VICERRECTORADO ACADÉMICO
CONSEJO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Núcleo de: **SUCRE**
Postgrado en: **MATEMÁTICAS**

Nº 362

ACTA DE DEFENSA DE TRABAJO DE GRADO

Nosotros, **MALAVÉ RICHARD, ROSAS ENNIS, ASTUDILLO FRANKLIN Y RAMOS JULIO** integrantes del jurado designado por la Comisión Coordinadora del Postgrado en **MATEMÁTICAS** para examinar el Trabajo de Grado intitulado **"OPERADOR DE SUPERPOSICIÓN GENERALIZADO SOBRE ESPACIOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS"**, presentado por el (la): **MSc. RENNY MALAVÉ**, con cédula de identidad Nº **16.702.568**, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al Grado de: **DOCTOR EN MATEMÁTICAS**, hacemos constar que, hemos examinado el mismo he interrogado al postulante en sesión privada celebrada hoy, a las **10:30 a.m EN LA SALA DE CONFERENCIAS DEL RECTORADO II**.
Finalizada la defensa del trabajo por parte del postulante, el jurado decidió APROBARLO (Aprobarlo o Improbarlo) por considerar, sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que el mismo SE (se/no se) ajusta a los dispuesto y exigido en el Reglamento de Postgrado de la Institución.
En fe de lo anterior, se levanta la presente acta, que firmamos conjuntamente con el Coordinador del Postgrado en Matemáticas, en la ciudad de **CUMANÁ**, a los **Catorce** días del mes de **DICIEMBRE DEL AÑO DOS MIL DIECIOCHO.**

Jurado Examinador:

		C.I Nº / PASAPORTE		
Dr.	**RAMOS JULIO**	**10.949.733**	**(TUTOR)**	
Dr.	**MALAVÉ RICHARD**	**12.662.636**	**(JURADO)**	
Dr.	**ROSAS ENNIS**	**4.049.607**	**(JURADO)**	
Dr.	**ASTUDILLO FRANKLIN**	**16.703.685**	**(JURADO)**	

Coordinador (E) del Programa de Postgrado:

Dr. **LOPE MARÍN MATA**
Nombre y Apellido

Firma y Sello

COORDINACIÓN ESTUDIOS DE POSTGRADO
NÚCLEO DE SUCRE
MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
POSTGRADO EN MATEMÁTICAS

OPERADOR DE SUPERPOSICIÓN GENERALIZADO SOBRE ESPACIOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS

Autor: MSc. Renny José Malavé Malavé
Tutor: Dr. Julio César Ramos Fernández

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE DOCTOR EN MATEMÁTICAS

Cumaná, diciembre de 2018

A la memoria de mi abuela Francisca Malavé, una de las mujeres más nobles, cariñosas, alegres y fuertes que he conocido. Siempre te llevaré en mi corazón abuela Ika...

A mi madre Margarita Malavé.

A mi padre Renato Malavé.

A mi esposa Francided Acuña.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente a Dios todo poderoso, por darme cada día la fuerza, la voluntad y la sabiduría para así poder alcanzar esta meta. A él sea la gloria y la honra.

De manera muy especial al Doctor Julio César Ramos Fernández, por dedicar parte de su valioso tiempo y asesorarme en el desarrollo de esta Tesis Doctoral, así como también por haber sido mi tutor en oportunidades anteriores durante mis estudios Licenciatura y de Maestría. Sus valiosos consejos y sugerencias han sido de mucha ayuda. Le estaré siempre agradecido.

A la Universidad de Oriente, en particular al Postgrado de Matemáticas, por haberme permitido cursar allí mis estudios doctorales.

A mis compañeros de estudio Franklin Astudillo y Armando García, por su ánimo y apoyo en todo momento.

ÍNDICE

RESUMEN

En este trabajo se caracterizan los operadores de superposición acotados cuando actúan entre los espacios Bloch-logarítmicos $\mathbf{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ y entre los espacios μ-Bloch, donde la función peso μ satisface una condición de crecimiento. Los resultados obtenidos en esta investigación dieron lugar a los artículos [19] y [20], los cuales extienden o generalizan los que aparecen en [28], [22] y [12].

INTRODUCCIÓN

El matemático Victor Nemytskij (1900- 1967) realizó grandes contribuciones al estudio de la teoría de operadores en espacios de Banach, en particular en espacios de funciones medibles. Nemytskij definió una clase de operadores (por lo general no lineales) dando inicio formal al estudio del usualmente llamado operador de superposición (algunas veces también llamado operador de composición, de sustitución u operador de Nemytskij). En muchos problemas en diversas áreas de la matemática y de otras ciencias exactas y aplicadas, aparecen las ecuaciones funcionales, diferenciales e integrales y los operadores juegan un papel fundamental en la solución de dichas ecuaciones.

El operador de superposición aparece de manera natural en problemas relacionados con la existencia y/o expansión de soluciones de ecuaciones funcionales, integrales o diferenciales; por ejemplo en teoría de control las ecuaciones que modelan dichos problemas pueden expresarse como

$$Tx = u$$

con T un operador no lineal actuando sobre un cierto espacio de Banach. En muchas ocasiones este operador adopta la forma

$$T = I + K \circ N$$

donde I es el operador identidad, K algún operador lineal y N el operador de Nemytskij generado por una aplicación $f : [a,b] \times X \to X$.

En un contexto más general, si Ω es un espacio de medida o un espacio métrico y X, Y son dos espacios topológicos de Hausdorff, entonces para $\phi : \Omega \times X \to Y$ y $u : \Omega \to X$, se define una función $N_\phi(u) : \Omega \longrightarrow Y$, por $N_\phi(u)(x) := \phi(x, u(x))$. La función N_ϕ es llamada operador de Nemytskij con símbolo ϕ. En la mayoría de las aplicaciones y problemas se consideran X e Y espacios euclídeos o espacios de Banach.

Una de las propiedades más importantes de este operador es que si ϕ es una función de Carathéodory, éste envía una función medible $u(x)$ en otra función medible

$N_\phi(u)(x) = \phi(x, u(x)), \quad x \in \Omega$. Todavía más, en 1951 Krasnosel'skij [17] logra dar condiciones bajo las cuales el operador N_ϕ aplica un espacio de Lebesgue L^p en otro espacio de Lebesgue L^q y caracteriza cuándo el operador es continuo y acotado. Estos resultados despertaron gran interés en muchos matemáticos los cuales se dedicaron a generalizar estos resultados y estudiar el operador de superposición actuando en diferentes tipos de espacios de funciones.

Un enfoque más moderno del estudio del Operador de Nemytskij consiste en considerar espacios métricos X e Y de funciones reales o complejas y una función ϕ real o compleja cuyo dominio contenga el rango de todas las funciones en X. Entonces se puede definir el operador $S_\phi : X \longrightarrow Y$ como $S_\phi(f) := \phi \circ f$, llamado operador de superposición S_ϕ, con símbolo ϕ.

Problemas de este estilo han sido ampliamente estudiados en el contexto de funciones de variable real, esto se puede evidenciar en el excelente texto de Appell y Zabrejko [3] donde los autores hacen una recopilación de algunas propiedades del operador de superposición actuando en diversos espacios como: El espacio S de ideales, los espacios de Lebesgue, los espacios C y BV, los espacios de Hölder, los espacios de Sobolev, entre otros.

El estudio del operador de superposición actuando en espacios de funciones de variable compleja se ha venido desarrollando intensamente en las dos últimas décadas. Los primeros estudios fueron realizados por Cámera y Giménez [11], donde los autores lograron caracterizar las funciones enteras ϕ para que el operador de superposición S_ϕ actúe de un espacio de Bergman en otro, además mostraron que el operador actuando entre estos espacios es necesariamente continuo, acotado y localmente Lipschitz. También lograron caracterizar las funciones enteras ϕ para las cuales el operador de superposición actúe de un espacio de Bergman en un espacio de Hardy y viceversa. Buckley, Fernández y Vukotić [9] dieron condiciones sobre el símbolo ϕ para que el operador de superposición actúe de un espacio de Besov en otro, de un espacio tipo Dirichlet en otro y de un espacio de Besov en uno tipo Dirichlet con peso. Seguidamente, Álvarez, Márquez y Vukotić [1], usando un método geométrico, estudiaron cuando el operador de superposición actúa de un espacio de Bergman en el espacio de Bloch y viceversa en términos del orden y el tipo de la función entera ϕ y como consecuencia inmediata también obtuvieron resultados similares para este operador actuando entre el espacio de Bloch y el espacio de Hardy con peso. Xiong [27] demuestra que si $0 \leq p < 1$ and $0 < \alpha < 1$, entonces el operador de superposición S_ϕ aplica el espacio Q_p en los espacios α-Bloch si y sólo si el símbolo ϕ es una constante. En ese mismo artículo, Xiong obtiene condiciones necesarias y suficientes sobre el símbolo ϕ para que operador de superposición actúe de manera acotada desde los espacios α-Bloch en los espacios Q_p. Xu [28], utilizando la técnica geométrica desarrollada por Vukotić y colaboradores, caracteriza las funciones enteras ϕ que transforman por superposición un espacio α-Bloch en otro del mismo tipo en términos de su orden y tipo o del grado de polinomios. Demostrando además que el operador de superposición inducido por tales funciones es acotado. Buckley y Vukotić [10] caracterizaron el operador de superposición de un espacio de Besov y del pequeño espacio de Bloch en un espacio de Bergman en términos del orden y el tipo. También determinaron cuando este operador es continuo, acotado y discutieron la compacidad. Girela y Márquez [15] estudiaron el operador de superposición cuando actúa entre un espacio de Hardy y los espacios Q_p. Más recientemente Bonet y Vukotić [8] caracterizan las funciones enteras las cuales transforman por superposición un espacio de crecimiento H_v^∞ en otro y también estudian la continuidad, acotamiento y compacidad del operador. En su trabajo los autores consideraron como un peso v en $\mathbb{D}$ una función continua estrictamente positiva sobre $\mathbb{D}$ la cual es radial, es decir, $v(z) = v(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$; $v(r)$ es estrictamente decreciente sobre $[0, 1)$ y satisface $\lim_{r\to 1} v(r) = 0$. Seguidamente Castillo, Ramos-Fernández y Salazar [12] logran caracterizar las funciones enteras ϕ para que el operador S_ϕ actúe de un espacio α-Bloch en un espacio Bloch-Orlicz y como consecuencia también logran caracterizar por una vía distinta a la dada por Xu [28] los operadores acotados entre espacios α-Bloch. Ramos-Fernández [22] caracteriza las funciones enteras que transforman un espacio de Banach con peso de funciones analíticas $H^\infty_{\mu_1}$ en otro de la misma clase $H^\infty_{\mu_2}$, donde las funciones pesos μ_1 y μ_2 consideradas son continuas, estrictamente positivas y acotadas sobre $\mathbb{D}$, mejorando los resultados obtenidos por Bonet y Vukotić [8], además logra caracterizar cuándo el operador es acotado en términos del símbolo ϕ y del límite del cociente de los pesos involucrados.

El estudio del operador de superposición en espacios de funciones analíticas, es un tema que se encuentra en pleno desarrollo. Por tal razón, se pretende con este trabajo hacer un aporte en el área de operadores no lineales sobre espacios tipo Bloch que generalize o extienda resultados conocidos sobre los operadores de superposición.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera: el Capítulo 1 contiene las definiciones y resultados conocidos que son la base para los resultados obtenidos en los capítulos posteriores. En la primera sección, se recuerdan definiciones de Análisis Funcional referentes a espacios de Banach, operadores no lineales. En la segunda sección, se recogen algunas definiciones y resultados referentes a funciones analíticas, funciones enteras y convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos. La tercera sección se comienza definiendo las funciones pesos las cuales permiten definir los espacios tipo Bloch sobre los que se ha realizado la presente investigación, también se establece que los espacios μ-Bloch tienen estructura de espacio de Banach. La sección finaliza recordando los ejemplos de los casos particulares más conocidos de dichos espacios. En la cuarta sección, se definen y se dan ejemplos de los espacios de crecimiento los cuales están relacionados con los espacios μ-Bloch. En la quinta sección se define el operador de superposición entre espacios de funciones analíticas y se mencionan algunas de sus prpiedades. Se finaliza el capítulo recordando los resultados existentes sobre el operador de superposición actuando sobre los espacios α-Bloch y los espacios de Bloch-Orlicz.

La primera sección del Capítulo 2, comienza definiendo el peso integral introducido recientemente por Ramos-Fernández en [23], los cuales a su vez permiten definir ciertas funciones especiales inspiradas por Ye [30] y Ramos-Fernández [23] vitales para la demostración de los resultados principales de esta investigación. En la segunda sección, se dan los detalles de los resultados obtenidos por Malavé-Malavé y Ramos-Fernández en el artículo [19]. Más precisamente, se caracterizan los operadores de superposición acotados actuando de un espacio Bloch logarítmico $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ en otro del mismo tipo. Finalmente, en la tercera sección se muestran aplicaciones de los resultados obtenidos en la sección anterior para casos particulares del Operador de Superposición actuando entre espacios Bloch Logarítmicos, también se obtienen resultados ya conocidos para el Operador de Superposición actuando entre los espacios α-Bloch y entre los espacios Bloch-Orlicz.

En el Capítulo 3, se generalizan los resultados obtenidos en el capítulo anterior aplicando técnicas similares a las usadas por Malavé-Malavé y Ramos- Fernández en [19]. En la primera sección de manera análoga como en el Capítulo 2 se definen un peso integral y funciones especiales. Se finaliza este capítulo caracterizando los operadores de superposición acotados cuando S_{φ} aplica el espacio μ-Bloch en otro del mismo tipo.

CAPÍTULO 1
PRELIMINARES

En este capítulo se recuerdan algunas definiciones y resultados conocidos en la literatura los cuales fueron base para el desarrollo del presente trabajo. En el mismo también se definen y se dan algunas de las propiedades de los espacios sobre los cuales se realizó esta investigación.

1.1 Resultados del Análisis Funcional

En esta sección, se resumen las definiciones y los resultados de un curso de Análisis Funcional que se requieren para el desarrollo del trabajo. En un conjunto arbitrario (no necesariamente con estructura algebraica) se puede definir el concepto de métrica.

Definición 1.1. [26] Un *espacio métrico* es un par (X, d), donde X es un conjunto arbitrario no vacío y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación, llamada distancia o métrica, tal que, para cualesquiera $x, y, z \in X$, se verifica:

(1) $d(x, y) \geq 0$

(2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(3) $d(x, y) = d(y, x)$

(4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Definición 1.2. [26] Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de *Cauchy* cuando $\forall\epsilon > 0$, $\exists N : d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m > N$.

Definición 1.3. [26] (Fréchet, 1906). Un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Se denotará por X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, el cual será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.4. [26] Un *espacio normado* es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X y una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, llamada *norma*, con las siguientes propiedades:

(1) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$

(2) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$, para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in X$.

Si no se exige la condición (2), la aplicación $\|\cdot\|$ se llama seminorma.

Definición 1.5. [26] Sea X un espacio vectorial normado, en el que se define la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Si (X, d) es completo, X se dice *espacio de Banach*.

Recuerde que un *operador, transformación o aplicación* entre espacios vectoriales X e Y sobre el mismo campo $\mathbb{K}$, es una función $T : X \longrightarrow Y$.
Si X e Y son espacios topológicos se tiene la siguiente definición.

Definición 1.6. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ se dice *continuo* si la preimagen de cualquier abierto (cerrado) de Y es abierta (cerrada) en X.

En el caso que X e Y sean espacios normados, entonces también son espacios métricos con la metrica definida a través de la norma, lo cual permite dar una definición de operador continuo en términos de sucesiones.

Definición 1.7. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ se dice *continuo* si para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a un punto $x \in X$, la sucesión $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a Tx en Y.

También se puede definir un operador acotado de la siguiente manera:

Definición 1.8. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ se dice *acotado* si transforma subconjuntos acotados de X en subconjuntos acotados de Y.

Definición 1.9. Se dice que $T : X \longrightarrow Y$ es un *operador lineal* si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

para todo $x, y \in X$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

En el caso que T sea lineal las definiciones de continuidad y acotamiento son equivalentes.

Teorema 1.1. *Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si y sólo si T es acotado.*

Dado que el operador de superposición estudiado en este trabajo es no lineal, es importante resaltar que sin linealidad el resultado anterior no es válido. Por ejemplo la función real de variable real $f(x) = \dfrac{1}{x}$, con $x \in (0, +\infty)$ vista como operador es continuo pero no acotado.

1.2 Espacio de funciones analíticas

En esta sección, se resumen las definiciones y resultados de un curso de Análisis Complejo que se requieren para el desarrollo del trabajo.

Sea $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de los número complejos, donde i denota la unidad imaginaria ($i^2 = -1$).
En lo sucesivo, salvo que se mencione lo contrario, f será una función de variable compleja que toma valores complejos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto f(z) \end{aligned}$$

Definición 1.10. Una función f se dice *derivable* en z_0, si f esta definida en una vecindad de z_0 y el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} := f'(z_0)$$

existe.

Definición 1.11. La función f se dice *holomorfa* en un conjunto abierto G de $\mathbb{C}$ si es derivable en cada punto de G.

Definición 1.12. [14] Un espacio métrico (X, d) es *conexo* si los únicos abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X. Un subconjunto A de X es conexo si (A, d) es conexo.

Definición 1.13. [13] Un conjunto abierto y conexo se llama *dominio.*

Definición 1.14. Una función f se dice *analítica* en $z_0 \in \mathbb{C}$ si existe $\rho > 0$ tal que para todo z que cumple $|z - z_0| < \rho$ se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde los coeficientes a_n son números complejos.

En otras palabras f es *analítica* en z_0 si su serie de Taylor converge a la función.

Definición 1.15. Se dice que f es *analítica* en un conjunto abierto G de $\mathbb{C}$ si es analítica un todo punto de G.

Teorema 1.2. [13] **(Teorema de Taylor)** *Sea f una función holomorfa en un disco abierto $|z - z_0| < R_0$, centrado en z_0 y de radio R_0. Entonces, en todo punto z de ese disco, $f(z)$ admite representación en serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Todavía más, si K es un subconjunto compacto del disco abierto $|z - z_0| < R_0$, entonces la convergencia es uniforme en el compacto.

También serán útiles los siguientes resultados para demostración de la completitud de los espacios tipo Bloch.

Teorema 1.3. [14] (Principio del módulo máximo) *Si f es analítica en una región G y a es un punto en G con $|f(a)| \geq |f(z)|$ para toda z en G, entonces f es una función constante.*

Teorema 1.4. [14] *Si* $f'(z) = 0$ *en cada punto de un dominio* Ω*, entonces* f *es constante en* Ω*.*

Definición 1.16. (Convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos) Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en un dominio $\Omega \subset D$, se dice que *converge uniformemente* a f sobre subconjuntos compactos de Ω, si para cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in N$ (que depende de K y de ε) tal que

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$.

Teorema 1.5. [24] *Si* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente a una función* f *sobre cada subconjunto compacto de un dominio* Ω*, entonces* f *es analítica en* Ω*.*

Teorema 1.6. [24] *Bajo las hipótesis del teorema anterior, la sucesión de derivadas* $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ *converge uniformemente a* f' *sobre cada subconjunto compacto de* Ω*.*

Las funciones enteras juegan un papel protagónico en este trabajo, debido a que muchas de las caracterizaciones obtenidas se expresan en términos de dichas funciones.

Definición 1.17. [13] Una función *entera* f es una función que es analítica en todo el plano complejo.

Tres resultados importantes y usados son los siguientes:

Teorema 1.7. [24] **(Teorema de Liouville)** *Si* f *es entera y acotada entonces* f *es constante.*

Teorema 1.8. [5] *Si* f *es entera y si, para algún entero* $k \geq 0$*, existen constantes positivas* A *y* B *tales que*

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k, \qquad |z| > R,$$

entonces f *es un polinomio de grado a lo más* k*.*

El siguiente lema es clave en la demostración de varios resultados que aparecen en los Capítulos 2 y 3.

Lema 1.1. *Si ϕ es una función entera y no constante, entonces para todo $\delta > 0$ existe $r > 0$ tal que $|\phi'(w)| > \delta$ siempre que $r < |w| < \infty$.*

Demostración: Si $\phi(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + ... + a_{n_0} w^{n_0}$, con $n_0 \geq 1$, entonces $\phi'(w) = a_1 + 2a_2 w + ... + n_0 a_{n_0} w^{n_0-1}$ y $\lim\limits_{w\to\infty} \phi'(w) = \infty$, por lo tanto para todo $\delta > 0$ existe $r > 0$ tal que $|\phi'(w)| > \delta$ siempre que $r < |w| < \infty$.
Si ϕ tiene la expansón en serie de potencias

$$\phi(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + ... + a_{n_0} w^{n_0} + ... + a_n w^n + ...$$

entonces

$$\phi'(w) = a_1 + 2a_2 w + ... + n_0 a_{n_0} w^{n_0-1} + (n_0+1) a_{n_0+1} w^{n_0} + ... + n a_n w^{n-1} + ...$$

Luego, si $w \neq 0$ se tiene que

$$\lim_{w\to\infty} \frac{\phi'(w)}{w^{n_0}} = \infty,$$

por lo tanto para todo $\delta > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\left| \frac{\phi'(w)}{w^{n_0}} \right| > \delta \quad \text{siempre} \quad \text{que} \quad r < |w| < \infty,$$

lo cual implica que $|\phi'(w)| > \delta |w|^{n_0}$ siempre que $r < |w| < \infty$.
Dado que $w \to \infty$, se puede considerar que $|w| > 1$ y se tiene que $|\phi'(w)| > \delta |w|^{n_0} > \delta |w| > \delta$ siempre que $r_1 < |w| < \infty$, donde $r_1 = \max\{1, r\}$. ■

Dado que muchas de las caracterizaciones obtenidas se dan en términos del orden y del tipo de una función entera, se finaliza esta sección con la siguiente teoría la cual puede ser consultada en el texto [29].

