following example we show that the hypothesis of commutativity cannot be omitted from Theorem 5.

**Example 2.** Let $\mathcal{T},\mathcal{N} \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ be defined as

$$\mathcal{T}(a_1, a_2, \dots) = \left(0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots\right) \text{ and } \mathcal{N}(a_1, a_2, \dots) = \left(0, \frac{-a_1}{2}, 0, 0, \dots\right).$$

Obviously $\mathcal{N}$ is nilpotent and $\mathcal{N}\mathcal{T} \neq \mathcal{T}\mathcal{N}$. As $\sigma(\mathcal{T}) = \{0\} = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$ and $E(\mathcal{T}) = \emptyset$, we have $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$. However, $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = \{0\}$ and $E(\mathcal{T}+\mathcal{N}) = \{0\}$, whereby $\mathcal{T}+\mathcal{N} \notin V_E(\mathcal{X})$.

**Corollary 6.** *Let $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ be of finite rank and commuting with a quasi-nilpotent operator $\mathcal{T}$ such that $0 \notin \sigma_p(\mathcal{T})$. Then, $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ is equivalent to $\mathcal{T}+\mathcal{F} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** The hypothesis about $\mathcal{T}$ and $\mathcal{F}$ implies that $\mathcal{F}$ is nilpotent. Indeed, $\mathcal{T}$ is injective because $0 \notin \sigma_p(\mathcal{T})$. As $\mathcal{F}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{F}$ and $\mathcal{T}$ is quasi-nilpotent, $\mathcal{T}\mathcal{F}$ is quasi-nilpotent and of finite rank. Thus, $\mathcal{T}\mathcal{F}$ is nilpotent, and as $\mathcal{T}$ is injective, we have that $\mathcal{F}$ is nilpotent. Therefore, the proof is completed using Theorem 5. □

The stable character of property $(V_E)$ seen in Theorem 5 does not hold for compact or quasi-nilpotent operators.

**Example 3.** Let us consider the operators $\mathcal{T}$ and $\mathcal{K}$ on $\ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ given by

$$\mathcal{T} = 0 \oplus S \quad \text{and} \quad \mathcal{K} = \mathcal{S} \oplus 0,$$

with $\mathcal{S}$ defined on $\ell^2(\mathbb{N})$ as $S(a_1, a_2, \dots) = (\frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$. Note that $\mathcal{K}$ is a compact quasi-nilpotent operator and $\mathcal{T}\mathcal{K} = \mathcal{K}\mathcal{T} = 0$. On the other hand, $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$, because $\sigma(\mathcal{T}) = \{0\} = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$ and $E(\mathcal{T}) = \emptyset$. However, $\mathcal{T}+\mathcal{K} = S \oplus \mathcal{S} \notin V_E(\mathcal{X})$, because $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{K}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{K}) = E(\mathcal{T}+\mathcal{K}) = \{0\}$.

**Theorem 6.** *If $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ is quasi-nilpotent and commutes with the operator $\mathcal{T}$ such that $\operatorname{Int}(\Delta_+(\mathcal{T})) = \operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$, then $\mathcal{T}+\mathcal{Q} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** By [31] (Corollary 3.24), $\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{Q}) = \sigma_a(\mathcal{T})$ and $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{T})$. Since $\mathcal{Q}$ is quasi-nilpotent, it follows that $\mathcal{Q}$ is of Riesz, and from [31] (Corollary 3.18), we get that $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{Q}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$. Thus, $\operatorname{Int}(\Delta_+(\mathcal{T}+\mathcal{Q})) = \operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{Q}) = \emptyset$ and by Corollary 1, $\mathcal{T}+\mathcal{Q} \in V_E(\mathcal{X})$. □

**Corollary 7.** *Let $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ commute with $\mathcal{T}$ and suppose that there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{S}^k$ is an operator of finite rank. If $\operatorname{Int}(\Delta_+(\mathcal{T})) = \operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$, then $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** We have $\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \sigma_a(\mathcal{T})$ by [31] (Lemma 5.106), and $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{T})$ by [31] (Theorem 3.27). Since $\mathcal{S}$ is a Riesz operator, the remainder of the proof follows as the proof of Theorem 6. □

The proof of the following theorem is obtained using the stability of $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$ under Riesz commuting perturbations, see [31] (Corollary 3.18).

**Theorem 7.** *Let $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ be finitely isoloid and let $\mathcal{S}$ be a Riesz operator such that $\mathcal{T}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{T}$ and $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. Then, $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in V_E(\mathcal{X})$ is equivalent to $E(\mathcal{T}) = E(\mathcal{T}+\mathcal{S})$.*

**Theorem 8.** *Let $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ and let $\mathcal{S}$ be a Riesz operator such that $\mathcal{T}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{T}$. Then, $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in V_E(\mathcal{X})$ is equivalent to $E(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{S})$.*

**Proof.** If $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in V_E(\mathcal{X})$, then $E(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. For the converse, suppose that $E(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \Pi_+^0(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. As $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$, it has the $a$-Browder's theorem, so from [5] (Corollary 2.3), $\mathcal{T}+\mathcal{S}$ has the $a$-Browder's theorem. Consequently, $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in V_E(\mathcal{X})$. □

