Saber, Universidad de Oriente, Venezuela. Vol. 13. N° 2: 113-118. (2001)

OPERACIÓN INTERSECCIÓN SOBRE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

INTERSECTION OPERATION ON TOPOLOGICAL SPACES

ENNIS ROSAS, MARGOT SALAS Y CARLOS CARPINTERO

Universidad de Oriente, Escuela de Ciencias, Dpto. de Matemáticas

RESUMEN

Este artículo introduce los operadores $\alpha \wedge \beta$ y $\alpha \vee \beta$ y estudia la estructura de los conjuntos $\alpha \wedge \beta-$abiertos. Investiga además la relación entre $\Gamma_{\alpha\wedge\beta}$, Γ_α y Γ_β.

ABSTRACT

In this paper, we introduce the operators $\alpha \wedge \beta$ and $\alpha \vee \beta$ and we study the structure of the $\alpha \wedge \beta-$open sets. We further investigate the relation between $\Gamma_{\alpha\wedge\beta}$, Γ_α y Γ_β.

INTRODUCCIÓN

Ogata y Maki (1993) introducen el concepto de operación birregular sobre espacios topológicos. En este artículo introducimos el concepto de operación intersección e investigamos algunas operaciones relacionadas con un espacio topológico.

Definición 1. Sea (X,Γ) un espacio topológico. Se dice que $\alpha : P(X) \to P(X)$, donde $P(X)$ es el conjunto de partes de X, es un operador asociado a la topología Γ si $U \subseteq \alpha(U)$ para todo $U \in \Gamma$.

Ejemplo 1: $\alpha(U) = X - Fr(U)$ es un operador asociado a Γ en un espacio (X,Γ).

Definición 2. (Kasahara 1979). Sea (X,Γ) un espacio topológico. Un operador α asociado a Γ se dice que es regular si para cada par de vecindades abiertas U y V de cada $x \in X$, existe una vecindad abierta W de x tal que $\alpha(W) \subseteq \alpha(U) \cap \alpha(V)$.

Nótese que si α es el operador identidad, la definición anterior es exactamente la condición de base para una topología.

Recibido: Enero 2001. Aprobado: Abril 2001.
Versión Final: Julio 2001.

Definición 3. (Kasahara 1979). Sean (X,Γ) un espacio topológico y α un operador asociado a Γ. Un subconjunto A de X se dice que es α-abierto si para cada $x \in A$ existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $\alpha(U) \subseteq A$..

Denotaremos por Γ_α la colección de todos los conjuntos α-abiertos en X. Observe que, en general, Γ_α no es una topología sobre X pero, si α es un operador regular entonces Γ_α es una topología sobre X.

Definición 4. Sea (X,Γ) un espacio topológico y α un operador asociado a Γ. α es un operador monótono con respecto a Γ si U y V son elementos de Γ con $U \subset V$, entonces $\alpha(U) \subseteq \alpha(V)$.

Teorema 1. *Sea (X,Γ) un espacio topológico y α un operador monótono asociado a Γ, entonces α es un operador regular.*

Prueba: Sean U y V vecindades abiertas de x, consideremos $W = U \cap V$, W es una vecindad abierta de x y usando la monotonía de α se obtiene que $\alpha(W) \subseteq \alpha(U)$ y $\alpha(W) \subseteq \alpha(V)$. Luego $\alpha(W) \subseteq \alpha(U) \cap \alpha(V)$. Así α es regular.

Ejemplo 2: Sea (X,Γ) un espacio topológico y definamos para $A \in \Gamma$, $A \neq \varnothing$ $\alpha(A) = cl(A)$ y $\alpha(\varnothing) = X$ entonces α es un operador regular que no es monótono.

Definición 5. Sean (X, Γ) un espacio topológico, α y β operadores asociados a Γ. Definimos $\alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta : P(X) \rightarrow P(X)$ como siguen:

$$(\alpha \wedge \beta)(V) = \alpha(V) \cap \beta(V)$$
$$(\alpha \vee \beta)(V) = \alpha(V) \cup \beta(V).$$

Observe que $\alpha \wedge \beta$ y $\alpha \vee \beta$ son operadores asociados a Γ, en el sentido de la definición 1. $\alpha \wedge \beta$ es denominado operación intersección y $\alpha \vee \beta$ es el operador unión.

Teorema 2. *Sean* (X, Γ) *un espacio topológico,* α *y* β *operadores asociados a* Γ. *Entonces* $\Gamma_{\alpha \vee \beta} \subseteq \Gamma_{\alpha \wedge \beta}$.

Demostración: Sea $A \in \Gamma_{\alpha \vee \beta}$ entonces para todo $x \in A$ existe un conjunto abierto V que contiene a x tal que $(\alpha \vee \beta)(V) \subseteq A$. Pero $(\alpha \vee \beta)(V) = \alpha(V) \cup \beta(V)$, además $(\alpha \wedge \beta)(V) = \alpha(V) \cap \beta(V) \subseteq \alpha(V) \cup \beta(V) = (\alpha \vee \beta)(V) \subseteq A$, así $A \in \Gamma_{\alpha \wedge \beta}$.

Definición 6. Sean (X, Γ) un espacio topológico y α un operador asociado a Γ, se dice que (X, Γ) es un espacio α-regular si para cada $x \in X$ y cada vecindad abierta U de x existe una vecindad V de x tal que $\alpha(V) \subset U$.
Es de observar que si α es el operador clausura, entonces todo espacio regular es α-regular.

Teorema 3. *Sean* (X, Γ) *un espacio topológico y* α *un operador asociado a* Γ, *entonces* (X, Γ) *es un espacio* α *-regular si y solo si* $\Gamma = \Gamma_\alpha$.