Una función entera puede crecer de varias maneras a lo largo de diferentes direcciones. Para una caracterización general del crecimiento, se introduce la función

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Se sigue del principio del Máximo que la función M_f es monótona creciente.
Surge entonces la pregunta ¿cuán rápido puede crecer la función M_f?

Teorema 1.9. [29] *Si para λ no negativo, la ecuación*

$$\lim_{r\to\infty} \inf \frac{M_f(r)}{r^\lambda} = 0$$

se mantiene, entonces $f(z)$ es un polinomio cuyo grado no excede λ.

Ahora se introduce la siguiente notación. Si una desigualdad $h(r) < \varphi(r)$ se mantiene para valores suficientemente grandes de r, se llamará una desigualdad asintótica y se escribe $h(r) <^{as} \varphi(r)$. Si la misma desigualdad se mantiene para alguna sucesión de valores $r_n \to \infty$, entonces se escribirá $h(r) <^{n} \varphi(r)$.

Definición 1.18. [29] **(Orden y Tipo)** Una función entera f se dice de *orden finito* si $M_f(r) <^{as} \exp(r^k)$, para algún $k > 0$. El orden (o el orden de crecimiento) de una función entera f es la mayor cota inferior de estos valores de k para el cual se cumple la desigualdad asintótica.

Usualmente se denota el orden de una función entera f por $\rho = \rho_f$. Se sigue de la definición de orden que

$$e^{r^{\rho-\epsilon}} <^{n} M_f(r) <^{as} e^{r^{\rho+\epsilon}}.$$

Tomando logaritmo dos veces y dividiendo por $\log r$ se tiene que

$$\rho - \epsilon <^{n} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r} <^{as} \rho + \epsilon,$$

de donde se tiene que

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log M_f(r)}{\log r}.$$

Definición 1.19. [29] Sea ρ el orden de una función entera f. Se dice que la función f es de *tipo finito* si para algún $A > 0$ la desigualdad

$$M_f(r) <^{as} e^{Ar^\rho}$$

se cumple. La mayor de las cotas inferiores de estos valores de A para el cual la desigualdad asintótica anterior se mantiene se llama el tipo $\sigma = \sigma_f$ (con respecto al orden ρ) de la función f.

Se sigue de la definición de tipo que

$$e^{(\sigma-\epsilon)r^\rho} <^n M_f(r) <^{as} e^{(\sigma+\epsilon)r^\rho}.$$

Tomando logaritmo y dividiendo por r^ρ se tiene

$$\sigma - \epsilon <^n \frac{\log M_f(r)}{r^\rho} <^{as} \sigma + \epsilon,$$

y por lo tanto

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}.$$

Proposición 1.1. [29] *Si f es una función entera de orden ρ y tipo σ entonces f' también tiene orden ρ y tipo σ.*

La siguiente definición se debe a Castillo, Ramos Fernández y Salazar (ver [12]).

Definición 1.20. [12] Si ϕ es una función entera, entonces

$$\rho_\infty = \rho_\infty(\phi) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log\log M_\phi(r)}{\log(r)}$$

y, si $\rho_\infty < \infty$ entonces se define

$$\tau_\infty = \tau_\infty(\phi) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log\log M_\phi(r)}{r^{\rho_\infty}}.$$

1.3 Los espacios μ-Bloch y ejemplos

Esta sección está dedicada a definir y establecer algunas propiedades de los espacios tipo Bloch sobre los cuales se ha realizado la presente investigación. Con este fin, en lo que sigue asumirá que G es un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y que $H(G)$ denota el espacio de las funciones analíticas sobre G, dotado con la métrica de la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de G.

Definición 1.21. Una función μ positiva, continua y acotada definida sobre G, se denomina *función peso simplemente peso.*

Dos tipos de peso considerados en este estudio son:

(a) Los pesos típicos μ, los cuales satisfacen la condición $\mu(z) \to 0^+$ cuando $z \to \partial(G)$. Si $G = \mathbb{D}$, es el disco unitario complejo, esta condición se escribe

$$\lim_{|z|\to 1^-} \mu(z) = 0.$$

(b) Los pesos radiales μ, los cuales cumplen la propiedad

$$\mu(z) = \mu(|z|),$$

para todo $z \in G$. Claramente, para que esta definición tenga sentido, se debe tener que $|z| \in G$ cuando $z \in G$.

Para un estudio más detallado sobre funciones peso se puede consultar [6].

Ejemplo 1.1. Es fácil ver que para $z \in \mathbb{D}$, las funciones $\mu_1(z) = (1 - |z|^2)^\alpha$, con $\alpha > 0$ y $\mu_2(z) = (1 - |z|^2) \log \dfrac{2}{1 - |z|^2}$ son pesos típicos y radiales, pero la función $\mu_3(z) = \dfrac{1}{1 - |z|}$ no es un peso, pues no es acotada.

Comentario 1.1. Observe que si la función peso μ es típico y continua, entonces es acotada.

En lo que sigue, a menos que se diga lo contrario, μ representará una función peso.

Definición 1.22. Una función analítica f definida sobre $\mathbb{D}$ se dice que es una *función μ-Bloch*, denotado por $f \in \mathcal{B}^\mu$, si satisface la relación

$$\|f\|_\mu := \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f'(z)| < \infty.$$

Observe que si $f, g \in \mathcal{B}^\mu$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha f + g\|_\mu &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|(\alpha f + g)'(z)| \\ &\leq |\alpha| \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f'(z)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|g'(z)| \\ &= |\alpha|\|f\|_\mu + \|g\|_\mu < \infty, \end{aligned} \tag{1.1}$$

lo cual dice que $\mathcal{B}^\mu$ es un subespacio del espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, $H(\mathbb{D})$, denominado *espacio μ-Bloch.*
Además, se verifica que la relación $\|f\|_{\mathcal{B}^\mu} := |f(0)| + \|f\|_\mu$ define una norma para el espacio $\mathcal{B}^\mu$.

Comentario 1.2. Se puede ver que si μ no es un peso típico, entonces $\mathcal{B}^\mu$ es un subespacio de H^∞, el espacio de todas las funciones holomorfas acotadas sobre $\mathbb{D}$. En efecto, sea $f \in \mathcal{B}^\mu$ y $\delta > 0$ tal que $\mu(z) > \delta$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces se tiene

$$\|f\|_\mu = \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f'(z)| \geq \delta \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(z)| = \delta||f'||_\infty,$$

es decir, $\qquad ||f'||_\infty \leq \frac{1}{\delta}\|f\|_\mu$.
Luego,

$$|f(z)| \leq |f(0)| + \int_0^z |f'(s)||ds| \leq |f(0)| + \frac{1}{\delta}\|f\|_\mu$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo tanto $||f||_\infty < \infty$ y $f \in \mathcal{B}^\mu \subset H^\infty$.

A continuación se muestra que los espacios μ-Bloch son espacios de Banach con la norma definida anteriormente. Debido a la importancia de este hecho y para completitud del trabajo, se agregan los detalles que pueden ser consultados en [18].
Primeramente, se recuerda que para $f \in H(\mathbb{D})$ y $r \in (0,1)$ fijo se define la dilatación f_r de f como la función definida por

$$f_r(z) = f(rz)$$

con $z \in \mathbb{D}$. Observe que para cada $r \in (0,1)$ fijo, la función f_r es analítica en el disco $D(0, \frac{1}{r})$ en particular $f_r \in H(\overline{\mathbb{D}})$.
Estas funciones satisfacen las siguientes propiedades:

Lema 1.2. *Sea μ un peso definido sobre $\mathbb{D}$, entonces para $f \in \mathcal{B}^\mu$ las dilataciones f_r de f satisfacen:*
(1) f_r converge a f uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ cuando $r \to 1^-$.
(2) Para cada $r \in (0,1)$ se tiene que $f_r \in \mathcal{B}^\mu$. Todavía más, se satisface la desigualdad

$\|f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} \leq \|f\|_{\mathcal{B}^\mu}$ *para todo* $r \in (0,1)$.

(3) $\lim\limits_{r\to 1^-} \|f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} = \|f\|_{\mathcal{B}^\mu}$.

Prueba: Para mostrar el item (1), dado que f y f_r son analíticas en $\mathbb{D}$, se pueden representar por medio de las series de potencias

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ...$ y $f(rz) = a_0 + a_1 rz + a_2 r^2 z^2 + a_3 r^3 z^3 + ...$,

de donde se tiene

$$\begin{aligned} f(z) - f(rz) &= a_1(1-r)z + a_2(1-r^2)z^2 + a_3(1-r^3)z^3 + ... \\ &= (1-r)(a_1 z + (1+r)a_2 z^2 + (1+r+r^2)a_3 z^3 + ...) \end{aligned}$$

Se observa que la función del último paréntesis es analítica y por tanto acotada sobre subconjuntos compactos K de $\mathbb{D}$. Por lo tanto existe $M_K > 0$ tal que

$$\sup_{z\in K} |f(z) - f(rz)| \leq (1-r)M_K$$

para todo $r \in (0,1)$. Haciendo $r \to 1^-$, se concluye que $f_r \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$.

Para mostrar el item (2), sea $r \in (0,1)$ fijo y $r_2 \in [0,1)$ cualquiera. Por el principio del módulo máximo (ver Teorema 1.3), se tiene que

$$\max_{|z|=rr_2} |f'(z)| \leq \max_{|z|=r_2} |f'(z)|,$$

o equivalentemente reemplazando z por rz en el lado izquierdo de la desigualdad anterior se tiene

$$\max_{|z|=r_2} |f'(rz)| \leq \max_{|z|=r_2} |f'(z)|,$$

dado que $\mu(z) > 0$ se tiene

$$\max_{|z|=r_2} \mu(z)|f'(rz)| \leq \max_{|z|=r_2} \mu(z)|f'(z)|,$$

tomando supremo cuando $r_2 \in [0,1)$, se tiene

$$\sup_{r_2\in[0,1)} \max_{|z|=r_2} \mu(z)|f'(rz)| \leq \sup_{r_2\in[0,1)} \max_{|z|=r_2} \mu(z)|f'(z)|,$$

esto es equivalente a

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f'(rz)| \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f'(z)|.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} &= |f_r(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f_r'(z)| \\
&= |f(0)| + r\sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f'(rz)| \\
&\leq |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f'(rz)| \\
&\leq |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f'(z)| \\
&= \|f\|_{\mathcal{B}^\mu}.
\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{r\to 1^-} \|f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} = \|f\|_{\mathcal{B}^\mu}$.

En efecto, se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
|\, \|f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} - \|f\|_{\mathcal{B}^\mu}| &\leq ||f_r - f||_{\mathcal{B}^\mu} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|(f_r - f)'(z)| + |(f_r - f)(0)| \\
&\leq ||\mu||_\infty \sup_{z\in\mathbb{D}} |rf'(rz) - f'(z)| \\
&\leq ||\mu||_\infty \sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(rz) - f'(z)|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto es suficiente ver que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(rz) - f'(z)| \to 0$ cuando $r \to 1^-$.

Para ello, sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |f'(rz) - f'(z)| < (1+\varepsilon)|f'(rz_0) - f'(z_0)|.$$

Tomando límite cuando $r \to 1^-$, dado que f' es continua en $\overline{D}(0,r)$, se puede introducir el límite en f' y se obtiene el resultado.

Ahora se puede probar la completitud del espacio.

Teorema 1.10. *$\mathcal{B}^\mu$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^\mu}$.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que K es un disco cerrado con centro en el origen y radio $r \in (0,1)$. Sea $\{f_n\}_{n\in N}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{B}^\mu, \|\cdot\|_{\mathcal{B}^\mu})$, entonces

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(0) - f_m(0)| + \int_{[0,z]} |f_n'(s) - f_m'(s)||ds| \\ &\leq |f_n(0) - f_m(0)| + \|f_n - f_m\|_\mu \int_{[0,z]} \frac{|ds|}{\mu(s)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

para todo $z \in K$.

Como la función $h(s) = \dfrac{1}{\mu(s)}$ es continua sobre el compacto $[0,z] \subset K$, entonces existe M_K, que depende sólo del compacto K, tal que $h(s) \leq M_K$, para todo $s \in [0,z]$. Luego, sustituyendo en (1.2), se obtiene

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| &\leq |f_n(0) - f_m(0)| + M_K\|f_n - f_m\|_\mu \\ &\leq \widetilde{M}_K \|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}^\mu}, \end{aligned}$$

donde $\widetilde{M}_K = \max\{1, M_K\}$. Esto último implica que

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \widetilde{M}_K \|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}^\mu},$$

de donde se concluye que $\{f_n\}_{n\in N}$ es uniforme de Cauchy sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, luego por el Teorema 1.5, existe una función $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, por lo tanto, $\sup_K |f_n - f| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Para mostrar que $f \in \mathcal{B}^\mu$ y que $\|f_n - f\|_{\mathcal{B}^\mu} \to 0$ cuando $n \to \infty$, como $\{f_n\}$ es de Cauchy en $(\mathcal{B}^\mu, \|\cdot\|_{\mathcal{B}^\mu})$, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}^\mu} < \varepsilon$ cuando $n, m \geq N$. Entonces para $r < 1$ considerando las dilataciones se tiene

$$\begin{aligned} \|(f_n)_r - f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} &\leq \|(f_n)_r - (f_m)_r\|_{\mathcal{B}^\mu} + \|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} \\ &\leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}^\mu} + \|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} \\ &< \varepsilon + \|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}^\mu}, \end{aligned}$$

donde en la segunda desigualdad se ha usado el item (2). Ahora, el segundo término se aproxima a cero cuando $m \to \infty$.

En efecto,

$$\|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} \;=\; \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f_m'(rz) - f'(rz)| + |f_m(0) - f(0)|,$$

también se tiene por construcción, que $|f_m(0) - f(0)| \to 0$ si $m \to \infty$, y

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f_m'(rz) - f'(rz)| \;&\leq\; ||\mu||_\infty \sup_{z\in\mathbb{D}} |f_m'(rz) - f'(rz)| \\
&=\; ||\mu||_\infty \sup_{w\in D_r} |f_m'(w) - f'(w)| \\
&\leq\; ||\mu||_\infty \sup_{w\in \overline{D_r}} |f_m'(w) - f'(w)|;
\end{aligned}$$

luego, como $f_m \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, entonces por el Teorema 1.6, se tiene que $f_m' \to f'$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, así $\|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}^\mu}$ también se aproxima cero.

De esta manera $\|(f_n)_r - f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} \leq \varepsilon$ para $n \geq N$ y todo $r < 1$. Ahora si $r \to 1^-$, entonces

$$\lim_{r\to 1^-} \|(f_n)_r - f_r\|_{\mathcal{B}^\mu} \;\leq\; \varepsilon \quad \text{para } n \geq N,$$

lo cual usando (3) implica que

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{B}^\mu} \;\leq\; \varepsilon, \quad \text{para } n \geq N.$$

Así, $\|f_n - f\|_{\mathcal{B}^\mu} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, considerando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{B}^\mu} \;<\; 1,$$

siempre que $n \geq n_0$, en particular

$$\|f_{n_0} - f\|_\mu \;<\; 1,$$

entonces, $h = f_{n_0} - f \in \mathcal{B}^\mu$. Finalmente, como $\mathcal{B}^\mu$ es un espacio vectorial se tiene que $f_{n_0} - f - f_{n_0} \in \mathcal{B}^\mu$, así $-f \in \mathcal{B}^\mu$ y $f \in \mathcal{B}^\mu$. Esto finaliza la prueba. ■

A continuación se recuerdan los ejemplos más conocidos de los espacios μ-Bloch.

1. **El espacio de Bloch $\mathcal{B}$.** Debe su nombre al gran matemático André Bloch y se obtiene cuando $\mu(z) = 1-|z|^2$ en la definición del espacio μ-Bloch. El espacio de Bloch aparece de manera natural en diferentes contextos, por ejemplo, una función holomorfa f pertenece al espacio de Bloch si y sólo si existe una función univalente g sobre $\mathbb{D}$ tal que $f = \log g'$. Para un estudio detallado de este espacio y de sus propiedades se pueden consultar [2], [31] y [32].

2. **Los espacios α-Bloch.** Son una generalización natural de los espacios de Bloch y se obtienen cuando se considera el peso $\mu(z) = (1-|z|^2)^\alpha$, con $\alpha > 0$ en la definición de los espacios μ-Bloch.

3. **El espacio de Bloch con peso.** Se obtiene cuando se considera el peso $\mu(z) = (1-|z|^2)\log\dfrac{2}{1-|z|^2}$. Estos espacios aparecen en Attele [4], donde se demuestra que el operador de Hankel inducido por una función f en el espacio de Bergman es acotado si y sólo si $f \in B^\mu$.

4. **Los espacios de Bloch-logarítmicos.** Estos espacios fueron introducidos recientemente por Stević en [25]. Se obtienen considerando pesos de la forma
$$\mu(z) = (1-|z|)^\alpha \log^\beta\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|}\right), \qquad t \in (0,1) \tag{1.3}$$
donde $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ son parámetros fijos.

5. **Los espacios de Bloch-Orlicz.** Se definen de manera similar a como se definen los espacios de Orlicz y fueron introducidos por Ramos-Fernández en [21]. En su definición se emplean $\mathcal{N}$-funciones, donde una $\mathcal{N}$-función ψ es una función $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ convexa estrictamente creciente tal que $\psi(0) = 0$ y $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\psi(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{\psi(t)} = 0$. Los espacios de Bloch-Orlicz asociados a la función ψ, denotado por $\mathcal{B}^\psi$, es la clase de todas funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$ tales que
$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\psi(\lambda|f'(z)|) < \infty$$
para algún $\lambda > 0$ que depende de f. Los espacios de Bloch-Orlicz $\mathcal{B}^\psi$ son generalizaciones de ciertos espacios tipo Bloch, en el sentido de que el espacio

de Bloch-Orlicz es isométricamente isomorfo al espacio μ_ψ-Bloch, donde

$$\mu_\psi(z) = \frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}.$$

1.4 Los espacios de crecimiento

En esta sección se definen y se dan algunas propiedades de los espacios de crecimiento, los cuales están estrechamente relacionados con los espacios μ-Bloch y son de vital importancia en la prueba de los resultados de los siguientes capítulos.

Definición 1.23. *Una función analítica f definida sobre $\mathbb{D}$ se dice que pertenece a la clase H^∞_μ, si satisface la relación*

$$\|f\|_\mu := \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu(z)|f(z)| < \infty \tag{1.4}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Puede notarse que H^∞_μ es un subespacio del espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, $H(\mathbb{D})$. Este espacio se conoce como el Espacio de Crecimiento de Funciones Analíticas. Entre las propiedades de este espacio destaca que es un espacio de Banach con la norma definida en (1.4).

Observe que de las definiciones de los espacios H^∞_μ y $\mathcal{B}^\mu$ se tiene que

$$f \in \mathcal{B}^\mu \Longleftrightarrow f' \in H^\infty_\mu$$

además,

$$\|f\|_\mu = \|f'\|_{H^\infty_\mu}.$$

Dos ejemplos de espacios de crecimiento importantes de mencionar son:

1. **Los espacios de Korenblum.** Fueron estudiados de manera exhaustiva por el matemático B. Korenblum y se obtienen cuando el peso considerado es

$$\mu(z) = (1-|z|^2)^\alpha,$$

donde $z \in \mathbb{D}$ y $\alpha > 0$. En este caso, el espacio de crecimiento se denota por H^∞_α.

2. **Los espacios de crecimiento logarítmico.** Se obtienen cuando se consideran pesos de la forma

$$\mu_1(z) = \left(\log \frac{2}{1-|z|^2}\right)^{-1}, \quad \text{con} \quad z \in \mathbb{D}$$

o

$$\mu_2(z) = \left(\log \frac{e}{1-|z|^2}\right)^{-1}, \quad \text{con} \quad z \in \mathbb{D}.$$

Para ambos pesos el espacio obtenido es el mismo con normas equivalentes, el cual se denota por $H^\infty_{\log}$.

1.5 Operador de Superposición

En esta sección se define el operador de superpoción sobre espacios de funciones analíticas y se dan algunas propiedades.

Definición 1.24. Sean X y Y dos espacios métricos de funciones analíticas definidas sobre el disco unitario y ϕ una función complejo-valuada en el plano. El *operador de superposición* S_ϕ sobre X está definido por

$$S_\phi(f) := \phi \circ f, \qquad f \in X.$$

Si $S_\phi(f) \in Y$ para toda $f \in X$, se dice que ϕ actúa por superposición de X sobre Y. Un primer problema que se plantea sobre este operador, consiste en describir geométricamente la clase de funciones

$$PS(\phi) = \{\phi \circ f : f \in X\}. \tag{1.5}$$

Un segundo problema, consiste en encontrar qué propiedades debe satisfacer el símbolo ϕ para que $S_\phi(X) \subset Y$.

El otro problema de gran interés, es averiguar qué propiedades debe disfrutar el símbolo ϕ para que el operador de superposición satisfaga propiedades de: continuidad, acotamiento, compacidad, rango cerrado; y recíprocamente si el operador satisface ciertas propiedades qué condiciones satisface el símbolo ϕ.

Observe que la composición $\phi \circ f$ estará definida si el dominio de ϕ contiene el rango de todas la funciones f en X y para que sea analítica es necesario que ϕ esté definida en todo el plano complejo y sea analítica, es decir, ϕ debe ser entera. Entre las propiedades de este operador destaca que en general es un operador no lineal, pues en general $S_\phi(\alpha f + \beta g) \neq \alpha S_\phi(f) + \beta S_\phi(g)$ para todo $f, g \in X$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dado que X y Y son espacios vectoriales se puede ver que el operador S_ϕ es lineal si y sólo si $\phi(z) = cz$ para alguna constante compleja c y todo z.