**Theorem 9.** *If $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ is isoloid and $\mathcal{S}$ is a Riesz operator such that $\mathcal{TS} = \mathcal{ST}$ and $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S})$, then $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** If $\mathcal{S}$ is Riesz, then from [31] (Corollary 3.18), we have $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. Let $\mu \in E(\mathcal{T})$. As $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$, $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{S})$ and so, $(\mu I - \mathcal{T} - \mathcal{S})(\mathcal{X})$ is closed. We also have $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}) = \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S}) \subseteq \operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{S})$, whereby $\alpha(\mu I - \mathcal{T} - \mathcal{S}) > 0$, so $E(\mathcal{T}) \subseteq E(\mathcal{T}+\mathcal{S})$ and hence $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S}) \setminus \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{S}) \subseteq E(\mathcal{T}+\mathcal{S})$, because $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. For the other inclusion, let $\mu \in E(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. Then $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T})$ and as $\mathcal{T}$ is isoloid, $\alpha(\mu I - \mathcal{T}) > 0$ and $\mu \in E(\mathcal{T})$. Consequently, $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{S})$ and hence, $\mu \in \sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S}) \setminus \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. Thus, $E(\mathcal{T}+\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S}) \setminus \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. □

Recall that $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ is *algebraic* [31] (Section 3.5) if $p(\mathcal{T}) = 0$ for some complex nontrivial polynomial $p$. Obviously, each nilpotent operator is algebraic. According to [31] (Theorem 3.72), if $\mathcal{T}$ is an algebraic operator and $\alpha(p(\mathcal{T})) < \infty$ for each polynomial $p$, then there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{T}^k$ has finite rank and hence, $\mathcal{T}$ is Riesz. In addition, $\mathcal{T}$ being algebraic is equivalent to $\mathcal{T}^*$ being algebraic. Given $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ and an open subset $\mathcal{O}$ of $\mathbb{C}$, we put

$$\mathcal{H}(\sigma(\mathcal{T})) := \{f : \mathcal{O} \to \mathbb{C} \mid f \text{ is a analytic function and } \sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{O}\}.$$

**Theorem 10.** *Suppose that $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{S}$ is algebraic such that $\mathcal{ST} = \mathcal{TS}$ and $f \in \mathcal{H}(\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{S}))$. Then:*

1. *If $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$ and $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \emptyset$, then $f(\mathcal{T}+\mathcal{S}) \in V_E(\mathcal{X})$.*
2. *If $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X})$ and $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \emptyset$, then $f(\mathcal{T}^*+\mathcal{S}^*) \in V_E(\mathcal{X}^*)$.*

**Proof.** (1) Suppose that $\mathcal{S}$ is an algebraic operator. Then, $\mathcal{S}^*$ is algebraic and since $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$, by [32] (Theorem 2.3) it follows that $\mathcal{T}^*+\mathcal{S}^* = (\mathcal{T}+\mathcal{S})^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$. Thus, by [17] (Theorem 2.40), we have $f(\mathcal{T}^*+\mathcal{S}^*) \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$, and as $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \emptyset$, by Corollary 2, we get that $f(\mathcal{T}+\mathcal{S}) \in V_E(\mathcal{X})$.

(2) Can be proved similarly to (1). □

**Theorem 11.** *Let $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X})$ and $f \in \mathcal{H}(\sigma(\mathcal{T}))$. Then:*

1. *If $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}) = \emptyset$ and $\mathcal{Q}$ is quasi-nilpotent such that $\mathcal{QT} = \mathcal{TQ}$, then both $f(\mathcal{T})^*+\mathcal{Q}^*$ and $f(\mathcal{T}^*+\mathcal{Q}^*)$ belong to $V_E(\mathcal{X}^*)$.*
2. *If $\operatorname{Iso}\sigma_a(f(\mathcal{T})+\mathcal{S}) = \emptyset$ and $\mathcal{S}$ is algebraic (or Riesz) such that $\mathcal{ST} = \mathcal{TS}$, then $f(\mathcal{T})^*+\mathcal{S}^*$ belongs to $V_E(\mathcal{X}^*)$.*

**Proof.** (1) If $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X})$, then $f(\mathcal{T}) \in \Sigma(\mathcal{X})$, by [17] (Theorem 2.40). Since $\mathcal{Q}$ is quasi-nilpotent and commutes with $\mathcal{T}$, from [17] (Corollary 2.12), we have that both $\mathcal{T}+\mathcal{Q}$ and $f(\mathcal{T})+\mathcal{Q}$ belong to $\Sigma(\mathcal{X})$. By [31] (Corollary 3.24), $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{T})$ and so $f(\mathcal{T}+\mathcal{Q}) \in \Sigma(\mathcal{X})$. Observe that $\operatorname{Iso}\sigma_a(f(\mathcal{T})) = \emptyset$. Again, by using [31] (Corollary 3.24), we have $\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{Q}) = \sigma_a(\mathcal{T})$ and $\sigma_a(f(\mathcal{T})+\mathcal{Q}) = \sigma_a(f(\mathcal{T}))$, which implies that $\operatorname{Iso}\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{Q}) = \emptyset$ and hence, $\operatorname{Iso}\sigma_a(f(\mathcal{T}+\mathcal{Q})) = \operatorname{Iso}\sigma_a(f(\mathcal{T})+\mathcal{Q}) = \emptyset$. By Corollary 2, we conclude that both $f(\mathcal{T})^*+\mathcal{Q}^*$ and $f(\mathcal{T}^*+\mathcal{Q}^*)$ belong to $V_E(\mathcal{X}^*)$.