1.6 Resultados sobre los espacios α-Bloch y los espacios de Bloch-Orlicz

Se finaliza este capítulo haciendo una recopilación de los resultados existentes obtenidos por Xu en [28] y por Castillo, Ramos-Fernández y Salazar en [12].
Más precisamente, Xu en [28] consideró el operador de superposición actuando entre los espacios α-Bloch y sus aportes fueron los siguientes teoremas:

Teorema 1.11. [28] *Sea $0 < \beta < \alpha$ y ϕ una función entera. Entonces el operador de superposición S_ϕ aplica $\mathcal{B}^\alpha$ en $\mathcal{B}^\beta$ si y sólo si ϕ es una función constante.*

Teorema 1.12. [28] *Sea $0 < \alpha < 1$ y $\alpha \leq \beta$. Entonces para cualquier función entera ϕ, S_ϕ es un operador acotado de $\mathcal{B}^\alpha$ en $\mathcal{B}^\beta$.*

Teorema 1.13. [28] *Sea $1 < \alpha \leq \beta$ y sea ϕ una función entera. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) S_ϕ aplica $\mathcal{B}^\alpha$ en $\mathcal{B}^\beta$

(2) S_ϕ es un operador acotado de $\mathcal{B}^\alpha$ en $\mathcal{B}^\beta$

(3) ϕ es un polinomio de grado a lo más $(\beta - 1)/(\alpha - 1)$.

Teorema 1.14. [28] *Sea $\beta > 1$ y ϕ una función entera. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) S_ϕ aplica $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}^\beta$

(2) S_ϕ *es un operador acotado de* $\mathcal{B}$ *en* $\mathcal{B}^\beta$

(3) ϕ *es una función entera de orden menor que uno, o de orden uno y tipo cero.*

Por otra parte, Castillo, Ramos-Fernández y Salazar en [12] consideraron el operador de superposición entre los espacios de Bloch-Orlicz y α-Bloch, logrando mejorar y obtener por una vía distinta los resultados obtenidos por Xu en [28]. Algunos de sus aportes fueron los siguientes:

Teorema 1.15. [12] *Sea* $\alpha \geq 1$ *y sea* ϕ *una función entera. El operador* S_ϕ *aplica* $\mathcal{B}^\alpha$ *en* $\mathcal{B}^\psi$ *si y sólo si* ϕ *es una función constante.*

En el caso de la $\mathcal{N}$-función $\psi(t) = t\log(1+t)$, con $t > 0$, los autores mostraron que el espacio de Bloch-Orlicz asociado a ψ es isometricamente isomorfo al espacio $\mathcal{B}^v$, donde

$$v(z) = (1-|z|)\log\left(\frac{e}{1-|z|}\right),$$

con $z \in \mathbb{D}$ (ver [12]). En este caso obtuvieron los siguientes teoremas:

Teorema 1.16. [12] *Sea* $\alpha \in (0,1)$. *Entonces para cualquier función entera* ϕ, S_ϕ *es un operador acotado de* $\mathcal{B}^\alpha$ *en* $\mathcal{B}^v$.

Teorema 1.17. [12] *Sea* $\alpha \in (0,1)$ *y sea* ϕ *una función entera. Entonces* S_ϕ *es un operador acotado de* $\mathcal{B}^v$ *en* $\mathcal{B}^\alpha$ *si y sólo si* ϕ *es constante.*

Teorema 1.18. [12] *Sea* ϕ *una función entera. Entonces* S_ϕ *es un operador acotado de* $\mathcal{B}^v$ *en* $\mathcal{B}$ *si y sólo si* ϕ *es una función de orden menor que uno, o de orden uno y tipo cero.*

Teorema 1.19. [12] *Sea* ϕ *una función entera y* $\alpha > 1$ *fijo. Entonces* S_ϕ *es un operador acotado de* $\mathcal{B}^v$ *en* $\mathcal{B}^\alpha$ *si y sólo si* $\rho_\infty < 1$, *o* $\rho_\infty = 1$ *y* $\tau_\infty = 0$.

Teorema 1.20. [12] *Sea* ϕ *una función entera.* $S_\phi : \mathcal{B}^v \longrightarrow \mathcal{B}^v$ *es un operador acotado si y sólo si* ϕ *es una función lineal.*

CAPÍTULO 2
OPERADOR DE SUPERPOSICIÓN ENTRE LOS ESPACIOS BLOCH LOGARÍTMICOS

En este capítulo se caracterizan todas las funciones enteras ϕ para las cuales el operador de superposición S_ϕ es acotado cuando actúa de un espacio tipo Bloch logarítmico $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ en otro del mismo tipo. También como consecuencia de este estudio se obtienen diversos resultados sobre el acotamiento del operador de superposición cuando actúa entre los espacios α-Bloch y los espacios de Bloch-Orlicz. Los resultados presentados en este capítulo se deben a Malavé-Malavé y Ramos-Fernández y han sido publicados en la revista Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo Series 2 (ver [19]).

2.1 El peso integral y funciones especiales para $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$

En esta sección se define un peso el cual permite definir y establecer propiedades de ciertas funciones especiales las cuales son fundamentales en la prueba de los resultados obtenidos en esta investigación.

Para $\alpha, a > 0$ $\beta, b \geq 0$ se considera el peso

$$\mu_{\alpha,\beta}(z) = \left(1-|z|^2\right)^{\alpha} \log^{\beta}\left(\frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}}}{1-|z|^2}\right), \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{2.1}$$

Observe que este peso está relacionado con el peso definido por Stević en [25]. De hecho, se obtiene el mismo espacio con normas equivalentes.

También, se observa que el peso $\mu_{\alpha,\beta}$ es radial y que $\mu_{\alpha,\beta}(z) = H\left(|z|^2\right)$, donde H es la función holomorfa sobre $\mathbb{D}$ definida por

$$H(z) = (1-z)^{\alpha} \log^{\beta}\left(\frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}}}{1-z}\right)$$

y se considera el valor principal del logaritmo.

Los siguientes resultados son de Ramos-Fernández (ver [23]) y son base para el desarrollo de esta investigación:

Lema 2.1. [23] *Existe una constante $L_\alpha > 0$ que depende solo de α, tal que*

$$\mu_{\alpha,\beta}(z) \leq L_\alpha |H(\bar{a}z)| \tag{2.2}$$

para todo $a, z \in \mathbb{D}$.

Demostración: Para $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ fijos, la función

$$h(t) = t^\alpha \log^\beta \left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{t} \right), \qquad t \in (0,1]$$

satisface $h(0^+) = 0$, $h(1) = (\frac{\beta}{\alpha})^\beta$ y es estrictamente creciente. En efecto,

$$\begin{aligned} h'(t) &= \alpha t^{\alpha-1} \log^\beta \left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{t} \right) + \beta t^\alpha \log^{\beta-1} \left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{t} \right) \frac{t}{e^{\beta/\alpha}} \left(-\frac{e^{\beta/\alpha}}{t^2} \right) \\ &= \alpha t^{\alpha-1} \log^\beta \left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{t} \right) - \alpha t^{\alpha-1} \log^{\beta-1} \left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{t} \right) \\ &= t^{\alpha-1} \log^{\beta-1} \left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{t} \right) \left\{ \alpha \log \left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{t} \right) - \beta \right\} \geq 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in (0,1]$.

Por otro lado, también se satisface la desigualdad $|1 - \bar{a}z| \geq \frac{1}{2}(1 - |z|^2)$ para todo $a, z \in \mathbf{D}$. En efecto,

$$\begin{aligned} |1 - \bar{a}z|^2 &= (1 - \bar{a}z)\overline{(1 - \bar{a}z)} = (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) \\ &= 1 - a\bar{z} - \bar{a}z + |a|^2|z|^2 \\ &= 1 - (a\bar{z} + \overline{a\bar{z}}) + |a|^2|z|^2 \\ &= 1 - 2Re(a\bar{z}) + |a|^2|z|^2 \\ &\geq 1 - 2|a||z| + |a|^2|z|^2 \\ &= (1 - |a||z|)^2 \\ &\geq (1 - |z|)^2, \end{aligned}$$

donde se han usado los hechos que $Re(z) \leq |z|$ y $|a| < 1$. Ahora se afirma que $1 - |z| \geq \frac{1}{2}(1 - |z|^2)$ para todo $z \in \mathbf{D}$. En efecto, definiendo $f(t) = 1 - t$ y

$g(t) = \frac{1}{2}(1-t^2)$ con $t \in [0,1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) - g(t) &= 1 - t - \frac{1}{2}(1-t^2) \\ &= \frac{1}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 \\ &= \frac{1}{2}(t-1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene $|1-\bar{a}z|^2 \geq (1-|z|)^2 \geq \left(\frac{1}{2}(1-|z|^2)\right)^2$, de donde se concluye la desigualdad. Luego, usando el hecho que h es creciente y la desigualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned} h(|1-\bar{a}z|) &\geq h\left(\frac{1}{2}(1-|z|^2)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}(1-|z|^2)\right)^{\alpha} \log^{\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{\frac{1}{2}(1-|z|^2)}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}(1-|z|^2)^{\alpha} \log^{\beta}\left(2\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}(1-|z|^2)^{\alpha} \log^{\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \mu_{\alpha,\beta}(z). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha,\beta}(z) &\leq 2^{\alpha} h(|1-\bar{a}z|) \\ &= 2^{\alpha}|1-\bar{a}z|^{\alpha} \log^{\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{|1-\bar{a}z|}\right) \\ &= 2^{\alpha}|1-\bar{a}z|^{\alpha} \left|\log^{\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-\bar{a}z}\right)\right| \\ &= L_{\alpha}|H(\bar{a}z)|, \end{aligned}$$

donde $L_{\alpha} = 2^{\alpha}$ y se ha usado el hecho que $|\log(w)| \geq \log|w|$.

Como consecuencia inmediata del Lema anterior, se tiene que para cada $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ la función

$$f_a(z) = \frac{1}{a}\int_0^z \frac{ds}{H(\bar{a}s)} = \frac{z}{a}\int_0^1 \frac{dt}{H(t\bar{a}z)} \tag{2.3}$$

con $z \in \mathbb{D}$, está en $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$. En efecto, por el Lema 2.1, se tiene

$$\begin{aligned} \|f_a\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{z\in\mathbf{D}} \mu_{\alpha,\beta}(z)|f'_a(z)| \\ &= \sup_{z\in\mathbf{D}} \mu_{\alpha,\beta}(z)\frac{1}{|a|}\frac{1}{|H(\bar{a}z)|} \\ &\leq \sup_{z\in\mathbf{D}} \frac{L_\alpha}{|a|} = \frac{L_\alpha}{|a|} < +\infty. \end{aligned}$$

También, dado que $\mu_{\alpha,\beta}$ es estrictamente positiva, acotada y continua, se tiene que la relación

$$I_{\alpha,\beta}(a) = \int_0^1 \frac{dt}{\mu_{\alpha,\beta}(\sqrt{t}a)} = \int_0^1 \frac{dt}{H(t|a|^2)} = f_a(a),$$

con $a \in \mathbb{D}$, es una función estrictamente positiva, continua y

$$\begin{aligned} |I_{\alpha,\beta}(a)| &= \left|\int_0^1 \frac{dt}{\mu_{\alpha,\beta}(\sqrt{t}a)}\right| \\ &\geq \left|\int_0^1 \frac{dt}{||\mu_{\alpha,\beta}||_\infty}\right|, \text{ pues } \mu_{\alpha,\beta}(\sqrt{t}a) \leq ||\mu_{\alpha,\beta}||_\infty \\ &= \frac{1}{||\mu_{\alpha,\beta}||_\infty}, \end{aligned}$$

en consecuencia

$$\frac{1}{|I_{\alpha,\beta}(a)|} \leq ||\mu_{\alpha,\beta}||_\infty,$$

para todo $a \in \mathbb{D}$, lo cual dice que la función $\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)$ es acotada.

Por lo tanto, definiendo $f_0(0) := \mu_{\alpha,\beta}(0)$ la expresión

$$\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z) := \frac{1}{I_{\alpha,\beta}(z)} = \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu_{\alpha,\beta}(\sqrt{t}z)}\right)^{-1},$$

con $z \in \mathbb{D}$ define un peso sobre $\mathbb{D}$, el cual es llamado el *peso integral* asociado a $\mu_{\alpha,\beta}$.

■

Comentario. El peso integral fue recientemente introducido por Ramos-Fernández en [23], cuando estudiaba la continuidad y estimaba la norma esencial del operador de composición con peso cuando éste actúa de un espacio Bloch Logarítmico en un espacio tipo Bloch.

Lema 2.2. [23] $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ *está continuamente contenido en* $H^{\infty}_{\mu_{I_{\alpha,\beta}}}$. *Más aún, existe una constante* $K_{\alpha,\beta} > 0$ *tal que*

$$\|f\|_{H^{\infty}_{\mu_{I_{\alpha,\beta}}}} \leq K_{\alpha,\beta} \|f\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}} \tag{2.4}$$

para todo $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$.

Demostración: Para $f \in \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ y $z \in \mathbb{D}$, se tiene

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(tz)|\, dt \leq |f(0)| + \|f\|_{\mu} \int_0^1 \frac{dt}{\mu_{\alpha,\beta}(tz)} \\ &\leq \left(1 + \int_0^1 \frac{dt}{\mu_{\alpha,\beta}(tz)}\right) \|f\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}}. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema 2.1, se tiene

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mu_{\alpha,\beta}(tz)} \leq L_{\alpha} I_{\alpha,\beta}(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y dado que $1 \leq \|\mu_{\alpha,\beta}\|_{\infty} I_{\alpha,\beta}(z)$, se concluye que

$$|f(z)| \leq \left(\|\mu_{\alpha,\beta}\|_{\infty} + L_{\alpha}\right) I_{\alpha,\beta}(z) \|f\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}} = \frac{K_{\alpha,\beta}}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)} \|f\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto

$$\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)|f(z)| \leq K_{\alpha,\beta} \|f\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto prueba el Lema. ■

Lema 2.3. [23] *Sean* $\alpha > 0$ *y* $\beta \geq 0$ *dos parámetros fijos:*

(1) Para ($\alpha = 1$ *y* $\beta \in [0,1]$) *o* ($\alpha > 1$ *y* $\beta \geq 0$) *el peso* $\mu_{I_{\alpha,\beta}}$ *es típico, esto es*

$$\lim_{|z| \to 1^-} \mu_{I_{\alpha,\beta}}(z) = 0.$$

(2) Para ($\alpha \in (0,1)$ *y* $\beta \geq 0$) *o* ($\alpha = 1$ *y* $\beta > 1$) *el peso* $\mu_{I_{\alpha,\beta}}$ *está lejos del cero, esto es, existe una constante* $\delta > 0$ *tal que* $\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z) \geq \delta$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$.

Observe que en este caso, $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \subset H^{\infty}$ el espacio de todas las funciones holomorfas acotadas sobre $\mathbb{D}$.

Demostración: Suponga que los parámetros $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ son fijos. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta}(z) &= \int_0^1 \frac{dt}{\mu_{\alpha,\beta}(\sqrt{t}z)} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{(1-t|z|^2)^\alpha \log^\beta\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-t|z|^2}\right)} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{(1-t|z|^2)\log^\beta\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-t|z|^2}\right)(1-t|z|^2)^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables

$$w = \log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-t|z|^2}\right) = \frac{\beta}{\alpha} - \log(1-t|z|^2),$$

se tiene que si $t=0$, entonces $w = \frac{\beta}{\alpha}$, si $t=1$, entonces $w = \log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)$, también $1-t|z|^2 = \exp(\frac{\beta}{\alpha} - w)$ y $dw = \dfrac{|z|^2}{1-t|z|^2}$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta}(z) &= \frac{1}{|z|^2}\int_{\beta/\alpha}^{\log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)} t^{-\beta}\, e^{(\beta/\alpha-t)(1-\alpha)} dt \\ &= \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)}}{|z|^2}\int_{\beta/\alpha}^{\log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)} t^{-\beta}\, e^{(\alpha-1)t} dt, \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$.

Así, el peso integral está dado por

$$\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z) = |z|^2\left(\int_{\beta/\alpha}^{\log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)} t^{-\beta}\, e^{(\beta/\alpha-t)(1-\alpha)} dt\right)^{-1}.$$

Si $\alpha = 1$, entonces

$$I_{1,\beta}(z) = \frac{1}{|z|^2}\int_{\beta}^{\log\left(\frac{e^{\beta}}{1-|z|^2}\right)} t^{-\beta}\, dt.$$

Ahora se consideran los casos:

Si $\beta \neq 1$, entonces

$$I_{1,\beta}(z)=\frac{1}{|z|^2}\frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}\Bigg|_{\beta}^{\beta-\log(1-|z|^2)}=\frac{1}{1-\beta}\frac{1}{|z|^2}\left(\left(\beta-\log\left(1-|z|^2\right)\right)^{1-\beta}-\beta^{1-\beta}\right)$$

Si $\beta=1$, entonces

$$I_{1,\beta}(z)=\frac{1}{|z|^2}\log(t)\Bigg|_{1}^{1-\log(1-|z|^2)}=\frac{1}{|z|^2}\log(1-\log(1-|z|^2)).$$

Por lo tanto, para $\alpha=1$ se tiene

$$\mu_{I_{1,\beta}}(z)=|z|^2\begin{cases}(1-\beta)\left(\left(\beta-\log\left(1-|z|^2\right)\right)^{1-\beta}-\beta^{1-\beta}\right)^{-1}, & \beta\neq 1,\\ \log^{-1}\left(1-\log\left(1-|z|^2\right)\right), & \beta=1.\end{cases}$$

Tomando límite se tiene

$$\lim_{|z|\to 1^-}\mu_{I_{1,\beta}}(z)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad \beta\leq 1,\\ (\beta-1)\beta^{\beta-1}, & \text{si}\quad \beta>1.\end{cases}$$

Si $\alpha>1$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}I_{\alpha,\beta}(z)\quad &\geq\quad \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)}}{|z|^2}\log^{-\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)\int_{\beta/\alpha}^{\log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)}e^{(\alpha-1)t}dt\\ &=\quad \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)}}{(\alpha-1)|z|^2}\log^{-\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)\left(\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)^{\alpha-1}-e^{(\alpha-1)\frac{\beta}{\alpha}}\right),\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho que la función $f(t)=t^{-\beta}$ es decreciente en $(0,+\infty)$. Luego, usando también el hecho que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\log^{\beta}(t)}=\infty,$$

se concluye que $\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)\to 0$ cuando $|z|\to 1^-$ siempre que $\alpha>1$.

Si $\alpha\in(0,1)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}I_{\alpha,\beta}(z)\quad &\leq\quad \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)}}{|z|^2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\beta}\int_{\beta/\alpha}^{\log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)}e^{(\alpha-1)t}dt\\ &=\quad \frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}(1-\alpha)}}{(1-\alpha)|z|^2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\beta},\end{aligned}$$

donde se ha usado nuevamente el hecho que la función $f(t)=t^{-\beta}$ es decreciente en $(0,+\infty)$. Luego, dado que $\alpha\in(0,1)$ usando el hecho que

$$\lim_{t\to\infty}t^{\alpha-1}=0,$$

se obtiene que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \mu_{I_{\alpha,\beta}}(z) \geq \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\beta}.$$

El siguiente lema muestra la relación entre los espacios $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ y $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$.

Lema 2.4. *Para $\alpha, a > 0$ $\beta, b \geq 0$, los pesos $\mu_{\alpha,\beta}$ y $\mu_{a,b}$ satisfacen la siguiente relación:*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = \begin{cases} 0, & si\ (\alpha > a)\ \ o\ \ (\alpha = a\ \ y\ \ \beta < b) \\ 1, & si\ \ \alpha = a\ \ y\ \ \beta = b \\ \infty, & si\ (a > \alpha)\ \ o\ \ (a = \alpha\ \ y\ \ \beta > b). \end{cases} \tag{2.5}$$

Adicionalmente, se tiene que:

(1) Si $(\alpha > a)$ o $(\alpha = a$ y $\beta < b)$, entonces $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}} \subset \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$.

(2) Si $(a > \alpha)$ o $(a = \alpha$ y $\beta \geq b)$, entonces $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \subset \mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$.

Demostración: Primeramente se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{|z|\to 1^-} \frac{\log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)}{\log\left(\frac{e^{b/a}}{1-|z|^2}\right)} &= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{\frac{\beta}{\alpha} - \log(1-|z|^2)}{\frac{b}{a} - \log(1-|z|^2)} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\beta}{\alpha} - \log(t)}{\frac{b}{a} - \log(t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t}} = 1, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado la regla de L'Hôpital.

De lo anterior se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} &= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha} \log^{\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)}{(1-|z|^2)^{a} \log^{b}\left(\frac{e^{b/a}}{1-|z|^2}\right)} \\ &= \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{\alpha-a} \frac{\log^{\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)}{\log^{b}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)} \\ &= \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{\alpha-a} \log^{\beta-b}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right). \end{aligned}$$

Ahora se analizan los diferentes casos para el límite anterior.

Caso $\alpha = a$:

Si $\alpha = a$ y $\beta = b$, entonces

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = \lim_{|z|\to 1^-} 1 = 1.$$

Si $\alpha = a$ y $\beta < b$, entonces

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = \lim_{|z|\to 1^-} \frac{1}{\log^{b-\beta}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)} = 0.$$

Si $\alpha = a$ y si $\beta > b$, entonces

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = \lim_{|z|\to 1^-} \log^{\beta-b}\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right) = \infty.$$

Caso $\alpha > a$:

Si $\alpha > a$ y $\beta = b$, entonces

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{\alpha-a} = 0.$$

Si $\alpha > a$ y $\beta > b$, entonces el resultado se concluye del hecho que

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha-a} \log^{\beta-b}\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Si $\alpha > a$ y $\beta < b$, entonces el resultado se concluye del hecho que

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha-a} \frac{1}{\log^{b-\beta}\left(\frac{1}{t}\right)} = 0.$$

Caso $\alpha < a$:

Si $\alpha < a$ y $\beta = b$, entonces

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = \lim_{|z|\to 1^-} \frac{1}{(1-|z|^2)^{a-\alpha}} = \infty.$$

Si $\alpha < a$ y $\beta > b$, entonces el resultado se concluye del hecho que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^{a-\alpha}} \log^{\beta-b}\left(\frac{1}{t}\right) = \infty.$$

Si $\alpha < a$ y $\beta < b$, entonces el resultado se concluye del hecho que

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^{a-\alpha}}\frac{1}{\log^{b-\beta}\left(\frac{1}{t}\right)}=\infty.$$

La prueba del item (1) se concluye del hecho que

$$\lim_{|z|\to 1^-}\frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)}=0.$$

En efecto, por definición de límite existe $r \in (0,1)$ tal que

$$\mu_{\alpha,\beta}(z)\leq L\mu_{a,b}(z) \tag{2.6}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ satisfaciendo $r < |z| < 1$.

Por otra parte, si $z \in \overline{D}_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r\}$, entonces usando el hecho que $\mu_{a,b}$ es continua y estrictamente positiva sobre el compacto $\overline{D}_r$ se garantiza la existencia de una constante positiva $m = m(\mu_{a,b}, r)$, que depende sólo de $\mu_{a,b}$ y r, tal que $\mu_{a,b}(z) \geq m$ para todo $z \in \overline{D}_r$.

Similarmente, existe una constante $M = M(\mu_{\alpha,\beta}) > 0$, que depende sólo de $\mu_{\alpha,\beta}$, tal que $\mu_{\alpha,\beta}(z) \leq M$ para todo $z \in \overline{D}_r$, por lo tanto se tiene que

$$\mu_{\alpha,\beta}(z)\leq M\frac{m}{m}\leq\frac{M}{m}\mu_{a,b}(z)$$

para todo $z \in \overline{D}_r$. Esta última desigualdad junto con (2.6) muestran que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu_{\alpha,\beta}(z)\leq C\mu_{a,b}(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto último implica que $\mu_{\alpha,\beta}(z)|f'(z)| \leq C\mu_{a,b}(z)|f'(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo tanto $||f||_{\alpha,\beta} \leq C||f||_{a,b}$ para toda función $f \in \mathcal{B}^a_{\log^b}$ y en consecuencia $\mathcal{B}^a_{\log^b} \subset \mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}$.

Para la prueba del item (2) se tiene que si $\alpha = a$ y $\beta = b$, entonces $\mathcal{B}^a_{\log^b} = \mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}$. Por otra parte si $(a > \alpha)$ o $(a = \alpha$ y $\beta > b)$, entonces $\lim\limits_{|z|\to 1^-}\frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = \infty$ y dado que

$$\lim_{|z|\to 1^-}\frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)}=\infty \text{ si y sólo si } \lim_{|z|\to 1^-}\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}=0,$$

por el item (1) se concluye que $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \subset \mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$.

Se culmina esta sección definiendo las siguientes funciones inspiradas en los trabajos de Ye [30] y Ramos-Fernández [23], las cuales son fundamentales en la prueba de los resultados de la siguiente sección.

Para cada, $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ fijo, se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} s_a(z) &= \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^3(z) - \mu_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^2(z) \qquad (2.7)\\ g_a(z) &= 3\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^2(z) - 2\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^3(z) \qquad (2.8)\end{aligned}$$

con $z \in \mathbb{D}$, donde f_a es la función definida en (2.3). Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

Lema 2.5. [23] *Para cada $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $s_a, g_a \in \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$,*

(1) $s_a(0) = s_a(a) = 0$ *y* $s_a'(a) = \dfrac{1}{a\mu_{\alpha,\beta}(a)}$,

(2) $g_a(0) = 0$, $g_a(a) = \dfrac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)}$ *y* $g_a'(a) = 0$.

Demostración: En efecto,

$$\begin{aligned} s_a(0) &= \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^3(0) - \mu_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^2(0)\\ &= \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a).0 - \mu_{I_{\alpha,\beta}}(a).0 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_a(a) &= \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^3(a) - \mu_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^2(a)\\ &= \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a) I^3_{\alpha,\beta}(a) - \mu_{I_{\alpha,\beta}}(a) I^2_{\alpha,\beta}(a)\\ &= I_{\alpha,\beta}(a) - I_{\alpha,\beta}(a) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_a'(z) &= \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a) 3 f_a^2(z) f_a'(z) - \mu_{I_{\alpha,\beta}}(a) 2 f_a(z) f_a'(z)\\ &= f_a'(z)(3\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^2(z) - 2\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a(z))\\ &= \frac{1}{aH(\overline{a}z)}(3\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a^2(z) - 2\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a) f_a(z)),\end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} s_a'(a) &= \frac{1}{aH(|a|^2)}(3\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a^2(a) - 2\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a(a)) \\ &= \frac{1}{a\mu_{\alpha,\beta}(a)}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} g_a(0) &= 3\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a^2(0) - 2\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a^3(0) \\ &= \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a).0 - \mu_{I_{\alpha,\beta}}(a).0 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_a(a) &= 3\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a^2(a) - 2\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a^3(a) \\ &= 3I_{\alpha,\beta}(a) - 2I_{\alpha,\beta}(a) \\ &= I_{\alpha,\beta}(a) = \frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_a'(z) &= 3\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)2f_a(z)f_a'(z) - 2\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)3f_a^2(z)f_a'(z) \\ &= 6f_a'(z)(\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a(z) - \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a^2(z)) \\ &= \frac{6}{aH(\overline{a}z)}(\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a(z) - \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a^2(z)), \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned} g_a'(a) &= \frac{6}{aH(|a|^2)}(\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a(a) - \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)f_a^2(a)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

También por el Lema 2.1, se tiene

$$|f_a(z)| \leq \frac{1}{|a|}\int_0^1 \frac{dt}{|H(t\bar{a}z)|} \leq \frac{L_\alpha}{|a|}I_{\alpha,\beta}(a) = \frac{L_\alpha}{|a|\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)}$$

para todo $z \in \mathbf{D}$. De esta desigualdad y el Lema 2.1, se tiene

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha,\beta}(z)|s_a'(z)| &\leq L_\alpha|H(\bar{a}z)|\frac{1}{|a||H(\bar{a}z)|}(3\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)|f_a^2(z)| + 2\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)|f_a(z)|) \\ &\leq \frac{L_\alpha}{|a|}\left(3\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)\frac{L_\alpha^2}{|a|^2\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)} + 2\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)\frac{L_\alpha}{|a|\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)}\right) \\ &= \frac{L_\alpha^2}{|a|^2}\left(3\frac{L_\alpha}{|a|} + 2\right) \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y $s_a \in \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ para cada $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Similarmente,

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha,\beta}(z)|g_a'(z)| &\leq L_\alpha |H(\bar{a}z)| \frac{6}{|a||H(\bar{a}z)|}(\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)|f_a(z)| + \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)|f_a^2(z)|) \\
&\leq \frac{6L_\alpha}{|a|}\left(\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)\frac{L_\alpha}{|a|\mu_{I_{\alpha,\beta}}(a)} + \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)\frac{L_\alpha^2}{|a|^2\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(a)}\right) \\
&= \frac{6L_\alpha^2}{|a|^2}\left(\frac{L_\alpha}{|a|} + 1\right)
\end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y $g_a \in \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ para cada $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. ■

2.2 Operador de superposición entre los espacios Bloch logarítmicos

En esta sección, se establecen los principales resultados de esta investigación los cuales aparecen en [19]. Más precisamente se caracterizan las funciones enteras ϕ para las cuales el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \longrightarrow \mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$ es acotado. Para ello suponga que los parámetros $\alpha, a > 0$ y $\beta, b \geq 0$ son fijos. También en vista de las propiedades de los espacios $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$, es conveniente dividir el estudio en dos subsecciones: la primera, el caso ($\alpha \in (0,1)$ y $\beta \geq 0$) o ($\alpha = 1$ y $\beta > 1$) y la segunda, el caso ($\alpha = 1$ y $\beta \in [0,1]$) o ($\alpha > 1$ y $\beta \geq 0$).

2.2.1 El caso ($\alpha \in (0,1)$ y $\beta \geq 0$) o ($\alpha = 1$ y $\beta > 1$)

En este caso, el peso integral está lejos del cero entonces el operador de superposición es necesariamente acotado de $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ en $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$. Sin embargo, se divide este hecho en dos casos, el primero de ellos cuando $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \subset \mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$ y el segundo cuando $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}} \subset \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$; más precisamente, los resultados obtenidos en esta sección son:

Teorema 2.1. [19] *Suponga que los parámetros α y β son fijos y satisfacen ($\alpha \in (0,1)$ y $\beta \geq 0$) o ($\alpha = 1$ y $\beta > 1$). Suponga que $a > 0$ y $b \geq 0$ son tales que $\alpha < a$ o ($\alpha = a$ y $\beta \geq b$). Sea ϕ una función entera, entonces el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \longrightarrow \mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$ es acotado.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ y $M > 0$ tal que $\|f\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}} \leq M$. De la desigualdad (2.4) se tiene $\|f\|_{H^{\infty}_{\mu_{I_{\alpha,\beta}}}} \leq K_{\alpha,\beta}M$. Esto es equivalente a

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)|f(z)| \;=\; K_{\alpha,\beta}M,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)} K_{\alpha,\beta}M \\ &\leq \frac{1}{\delta} K_{\alpha,\beta}M := K_{\alpha,\beta,\delta,M} \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, donde se ha usado la parte (1) del Lema 2.3, en la última desigualdad. Por otra parte, dado que ϕ y ϕ' son funciones enteras se tiene

$$\begin{aligned} |\phi(f(0))| &\leq M_1 = \max_{|w|=K_{\alpha,\beta,\delta,M}} |\phi(w)| \\ |\phi'(f(z))| &\leq M_2 = \max_{|w|=K_{\alpha,\beta,\delta,M}} |\phi'(w)| \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. También, de la hipótesis $\alpha < a$ o ($\alpha = a$ y $\beta \geq b$), por el Lema 2.4 se tiene que $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \subset \mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|S_{\phi}(f)\|_{\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}} &= |\phi(f(0))| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{a,b}(z)|\phi'(f(z))||f'(z)| \\ &\leq M_1 + M_2 \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{a,b}(z)|f'(z)| \\ &\leq M_1 + M_2 \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{\alpha,\beta}(z)|f'(z)| \\ &\leq M_1 + MM_2, \end{aligned}$$

donde M_1 y M_2 dependen sólo de α, β, δ y ϕ. Esto completa la prueba. ■

En el otro caso, se tiene:

Teorema 2.2. [19] *Suponga que los parámetros α y β son fijos y satisfacen ($\alpha \in (0,1)$ y $\beta \geq 0$) o ($\alpha = 1$ y $\beta > 1$). Suponga que $a > 0$ y $b \geq 0$ son tales que $\alpha > a$ o ($\alpha = a$ y $\beta < b$). Sea ϕ una función entera, entonces el operador de superposición S_{ϕ} es acotado de $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ en $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$ si y sólo si ϕ es una función constante.*

Demostración: Si ϕ es una función entera y no constante, entonces por el Lema 1.1, existe una sucesión $\{w_n\}$ de números complejos y una constante $\delta_1 > 0$ tal que $|w_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y $|\phi'(w_n)| \geq \delta_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, dado que $\alpha \in (0,1)$ y $\beta \geq 0$ o $\alpha = 1$ y $\beta > 1$, entonces por el Lema 2.3, el peso $\mu_{I_{\alpha,\beta}}$ está lejos del cero, en consecuencia, existe una sucesión de puntos $\{z_n\}$ en el disco unitario abierto $\mathbb{D}$ tal que $|w_n| \geq \mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n) \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{D}$.

Todavía más, pasando a una subsucesión, se puede suponer que $\frac{1}{2} < |z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por (2.3), para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$f_n(z) = \frac{1}{z_n} \int_0^z \frac{ds}{H(\overline{z}_n s)} \tag{2.9}$$

con $z \in \mathbb{D}$ está en $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ y satisface $f_n(z_n) = I_{\alpha,\beta}(z_n)$. Por lo tanto, del Lema 2.5, la función

$$s_n(z) = \mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(z_n) f_n^3(z) - \mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n) f_n^2(z), \tag{2.10}$$

con $z \in \mathbb{D}$ satisface:

(1) $s_n(0) = s_n(z_n) = 0$, $s_n'(z_n) = \dfrac{1}{z_n \mu_{\alpha,\beta}(z_n)}$ y

(2) $\|s_n\|_{\alpha,\beta} \leq \dfrac{L_\alpha^2}{|z_n|^2}\left(3\dfrac{L_\alpha}{|z_n|} + 2\right) \leq 8L_\alpha^2(3L_\alpha + 1)$, pues $\dfrac{1}{|z_n|} < 2$.

En particular, $\{s_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$. Similarmente, la función

$$g_n(z) = 3\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n) f_n^2(z) - 2\mu^2_{I_{\alpha,\beta}}(z_n) f_n^3(z) \tag{2.11}$$

con $z \in \mathbb{D}$ satisface:

(1) $g_n(0) = 0$, $g_n(z_n) = I_{\alpha,\beta}(z_n) = \dfrac{1}{\mu_I(z_n)}$, $g_n'(z_n) = 0$ y

(2) $\|g_n\|_{\alpha,\beta} \leq \dfrac{6L_\alpha^2}{|z_n|^2}\left(\dfrac{L_\alpha}{|z_n|} + 1\right) \leq 24L_\alpha^2(2L_\alpha + 1)$, pues $\dfrac{1}{|z_n|} < 2$.

y $\{g_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$. Por lo tanto, definiendo la función

$$h_n(z) = w_n \mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\{g_n(z) + s_n(z)\}, \tag{2.12}$$

satisface las siguientes propiedades:

(1) $h_n(0) = w_n\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\{g_n(0) + s_n(0)\} = w_n\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\{0 + 0\} = 0$,

(2) $h_n(z_n) = w_n\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\{g_n(z_n) + s_n(z_n)\} = w_n\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\left\{\dfrac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)} + 0\right\} = w_n$,

(3) $h_n'(z_n) = w_n\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\{g_n'(z_n) + s_n'(z_n)\}$

$$= w_n\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\left\{0 + \frac{1}{z_n\mu_{\alpha,\beta}(z_n)}\right\} = \frac{w_n\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)}{z_n\mu_{\alpha,\beta}(z_n)},$$

(4) $\|h_n\|_{\alpha,\beta} \leq |w_n|\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\{\|g_n\|_{\alpha,\beta} + \|s_n\|_{\alpha,\beta}\} \leq 8|w_n|\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)L_\alpha^2(9L_\alpha + 4)$,

para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $\{h_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, la cual satisface

$$\begin{aligned}
\|S_\phi(h_n)\|_{a,b} &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{a,b}(z)\,|\phi'(h_n(z))|\,|h_n'(z)| \\
&\geq \mu_{a,b}(z_n)\,|\phi'(h_n(z_n))|\,|h_n'(z_n)| \\
&= \mu_{a,b}(z_n)|\phi'(w_n)|\frac{|w_n|\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)}{|z_n|\mu_{\alpha,\beta}(z_n)} \\
&\geq \delta_1\delta^2\frac{\mu_{a,b}(z_n)}{\mu_{\alpha,\beta}(z_n)} \to \infty
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado que el hecho que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = 0, \tag{2.13}$$

dado que $\alpha > a$ o ($\alpha = a$ y $\beta < b$). Esto dice que el operador S_ϕ no puede ser acotado de $\mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}$ en $\mathcal{B}^a_{\log^b}$.

Recíprocamente, sea ϕ una función constante. Suponga que $f \in \mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}$ y $||f||_{\mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}} \leq M$ para alguna constante $M > 0$ tal que, entonces

$$\begin{aligned}
||S_\phi(f)||_{\mathcal{B}^a_{\log^b}} &= |(\phi\circ f)(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{a,b}(z)|(\phi\circ f)'(z)| \\
&= |(\phi\circ f)(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{a,b}(z)|(\phi'(f(z))||f'(z)| \\
&= |\phi(f(0)| = K
\end{aligned}$$

lo cual dice que el operador $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta} \longrightarrow \mathcal{B}^a_{\log^b}$ es acotado. ∎

2.2.2 El caso ($\alpha = 1$ y $\beta \in [0,1]$) o ($\alpha > 1$ y $\beta \geq 0$)

En este caso, el peso $\mu_{I_{\alpha,\beta}}$ es típico. Aquí también se divide el estudio en varios casos, el primero cuando $\mathcal{B}^a_{\log^b} \subset \mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}$, el segundo cuando $\mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta} = \mathcal{B}^a_{\log^b}$ y el tercero cuando $\mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta} \subset \mathcal{B}^a_{\log^b}$. En el primer caso se procede como en la prueba del Teorema 2.2 y el resultado esperado es:

Teorema 2.3. [19] *Asuma que $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ son tales que ($\alpha = 1$ y $\beta \in [0,1]$) o ($\alpha > 1$ y $\beta \geq 0$). Suponga que $a > 0$ y $b \geq 0$ satisfacen $\alpha > a$ o ($\alpha = a$ y $\beta < b$). Sea ϕ una función entera. Entonces el operador de superposiciónS_ϕ es acotado de $\mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}$ en $\mathcal{B}^a_{\log^b}$ si y sólo si ϕ es una función constante.*

Demostración: Si ϕ es una función entera y no constante, entonces por el Lema 1.1, existe una sucesión $\{w_n\}$ de números complejos y una constante $\delta > 0$ tal que $|w_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y $|\phi'(w_n)| \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, dado que $\alpha = 1$ y $\beta \in [0,1]$ o $\alpha > 1$ y $\beta \geq 0$, entonces por el Lema 2.3, el peso $\mu_{I_{\alpha,\beta}}$ es típico. En consecuencia existe una sucesión de puntos $\{z_n\}$ en el disco unitario abierto $\mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1^-$ y

$$\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\,|w_n| = 1. \tag{2.14}$$

Luego, como en la prueba anterior, pasando a una subsucesión tal que $\frac{1}{2} < |z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y considerando la sucesión $\{h_n\}$ definida en (2.12), donde $\{s_n\}$ y $\{g_n\}$ son las sucesiones definidas en (2.10) y (2.11) respectivamente (ver también (2.9)), se tiene que $\{h_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta}$ la cual satisface

$$\begin{aligned}
\|S_\phi(h_n)\|_{a,b} &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{a,b}(z)\,|\phi'(h_n(z))|\,|h_n'(z)| \\
&\geq \mu_{a,b}(z_n)\,|\phi'(h_n(z_n))|\,|h_n'(z_n)| \\
&= \mu_{a,b}(z_n)|\phi'(w_n)|\frac{|w_n|\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)}{|z_n|\mu_{\alpha,\beta}(z_n)} \\
&\geq \delta\frac{\mu_{a,b}(z_n)}{\mu_{\alpha,\beta}(z_n)} \to \infty
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado el hecho que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{\alpha,\beta}(z)}{\mu_{a,b}(z)} = 0, \tag{2.15}$$

dado que $\alpha > a$ o ($\alpha = a$ y $\beta < b$). Esto dice que el operador S_ϕ no es acotado de $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ en $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$.

Es claro que si ϕ es una función constante, entonces el operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \to \mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$ es acotado. ■

Comentario 2.1. Note que la condición (2.15) implica que $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$ es un subespacio de $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$. Por esta razón, el Teorema 2.3, es un resultado esperado.

Ahora se consideran los otros casos:

El caso $\alpha = a$ y $\beta = b$

El siguiente resultado muestra que si los espacios son iguales, un operador de superposición acotado sólo es posible a través de una función afín.

Teorema 2.4. [19] *Asuma que $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ son tales que $\alpha = 1$ y $\beta \in [0,1]$ o $\alpha > 1$ y $\beta \geq 0$. Suponga que $\alpha = a$ y $\beta = b$. Sea ϕ una función entera. Entonces el operador de superposición S_ϕ es acotado de $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ en sí mismo si y sólo si ϕ es una función afín.*

Demostración: Suponga que ϕ es una función entera y no afín. Entonces por el Lema 1.1, existe una sucesión $\{w_n\}$ de números complejos y una constante $\delta > 0$ tal que $|w_n| \to \infty$ y

$$|\phi'(w_n)| \geq \delta\, |w_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, procediendo como en la prueba del Teorema 2.3, dado que el peso $\mu_{I_{\alpha,\beta}}$ es típico, entonces existe una sucesión de puntos $\{z_n\}$ en el disco unitario abierto $\mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1^{-}$,

$$\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)\, |w_n| = 1 \tag{2.16}$$

y $\frac{1}{2} < |z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando la sucesión $\{h_n\}$ definida en (2.12), donde $\{s_n\}$ y $\{g_n\}$ son las sucesiones definidas en (2.10) y (2.11) respectivamente (ver también (2.9)), se tiene que $\{h_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ la cual satisface

$$\begin{aligned}
\|S_{\phi}(h_n)\|_{\alpha,\beta} &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{\alpha,\beta}(z)\,|\phi'(h_n(z))|\,|h_n'(z)| \\
&\geq \mu_{\alpha,\beta}(z_n)\,|\phi'(h_n(z_n))|\,|h_n'(z_n)| \\
&= |\phi'(w_n)|\frac{|w_n|\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)}{|z_n|} \\
&\geq \delta\,|w_n| \to \infty
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado la relación (2.16). Esto muestra que el operador $S_{\phi} : \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \to \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ no es acotado si la función ϕ no es afín.