(2) Since $\mathcal{S}$ is algebraic (resp. Riesz) commuting with $\mathcal{T}$ and $f(\mathcal{T}) \in \Sigma(\mathcal{X})$, by [33] (Theorem 2.14) (resp. [31] (Theorem 2.129)) we get that $f(\mathcal{T})+\mathcal{S}$ belongs to $\Sigma(\mathcal{X})$. Thus, by Corollary 2, $f(\mathcal{T})^*+\mathcal{S}^*$ belongs to $V_E(\mathcal{X}^*)$. □

We say that $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ is called *polaroid* if $\operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}) = \Pi(\mathcal{T})$; while $\mathcal{T}$ is called *hereditary polaroid* if each part of $\mathcal{T}$ is polaroid, where a part of $\mathcal{T}$ means the restriction of $\mathcal{T}$ to a closed $\mathcal{T}$-invariant subspace. Let $\mathcal{H}_{nc}(\sigma(\mathcal{T})) := \{f \in \mathcal{H}(\sigma(\mathcal{T})) :\ f$ is non-constant on each component of its domain.

**Theorem 12.** *Suppose that $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{S}$ is algebraic commuting with $\mathcal{T}$ and $f \in \mathcal{H}_{nc}(\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{K}))$. If $\mathcal{T}+\mathcal{K}$ is finitely isoloid, then we have:*

1. *If $\mathcal{T}^*$ is hereditarily polaroid, then $f(\mathcal{T}+\mathcal{K}) \in V_E(\mathcal{X})$.*
2. *If $\mathcal{T}$ is hereditarily polaroid, then $f(\mathcal{T}^*+\mathcal{K}^*) \in V_E(\mathcal{X}^*)$.*

**Proof.** (1) Since $\mathcal{T}^*$ is hereditarily polaroid, $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$ by [31] (Theorem 4.31), and as $\mathcal{K}^*$ is algebraic, by [32] (Theorem 2.3), we get that $\mathcal{T}^*+\mathcal{K}^* = (\mathcal{T}+\mathcal{K})^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$. In addition, $\mathcal{T}^*$ is polaroid, which is equivalent to saying that $\mathcal{T}$ is polaroid, which implies, by [31] (Theorem 4.24), that $\mathcal{T}+\mathcal{K}$ is polaroid, or equivalently, $f(\mathcal{T}+\mathcal{K})$ is polaroid, by [31] (Theorem 4.19). Now, $\mathcal{T}+\mathcal{K}$ polaroid and $(\mathcal{T}+\mathcal{K})^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*)$ entails that $f(\mathcal{T}+\mathcal{K})$ satisties properties $(w)$ and $(gw)$, by [34] (Theorem 3.12). Since $\mathcal{T}+\mathcal{K}$ is finitely isoloid and polaroid, $\sigma_{LD}(\mathcal{T}+\mathcal{K}) = \sigma_b(\mathcal{T}+\mathcal{K})$ and hence, $\sigma_{LD}(f(\mathcal{T}+\mathcal{K})) = f(\sigma_{LD}(\mathcal{T}+\mathcal{K})) = f(\sigma_b(\mathcal{T}+\mathcal{K})) = \sigma_b(f(\mathcal{T}+\mathcal{K}))$. However, $f(\mathcal{T}+\mathcal{K})$ polaroid implies, by [15] (Theorem 4.12), that $f(\mathcal{T}+\mathcal{K})$ satisfies property $(V_\Pi)$, or equivalently, $f(\mathcal{T}+\mathcal{K}) \in V_E(\mathcal{X})$, by [15] (Theorem 4.5).

(2) This is proved similar to (1). □

Following the proof of [32] (Theorem 2.3) we can get:

**Lemma 1.** *Let $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ be such that $\mathcal{T}\mathcal{S} = \mathcal{S}\mathcal{T}$. If $\mathcal{S}$ is algebraic, we have:*

1. *If $\mu \in \sigma(\mathcal{S})$ and $\mathcal{T}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu)$, then $\mathcal{T}^*+\mathcal{S}^* \in \Sigma(\mathcal{X}^*, \mu)$.*
2. *If $\mu \in \sigma(\mathcal{S})$ and $\mathcal{T} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu)$, then $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in \Sigma(\mathcal{X}, \mu)$.*

**Theorem 13.** *Suppose that $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{S}$ is algebraic such that $\mathcal{S}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{S}$ and $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) \bigcap \sigma(\mathcal{S}) = \emptyset$. If $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ with $\mathrm{Iso}\,\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \emptyset$ and $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{S})$, then $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in V_E(\mathcal{X})$.*

**Proof.** If $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$, then $\mathcal{T}^*$ satisfies SVEP at $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$. Since $\mathcal{S}$ is algebraic and $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}) \bigcap \sigma(\mathcal{S}) = \emptyset$, from Lemma 1 it follows that $\mathcal{T}^*+\mathcal{S}^* = (\mathcal{T}+\mathcal{S})^*$ satisfies SVEP at $\mu \notin \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{S})$. Thus, by Theorem 1, we conclude that $\mathcal{T}+\mathcal{S}$ satisfies property $(V_E)$. □

**Theorem 14.** *Suppose that $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, $\mathcal{S}$ is algebraic such that $\mathcal{S}\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{S}$ and $\sigma_{SF_-^+}(\mathcal{T}) \bigcap \sigma(\mathcal{S}) = \emptyset$. If $\mathcal{T}^* \in V_E(\mathcal{X}^*)$ with $\mathrm{Iso}\,\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{S}) = \emptyset$ and $\sigma_{SF_-^+}(\mathcal{T}) = \sigma_{SF_-^+}(\mathcal{T}+\mathcal{S})$, then $\mathcal{T}+\mathcal{S} \in V_E(\mathcal{X})$.*