Recíprocamente sea ϕ es una función afín, es decir, $\phi(z) = Az + B$, con $A, B \in \mathbb{C}$ y $A \neq 0$. Suponga que $f \in \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ y $||f||_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}} \leq M$ para alguna constante $M > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
||S_{\phi}(f)||_{\alpha,\beta} &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{\alpha,\beta}(z)|(\phi\circ f)'(z)| \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{\alpha,\beta}(z)|(\phi'(f(z))||f'(z)| \\
&= |A|\sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{\alpha,\beta}(z)|f'(z)| \\
&= |A|||f||_{\alpha,\beta} \leq |A|||f||_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}} \\
&\leq |A|M.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\phi(z) = \phi(0) + \int_0^z \phi'(s)ds,$$

lo cual implica que

$$\phi(f(0)) = \phi(0) + \int_0^{f(0)} \phi'(s)ds = B + \int_0^{f(0)} A ds,$$

de donde se tiene que

$$|\phi(f(0))| \leq |B| + |A||f(0)| \leq |B| + |A|||f||_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}} \leq |B| + |A|M.$$

Por lo tanto de lo anterior se concluye que

$$\begin{aligned}
||S_{\phi}(f)||_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}} &= |\phi(f(0))| + ||S_{\phi}(f)||_{\alpha,\beta} \\
&\leq |B| + |A|M + |A|M \\
&= |B| + 2|A|M
\end{aligned}$$

Lo cual dice que el operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}} \longrightarrow \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ es acotado.

. $\blacksquare$

El caso ($a = \alpha$ y $\beta > b$) o ($a > \alpha$ y $b, \beta \geq 0$)

Este caso debe ser tratado con más cuidado, debido a que bajo estas condiciones el espacio de llegada $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$ es más grande que el espacio de partida $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ y ello permite que el símbolo ϕ pueda crecer más que en los casos anteriores. El resultado principal de esta sección depende de la existencia de una función especial la cual se define a continuación.

Definición 2.1. *Para α, a, β, b parámetros fijos que satisfacen ($a = \alpha$ y $\beta > b$) o ($a > \alpha$ y $b, \beta \geq 0$), se define la función*

$$\widetilde{I}_{\alpha,\beta}(z) \;=\; \int_{\beta/\alpha}^{\log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-|z|^2}\right)} t^{-\beta}\, e^{(\beta/\alpha - t)(1-\alpha)} dt,$$

con $z \in \mathbb{D}$.

Esta función satisface $\widetilde{I}_{\alpha,\beta}(z) \sim I_{\alpha,\beta}(z)$ cuando $|z| \to 1^-$ y $\widetilde{I}_{\alpha,\beta}(z) = \widetilde{I}_{\alpha,\beta}(|z|)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto haciendo $s = |z|$, se tiene que la función real

$$\widetilde{I}_{\alpha,\beta}(s) = \int_{\beta/\alpha}^{\log\left(\frac{e^{\beta/\alpha}}{1-s^2}\right)} t^{-\beta}\, e^{(\beta/\alpha - t)(1-\alpha)} dt, \quad \text{con} \quad s \in [0,1), \tag{2.17}$$

satisface que el integrando es una función estrictamente positiva y continua en $(0, +\infty)$, lo cual implica que la función $\widetilde{I}_{\alpha,\beta} : [0,1) \to [0,+\infty)$ es continua, creciente y $\widetilde{I}_{\alpha,\beta}(0) = 0$. Por lo tanto existe la función inversa $\widetilde{I}^{-1}_{\alpha,\beta} : [0,+\infty) \to [0,1)$ la cual es continua, creciente y $\widetilde{I}^{-1}_{\alpha,\beta}(0) = 0$. En consecuencia, se puede definir la función $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ por

$$\varphi(\tau) = \left(1 - [\widetilde{I}^{-1}_{\alpha,\beta}(\tau)]^2\right)^{\alpha - a} \log^{\beta - b}\left(\frac{e}{1 - [\widetilde{I}^{-1}_{\alpha,\beta}(\tau)]^2}\right), \tag{2.18}$$

la cual satisface $\varphi(\tau) = h \circ \widetilde{I}^{-1}_{\alpha,\beta}(\tau)$, donde

$$h(s) = (1 - s^2)^{\alpha - a} \log^{\beta - b}\left(\frac{e}{1 - s^2}\right) \tag{2.19}$$

con $s \in [0,1)$. De aquí, se tiene que $\varphi(\widetilde{I}_{\alpha,\beta}(s)) = h(s)$ para todo $s \in [0,1)$. Ahora se afirma que existe $t_0 \geq 0$ tal que φ es creciente en $[t_0, +\infty)$. En efecto,
En el caso $a = \alpha$ y $\beta > b$, se tiene que

$$h(s) = \log^{\beta-b}\left(\frac{e}{1-s^2}\right) \quad y$$

$$h'(s) = 2(\beta - b)\frac{s}{1-s^2}\log^{\beta-b-1}\left(\frac{e}{1-s^2}\right) \geq 0,$$

para todo $s \in [0,1)$, así h es creciente en [0,1) y por tanto también φ es creciente en $[0, +\infty)$ por ser composición de funciones crecientes.
En el caso $a > \alpha$ y $b, \beta \geq 0$, se tiene que

$$h'(s) = 2s(1-s^2)^{\alpha-a-1}\log^{\beta-b-1}\left(\frac{e}{1-s^2}\right)\left\{(a-\alpha)\log\left(\frac{e}{1-s^2}\right) + (\beta - b)\right\}.$$

Si $\beta - b \geq 0$, entonces $h'(s) \geq 0$ para todo $s \in [0,1)$ y si $\beta - b < 0$, entonces existe $s_0 \in [0,1)$ tal que $h'(s) \geq 0$ para todo $s \in [s_0, 1)$. Por tanto existe $t_0 \geq 0$ tal que $\widetilde{I}^{-1}_{\alpha,\beta}(t_0) = s_0$ y φ es creciente en $[t_0, +\infty)$ como se afirmó. De las propiedades de la función φ también se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)}\right) &= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi(I_{\alpha,\beta}(z)) \\
&= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{a,b}(|z|)}{\mu_{\alpha,\beta}(|z|)}\varphi(I_{\alpha,\beta}(|z|)) \\
&= \lim_{s\to 1^-} \frac{\mu_{a,b}(s)}{\mu_{\alpha,\beta}(s)}\varphi(\widetilde{I}_{\alpha,\beta}(s)) \\
&= \lim_{s\to 1^-} \frac{\mu_{a,b}(s)}{\mu_{\alpha,\beta}(s)}h(s) = 1,
\end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho que la función $I_{\alpha,\beta}$ es radial y coincide con $\widetilde{I}_{\alpha,\beta}$ cuando ésta es real.

Ahora se enuncia y demuestra el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.5. [19] *Asuma que $\alpha > 0$ y $\beta \geq 0$ son tales que ($\alpha = 1$ y $\beta \in [0,1]$) o ($\alpha > 1$ y $\beta \geq 0$). Suponga que $a > 0$ y $b \geq 0$ satisfacen ($a = \alpha$ y $\beta > b$) o $a > \alpha$.*

Sea ϕ una función entera. Entonces el operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^\beta} \to \mathcal{B}^{a}_{\log^b}$ es acotado si y sólo si para cada $\lambda \in (0,1)$, existen constantes positivas δ_1 y R tal que

$$|\phi'(w)| \leq \delta_1 \varphi(\lambda|w|) \tag{2.20}$$

siempre que $|w| > R$.

Demostración: Suponga primero que la desigualdad (2.20) es cierta. Sea $M_1 > 0$ y suponga que $f \in \mathcal{B}^{\alpha}_{\log^\beta}$ satisface $\|f\|_{\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^\beta}} \leq M_1$. Seleccionando $\lambda \in (0,1)$ tal que $\lambda M_1 K_{\alpha,\beta} < 1$, donde $K_{\alpha,\beta} > 0$ es la constante que aparece en (2.4). Entonces existen constantes positivas δ_1 y R tales que la desigualdad (2.20) se mantiene siempre que $|w| > R$. Además, se puede elegir $R > 0$ tal que $\lambda R > t_0$.
Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
||S_\phi(f)||_{\mathcal{B}^{a}_{\log^b}} &= |(\phi \circ f)(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{a,b}(z)|(\phi \circ f)'(z)| \\
&= |(\phi \circ f)(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_{a,b}(z)|(\phi'(f(z))||f'(z)| \\
&\leq |\phi(f(0)| + \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|\leq R\}} \mu_{a,b}(z)|(\phi'(f(z))||f'(z)| \\
&\qquad + \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|> R\}} \mu_{a,b}(z)|(\phi'(f(z))||f'(z)|
\end{aligned}$$

Ahora se procede a analizar cada término de la última desigualdad. Para el primer término, de la desigualdad (2.4) se tiene que

$$|f(0)| \leq \frac{K_{\alpha,\beta}}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(0)} M_1 := R_0.$$

Dado que ϕ es continua sobre el compacto $\overline{D}_{R_0} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq R_0\}$, entonces es acotada y por lo tanto, existe $M_0 > 0$ tal que

$$|\phi(f(0))| \leq M_0 = \max_{|w|=R_0} |\phi(w)|.$$

Para el segundo término, dado que ($a = \alpha$ y $\beta > b$) o $a > \alpha$, entonces $\lim\limits_{|z|\to 1^-} \dfrac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)} = 0$, lo cual implica que la función $\dfrac{\mu_{a,b}}{\mu_{\alpha,\beta}}$ es acotada sobre $\mathbb{D}$. En efecto, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)} \leq \varepsilon$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ tal que $r_0 < |z| < 1$. Mientras que sobre el compacto $\overline{D}_{r_0} = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r_0\}$ la continuidad de la función $\dfrac{\mu_{a,b}}{\mu_{\alpha,\beta}}$ implica que existe una constante $M_2 > 0$ tal que

$$\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)} \leq M_2$$

para todo $z \in \overline{D}_{r_0}$. Por lo tanto, existe una constante M_3 tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)} \leq M_3,$$

de donde se tiene que

$$\begin{aligned}
S_1 \;&:= \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|\leq R\}} \mu_{a,b}(z)|(\phi'(f(z))||f'(z)| \\
&\leq \delta_1 \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|\leq R\}} \mu_{a,b}(z)|f'(z)| \\
&= \delta_1 \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|\leq R\}} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\mu_{\alpha,\beta}(z)|f'(z)| \\
&\leq \delta_1||f||_{\alpha,\beta} \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|\leq R\}} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)} \\
&\leq \delta_1||f||_{\alpha,\beta} \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)} \\
&\leq \delta_1 M_1 M_3.
\end{aligned}$$

Para el último término dado que $\displaystyle\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)}\right) = 1$, entonces existe $r_0 \in (0,1)$ tal que

$$\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)}\right) \leq 1+\varepsilon$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ tal que $r_0 < |z| < 1$. Mientras que si $z \in \overline{D}_{r_0} = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r_0\}$ la continuidad de la función $\frac{\mu_{a,b}}{\mu_{\alpha,\beta}}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}}\right)$ sobre el compacto $\overline{D}_{r_0}$, implica que existe una constante $M_4 > 0$ tal que

$$\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)}\right) \leq M_4$$

para todo $z \in \overline{D}_{r_0}$.

En consecuencia, existe una constante $M_5 > 0$ tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)}\right) \leq M_5,$$

de donde se tiene que

$$
\begin{aligned}
S_2 &:= \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|>R\}} \mu_{a,b}(z)|(\phi'(f(z))||f'(z)| \\
&\leq \delta_1 \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|>R\}} \mu_{a,b}(z)\varphi(\lambda|f(z)|)|f'(z)| \\
&= \delta_1 \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|>R\}} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi(\lambda|f(z)|)\mu_{\alpha,\beta}(z)|f'(z)| \\
&\leq \delta_1||f||_{\alpha,\beta} \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|>R\}} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi(\lambda|f(z)|) \\
&\leq \delta_1 M_1 \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{\alpha,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)}\right) \\
&\leq \delta_1 M_1 M_5,
\end{aligned}
$$

donde se ha usado el Lema 2.2, la hipótesis $\lambda\, M_1 K_{\alpha,\beta} < 1$, las desigualdades $t_0 < \lambda R < \lambda|f(z)| < \dfrac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z)}$ y el hecho que la función φ es creciente en $[t_0, +\infty)$. Finalmente, se tiene

$$\|S_\phi\,(f)\|_{\mathcal{B}^a_{\log^b}} \leq M_0 + S_1 + S_2$$

Esto muestra que el operador $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha_{\log^\beta} \to \mathcal{B}^a_{\log^b}$ es acotado.

Recíprocamente, si ϕ es una función entera y no satisface la hipótesis (2.20), entonces existe $\lambda_0 \in (0,1)$ y una sucesión de números complejos $\{w_n\}$ tal que $|w_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y

$$|\phi'\,(w_n)| \geq n\varphi\,(\lambda_0\;|w_n|)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado que el peso $\mu_{I_{\alpha,\beta}}$ es típico cuando ($a = \alpha$ y $\beta > b$) o $a > \alpha$, existe una sucesión de puntos $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ tal que

$$\mu_I\,(z_n) = \frac{1}{\lambda_0\;|w_n|}$$

y $\frac{1}{2} < |z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, se considera la sucesión de funciones h_n definida en (2.12) por

$$h_n(z) = w_n \mu_{I_{\alpha,\beta}}\,(z_n)\,\{g_n(z) + s_n(z)\}\,.$$

Entonces $\{h_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ tal que $h_n(0) = 0$, $h_n(z_n) = w_n$ y

$$h'_n(z_n) = \frac{w_n \mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)}{z_n \mu_{\alpha,\beta}(z_n)}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\|S_\phi(h_n)\|_{\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}} &\geq \mu_{a,b}(z_n)\, |\phi'(h_n(z_n))|\, |h'_n(z_n)| \\
&= \mu_{a,b}(z_n)\, |\phi'(w_n)| \frac{|w_n|\, \mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)}{|z_n|\, \mu_{\alpha,\beta}(z_n)} \\
&\geq \frac{n}{\lambda_0} \frac{\mu_{a,b}(z_n)}{\mu_{\alpha,\beta}(z_n)} \varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)}\right) \to \infty
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado el hecho que $|z_n| \to 1^{-}$ cuando $n \to \infty$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{a,b}(z_n)}{\mu_{\alpha,\beta}(z_n)} \varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{\alpha,\beta}}(z_n)}\right) = 1.$$

Se concluye entonces que el operador S_ϕ no puede ser acotado de $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ en $\mathcal{B}^{a}_{\log^{b}}$. ■

2.3 Algunas aplicaciones

El operador de superposición actuando entre espacios tipo Bloch ha sido estudiado por algunos autores, por ejemplo, Xu en [28] caracteriza las funciones enteras ϕ que aplican un espacio α_1-Bloch en un espacio α_2-Bloch, luego, Castillo, Ramos-Fernández y Salazar en [12] estudiaron cuando un espacio de Bloch-Orlicz puede ser aplicado en un espacio α-Bloch vía superposición y recíprocamente. Ramos-Fernández en [22] muestra que los mismos resultados se pueden obtener como consecuencia del estudio del operador de superposición actuando entre espacios de crecimiento. En esta sección se usan los Teoremas dados en la sección previa para obtener los resultados de los autores citados anteriormente, así como también para caracterizar cuando un espacio Bloch logarítmico es aplicado en otro de la misma forma por superposición.

2.3.1 Superposición entre espacios Bloch Logarítmicos

En esta subsección se consideran algunos casos particulares del Teorema 2.5 donde es posible calcular explícitamente la función φ.

Corolario 2.1. *Sea ϕ una función entera y suponga que $\alpha = a = 1$ y $0 \leq b < \beta = 1$. Entonces el operador de superposición S_ϕ aplica $\mathcal{B}^1_{\log^1}$ en $\mathcal{B}^1_{\log^b}$ si y sólo si ϕ es de orden menor que 1 o de orden 1 y tipo cero.*

Demostración: Considerando la función $\varphi(s) = \exp\left((1-b)s\right)$ con $s \geq 0$, se tiene que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{1,b}(z)}{\mu_{1,1}(z)} \varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{1,1}}(z)}\right) = 1.$$

En efecto,

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{1,b}(z)}{\mu_{1,1}(z)} \varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{1,1}}(z)}\right) =$$

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{(1-|z|^2)\log^b\left(\frac{e^b}{1-|z|^2}\right)}{(1-|z|^2)\log\left(\frac{e}{1-|z|^2}\right)} \exp\left\{(1-b)\frac{\log(1-\log(1-|z|^2))}{|z|^2}\right\}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \log^{b-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\left\{\exp[\log(1-\log(1-|z|^2))]\right\}^{\frac{1-b}{|z|^2}}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \log^{b-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\left[1-\log(1-|z|^2)\right]^{1-b}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \log^{b-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\log^{1-b}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right) = 1.$$

Entonces por el Teorema 2.5, el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^1_{\log^1} \to \mathcal{B}^1_{\log^b}$ es acotado si y sólo si para cada $\lambda \in (0,1)$, existen constantes positivas δ y R tales que

$$|\phi'(w)| \leq \delta \exp\left(\lambda(1-b)|w|\right) \tag{2.21}$$

para todo $|w| > R$. De la expresión (2.21) se concluye que ϕ' es de orden menor que 1 o es de orden 1 y tipo cero. En consecuencia, se tiene también que ϕ es de orden menor que 1 o es de orden 1 y tipo cero. ■

Corolario 2.2. *Sea ϕ una función entera y suponga que $\alpha = a = 1$ y $0 \leq b < \beta < 1$. Entonces el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^1_{\log^\beta} \to \mathcal{B}^1_{\log^b}$ es acotado si y sólo si ϕ es una función polinómica de grado a lo más $p+1 = (1-b)/(1-\beta)$.*

Demostración: Considerando la función

$$\varphi(s) = \left[(1-\beta)s + \beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}$$

con $s \geq 0$, se tiene que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{1,b}(z)}{\mu_{1,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{1,\beta}}(z)}\right) = 1.$$

En efecto,

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_{1,b}(z)}{\mu_{1,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{1,\beta}}(z)}\right) =$$

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{(1-|z|^2)\log^b\left(\frac{e^b}{1-|z|^2}\right)}{(1-|z|^2)\log^\beta\left(\frac{e^\beta}{1-|z|^2}\right)}\left[(1-\beta)\frac{[\beta-\log(1-|z|^2)]^{1-\beta}}{(1-\beta)|z|^2} + \beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \log^{b-\beta}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\left[[\beta-\log(1-|z|^2)]^{1-\beta} - \beta^{1-\beta} + \beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \log^{b-\beta}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\left[\log^{1-\beta}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \log^{b-\beta}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\log^{\beta-b}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \log^{b-\beta}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\log^{\beta-b}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right) = 1.$$

Entonces por el Teorema 2.5, el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^1_{\log^\beta} \to \mathcal{B}^1_{\log^b}$ es acotado si y sólo si para cada $\lambda \in (0,1)$, existen constantes positivas δ y R tales que

$$|\phi'(w)| \leq \delta\left[(1-\beta)|w| + \beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}} \tag{2.22}$$

para todo $|w| > R$. La expresión (2.22) es equivalente a que ϕ' es una función polinómica de grado a lo más $p = (\beta-b)/(1-\beta)$ y en consecuencia, se tiene que ϕ es una función polinómica de grado a lo más $p+1 = (1-b)/(1-\beta)$. En efecto, sea $k \in (0,1)$ tal que $p = \frac{\beta-b}{1-\beta} + k$ y $[|\frac{\beta-b}{1-\beta} + k|] = [|\frac{\beta-b}{1-\beta}|]$, entonces para $|w| = r > R$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{M_{\phi'}(r)}{r^p} &\leq \frac{\delta\left[(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}}{r^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}}\frac{1}{r^k}\\ &= \delta\left[\lambda(1-\beta)+\frac{\beta^{1-\beta}}{r}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}\frac{1}{r^k}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{r\to\infty}\inf\frac{M_{\phi'}(r)}{r^p} \leq 0,$$

del Teorema 1.9, se concluye que ϕ' es un polinomio cuyo grado no excede p o equivalentemente ϕ es un polinomio de grado a lo más $p+1=\frac{1-b}{1-\beta}$. ■

Corolario 2.3. *Sea ϕ una función entera y suponga que $1=\alpha<a$, $0\leq\beta<1$ y $b\geq 0$. Entonces el operador de superposición $S_\phi:\mathcal{B}^1_{\log^\beta}\to\mathcal{B}^a_{\log^b}$ es acotado si y sólo si ϕ es de orden menor que $\frac{1}{1-\beta}$ o es de orden $\frac{1}{1-\beta}$ y tipo cero.*

Demostración: Considerando la función

$$\varphi(s)=\left[\exp\{[(1-\beta)s+\beta^{1-\beta}]^{\frac{1}{1-\beta}}\}\right]^{a-1}[(1-\beta)s+\beta^{1-\beta}]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}$$

con $s\geq 0$, se tiene que

$$\lim_{|z|\to 1^{-1}}\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{1,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{1,\beta}}(z)}\right)=L>0.$$

En efecto,

$$\lim_{|z|\to 1^-}\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{1,\beta}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{1,\beta}}(z)}\right)=$$

$$\lim_{|z|\to 1^-}\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{1,\beta}(z)}\left[\exp\left\{\left[(1-\beta)\frac{1}{1-\beta}\frac{1}{|z|^2}\left\{[\beta-\log(1-|z|^2)]^{1-\beta}-\beta^{1-\beta}\right\}+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}\right\}\right]^{a-1}\cdot$$

$$\left[(1-\beta)\tfrac{1}{1-\beta}\tfrac{1}{|z|^2}\left\{[\beta-\log(1-|z|^2)]^{1-\beta}-\beta^{1-\beta}\right\}+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}$$

$$=\lim_{|z|\to 1^{-1}}(1-|z|^2)^{a-1}\log^{b-\beta}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\left[\exp\left\{\left[\log^{1-\beta}\left(\frac{e^\beta}{1-|z|^2}\right)\right]^{\frac{1}{1-\beta}}\right\}\right]^{a-1}.$$

$$\left[\log^{1-\beta}\left(\frac{e^{\beta}}{1-|z|^2}\right)\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{a-1} \log^{b-\beta}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right) \frac{e^{\beta(a-1)}}{(1-|z|^2)^{a-1}} \log^{\beta-b}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)$$
$$= \lim_{|z|\to 1^-} e^{\beta(a-1)} = e^{\beta(a-1)} > 0.$$

Entonces por el Teorema 2.5, el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^1_{\log^\beta} \to \mathcal{B}^a_{\log^b}$ es acotado si y sólo si para cada $\lambda \in (0,1)$, existen constantes positivas δ y R tales que

$$|\phi'(w)| \leq$$
$$\delta\left[\exp\left\{[\lambda(1-\beta)|w| + \beta^{1-\beta}]^{\frac{1}{1-\beta}}\right\}\right]^{a-1}\left[\lambda(1-\beta)|w| + \beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}} \tag{2.23}$$

para todo $|w| > R$. La expresión (2.23) es equivalente a decir que ϕ' es de orden menor que $\frac{1}{1-\beta}$ o es de orden $\frac{1}{1-\beta}$ y tipo cero. En efecto, para $|w| = r > R$ se tiene

$$M_{\phi'}(r) \leq \delta\left[\exp\left\{[\lambda(1-\beta)r + \beta^{1-\beta}]^{\frac{1}{1-\beta}}\right\}\right]^{a-1}\left[\lambda(1-\beta)r + \beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta-b}{1-\beta}}.$$

Aplicando logaritmo se tiene

$$\log M_{\phi'}(r) \leq$$
$$\log(\delta) + (a-1)\left[\lambda(1-\beta)r + \beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} + \frac{\beta-b}{1-\beta}\log[\lambda(1-\beta)r + \beta^{1-\beta}].$$

Aplicando logaritmo nuevamente y dividiendo por $\log(r) > 0$, se tiene

$$\frac{\log\log M_{\phi'}(r)}{\log(r)} \leq$$
$$\frac{\log\left\{\log(\delta) + (a-1)\left[\lambda(1-\beta)r + \beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}} + \frac{\beta-b}{1-\beta}\log[\lambda(1-\beta)r + \beta^{1-\beta}]\right\}}{\log(r)}.$$

El lado derecho de la desigualdad tiende a $\frac{1}{1-\beta}$ cuando $r \to \infty$.