## 4. Property $(V_E)$ under Tensor Products

Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be two Banach spaces and $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ be the algebraic completion (in some reasonable uniform cross norm) of the tensor product of $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$. The tensor product of $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ on $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ is the operator defined as $(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S})(\sum_i x_i \otimes y_i) = \sum_i \mathcal{T}x_i \otimes \mathcal{S}y_i$ for each $\sum_i x_i \otimes y_i \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$. In this section, we analyze some conditions that allow property $(V_E)$ to be transmitted from the tensor factors $\mathcal{T}$ and $\mathcal{S}$ to the tensor product $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ and vice versa. For this, we consider the following three lemmas.

**Lemma 2** ([35], Theorem 3)**.** *If $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$ have the Browder's theorem, then the following statements are equivalent:*

1. *$\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ has the Browder's theorem.*
2. *$\sigma_W(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{T})\sigma_W(\mathcal{S}) \cup \sigma_W(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S})$.*

**Lemma 3.** *If $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y})$, then*

$$\begin{aligned} \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}) &\subseteq \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S}) \cup \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S})\sigma(\mathcal{T}) \\ &\subseteq \sigma_b(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S}) \cup \sigma_b(\mathcal{S})\sigma(\mathcal{T}) = \sigma_b(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}). \end{aligned}$$

**Proof.** By virtue of [35] (Lemma 5), $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) \subseteq \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})\sigma_a(\mathcal{S}) \cup \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S})\sigma_a(\mathcal{T})$. Thus, the proof follows from the facts that $\sigma_a(\mathcal{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{R})$ and $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{R}) \subseteq \sigma_b(\mathcal{R})$ for every operator $\mathcal{R}$. $\square$

**Lemma 4.** *If $\mathcal{T}\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ are isoloid and $0\notin\sigma_p(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$, then*

$$E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) \subseteq E(\mathcal{T})E(\mathcal{S}).$$

**Proof.** Since $\mathcal{T}\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ are isoloid, then $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}$ is an isoloid operator. According to this, we have $E(\mathcal{T}) = \mathrm{Iso}\sigma(\mathcal{T})$, $E(\mathcal{S}) = \mathrm{Iso}\sigma(\mathcal{S})$ and $E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) = \mathrm{Iso}\sigma(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$.

Suppose that $\mathrm{Iso}\sigma(\mathcal{T}) \subseteq \{0\}$ or $\mathrm{Iso}\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \{0\}$. By [36] (Proposition 3), $\mathrm{Iso}\sigma(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) \subseteq \{0\}$, and as $0\notin\sigma_p(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$, whereby $E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) = \emptyset$, and so $E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) \subseteq E(\mathcal{T})E(\mathcal{S})$ holds. Now, suppose that $\mathrm{Iso}\sigma(\mathcal{T}) \nsubseteq \{0\}$ and $\mathrm{Iso}\sigma(\mathcal{T}) \nsubseteq \{0\}$. Then, by [36] (Proposition 3(a)), $E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) \subseteq E(\mathcal{T})E(\mathcal{S})$. $\square$

The following Theorem was proved in [13], but here we give a simpler proof.

**Theorem 15.** *Let $\mathcal{T}\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ satisfy property $(Sb)$. Then, $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}$ satisfies property $(Sb)$, which is equivalent to*

$$\sigma_{SBF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{T})\sigma_{SBF_+^-}(\mathcal{S}) \cup \sigma_{SBF_+^-}(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S}).$$

**Proof.** It is well known that properties $(Sb)$ and $(V_\Pi)$ are equivalent (see [3] (Corollary 2.5)). In addition, property $(V_\Pi)$ implies the equality of the Browder spectrum and the upper semi $B$-Weyl spectrum (see [3] (Theorem 2.27)). Thus, the proof follows from the identity $\sigma_b(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{T})\sigma_b(\mathcal{S}) \cup \sigma_b(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S})$ (see [37] (Theorem 4.2(a))). $\square$

**Theorem 16.** *Let $\mathcal{T}\in V_E(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S}\in V_E(\mathcal{Y})$ be two isoloid operators and $0\notin\sigma_p(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$. Then, $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}\in V_E(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$ is equivalent to*

$$\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S}) \cup \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S})\sigma(\mathcal{T}).$$

**Proof.** Since property $(V_E)$ implies the equality between upper semi-Weyl and Browder spectra (see [3], Theorem 2.27), the direct sense is immediate from [37] (Theorem 3.5).

Conversely, suppose that the identity

$$\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) = \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S}) \cup \sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S})\sigma(\mathcal{T}) \tag{1}$$

holds. Then, again by [3] (Theorem 2.27), we get that

$$\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) = \sigma_b(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S}) \cup \sigma_b(\mathcal{S})\sigma(\mathcal{T}) = \sigma_b(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}).$$

Thus, we obtain that $\Delta_+(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) = \Pi^0(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) \subseteq E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$. However, we will show that $E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) \subseteq \Delta_+(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$. If $\mu\in E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$, then $\mu\in E(\mathcal{T})E(\mathcal{S})$ by Lemma 4. Hence, if $\mu = \xi\nu$ with $\xi\in\sigma(\mathcal{T})$ and $\nu\in\sigma(\mathcal{S})$, then $\xi\in\sigma(\mathcal{T})\setminus\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})$ and $\nu\in\sigma(\mathcal{S})\setminus\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S})$, and since the identity (1) holds, we get that $\mu\in\Delta_+(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$. Hence, $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}\in V_E(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$. $\square$

Recall that, if $\mathcal{A}_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{A}_2\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ are quasinilpotent commuting with $\mathcal{T}$ and $\mathcal{S}$, respectively, then

$$(\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2) = (\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) + \mathcal{Q},$$

where $\mathcal{Q} = \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{S} + \mathcal{T}\otimes\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$ is quasinilpotent.

**Theorem 17.** *Let $\mathcal{A}_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{A}_2\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ be quasinilpotent commuting with $\mathcal{T}$ and $\mathcal{S}$, respectively. If $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}\in V_E(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$ is isoloid, then $(\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2)\in V_E(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$.*

**Proof.** We know that

$$\sigma((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))=\sigma(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}),$$
$$\sigma_{SF_+^-}((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))=\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}).$$

We also have that an operator satisfies SVEP if and only if any perturbation of it by a commuting quasinilpotent operator satisfies SVEP. Assume that $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}\in V_E(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$. Then

$$\begin{aligned}E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) &= \sigma(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})\setminus\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})\\ &= \sigma((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))\setminus\sigma_{SF_+^-}((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2)).\end{aligned}$$

We will show that $E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})=E((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))$. Indeed, if $\mu\in E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$, then $\mu\in\sigma((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))\setminus\sigma_{SF_+^-}((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))$, and also $\mu\in\operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$. Since $\mu\in\operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$ implies that $(\mathcal{T}^*+\mathcal{A}_1^*)\otimes(\mathcal{S}^*+\mathcal{A}_2^*)$ satisfies SVEP at $\mu$, if follows that $\mu\notin\sigma_W((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))$ and $\mu\in\operatorname{Iso}\sigma((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))$. Hence, $\mu\in E((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))$ and so, $E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})\subseteq E((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))$. To show the inclusion $E((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))\subseteq E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$, let $\mu\in E((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))$. Then $\mu\in\operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$, and as $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}$ is isoloid, $\mu\in E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$. Therefore, $E((\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2))\subseteq E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$ and consequently $(\mathcal{T}+\mathcal{A}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{A}_2)\in V_E(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$. □

**Theorem 18.** *Let $\mathcal{T}\in V_E(\mathcal{X})$ and $\mathcal{S}\in V_E(\mathcal{Y})$ be two isoloid operators and let $\mathcal{B}_1\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$ and $\mathcal{B}_2\in\mathcal{L}(\mathcal{Y})$ be two Riesz operators commuting with $\mathcal{T}$ and $\mathcal{S}$, respectively. Suppose that $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)=\sigma(\mathcal{T})$, $\sigma(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)=\sigma(\mathcal{S})$ and $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}\in V_E(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$. The following are equivalent:*

1. *a-Browder's theorem transfers from $\mathcal{T}+\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{S}+\mathcal{B}_2$ to their tensor product.*
2. *$(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)\in V_E(\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y})$.*

**Proof.** First of all, let us observe that according to the hypothesis and Theorem 9, we have that both $\mathcal{T}+\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{S}+\mathcal{B}_2$ satisfy property $(V_E)$, which implies that $\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)=\sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)$, $\sigma(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)=\sigma_a(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)$, $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)=\sigma_b(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)$ and $\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)=\sigma_b(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)$. In addition, as $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ and $\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}$ satisfy property $(V_E)$, we get that

$$\begin{aligned}\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) &= \sigma_b(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})=\sigma(\mathcal{T})\sigma_b(\mathcal{S})\cup\sigma_b(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S})\\ &= \sigma(\mathcal{T})\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S})\cup\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T})\sigma(\mathcal{S})\\ &= \sigma(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\sigma_{SF_+^-}(S+\mathcal{B}_2)\cup\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\sigma(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2).\end{aligned}$$

Now, we will prove the required equivalences in the theorem.

(1)⇒ (2) Assume that $a$-Browder's theorem transfers from $\mathcal{T}+\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{S}+\mathcal{B}_2$ to $(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)$. Then, from the above and by [11] (Lemma 1), we have

$$\begin{aligned}\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S}) &= \sigma(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)\cup\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\sigma(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)\\ &= \sigma_a(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)\cup\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\sigma_a(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)\\ &= \sigma_{SF_+^-}((\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2))\end{aligned}$$

and

$$E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})=\sigma((\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2))\setminus\sigma_{SF_+^-}((\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)).$$

Thus, to conclude this part of the proof, we will show that $E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})=E((\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\otimes(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2))$ holds. Let $\mu\in E(\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})$. Then, there exist $\xi\in\sigma(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)\setminus\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)$ and $\nu\in\sigma(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)\setminus\sigma_{SF_+^-}(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)$ with $\mu=\xi\nu$. As both $\mathcal{T}+\mathcal{B}_1$ and $\mathcal{S}+\mathcal{B}_2$ satisfy property $(V_E)$, it follows that $\xi\in E(\mathcal{T}+\mathcal{B}_1)$ and $\nu\in E(\mathcal{S}+\mathcal{B}_2)$. Thus,