En efecto, aplicando de la regla de L'Hôpital se tiene

$$
\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty} \frac{\log\left\{\log(\delta)+(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}+\frac{\beta-b}{1-\beta}\log[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]\right\}}{\log(r)}\\
&=\lim_{r\to\infty}\frac{\lambda r\left\{(a-1)[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]^{\frac{1}{1-\beta}}+(\beta-b)[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]^{-1}\right\}}{\log(\delta)+(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}+\frac{\beta-b}{1-\beta}\log[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]}\\
&=\lim_{r\to\infty}\frac{(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}+(\beta-b)[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]^{-1}}{(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}+(\beta-b)[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]^{-1}}\\
&+\frac{r\left\{\lambda\beta(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}}+\lambda(1-\beta)(b-\beta)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{-2}\right\}}{(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{\beta}{1-\beta}}+(\beta-b)[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]^{-1}}\\
&=\lim_{r\to\infty}\left\{1+\frac{r}{\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}}\frac{\lambda\beta(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}+\lambda(1-\beta)(b-\beta)}{(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}+(\beta-b)}\right\}\\
&=\lim_{r\to\infty}\left\{1+\frac{1}{\lambda(1-\beta)+\frac{\beta^{1-\beta}}{r}}\frac{\lambda\beta(a-1)+\frac{\lambda(1-\beta)(b-\beta)}{\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}}}{a-1+\frac{\beta-b}{\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}}}\right\}\\
&=1+\frac{1}{\lambda(1-\beta)}\frac{\lambda\beta(a-1)}{a-1}\\
&=1+\frac{\beta}{1-\beta}\\
&=\frac{1}{1-\beta}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se tiene

$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log\log M_{\phi'}(r)}{\log(r)}\leq\frac{1}{1-\beta}.$$

Si el orden de ϕ' es menor que $\frac{1}{1-\beta}$, entonces el orden de ϕ también es menor que $\frac{1}{1-\beta}$ y la prueba está lista en este caso.

Si el orden de ϕ' es igual que $\frac{1}{1-\beta}$, entonces para $\lambda\in(0,1)$ arbitrario y $|w|=r>R$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\log M_{\phi'}(r)}{r^{\frac{1}{1-\beta}}} &\leq \frac{\log(\delta)+(a-1)\left[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}+\frac{\beta-b}{1-\beta}\log[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]}{r^{\frac{1}{1-\beta}}}\\
&= \frac{\log(\delta)}{r^{\frac{1}{1-\beta}}}+(a-1)\left[\lambda(1-\beta)+\frac{\beta^{1-\beta}}{r}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}+\frac{\beta-b}{1-\beta}\frac{\log[\lambda(1-\beta)r+\beta^{1-\beta}]}{r^{\frac{1}{1-\beta}}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log M_{\phi'}(r)}{r^{\frac{1}{1-\beta}}} \leq (a-1)[\lambda(1-\beta)]^{\frac{1}{1-\beta}},$$

para todo $\lambda\in(0,1)$, haciendo $\lambda\to 0^+$ se concluye que ϕ' es de tipo cero y por tanto ϕ es de tipo cero. ■

El siguiente resultado muestra que el operador S_ϕ aplica el espacio $\mathcal{B}^1_{\log^1}$ en $\mathcal{B}^a_{\log^b}$ de manera acotada aún cuando el orden de ϕ sea infinito.

Corolario 2.4. *Sea ϕ una función entera y suponga que $1=\alpha<a$, $\beta=1$ y $b\geq 0$. Entonces el operador de superposición $S_\phi:\mathcal{B}^1_{\log^1}\to\mathcal{B}^1_{\log^b}$ es acotado si y sólo si $\rho_\infty<1$ o $\rho_\infty=1$ y $\tau_\infty=0$.*

Demostración: Considerando la función

$$\varphi(s)=[\exp(e^s-1)]^{a-1}\exp[(1-b)s]$$

con $s\geq 0$, se tiene que

$$\lim_{|z|\to1^-}\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{1,1}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{1,1}}(z)}\right)=1.$$

En efecto,

$$\lim_{|z|\to1^-}\frac{\mu_{a,b}(z)}{\mu_{1,1}(z)}\varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_{1,1}}(z)}\right)=$$

$$\lim_{|z|\to1^-}\frac{(1-|z|^2)^a\log^b\left(\frac{e^{b/a}}{1-|z|^2}\right)}{(1-|z|^2)\log\left(\frac{e}{1-|z|^2}\right)}\left[\exp\left\{\exp\left[\frac{\log(1-\log(1-|z|^2))}{|z|^2}\right]-1\right\}\right]^{a-1}.$$
$$\exp\left\{(1-b)\frac{\log(1-\log(1-|z|^2))}{|z|^2}\right\}$$

$$=\lim_{|z|\to1^{-1}}(1-|z|^2)^{a-1}\log^{b-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\left[\exp\left\{\log\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\right\}\right]^{a-1}\log^{1-b}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)$$

$$=\lim_{|z|\to1^-}(1-|z|^2)^{a-1}\log^{b-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\frac{1}{(1-|z|^2)^{a-1}}\log^{1-b}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)=1.$$

Entonces por el Teorema 2.5, el operador de superposición $S_\phi:\mathcal{B}^1_{\log^1}\to\mathcal{B}^a_{\log^b}$ es acotado si y sólo si para cada $\lambda\in(0,1)$, existen constantes positivas δ y R tales que

$$|\phi'(w)|\leq\delta\left[\exp(e^{\lambda|w|}-1)\right]^{a-1}\exp[\lambda(1-b)|w|] \tag{2.24}$$

para todo $|w| > R$. La expresión (2.24) es equivalente a decir que la función ϕ' es de orden infinito menor que 1 o es de orden infinito igual a 1 y tipo infinito igual a cero.

En efecto, para $|w| = r > R$ se tiene

$$M_{\phi'}(r) \leq \delta e^{1-a} \left[\exp(\exp(\lambda r))\right]^{a-1} \exp[\lambda(1-b)r].$$

Aplicando logaritmo, se tiene

$$\log M_{\phi'}(r) \leq \log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r.$$

Lo cual implica que

$$\log\log M_{\phi'}(r) \leq \log[\log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r].$$

Aplicando logaritmo nuevamente y dividiendo por $\log(r) > 0$, se tiene

$$\frac{\log\log\log M_{\phi'}(r)}{\log(r)} \leq \frac{\log\log[\log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r]}{\log(r)}.$$

Se afirma que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log[\log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r]}{\log(r)} = 1. \tag{2.25}$$

En efecto, aplicando la regla de L'Hôpital, se tiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to\infty} \frac{\log\log[\log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r]}{\log(r)} \\
&= \lim_{r\to\infty} \left\{ \frac{r}{\log[\log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r]} \cdot \right. \\
&\qquad \left. \frac{\lambda(a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)}{\log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r} \right\}.
\end{aligned}$$

Considere ahora por separado los límites:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r}{\log[\log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r]}$$

y

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\lambda(a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)}{\log(\delta) + (1-a) + (a-1)\exp(\lambda r) + \lambda(1-b)r}.$$

Aplicando la regla de L'Hôpital al primer límite, se tiene

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r}{\log[\log(\delta)+(1-a)+(a-1)\exp(\lambda r)+\lambda(1-b)r]} \tag{2.26}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{\log(\delta)+(1-a)+(a-1)\exp(\lambda r)+\lambda(1-b)r}{\lambda(a-1)\exp(\lambda r)+\lambda(1-b)}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{\frac{\log(\delta)}{\exp(\lambda r)}+\frac{(1-a)}{\exp(\lambda r)}+(a-1)+\frac{\lambda(1-b)r}{\exp(\lambda r)}}{\lambda(a-1)+\frac{\lambda(1-b)}{\exp(\lambda r)}}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{a-1}{\lambda(a-1)} = \frac{1}{\lambda}$$

Para el segundo límite, se tiene

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\lambda(a-1)\exp(\lambda r)+\lambda(1-b)}{\log(\delta)+(1-a)+(a-1)\exp(\lambda r)+\lambda(1-b)r}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{\lambda(a-1)+\frac{\lambda(1-b)}{\exp(\lambda r)}}{\frac{\log(\delta)}{\exp(\lambda r)}+\frac{(1-a)}{\exp(\lambda r)}+(a-1)+\frac{\lambda(1-b)r}{\exp(\lambda r)}}$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{\lambda(a-1)}{a-1} = \lambda.$$

Los dos resultados de los límites anteriores muestran la afirmación (2.25).

Por lo tanto,

$$\rho_\infty = \rho_\infty(\phi') = \lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log\log\log M_{\phi'}(r)}{\log(r)} \leq 1.$$

Si el orden infinito de ϕ' es menor que uno, entonces el orden infinito de ϕ es menor que uno ($\rho_\infty < 1$) y la prueba está lista en este caso. Si el orden infinito de ϕ' es igual a uno, entonces el orden infinito de ϕ es igual a uno ($\rho_\infty = 1$).

Si $\rho_\infty = 1$, entonces para $\lambda \in (0,1)$ arbitrario y $|w| = r > R$, se tiene

$$\frac{\log\log M_{\phi'}(r)}{r} \leq \frac{\log[\log(\delta)+(1-a)+(a-1)\exp(\lambda r)+\lambda(1-b)r]}{r}.$$

De (2.26) se tiene que

$$\lim_{r\to\infty}\sup\frac{\log\log M_{\phi'}(r)}{r} \quad \leq \quad \lambda,$$

para todo $\lambda \in (0,1)$. Haciendo $\lambda \to 0^+$ se concluye que ϕ' es de tipo infinito igual a cero y por tanto ϕ es de tipo infinito igual a cero ($\tau_\infty = 0$). ■

2.3.2 Superposición entre espacios α-Bloch

Recuerde que para $\alpha > 0$, los espacios α-Bloch se obtienen de los espacios μ-Bloch cuando la función peso es $\mu_\alpha(z) = (1-|z|^2)^\alpha$ con $z \in \mathbb{D}$. Para $\alpha > 0$, el peso integral está dado por

$$\mu_{I_\alpha}(z) = \begin{cases} |z|^2 \log^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right), & \alpha = 1, \\ (\alpha-1)|z|^2\left((1-|z|^2)^{1-\alpha}-1\right)^{-1}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

En efecto,

$$I_\alpha(z) = \int_0^1 \frac{dt}{\mu_\alpha(\sqrt{t}z)} = \int_0^1 \frac{dt}{(1-|z|^2)^\alpha} = -\frac{1}{|z|^2}\int_1^{1-|z|^2} \frac{dw}{w^\alpha},$$

donde se hecho el cambio de variables $w = 1 - t|z|^2$.

Si $\alpha = 1$, entonces

$$\begin{aligned} I_\alpha(z) &= -\frac{1}{|z|^2}\int_1^{1-|z|^2} \frac{dw}{w} = -\frac{1}{|z|^2}\log(w)\Bigg|_1^{1-|z|^2} \\ &= -\frac{1}{|z|^2}(\log(1-|z|^2) - \log(1)) = \frac{1}{|z|^2}\log(1-|z|^2)^{-1} \\ &= \frac{1}{|z|^2}\log\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right). \end{aligned}$$

Si $0 < \alpha \neq 1$, entonces

$$\begin{aligned} I_\alpha(z) &= -\frac{1}{|z|^2}\int_1^{1-|z|^2} w^{-\alpha}dw = -\frac{1}{|z|^2}\frac{w^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^{1-|z|^2} \\ &= -\frac{1}{|z|^2}\frac{1}{1-\alpha}((1-|z|^2)^{1-\alpha}-1) \\ &= \frac{1}{|z|^2}\frac{1}{\alpha-1}((1-|z|^2)^{1-\alpha}-1). \end{aligned}$$

Observe que, si $\alpha \in (0,1)$, μ_{I_α} está lejos del cero y como consecuencia de los Teoremas 2.1 y 2.2, se obtienen los Teoremas 4 y 5 de [28]:

Corolario 2.5. *Sea ϕ una función entera y suponga que $0 < \alpha < 1$ y $\alpha \leq a$. Entonces el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \longrightarrow \mathcal{B}^a$ es acotado.*

Corolario 2.6. *Sea ϕ una función entera y suponga que $0 < \alpha < 1$ y $\alpha > a$. El operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \longrightarrow \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si ϕ es una función constante.*

Por otra parte, μ_{I_α} es un peso típico si y sólo si $\alpha \geq 1$ y se tienen las siguientes consecuencias:

Del Teorema 2.3, se obtiene el Teorema 4 de [28]:

Corolario 2.7. *Sea ϕ una función entera y suponga que $\alpha \geq 1$ y $a \in (0, \alpha)$, el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \to \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si ϕ es una función constante.*

Del Teorema 2.4, se obtiene el Teorema 6 de [28]:

Corolario 2.8. *Sea ϕ una función entera y $\alpha = a \geq 1$. El operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \to \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si ϕ es una función afín.*

Del Teorema 2.5, se obtiene el Teorema 6 de [28] y Teorema 4.2 de [22]:

Corolario 2.9. *Sea ϕ una función entera y $1 < \alpha < a$. Entonces el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \to \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si ϕ es una función polinómica de grado a lo más $p + 1 = (a - 1)/(\alpha - 1)$.*

Demostración: Considerando la función $\varphi(s) = s^p$ donde $p = \frac{a-\alpha}{\alpha-1} > 0$ con $s > 0$, se tiene

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_a(z)}{\mu_\alpha(z)} \varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_\alpha}(z)}\right) = \lim_{|z|\to 1^-} \frac{(1-|z|^2)^a}{(1-|z|^2)^\alpha} \frac{1}{\mu_{I_\alpha}^p(z)}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{a-\alpha} \frac{1}{\left[(\alpha-1)|z|^2\left((1-|z|^2)^{1-\alpha}-1\right)^{-1}\right]^p}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{(1-|z|^2)^{a-\alpha}}{(1-|z|^2)^{(\alpha-1)p}} \frac{(1-|z|^2)^{(\alpha-1)p}}{(\alpha-1)^p|z|^{2p}\left((1-|z|^2)^{1-\alpha}-1\right)^{-p}}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{a-\alpha-(\alpha-1)p} \frac{(1-|z|^2)^{(\alpha-1)p}\left((1-|z|^2)^{1-\alpha}-1\right)^p}{(\alpha-1)^p|z|^{2p}}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} \frac{(1-(1-|z|^2)^{\alpha-1})^p}{(\alpha-1)^p|z|^{2p}} = \frac{1}{(\alpha-1)^p} > 0.$$

Entonces por el Teorema 2.5, el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \to \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si para cada $\lambda \in (0,1)$ existen constantes positivas δ y R tales que

$$|\phi'(w)| \leq \delta \lambda^p |w|^p \tag{2.27}$$

para todo $|w| > R$.

Observe que por el Teorema 1.8, la expresión (2.27) dice que ϕ' es una función polinómica de grado a lo más $p = (a-\alpha)/(\alpha-1)$, lo cual implica que ϕ es una función polinómica de grado a lo más $p+1 = (a-1)/(\alpha-1)$.

Del Teorema 2.5, se obtiene el Teorema 7 de [28]:

Corolario 2.10. *Sea ϕ una función entera y $1 = \alpha < a$. Entonces el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \to \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si ϕ es de orden menor que 1 o es de orden 1 y tipo cero.*

Demostración: Considerando la función $\varphi(s) = \exp((a-1)s)$ con $s \geq 0$, se tiene se tiene

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_a(z)}{\mu_\alpha(z)} \varphi\left(\frac{1}{\mu_{I_\alpha}(z)}\right) = \lim_{|z|\to 1^-} \frac{(1-|z|^2)^a}{(1-|z|^2)} \exp\left\{(a-1)\frac{1}{\mu_{I_\alpha}(z)}\right\}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{a-1} \exp\left\{(a-1)\frac{1}{|z|^2}\log\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{a-1} \frac{1}{(1-|z|^2)^{\frac{a-1}{|z|^2}}}$$

$$= \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{a-1-\frac{a-1}{|z|^2}} = 1.$$

Entonces por el Teorema 2.5, el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \to \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si para cada $\lambda \in (0,1)$ existen constantes positivas δ y R tales que

$$|\phi'(w)| \leq \delta \exp(\lambda(a-1)|w|) \tag{2.28}$$

para todo $|w| > R$.

La expresión (2.28) implica que ϕ es de orden menor que 1 o es de orden 1 y tipo cero.

2.3.3 Superposición entre espacios de Bloch-Orlicz

Recuerde que para una $\mathcal{N}$-función ψ, el espacio de Bloch-Orlicz $\mathcal{B}^{\psi}$ es isométricamente isomorfo al espacio μ_{ψ}-Bloch, donde

$$\mu_{\psi}(z) = \frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)}.$$

En el caso de la $\mathcal{N}$-función $\psi(t) = t^p$, con $p > 1$ y $t \geq 0$ se tiene que el espacio de Bloch-Orlicz $\mathcal{B}^{\psi}$ es isométricamente isomorfo al espacio $\mathcal{B}^{\alpha}$, donde $\alpha = \frac{1}{p}$; dado que

$$\mu_{\psi}(z) = \frac{1}{\psi^{-1}\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{1/p}} = (1-|z|^2)^{1/p}.$$

Además, para $\alpha \geq 1$ se tiene que $\mathcal{B}^{\psi} \subset \mathcal{B}^{\alpha}$, μ_{I_α} es típico y

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_\alpha(z)}{\mu_\psi(z)} \quad = \quad \lim_{|z|\to 1^-} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha}}{(1-|z|^2)^{1/p}} = \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^{\alpha - 1/p} = 0.$$

Como consecuencia del Teorema 2.3, se obtiene el Teorema 3 de [12].

Corolario 2.11. *Sea $\alpha \geq 1$ y sea ϕ una función entera. El operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^{\alpha} \to \mathcal{B}^{\varphi}$ es acotado si y sólo si ϕ es una función constante.*

En el caso de la $\mathcal{N}$-función $\psi(t) = t\log(1+t)$, con $t > 0$, el espacio de Bloch-Orlicz $\mathcal{B}^{\psi}$ es isometricamente isomorfo al espacio $\mathcal{B}^{v}$, donde

$$v(z) = (1-|z|)\log\left(\frac{e}{1-|z|}\right),$$

con $z \in \mathbb{D}$ (ver [12]). También, el espacio $\mathcal{B}^{v}$ obtenido es igual al espacio $\mathcal{B}^{\mu}$ con normas esquivalentes, donde

$$\mu(z) = (1-|z|^2)\log\left(\frac{e}{1-|z|^2}\right).$$

Como consecuencia de los resultados anteriores, se obtienen las siguientes conclusiones que aparecen en [12]:

1. Para $\alpha < a = 1$, $\beta = 0$ y $b = 1$ y ϕ una función entera, el Teorema 2.1 implica que el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\alpha \longrightarrow \mathcal{B}^\mu$ es siempre acotado (ver Teorema 7 en [12]).

2. Para $\alpha = \beta = 1$, $a \in (0,1)$, $b = 0$ y ϕ una función entera, el Teorema 2.3 implica que el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\mu \longrightarrow \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si ϕ es una función constante (ver Teorema 9 en [12]).

3. Para $\alpha = \beta = 1$, $a = 1$, $b = 0$ y ϕ una función entera, el Corolario 2.1 implica que el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\mu \longrightarrow \mathcal{B}$ es acotado si y sólo si ϕ es de orden menor que 1 o es de orden 1 y tipo cero (ver Teorema 10 en [12]).

4. Para $a > \alpha = 1$, $\beta = 1$, $b = 0$ y ϕ una función entera, el Corolario 2.4 implica que el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\mu \longrightarrow \mathcal{B}^a$ es acotado si y sólo si $\rho_\infty < 1$ o $\rho_\infty = 1$ y $\tau_\infty = 0$ (ver Teorema 13 en [12]).

5. Para $a = \alpha = b = \beta = 1$ y ϕ una función entera, el Teorema 2.4 implica que el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^\mu \longrightarrow \mathcal{B}^\mu$ es acotado si y sólo si ϕ es una función lineal (ver Teorema 14 en [12]).

CAPÍTULO 3
OPERADOR DE SUPERPOSICIÓN ENTRE LOS ESPACIOS μ-BLOCH

El objetivo de este capítulo es generalizar los resultados obtenidos en el capítulo anterior para los espacios Bloch logarítmicos a los espacios μ-Bloch, donde μ es una función peso la cual satisface una condición especial de crecimiento. Los resultados de este capítulo son originales de Malavé-Malavé y Ramos-Fernández [20] y se encuentran en arbitraje.

3.1 El peso integral y funciones especiales para $\mathcal{B}^\mu$

En esta sección se recogen algunas propiedades de los pesos que se han usado en esta investigación.

Definición 3.1. *Se dice que un peso μ satisface una condición de crecimiento si existe una función holomorfa H_μ definida sobre $\mathbb{D}$ tal que*

(1) $\mu(z) = H_\mu\left(|z|^2\right)$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y

(2) $\mu(z) \leq L_\mu \left|H_\mu\left(\overline{a}z\right)\right|$ para alguna constante $L_\mu > 0$ que depende sólo de μ y para todo $a, z \in \mathbb{D}$.

Ejemplo 3.1. *Para $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ fijos, el peso*

$$\mu(z) = (1-|z|^2)^\alpha \log^\beta\left(\frac{e^{\frac{\beta}{\alpha}}}{1-|z|^2}\right),$$

con $z \in \mathbb{D}$, satisface una condición de crecimiento (ver [23, Lemma 2.1]).

Además, con esta definición, se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.1. *Sea μ un peso satisfaciendo una condición de crecimiento. Para cada $a \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ la función*

$$f_a(z) = \frac{1}{a}\int_0^z \frac{ds}{H_\mu\left(\overline{a}s\right)} = \frac{z}{a}\int_0^1 \frac{dt}{H_\mu\left(t\overline{a}z\right)} \tag{3.1}$$

con $z \in \mathbb{D}$*, está en* $\mathcal{B}^{\mu}$ *y la relación* $\mu_I(z) := \frac{1}{f_z(z)}$ *con* $z \in \mathbb{D}$ *es un peso sobre* $\mathbb{D}$*, donde se define* $f_0(0) := \mu(0)$*.*

Demostración: Sea $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ fijo, entonces usando la condición (2) se tiene

$$\begin{aligned} \|f_a\|_{\mu} &= \sup_{z \in \mathbb{D}} \mu(z)|f_a'(z)| = \sup_{z \in \mathbb{D}} \mu(z) \frac{1}{|a|} \frac{1}{|H_{\mu}(\overline{a}z)|} \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{D}} \mu(z) \frac{1}{|a|} \frac{L_{\mu}}{\mu(z)} = \frac{L_{\mu}}{|a|} < \infty, \end{aligned} \tag{3.2}$$

lo cual dice que la función f_a está en $\mathcal{B}^{\mu}$. También, dado que μ es estrictamente positiva, acotada y continua, se tiene que la relación

$$I_{\mu}(a) = \int_0^1 \frac{dt}{\mu(\sqrt{t}a)} = \int_0^1 \frac{dt}{H(t|a|^2)} = f_a(a),$$

con $a \in \mathbb{D}$, es una función estrictamente positiva, continua y

$$\begin{aligned} |I_{\mu}(a)| &= \left| \int_0^1 \frac{dt}{\mu(\sqrt{t}a)} \right| \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{dt}{||\mu||_{\infty}} \right| \\ &= \frac{1}{||\mu||_{\infty}}, \end{aligned}$$

pues $\mu(\sqrt{t}a) \leq ||\mu||_{\infty}$ para todo $t \in [0,1]$ y $a \in \mathbb{D}$. En consecuencia,

$$|\mu_I(a)| = \frac{1}{|I_{\mu}(a)|} \leq ||\mu||_{\infty},$$

para todo $a \in \mathbb{D}$, lo cual dice que la función $\mu_I(a)$ es acotada.

Por lo tanto, la función

$$\mu_I(z) := \frac{1}{I_{\mu}(z)} = \left(\int_0^1 \frac{dt}{\mu(\sqrt{t}z)} \right)^{-1}, \quad \text{con} \quad z \in \mathbb{D},$$

define un peso sobre $\mathbb{D}$, el cual también será llamado el *peso integral* asociado a μ.

■

El espacio $\mathcal{B}^{\mu}$ está continuamente contenido en $H^{\infty}_{\mu_I}$ tal como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 3.2. *Sea μ un peso que satisface una condición de crecimiento, entonces $\mathcal{B}^{\mu}$ está continuamente contenido en $H^{\infty}_{\mu_I}$. Todavía más, existe una constante $K_{\mu} > 0$ que depende sólo de μ tal que*

$$\|f\|_{H^{\infty}_{\mu_I}} \leq K_{\mu}||f||_{\mathcal{B}^{\mu}} \tag{3.3}$$

para todo $f \in \mathcal{B}^{\mu}$.

Demostración: Para $f \in \mathcal{B}^{\mu}$ y $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(tz)|\, dt \leq |f(0)| + \|f\|_{\mu} \int_0^1 \frac{dt}{\mu(tz)} \\ &\leq \left(1 + \int_0^1 \frac{dt}{\mu(tz)}\right) \|f\|_{\mathcal{B}^{\mu}}. \end{aligned}$$

Luego, de la condición (2) de crecimiento, se tiene que

$$\int_0^1 \frac{dt}{\mu(tz)} \leq L_{\mu} I_{\mu}(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y dado que $1 \leq \|\mu\|_{\infty} I_{\mu}(z)$, se concluye que

$$|f(z)| \leq (\|\mu\|_{\infty} + L_{\mu})\, I_{\mu}(z)\, \|f\|_{\mathcal{B}^{\mu}} = \frac{K_{\mu}}{\mu_I(z)}\, \|f\|_{\mathcal{B}^{\mu}}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto

$$\mu_I(z)|f(z)| \leq K_{\mu}\, \|f\|_{\mathcal{B}^{\mu}}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto prueba el Lema. ■

De manera análoga como en el Capítulo 2, se definen las siguientes funciones basadas en los trabajos de Ye [30] y Ramos-Fernández [23], las cuales son claves en la prueba de los resultados de este capítulo.

Sea μ un peso sobre $\mathbb{D}$ el cual satisface una condición de crecimiento y sea μ_I su peso integral asociado. Para cada, $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ fijo, se definen las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} s_a(z) &= \mu_I^2(a) f_a^3(z) - \mu_I(a) f_a^2(z) \qquad (3.4) \\ g_a(z) &= 3\mu_I(a) f_a^2(z) - 2\mu_I^2(a) f_a^3(z) \qquad (3.5) \end{aligned}$$

con $z \in \mathbb{D}$, donde f_a es la función definida en (3.1). Entonces se tienen las siguientes propiedades:

Lema 3.3. *Para cada* $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $s_a, g_a \in \mathcal{B}^\mu$,

1. $s_a(0) = s_a(a) = 0$ *y* $s'_a(a) = \dfrac{1}{a\mu(a)}$,

2. $g_a(0) = 0$, $g_a(a) = \dfrac{1}{\mu_I(a)}$ *y* $g'_a(a) = 0$.

Demostración: En efecto, para $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$s'_a(z) = \frac{1}{aH(\overline{a}z)}(3\mu_I^2(a)f_a^2(z) - 2\mu_I(a)f_a(z)) \quad \text{y}$$

$$g'_a(z) = \frac{6}{aH(\overline{a}z)}(\mu_I(a)f_a(z) - \mu_I^2(a)f_a^2(z))$$

en consecuencia, de la definición de f_a, μ_I y la desigualdad (3.2), se tiene

$$\mu(z)|s'_a(z)| \leq \frac{L_\mu^2}{|a|^2}\left(3\frac{L_\mu}{|a|} + 2\right)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y $s_a \in \mathcal{B}^\mu$ para cada $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Similarmente,

$$\mu(z)|g'_a(z)| \leq \frac{6L_\mu^2}{|a|^2}\left(\frac{L_\mu}{|a|} + 1\right)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y $g_a \in \mathcal{B}^\mu$ para cada $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. ■

3.2 Operador de superposición entre espacios μ-Bloch

En esta sección se caracterizan los operadores de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ acotados en términos del símbolo ϕ. Con el fin de establecer los resultados de esta sección, se considera el límite del cociente de los pesos involucrados. El primer resultado muestra que si $\mathcal{B}^{\mu_2} \subset \mathcal{B}^{\mu_1}$ un operador de superposición acotado es posible sólo vía una función constante.

Teorema 3.1. *Sea* ϕ *una función entera y sean* μ_1 *y* μ_2 *dos pesos definidos sobre* $\mathbb{D}$. *Suponga que* μ_1 *satisface una condición de crecimiento. Si*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_1(z)}{\mu_2(z)} = 0, \tag{3.6}$$

entonces $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ *es un operador acotado si y sólo si* ϕ *es una función constante.*

Demostración: Si ϕ es una función entera y no constante, entonces por el Lema 1.1, existe una sucesión $\{w_n\}$ de números complejos y una constante $\delta_1 > 0$ tal que $|w_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y $|\phi'(w_n)| \geq \delta_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, si el peso μ_{1I} está lejos del cero (no típico), existe una constante $\delta > 0$ y una sucesión $\{z_n\}$ de puntos en el disco unitario abierto $\mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1^-$ y $|w_n| \geq \mu_{1I}(z_n) \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{D}$. Mientras que si el peso μ_{1I} es típico, por continuidad se puede escoger la sucesión $\{z_n\}$ tal que $|z_n| \to 1^-$ y

$$\mu_{1I}(z_n)\,|w_n| = 1. \tag{3.7}$$

Además, pasando a una subsucesión, se puede suponer que $\frac{1}{2} < |z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En cualquiera de los casos, por (3.1), para cada $n \in \mathbb{N}$ la función

$$f_n(z) = \frac{1}{z_n}\int_0^z \frac{ds}{H_{\mu_1}(\overline{z}_n s)} \tag{3.8}$$

con $z \in \mathbb{D}$ está en $\mathcal{B}^{\mu_1}$ y satisface $f_n(z_n) = I_{\mu_1}(z_n)$. En consecuencia, del Lema 3.3, la función

$$s_n(z) = \mu_{1I}^2(z_n)f_n^3(z) - \mu_{1I}(z_n)f_n^2(z), \tag{3.9}$$

con $z \in \mathbb{D}$ satisface:

(1) $s_n(0) = s_n(z_n) = 0$, $s_n'(z_n) = \dfrac{1}{z_n\mu_1(z_n)}$ y

(2) $\|s_n\|_{\mu_1} \leq \dfrac{L_\mu^2}{|z_n|^2}\left(3\dfrac{L_\mu}{|z_n|} + 2\right) \leq 8L_{\mu_1}^2(3L_{\mu_1} + 1)$.

En particular, $\{s_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\mu_1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Similarmente, la función

$$g_n(z) = 3\mu_{1I}(z_n)f_n^2(z) - 2\mu_{1I}^2(z_n)f_n^3(z) \tag{3.10}$$

con $z \in \mathbb{D}$ satisface:

(1) $g_n(0) = 0$, $g_n(z_n) = I_{\mu_1}(z_n) = \dfrac{1}{\mu_{1I}(z_n)}$ y $g_n'(z_n) = 0$,

(2) $\|g_n\|_{\mu_1} \leq \dfrac{6L_\mu^2}{|z_n|^2}\left(\dfrac{L_\mu}{|z_n|} + 1\right) \leq 24L_{\mu_1}^2(2L_{\mu_1} + 1)$,

y $\{g_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\mu_1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la función

$$h_n(z) = w_n \mu_{1I}(z_n)\{g_n(z) + s_n(z)\}, \tag{3.11}$$

satisface las siguientes propiedades:

(1) $h_n(0) = 0$,

(2) $h_n(z_n) = w_n$,

(3) $h'_n(z_n) = \dfrac{w_n \mu_{1I}(z_n)}{z_n \mu_{\mu_1}(z_n)}$,

(4) $\|h_n\|_{\mu_1} \leq |w_n|\mu_{1I}(z_n)\{\|g_n\|_{\mu_1} + \|s_n\|_{\mu_1}\} \leq 8|w_n|\mu_{1I}(z_n)L_{\mu_1}(9L_\alpha + 4)$,

es decir, $\{h_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\mu_1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si el peso μ_{1I} está lejos del cero, se tiene

$$\begin{aligned} \|S_\phi(h_n)\|_{\mu_2} &\geq \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_2(z)\,|\phi'(h_n(z))|\,|h'_n(z)| \\ &\geq \mu_2(z_n)\,|\phi'(h_n(z_n))|\,|h'_n(z_n)| \\ &= \mu_2(z_n)|\phi'(w_n)|\frac{|w_n|\mu_{1I}(z_n)}{|z_n|\mu_1(z_n)} \\ &\geq \delta_1\delta^2\frac{\mu_2(z_n)}{\mu_1(z_n)} \to \infty \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado la hipótesis (3.6).

En otro caso, si el peso μ_{1I} es típico, se tiene

$$\begin{aligned} \|S_\phi(h_n)\|_{\mathcal{B}^{\mu_2}} &\geq \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_2(z)\,|\phi'(h_n(z))|\,|h'_n(z)| \\ &\geq \mu_2(z_n)\,|\phi'(h_n(z_n))|\,|h'_n(z_n)| \\ &= \mu_2(z_n)|\phi'(w_n)|\frac{|w_n|\mu_{1I}(z_n)}{|z_n|\mu_1(z_n)} \\ &\geq \delta_1\frac{\mu_2(z_n)}{\mu_1(z_n)} \to \infty \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado la hipótesis (3.6) y el hecho que el peso μ_{1I} es típico. En ambos casos, se ha mostrado que el operador S_ϕ no puede ser acotado de $\mathcal{B}^{\mu_1}$ en $\mathcal{B}^{\mu_2}$.

Recíprocamente si ϕ es una función constante, entonces el operador S_ϕ aplica acotadamente el espacio $\mathcal{B}^{\mu_1}$ en $\mathcal{B}^{\mu_2}$. ■

Comentario 3.1. Observe que, de manera análoga como en el Capítulo 2, la condición (3.6) implica que $\mathcal{B}^{\mu_2}$ es un subespacio de $\mathcal{B}^{\mu_1}$. Por esta razón, el Teorema 3.1 es un resultado esperado.

El siguiente caso muestra que si los espacios son iguales, un operador de superposición es posible sólo a través de una función afín.

Teorema 3.2. *Sea ϕ una función entera y sean μ_1 y μ_2 dos pesos definidos sobre $\mathbb{D}$. Suponga que μ_1 satisface una condición de crecimiento. Además, suponga que existe $L > 0$ tal que*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_1(z)}{\mu_2(z)} = L > 0. \tag{3.12}$$

Entonces el operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ es acotado si y sólo si ϕ es una función afín.

Demostración: Primero se afirma que la condición (3.12) implica que los espacios $\mathcal{B}^{\mu_1}$ y $\mathcal{B}^{\mu_2}$ son iguales y que las normas $||.||_{\mathcal{B}^{\mu_1}}$ y $||.||_{\mathcal{B}^{\mu_2}}$ son equivalentes.
En efecto, por definición de límite existe un $r \in (0, 1)$ tal que

$$\mu_1(z) \le \frac{3}{2} L\mu_2(z) \tag{3.13}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ satisfaciendo $r < |z| < 1$.
Por otra parte, si $z \in \overline{D}_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| \le r\}$, entonces usando el hecho que μ_2 es continua y estrictamente positiva sobre el compacto $\overline{D}_r$, se garantiza la existencia de una constante positiva $m = m(\mu_2, r)$, que depende sólo de μ_2 y r, tal que $\mu_2(z) \ge m$ para todo $z \in \overline{D}_r$.
Similarmente, existe una constante $M = M(\mu_1) > 0$, que depende sólo de μ_1, tal que $\mu_1(z) \le M$ para todo $z \in \overline{D}_r$, por lo tanto, se tiene que

$$\mu_1(z) \le M\frac{m}{m} \le \frac{M}{m}\mu_2(z)$$

para todo $z \in \overline{D}_r$. Esta última desigualdad junto con (3.13) muestran que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu_1(z) \le C\mu_2(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto último implica que $\mu_1(z)|f'(z)| \leq C\mu_2(z)|f'(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo tanto, $||f||_{\mathcal{B}^{\mu_1}} \leq C||f||_{\mathcal{B}^{\mu_2}}$ para toda función $f \in \mathcal{B}^{\mu_2}$ y en consecuencia, $\mathcal{B}^{\mu_2} \subset \mathcal{B}^{\mu_1}$.

La otra desigualdad de la norma y la otra contención entre los espacios se sigue del hecho que

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_2(z)}{\mu_1(z)} = \frac{1}{L} > 0.$$

En efecto, por definición de límite existe un $r \in (0,1)$ tal que

$$\mu_2(z) \leq \frac{2}{L}\mu_1(z) \tag{3.14}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ satisfaciendo $r < |z| < 1$.

Por otra parte, si $z \in \overline{D}_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r\}$, entonces usando el hecho que μ_2 es continua y estrictamente positiva sobre el compacto $\overline{D}_r$ se garantiza la existencia de una constante positiva $m = m(\mu_2, r)$, que depende sólo de μ_2 y r, tal que $\mu_2(z) \geq m$ para todo $z \in \overline{D}_r$.

Similarmente, existe una constante $M = M(\mu_1) > 0$, que depende sólo de μ_1, tal que $\mu_1(z) \leq M$ para todo $z \in \overline{D}_r$, por lo tanto se tiene que

$$\mu_2(z) \leq M\frac{m}{m} \leq \frac{M}{m}\mu_1(z)$$

para todo $z \in \overline{D}_r$. Esta última desigualdad junto con (3.14) muestran que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu_2(z) \leq C\mu_1(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto último implica que $\mu_2(z)|f'(z)| \leq C\mu_1(z)|f'(z)|$ para todo $z \in \mathbb{D}$, por lo tanto, $||f||_{\mathcal{B}^{\mu_2}} \leq C||f||_{\mathcal{B}^{\mu_1}}$ para toda función $f \in \mathcal{B}^{\mu_1}$ y en consecuencia $\mathcal{B}^{\mu_1} \subset \mathcal{B}^{\mu_2}$.

Suponga que ϕ es una función entera y no afín, entonces por el Lema 1.1, existe una sucesión $\{w_n\}$ de números complejos y una constante $\delta_1 > 0$ tal que $|w_n| \to \infty$ y

$$|\phi'(w_n)| \geq \delta_1 |w_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, siguiendo un argumento similar como en la prueba del Teorema 3.1, si el peso μ_{1I} está lejos del cero, se puede encontrar una sucesión $\{z_n\}$ de puntos en el disco unitario abierto $\mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1^-$ y $|w_n| \geq \mu_{1I}(z_n) \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{D}$, mientras que si el peso μ_{1I} es típico, se puede escoger la sucesión $\{z_n\}$ tal que $|z_n| \to 1^-$ y

$$\mu_{1I}(z_n)\,|w_n| = 1. \tag{3.15}$$

Pasando a una subsucesión de ser necesario, se puede suponer que $\frac{1}{2} < |z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando la sucesión $\{h_n\}$ definida en (3.11) se tiene, $\{h_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\mu_1}$. Además, si el peso μ_{1I} está lejos del cero, se tiene

$$\begin{aligned}
\|S_\phi(h_n)\|_{\mathcal{B}^{\mu_2}} &\geq \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_2(z)\,|\phi'(h_n(z))|\,|h_n'(z)| \\
&\geq \mu_2(z_n)\,|\phi'(h_n(z_n))|\,|h_n'(z_n)| \\
&= \mu_2(z_n)|\phi'(w_n)|\frac{|w_n|\mu_{1I}(z_n)}{|z_n|\mu_1(z_n)} \\
&\geq \delta_1\delta^2\frac{\mu_2(z_n)}{\mu_1(z_n)}\,|w_n| \to \infty
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado la relación (3.12) y el hecho que $|w_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Mientras que si el peso μ_{1I} es típico, se tiene

$$\begin{aligned}
\|S_\phi(h_n)\|_{\mathcal{B}^{\mu_2}} &\geq \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_2(z)\,|\phi'(h_n(z))|\,|h_n'(z)| \\
&\geq \mu_2(z_n)\,|\phi'(h_n(z_n))|\,|h_n'(z_n)| \\
&= \mu_2(z_n)|\phi'(w_n)|\frac{|w_n|\mu_{1I}(z_n)}{|z_n|\mu_1(z_n)} \\
&\geq \delta_1\frac{\mu_2(z_n)}{\mu_1(z_n)}\,|w_n| \to \infty
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado la relación (3.15) y el hecho que $|w_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Esto prueba que el operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ no puede ser acotado si la función ϕ no es afín.

Recíprocamente, si ϕ es una función afín, entonces S_ϕ es un operador acotado de $\mathcal{B}^{\mu_1}$ en $\mathcal{B}^{\mu_2}$. ■

El caso cuando

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_1(z)}{\mu_2(z)} = \infty,$$

es más delicado.