$\mu = \xi\nu \in \sigma_p(\mathcal{T} + \mathcal{B}_1)\sigma_p(\mathcal{S} + \mathcal{B}_2) \subseteq \sigma_p((\mathcal{T} + \mathcal{B}_1) \otimes (\mathcal{S} + \mathcal{B}_2))$, and using the fact that $\mu \in \sigma(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}) = \sigma((\mathcal{T} + \mathcal{B}_1) \otimes (\mathcal{S} + \mathcal{B}_2))$, we get that $\mu \in E((\mathcal{T} + \mathcal{B}_1) \otimes (\mathcal{S} + \mathcal{B}_2))$. Conversely, if $\mu \in E((\mathcal{T} + \mathcal{B}_1) \otimes (\mathcal{S} + \mathcal{B}_2))$ then $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma((\mathcal{T} + \mathcal{B}_1) \otimes (\mathcal{S} + \mathcal{B}_2))$. Since $\sigma((\mathcal{T} + \mathcal{B}_1) \otimes (\mathcal{S} + \mathcal{B}_2)) = \sigma(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S})$, we have $\mu \in \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S})$, and as $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ is isoloid (because both $\mathcal{T}$ and $\mathcal{S}$ are isoloid), it follows that $\mu \in E(\mathcal{T} \otimes \mathcal{S})$.

(2)$\Rightarrow$ (1) As property $(V_E)$ implies $a$-Browder's theorem, $(\mathcal{T} + \mathcal{B}_1) \otimes (\mathcal{S} + \mathcal{B}_2)$ has the Browder's theorem. As both $\mathcal{T} + \mathcal{B}_1$ and $\mathcal{S} + \mathcal{B}_2$ satisfy property $(V_E)$, this tells us that $a$-Browder's theorem is transmitted from $\mathcal{T} + \mathcal{B}_1$ and $\mathcal{S} + \mathcal{B}_2$ to $(\mathcal{T} + \mathcal{B}_1) \otimes (\mathcal{S} + \mathcal{B}_2)$. □

**Remark 3.** Let $\mathcal{X}$ be a Banach space and $\mathcal{M}$ be a proper closed subspace of $\mathcal{X}$. We consider the set $P(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = \{\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : \mathcal{T}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$ and there exists an integer $k \geq 1$ for which $\mathcal{T}^k(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{M}\}$. For every $\mathcal{T} \in P(\mathcal{X}, \mathcal{M})$, let $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ be the restriction of $\mathcal{T}$ on $\mathcal{M}$. According to the results established in [38], if $\mathcal{T} \in P(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ and $0 \notin \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T})$, then $\mathcal{T} \in V_E(\mathcal{X})$ is equivalent to $\mathcal{T}_{\mathcal{M}} \in V_E(\mathcal{M})$. Hence, if $\mathcal{T} \in P(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ and $0 \notin \operatorname{Iso}\sigma(\mathcal{T})$, then the results given in this work can be preserved from $\mathcal{T}$ to $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ and reciprocally.

## 5. Conclusions

The spectral property $(V_E)$ implies a range of spectral properties, including the classical Weyl's theorems, so this property is somewhat strong. Some necessary conditions were obtained that guarantee the stable character of property $(V_E)$ under the classic perturbations. Among other things, it was concluded that property $(V_E)$ is stable under commuting perturbations: nilpotent, of finite range "but the operator is isoloid", of Riesz "but the operator is isoloid and the spectrum of the operator coincides with the spectrum of the sum of the operator with the Riesz perturbation", and algebraic when the operator satisfies SVEP at all points of the spectrum of the algebraic perturbation. Finally, the tensor product between two operators that satisfy the property $(V_E)$ was analyzed and we concluded that under certain conditions it is stable for quasinilpotent (or Riesz) perturbations in the factors.

**Author Contributions:** Investigation, E.A., J.S. and L.V. All authors contributed equally to this manuscript. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

**Funding:** The research was funded by Escuela Superior Politécnica del Litoral.

**Institutional Review Board Statement:** Not applicable.

**Informed Consent Statement:** Not applicable.

**Data Availability Statement:** Not applicable.

**Conflicts of Interest:** The authors declare no conflicts of interest.

## References

1. Coburn, L.A. Weyl's theorem for nonnormal operators. *Mich. Math. J.* **1966**, *13*, 285–288.
2. Berkani, M.; Koliha, J. Weyl type theorems for bounded linear operators. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **2003**, *69*, 359–376.
3. Sanabria, J.; Vásquez, L.; Carpintero, C.; Rosas, E.; García, O. Strong variations of Weyl and Browder type theorems for direct sums and restrictions. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **2019**, *68*, 153–161.
4. Aponte, E.; Macías, J.; Sanabria, J.; Soto, J. *B*-Fredholm spectra of Drazin invertible operators and applications. *Axioms* **2021**, *10*, 111.
5. Oudghiri, M. Weyl's theorem and perturbations. *Integr. Equ. Oper. Theory* **2005**, *53*, 535–545.
6. Oudghiri, M. *a*-Weyl's theorem and perturbations. *Studia Math.* **2006**, *173*, 193–201.
7. Berkani, M.; Kachad, M. New Weyl-type Theorems-I. *Funct. Anal. Approx. Comput.* **2012**, *4*, 41–47.
8. Berkani, M.; Zariouh, H. Generalized *a*-Weyl's theorem and perturbations. *Funct. Anal. Approx. Comput.* **2010**, *2*, 7–18.
9. Aiena, P.; Triolo, S. Weyl type theorems on Banach spaces under compact perturbations. *Mediterr. J. Math.* **2018**, *15*, 126. https://doi.org/10.1007/s00009-018-1176-y.
10. Kubrusly, C.S.; Duggal, B.P. On Weyl's theorem for tensor products. *Glasg. Math. J.* **2013**, *55*, 139–144.
11. Duggal, B.P. Tensor products and property $(w)$. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **2011**, *60*, 23–30.
12. Rashid, M.H.M. Generalized Weyl's theorem and tensor product. *Ukr. Math. J.* **2013**, *64*, 1289–1296.