Si el peso μ_1 no es típico, entonces de la desigualdad (3.3) se tiene que $\mathcal{B}^{\mu_1} \subset H^\infty$, el espacio de las funciones holomorfas acotadas sobre $\mathbb{D}$. En este caso, si ϕ es una función entera, entonces el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ es necesariamente acotado.

Teorema 3.3. *Sea ϕ una función entera y sean μ_1 y μ_2 dos pesos definidos sobre $\mathbb{D}$. Suponga que μ_1 satisface una condición de crecimiento y que su peso integral μ_{1I} es no típico. Si*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_1(z)}{\mu_2(z)} = \infty, \tag{3.16}$$

entonces el operador de superposición $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ es acotado.

Demostración: Sean $f \in \mathcal{B}^{\mu_1}$ y $M > 0$ tales que $\|f\|_{\mathcal{B}^{\mu_1}} \leq M$. De la desigualdad (3.3) se tiene $\|f\|_{H^\infty_{\mu_{1I}}} \leq K_{\mu_1} M$. Esto implica que

$$|f(z)| \;\leq\; \frac{1}{\mu_{1I}(z)} K_{\mu_1} M \leq \frac{1}{\delta} K_{\mu_1} M = K_{\mu_1,\delta,M}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, donde se ha usado el hecho que el peso integral es no típico en la última desigualdad. Además, dado que ϕ y ϕ' son funciones enteras se tiene

$$\begin{aligned} |\phi(f(0))| &\leq M_1 = \max_{|w|=K_{\mu_1,\delta,M}} |\phi(w)| \\ |\phi'(f(z))| &\leq M_2 = \max_{|w|=K_{\mu_1,\delta,M}} |\phi'(w)| \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|S_\phi(f)\|_{\mathcal{B}^{\mu_2}} &= |\phi(f(0))| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_2(z)|\phi'(f(z))||f'(z)| \\ &\leq M_1 + M_2 \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_2(z)|f'(z)| \\ &\leq M_1 + M_2 \sup_{z\in\mathbb{D}} \mu_1(z)|f'(z)| \\ &\leq M_1 + MM_2, \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho que la condición (3.16) implica que $\mathcal{B}^{\mu_1} \subset \mathcal{B}^{\mu_2}$. Esto completa la prueba. $\blacksquare$

El caso cuando el peso μ_1 es típico es más interesante debido a que analizando la taza de crecimiento de la función peso μ_2 cuando $|z| \to 1^-$, se pueden encontrar condiciones sobre la función ϕ, para caracterizar cuándo el operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ es acotado.

Teorema 3.4. *Sea ϕ una función entera, y sean μ_1 y μ_2 dos pesos definidos sobre el disco $\mathbb{D}$. Suponga que el peso μ_1 satisface una condición de crecimiento y que su peso integral ${\mu_1}_I$ es típico. Suponga también que existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_2(z)}{\mu_1(z)} \varphi\left(\frac{1}{{\mu_1}_I(z)}\right) = L > 0, \tag{3.17}$$

donde $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ es una función creciente y continua. El operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ es acotado si y sólo si para cada $\lambda \in (0, 1)$, existen constantes positivas δ y R tales que

$$|\phi'(w)| \leq \delta\varphi(\lambda|w|) \tag{3.18}$$

siempre que $|w| > R$.

Demostración: Suponga primero que la condición (3.18) es cierta, se mostrará que el operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ es acotado. Considere $M_1 > 0$ y suponga que $f \in \mathcal{B}^{\mu_1}$ satisface $\|f\|_{\mathcal{B}^{\mu_1}} \leq M_1$. Seleccionando $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\lambda M_1 K_\mu < 1$, donde $K_\mu > 0$ es la constante del Lema 3.2. Entonces existen constantes positivas δ y R tales que la desigualdad (3.18) se mantiene siempre que $|w| > R$. Por lo tanto, dado que el conjunto $\overline{D}_R = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq R\}$ es compacto y la función ϕ' es continua, se puede suponer que

$$|\phi'(w)| \leq \delta$$

para todo $w \in \overline{D}_R$. Se puede suponer también que $|\phi(w)| \leq \delta$ para todo $|w| \leq M_1$. De la hipótesis (3.17) y el hecho que ${\mu_1}_I$ es un peso típico, implica que $\varphi(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu_2(z)}{\mu_1(z)} = 0.$$

En particular, la función $\dfrac{\mu_2}{\mu_1}$ es acotada sobre $\mathbb{D}$. En consecuencia, para cada $z \in \mathbb{D}$ tal que $|f(z)| \leq R$ se tiene

$$\mu_2(z)\left|\phi'\left(f(z)\right)\right|\left|f'(z)\right| \leq \delta \left\|f\right\|_{\mathcal{B}^{\mu_1}} \frac{\mu_2(z)}{\mu_1(z)} \leq \delta M_1 \left\|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right\|_\infty .$$

Por lo tanto

$$S_1 := \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|\leq R\}} \mu_2(z)\left|\phi'\left(f(z)\right)\right|\left|f'(z)\right| \leq \delta M_1 \left\|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right\|_\infty . \tag{3.19}$$

Por otro lado, para cada $z \in \mathbb{D}$ tal que $|f(z)| > R$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mu_2(z)\left|\phi'\left(f(z)\right)\right|\left|f'(z)\right| &\leq \delta\mu_2(z)\varphi\left(\lambda\left|f(z)\right|\right)\left|f'(z)\right| \\
&\leq \delta\left\|f\right\|_{\mathcal{B}^{\mu_1}} \frac{\mu_2(z)}{\mu_1(z)}\varphi\left(\lambda\frac{K_\mu}{{\mu_1}_I(z)}\left\|f\right\|_{\mathcal{B}^{\mu_1}}\right) \\
&\leq \delta M_1\frac{\mu_2(z)}{\mu_1(z)}\varphi\left(\frac{1}{{\mu_1}_I(z)}\right),
\end{aligned}$$

donde se ha usado que la función φ es creciente y el hecho que $\lambda\, M_1 K_\mu < 1$. Por lo tanto dado que el límite en (3.17) existe, se concluye que existe una constante $C > 0$ tal que

$$S_2 := \sup_{\{z\in\mathbb{D}:|f(z)|>R\}} \mu_2(z)\left|\phi'\left(f(z)\right)\right|\left|f'(z)\right| \leq \delta M_1 C. \tag{3.20}$$

Finalmente, se tiene

$$\left\|S_\phi\left(f\right)\right\|_{\mathcal{B}_{\mu_2}} \leq \left|\phi\left(f(0)\right)\right| + S_1 + S_2 \leq \delta + S_1 + S_2,$$

dado que $|f(0)| \leq M_1$. Esto muestra que el operador $S_\phi : \mathcal{B}^{\mu_1} \to \mathcal{B}^{\mu_2}$ es acotado.

Recíprocamente, si ϕ es una función entera y se satisface la hipótesis (2.20), entonces existe $\lambda_0 \in (0,1)$ y una sucesión de números complejos $\{w_n\}$ tal que $|w_n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y

$$\left|\phi'\left(w_n\right)\right| \geq n\varphi\left(\lambda_0\left|w_n\right|\right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, dado que el peso ${\mu_1}_I$ es típico se puede encontrar una sucesión de puntos $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1^-$ y

$${\mu_1}_I\left(z_n\right) = \frac{1}{\lambda_0\left|w_n\right|}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pasando a una subsucesión, se puede suponer que $\frac{1}{2} < |z_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, se considera la función h_n definida en (3.11) por

$$h_n(z) = w_n \mu_{1I}(z_n) \{g_n(z) + s_n(z)\}.$$

Entonces $\{h_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{B}^{\mu_1}$ tal que $h_n(0) = 0$, $h_n(z_n) = w_n$ y

$$h_n'(z_n) = \frac{w_n \mu_{1I}(z_n)}{z_n \mu_1(z_n)}$$

Además,

$$\begin{aligned} \|S_\phi(h_n)\|_{\mathcal{B}^{\mu_2}} &\geq \mu_2(z_n) |\phi'(h_n(z_n))| |h_n'(z_n)| = \mu_2(z_n) |\phi'(w_n)| \frac{|w_n| \mu_{1I}(z_n)}{|z_n| \mu_1(z_n)} \\ &\geq \frac{n}{\lambda_0} \frac{\mu_2(z_n)}{\mu_1(z_n)} \varphi\left(\frac{1}{\mu_{1I}(z_n)}\right) \to \infty \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde se ha usado la hipótesis (3.17) y el hecho que $|z_n| \to 1^-$ cuando $n \to \infty$. Se concluye entonces que el operador S_ϕ no puede ser acotado de $\mathcal{B}^{\mu_1}$ en $\mathcal{B}^{\mu_2}$. ■

Comentario 3.2. En el trabajo de Boyd y Rueda [7] acerca del operador de superposición actuando entre espacios de Banach de funciones analíticas los autores mostraron que si X y Y son espacios de funciones holomorfas sobre un conjunto U y el funcional evaluación δ_x , $x \in U$, está en Y', entonces si S_ϕ es acotado implica que es continuo (de hecho holomorfo). Observe que las desigualdades (2.4) y (3.3) dicen que el funcional evaluación es continuo, esto último junto con el acotamiento del operador S_ϕ implican la continuidad del mismo.

3.3 Problemas abiertos

En esta línea de investigación queda pendiente abordar los siguientes problemas:

- Caracterizar la continuidad y compacidad del operador de superposición actuando sobre los espacios Bloch logarítmicos y los espacios μ- Bloch.

- Mejorar los resultados obtenidos en el Capítulo 3, para una función peso cualquiera sin condición de crecimiento.

- El operador de superposición está relacionado con el operador multiplicación. Más precisamente, si X e Y son dos espacios métricos de funciones analíticas, u una función analítica que tiene el mismo dominio que las funciones de X y si $u \cdot f \in Y$ para toda función $f \in X$, entonces u induce un operador lineal $M_u : X \to Y$, llamado *operador multiplicación* definido por

$$M_u(f) := u \cdot f.$$

Para funciones analíticas $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ y $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se puede definir el operador no lineal $S_{u,\phi} : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ por

$$S_{u,\phi}(f) := u.(\phi \circ f)$$

llamado *operador de superposición con peso.* Observe que $S_{u,\phi} = M_u \circ S_\phi$, donde M_u es el operador multiplicación. El problema en este caso sería extender los resultados de los capítulos anteriores para el caso del operador de superposición con peso $S_{u,\phi}$.

CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación en el cual se estudia el Operador de Superposición actuando sobre espacios de funciones analíticas se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- El peso integral definido en el Capítulo 2, introducido por Ramos-Fernández en [23] es una herramienta muy útil, puesto que éste permite definir ciertas funciones especiales las cuales son claves en el estudio del acotamiento del operador S_ϕ cuando actúa entre los espacios Bloch Logarítmicos.

- Las funciones enteras juegan un papel fundamental en este trabajo, ya que las caracterizaciones obtenidas se expresan en términos de éstas, de su orden y de su tipo.

- Se logró dar nuevas caracterizaciones para el acotamiento del operador S_ϕ cuando actúa entre los espacios Bloch Logarítmicos, éstos resultados generalizan los obtenidos por Xu en [28] para los espacios α-Bloch. También como casos particulares se obtienen la mayoría de los resultados que aparecen en [12].

- El peso integral y las funciones especiales que aparecen en el Capítulo 3, permitieron generalizar todos los resultados del Capítulo 2 para una función peso μ general que satisface una condición de crecimiento.

BIBLIOGRAFÍA

[1] V. Álvarez, M. A. Márquez and D. Vukotić, Superposition operators between the Bloch space and Bergman spaces, *Ark. Mat.* **42**(2), 205-216 (2004).

[2] J. Anderson, J. Claunie and Ch. Pommerenke, On the Bloch functions and normal functions, *J. Reine Angew Math.* **270**, 12-37 (1974).

[3] J. Appell and P.P. Zabrejko, *Nonlinear Superposition Operators*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[4] K. Attele, Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces, *Hokkaido Math. J.* **21**, 279-293 (1992).

[5] J. Back and D. Newman, *Complex Analysis*, Segunda edición, Springer-Verlag, New York, 1997.

[6] K. Bierstedt, J. Bonet and J. Taskinen, Associated weights and spaces of holomorphic functions, *Studia Math.* **127**(2), 137–168 (1998).

[7] C. Boyd and P. Rueda, Holomorphic superposition operators between Banach function spaces, *J. Aust. Math. Soc.* **96**(2), 186-197 (2014).

[8] J. Bonet and D. Vukotić, Superposition operators between weighted Banach spaces of analytic functions of controlled growth, *Monatsh. Math.* **170** (3-4), 311-323 (2010).

[9] S. Buckley, J. Fernández and D. Vukotić, Superposition operators on Dirichlet type spaces, *Rep. Univ. Jyväskyla Dept. Math. Stat.* **83**, 41-61 (2001) (Papers on Analysis: A Volume dedicaed to Olli Martio on the occasion of his 60th birthday).

[10] S. Buckley and D. Vukotić, Univalent interpolation in Besov spaces and superposition into Bergman spaces, *Potential Anal.* **29** (1), 1-16 (2008).

[11] G. Cámera and J. Giménez, The nonlinear superposition operators acting on Bergman spaces, *Compositio Math.* **93**, 23-35 (1994).

[12] R.E. Castillo, J.C. Ramos Fernández and M. Salazar, Bounded superposition operators between Bloch-Orlicz and α-Bloch spaces, *Appl. Math. Comp.* **218**, 3441-3450 (2011).

[13] R. Churchill, J. Brown y R. Verhey, *Variables complejas y sus aplicaciones*, Segunda edición, MaGraw-Hll, México, 1978.

[14] J. Conway, *Functions of one complex variable*, Segunda edición, Springer Verlag, New York (1978).

[15] D. Girela and M. A. Márquez, Superposition operators between Q_p spaces and Hardy spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **364**, 463-472 (2010).

[16] E. Hille, *Analytic function theory*, Volúmen II, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts (1962).

[17] M. Krasnosel'skij, On the continuity of the operator $F_u(x) = f(x, u(x))$ (Russian), *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **77** (2), 185-188 (1951).

[18] R. Malavé, *Conjuntos de muestreo y operador de composición sobre espacios tipo Bloch*. Tesis de Maestría, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná, 2013.

[19] R. Malavé-Malavé and J. C. Ramos-Fernández, Superposition operators between logarithmic Bloch spaces, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, https://doi.org/10.1007/s12215-018-0345-y.

[20] R. Malavé-Malavé and J. C. Ramos-Fernández, The integral weight and superposition operators between Bloch-type spaces, Enviado (2018).

[21] J. C. Ramos-Fernández, Composition operators on Bloch- Orlicz type spaces, *Appl. Math. Compu.* **217**, 3392-3402 (2010).

[22] J. C. Ramos-Fernández, Bounded superposition operators between weighted Banach spaces of analytic functions, *Applied Math Comput* **219**, 4942-4949 (2013).

[23] J.C. Ramos-Fernández, Logarithmic Bloch spaces and their weighted composition operators, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) **65** (1), 159–174 (2016).

[24] E. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analisys*, Princeton University Press, New Jersey (2003).

[25] S. Stević, On new Bloch-type spaces, *Appl. Math. Comput.* **215**, 841-849 (2009).

[26] A. Vera y P. Ezquerra, *Un curso de análisis funcional*, AVL. Bilbao, (1997).

[27] C. Xiong, Superposition operators between Q_p spaces and Bloch-type spaces, *Complex Var. Theory Appl.* **50** (12), 935-938 (2005).

[28] W. Xu, Superposition operators on Bloch-type spaces, *Comput. Methods Funct. Theory* **7**, 501-507 (2007).

[29] B. Ya. Levin, Lectures on Entire Functions, *Translations of Mathematical Monographs, Amer. Soc.* Providence, RI (1996).

[30] S. Ye, Weighted composition operator on the logarithmic Bloch space, *Bull. Korean Math. Soc.* **47** (3), 527–540 (2010).

[31] K. Zhu, *Operator theory in function spaces*, Marcel Dekker, New York (1990).

[32] K. Zhu, Bloch type spaces of analytic funtions, *Rocky Mountain J. Math.* **23**, 1143-1177 (1993).

ANEXO

Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser
https://doi.org/10.1007/s12215-018-0345-y

Superposition operators between logarithmic Bloch spaces

Renny J. Malavé-Malavé[1] · **Julio C. Ramos-Fernández**[2]

Received: 3 March 2018 / Accepted: 10 April 2018

Abstract We characterize all entire functions ϕ that maps a logarithmic Bloch-type space $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ into another of the same kind by superposition. As consequences of our study, we obtain several results about the boundedness of superposition operators acting between α-Bloch spaces, Bloch–Orlicz spaces among others.

Keywords Bloch-type spaces · Superposition operator · Entire function

Mathematics Subject Classification 30D45 · 47B33

1 Introduction

For $\alpha > 0$ and $\beta \geq 0$ fixed, the logarithmic Bloch space, denoted by $\mathcal{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$, was introduced by Stević [20] in 2009, when he studied functions with Hadamard gaps in certain Bloch-type spaces. This space consists of all complex-valued functions $f \in H(\mathbb{D})$, the space of all analytic functions on the open unit disk $\mathbb{D}$ of the complex plane $\mathbb{C}$, equipped with the topology of uniform convergence on compact subsets of $\mathbb{D}$, such that

$$\|f\|_{\alpha,\beta} := \sup_{z\in\mathbb{D}} v_{\alpha,\beta}(z) \left|f'(z)\right| < \infty,$$

✉ Julio C. Ramos-Fernández
julio.ramos.fernandez@gmail.com

Renny J. Malavé-Malavé
rmalave@udo.edu.ve

1 Departamento de Matemática, Universidad de Oriente, Cumaná 6101, Edo. Sucre, Venezuela

2 Proyecto Curricular de Matemáticas, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Carrera 3 No. 26 A-40, Bogotá, Colombia

Published online: 16 April 2018

Noname manuscript No.
(will be inserted by the editor)

The integral weight and superposition operators between Bloch-type spaces

Renny J. Malavé-Malavé · Julio C. Ramos-Fernández

Received: date / Accepted: date

Abstract Using the notion of the integral weight, we characterize all entire functions that transform a Bloch-type space $\mathcal{B}^{\mu_1}$ into another space of the same kind $\mathcal{B}^{\mu_2}$ by superposition for very general weights μ_1 and μ_2, satisfying a growth condition.

Keywords Bloch-type spaces · superposition operator · entire function

MSC 2010: 47H30, 30D45, 30H05.

1 Introduction

Bloch-type spaces $\mathcal{B}^{\mu}$ appear in natural way when we study properties of operators acting on spaces of holomorphic functions. They consist of all the functions $f \in H(\mathbb{D})$, the space of all holomorphic functions on the unit open disk $\mathbb{D}$ of the complex plane $\mathbb{C}$, such that

$$|f'(z)| \leq \frac{\lambda_f}{\mu(z)},$$

where $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ is a *weight*, that is, a continuous, positive, bounded and radial (i.e. $\mu(|z|) = \mu(z)$ for all $z \in \mathbb{D}$) function; and λ_f is a constant depending on f and μ. It is known that $\mathcal{B}^{\mu}$ is a Banach space with the norm

$$\|f\|_{\mathcal{B}^{\mu}} = |f(0)| + \|f\|_{\mu},$$

R. Malavé-Malavé
Departamento de Matemática, Universidad de Oriente, 6101 Cumaná, Edo. Sucre, Venezuela
E-mail: rmalave@udo.edu.ve

J.C. Ramos-Fernández
Departamento de Matemática, Universidad de Oriente, 6101 Cumaná, Edo. Sucre, Venezuela
E-mail: jcramos@udo.edu.ve

HOJA DE METADATOS

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 1/6

Título	Operador de superposición generalizado sobre espacios de funciones analíticas
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Malavé M., Renny J.	CVLAC	16 702 568
	e-mail	rennymalave@hotmail.com
	e-mail	rmalave@udo.edu.ve
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Bloch-type spaces, superposition operator, entire function

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 2/6

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias Básicas	Matemáticas

Resumen (abstract):

En este trabajo se caracterizan los operadores de superposición acotados cuando actúan entre los espacios Bloch-logarítmicos $\mathbf{B}^{\alpha}_{\log^{\beta}}$ y entre los espacios μ-Bloch, donde la función peso μ satisface una condición de crecimiento. Los resultados obtenidos en esta investigación dieron lugar a los artículos [19] y [20], los cuales extienden o generalizan los que aparecen en [28], [22] y [12].

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Ramos F., Julio C.	ROL	CA ☐ AS ☐ TU ☒ JU ☐
	CVLAC	0000094322
	e-mail	julio.ramos.fernandez@gmail.com
	e-mail	
Astudillo Franklin	ROL	CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☒
	CVLAC	
	e-mail	ast65@hotmail.com
	e-mail	
Rosas Ennis	ROL	CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☒
	CVLAC	
	e-mail	ennisrafael@gmail.com
	e-mail	
Malavé Richard	ROL	CA ☐ AS ☐ TU ☐ JU ☒
	CVLAC	
	e-mail	rmalaveg@hotmail.com
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2018	12	14

Lenguaje: spa

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
Tesis-Doctorado-Renny.pdf	Aplication/pdf

Alcance:

Espacial: Nacional (Opcional)

Temporal: Temporal (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo: Doctor en Matemáticas

Nivel Asociado con el Trabajo: Doctorado

Área de Estudio: Matemáticas

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

Universidad de Oriente Núcleo de Sucre

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CU N° 0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

*Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda **"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009".***

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

JUAN A. BOLAÑOS CURVELO
Secretario

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE ORIENTE
SECRETARÍA
CONSEJO UNIVERSITARIO

C.C: Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.

JABC/YGC/maruja

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso - 6/6

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009): "Los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo del Núcleo respectivo, quién deberá participarlo previamente al Consejo Universitario, para su autorización."

M.Sc. Renny J. Malavé M.

Autor

Dr. Julio C. Ramos F.

Tutor