13. Rashid, M.H.M.; Prasad, T. Stability of versions of the Weyl-type theorems under the tensor product. *Ukr. Math. J.* **2016**, *68*, 612–624.
14. Sanabria, J.; Vásquez, L.; Carpintero, C.; Rosas, E.; García, O. On strong variations of Weyl type theorems. *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)* **2017**, *86*, 345–356.
15. Aponte, E.; Macías, J.; Sanabria, J.; Soto, J. Further characterizations of property $(V_\Pi)$ and some applications. *Proyecciones* **2020**, *39*, 1435–1456.
16. Aiena, P.; Aponte, E; Guillén, J. The Zariouh's property $(gaz)$ through localized SVEP. *Mat. Vesn.* **2020**, *72*, 314–326.
17. Aiena, P. *Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers*; Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, The Netherlands, 2004.
18. Sanabria, J.; Carpintero, C.; Rosas, E.; García, O. On property $(Saw)$ and others spectral properties type Weyl-Browder theorems. *Rev. Colomb. Mat.* **2017**, *51*, 153–171.
19. Finch, J.K. The single valued extension property on a Banach space. *Pac. J. Math.* **1975**, *58*, 61–69.
20. Aiena, P. Quasi-Fredholm operators and localized SVEP. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **2007**, *73*, 251–263.
21. Djordjević, S.V.; Han, Y.M. Browder's theorems and spectral continuity. *Glasg. Math. J.* **2000**, *42*, 479–486.
22. Rakočević, V. On a class of operators. *Mat. Vesn.* **1985**, *37*, 423–426.
23. Amouch, M.; Berkani, M. On the property $(gw)$. *Mediterr. J. Math.* **2008**, *5*, 371–378.
24. Aponte, E.; Jayanthy, N.; Vasanthakumar, P.; Quiroz, D. On the property $(Bv)$. *Adv. Dyn. Syst. Appl.* **2021**, *16*, 565–578.
25. Berkani, M.; Arroud, A. Generalized Weyl's theorem and hyponormal operators. *J. Aust. Math. Soc.* **2004**, *76*, 291–302.
26. García, O.; Carpintero, C.; Rosas, E.; Sanabria, J. Semi $B$-Fredholm and semi $B$-Weyl spectrum under perturbations. *Bol. Soc. Mat. Mex.* **2014**, *20*, 39–47.
27. Rakočević, V. Semi-Browder operators and perturbations. *Studia Math.* **1997**, *122*, 131–137.
28. Lee, W.Y.; Lee, S.H. On Weyl's theorem II. *Math. Jpn.* **1996**, *43*, 549–553.
29. Zeng, Q.; Jiang, Q.; Zhong, H. Spectra originated from semi-$B$-Fredholm theory and commuting perturbations. *Studia Math.* **2013**, *219*, 1–18.
30. Djordjević, D.S.; Djordjević, S.V. On $a$-Weyl's theorem. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **2000**, *44*, 361–369.
31. Aiena, P. *Fredholm and Local Spectral Theory II with Applications to Weyl-Type Theorems*; Springer International Publishing: Cham, Switzerland, 2018.
32. Aiena, P.; Neumann, M.M. On the stability of the localized single-valued extension property under commuting perturbations. *Proc. Am. Math. Soc.* **2012**, *141*, 2039–2050.
33. Aiena, P.; Guillén, J.; Peña, P. Property $(w)$ and perturbations of polaroid operators. *Lin. Alg. App.* **2008**, *428*, 1791–1802.
34. Aiena, P.; Aponte, E; Balzan, E. Weyl type theorems for left and right polaroid operators. *Integr. Equ. Oper. Theory* **2010**, *66*, 1–20.
35. Duggal, B.P.; Djordjević, S.V.; Kubrusly, C.S. On the $a$-Browder and $a$-Weyl spectra of tensor products. *Rend. Circ. Mat. Palermo* **2010**, *59*, 473–481.
36. Kubrusly, C.S.; Duggal, B.P. On Weyl and Browder spectra of tensor products. *Glasg. Math. J.* **2008**, *50*, 289–302.
37. Ichinose, T. Spectral properties of linear operators I. *Trans. Am. Math. Soc.* **1978**, *235*, 75–113.
38. Carpintero, C.; Malaver, A.; Rosas, E.; Sanabria, J. On the hereditary character of new strong variations of Weyl type theorems. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)* **2019**, *65*, 211–226.

**HOJA DE METADATOS**

# Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 1/6

| | |
|---|---|
| **Título** | VARIACIONES FUERTES DE LOS TEOREMAS DE WEYL Y DE BROWDER PARA OPERADORES LINEALES ACOTADOS |
| **Subtítulo** | |

**Autor(es)**

| **Apellidos y Nombres** | **Código CVLAC / e-mail** | |
|---|---|---|
| Vásquez M., Luis E. | CVLAC | 17.909.159 |
| | e-mail | eligiovm85@gmail.com |
| | e-mail | |
| | CVLAC | |
| | e-mail | |
| | e-mail | |
| | CVLAC | |
| | e-mail | |
| | e-mail | |
| | CVLAC | |
| | e-mail | |
| | e-mail | |

**Palabras o frases claves:**

Operador semi-Fredholm, Propiedad $(V_E)$, Producto tensorial, Perturbaciones, Sumas directas, Restricciones.

# Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 2/6

**Líneas y sublíneas de investigación:**

| Área | Subárea |
|---|---|
| Ciencias Básicas | Matemáticas |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**Resumen (abstract):**

En este trabajo, se utiliza el espectro superiormente semi-Weyl y el espectro de un operador $T \in L(X)$, con $X$ un espacio de Banach, para introducir la propiedad $(V_E)$. Un operador $T$ se dice que satisface la propiedad $(V_E)$ si el espectro del operador menos el espectro superiormente semi-Weyl es igual al conjunto de todos los puntos aislados del espectro que son autovalores de $T$. Se estudian las relaciones existentes entre la propiedad $(V_E)$ y otras propiedades tales como: la propiedad $(UW_E)$, la propiedad $(UW_{E_a})$, la propiedad $(W_E)$, el Teorema generalizado de Weyl, la propiedad $(Z_{E_a})$, la propiedad $(v)$, la propiedad $(z)$, la propiedad $(gv)$, la propiedad $(gz)$, la propiedad $(Sw)$, la propiedad $(Saw)$, la propiedad $(gaw)$, el teorema $a$-Browder, entre otras; y se dan condiciones al operador $T$ para que la propiedad $(V_E)$ sea equivalente a cada una de las propiedades espectrales antes mencionadas. También, se estudia la suma directa entre dos operadores $T$ y $S$ que satisfacen la propiedad $(V_E)$, proporcionando condiciones a los operadores para que la propiedad $(V_E)$ se preserve mediante la suma directa. Asimismo, para un operador $T \in L(X)$ se buscan algunas condiciones para que la restricción $T_n$ de $T$ satisfaga la propiedad $(V_E)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Además, se estudia la estabilidad de la propiedad $(V_E)$ bajo perturbaciones

que conmutan, es decir, si $T \in L(X)$ satisface la propiedad $(V_E)$ y $K \in L(X)$ es un operador que conmuta con $T$ (que satisface alguna condición adicional), entonces $T + K$ satisface la propiedad $(V_E)$. Por último, dados dos operadores $T \in L(X)$ y $S \in L(Y)$ que satisfacen la propiedad $(V_E)$, se estudia esta propiedad bajo el producto tensorial de $T$ y $S$, dando algunas condiciones suficientes a los operadores para garantizar que la propiedad $(V_E)$ sea trasmitida de factores tensoriales $T$ y $S$ a su producto tensorial.

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 3/6

**Contribuidores:**

| Apellidos y Nombres | ROL / Código CVLAC / e-mail | |
|---|---|---|
| Sanabria, José E. | ROL | CA ☐ AS ☐ TU ☒ JU ☐ |
| | CVLAC | 11.382.634 |
| | e-mail | jesanabri@gmail.com |
| | e-mail | |
| Rosas, Ennis R. | ROL | CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☒ |
| | CVLAC | 4.049.607 |
| | e-mail | ennisrafael@gmail.com |
| | e-mail | |
| Ramos, Julio C. | ROL | CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☒ |
| | CVLAC | 10.949.733 |
| | e-mail | julio.ramos.fernandez@gmail.com |
| | e-mail | |
| Bruzual, Ramón. | ROL | CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☒ |
| | CVLAC | 4.349.516 |
| | e-mail | ramonbruzual@gmail.com |
| | e-mail | |

**Fecha de discusión y aprobación:**

| Año | Mes | Día |
|---|---|---|
| 2022 | 07 | 25 |

**Lenguaje:** spa

# Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 4/6

**Archivo(s):**

| Nombre de archivo | Tipo MIME |
|---|---|
| TD-vasquezl.pdf | Aplication/pdf |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

**Alcance:**

**Espacial:** Nacional (Opcional)

**Temporal:** Temporal (Opcional)

**Título o Grado asociado con el trabajo:** Doctor en Matemática

**Nivel Asociado con el Trabajo:** Doctorado

**Área de Estudio:**

Matemáticas

**Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:**

Universidad de Oriente Núcleo de Sucre

**UNIVERSIDAD DE ORIENTE**
**CONSEJO UNIVERSITARIO**
**RECTORADO**

CU Nº0975

*Cumaná,* 04 AGO 2009

*Ciudadano*
***Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ***
*Vicerrector Académico*
*Universidad de Oriente*
*Su Despacho*

*Estimado Profesor Martínez:*

*Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda* ***"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC Nº 696/2009".***

*Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.*



*Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.*

*Cordialmente,*

**JUAN A. BOLAÑOS CURVELO**
*Secretario*

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA UNIVERSIDAD DE ORIENTE SECRETARÍA CONSEJO UNIVERSITARIO

*C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.*

*JABC/YGC/maruja*

Apartado Correos 094 / Telfs: 4008042 - 4008044 / 8008045 Telefax: 4008043 / Cumaná - Venezuela

## Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 6/6

**Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009):** "Los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo del Núcleo respectivo, quién deberá participarlo previamente al Consejo Universitario, para su autorización."

MSc. Luis Eligio Vásquez Márquez

Autor

Dr. José Eduardo Sanabria

Tutor