Prueba: Véase Kasahara (1979).

En el trabajo de Kasahara (1979) conocemos que $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma$. El siguiente teorema, da una condición suficiente para que un conjunto abierto sea α-abierto.

Teorema 4. *Sean* (X, Γ) *un espacio topológico y* α *un operador asociado a* Γ. *Si* $U \in \Gamma$ *satisface la condición* $\alpha(U) = U$, *entonces* U *es* α*-abierto.*

Demostración: Sigue de la definición de abierto y α-abierto.

En el siguiente ejemplo se muestra que existen casos en los cuales U es α-abierto y no necesariamente $\alpha(U) = U$.

.

Ejemplo 3. Considere $\Re$ con su topología usual, $\alpha =$ operador clausura y $U = (a, b)$. Por regularidad, para todo $x \in U$ existe un abierto V tal que $x \in V$ y $\alpha(V) = Cl(V) \subseteq U$. Así U es α- abierto, pero $\alpha(U) = Cl(U) \neq U$.

Teorema 5. *Sean* (X, Γ) *un espacio topológico,* α *y* β *operadores asociados a* Γ. *Entonces* $\Gamma_{\alpha \vee \beta} \subseteq \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \subseteq \Gamma_{\alpha \wedge \beta} \subseteq \Gamma$.

Demostración: Si $A \in \Gamma_\alpha$ entonces para todo $x \in A$ existe un abierto U_x tal que $x \in U_x$ y $\alpha(U_x) \subseteq A$. Luego $\alpha \wedge \beta(U_x) = \alpha(U_x) \cap \beta(U_x) \subseteq \alpha(U_x) \subseteq A$, lo que implica que $A \in \Gamma_{\alpha \wedge \beta}$ y así $\Gamma_\alpha \subseteq \Gamma_{\alpha \wedge \beta}$. De manera similar $\Gamma_\beta \subseteq \Gamma_{\alpha \wedge \beta}$, por lo tanto $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \subset \Gamma_{\alpha \wedge \beta}$.

Ahora consideremos $A \in \Gamma_{\alpha \vee \beta}$, entonces para cada $x \in A$, existe una vecindad U de x tal que

$(\alpha \vee \beta)(U) \subseteq A$. Usando la definición de $\alpha \vee \beta$, obtenemos que

$$\alpha(U) \subseteq (\alpha \vee \beta)(U) \subseteq A \quad \text{y}$$
$$\beta(U) \subseteq (\alpha \vee \beta)(U) \subseteq A,$$

esto indica $A \in \Gamma_\alpha$ y $A \in \Gamma_\beta$. Así $A \in \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$.

A continuación analizaremos una serie de ejemplos, para tratar de visualizar qué relaciones pueden existir entre los conjuntos $\Gamma_{\alpha \wedge \beta}$, Γ_α y Γ_β, y tratar de encontrar condiciones que deben cumplir los operadores para que $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha \wedge \beta}$. Para ello es necesario hacer un estudio pormenorizado de cada uno de estos para poder indicar qué propiedades se le debe imponer a los operadores involucrados.

Ejemplo 4: Sean $X=\{a,b,c\}$ y $\Gamma=\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$. Si α y β son operadores definidos como:

$$\alpha(A) = \begin{cases} A & \text{si } b \in A \\ cl(A) & \text{si } b \notin A \end{cases} \quad ; \quad \beta(A) = \begin{cases} cl(A) & \text{si } b \in A \\ A & \text{si } b \notin A \end{cases}$$

para cada $A \in P(X)$. Podemos ver que:

$$\Gamma_\alpha = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$$
$$\Gamma_\beta = \Gamma$$
$$\Gamma_{\alpha \vee \beta} = \{\varnothing, \{a,c\}, \{b\}, X\}$$
$$\Gamma_{\alpha \wedge \beta} = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a,b\} \{a,c\}\}$$
$$\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b\}\}$$

Es de observar que α no es un operador regular, mientras que β es regular.

Ejemplo 5: Sean $X=\{a,b,c\}$ y $\Gamma=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$. Si α y β son los operadores definidos como:

$$\alpha(A) = cl(A) \quad ; \quad \beta(A) = \begin{cases} A & \text{si } b \in A \\ cl(A) & \text{si } b \notin A \end{cases}$$

para cada $A \in P(X)$. Podemos ver que:

$$\Gamma_\alpha = \{\varnothing, X\}$$
$$\Gamma_\beta = \{\varnothing, \{b\}, X, \{a,b\}\}$$
$$\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \{\varnothing, X\}$$
$$\Gamma_{\alpha \vee \beta} = \{\varnothing, X\}$$
$$\Gamma_{\alpha \wedge \beta} = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a,b\}\}$$

Además α es regular pero β no es regular.

Ejemplo 6: $X=\{a,b,c\}$ y $\Gamma = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$. Si α y β son operadores definidos por $A \in \Gamma$, $\alpha(A) = cl(A)$ y $\beta(B) = Int(cl(A))$, entonces

$$\Gamma_\alpha = \{\varnothing, X\}$$
$$\Gamma_\beta = \Gamma$$
$$\Gamma_{\alpha \vee \beta} = \{\varnothing, X\}$$
$$\Gamma_{\alpha \wedge \beta} = \{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$
$$\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \{\varnothing, X\}.$$

Observe que α y β son operadores regulares.

Ejemplo 7: $X=\{a,b,c\}$ y $\Gamma = \{\varnothing, \{a,c\}, X\}$. Sean α y β definidas por: para cada $A \in \Gamma$, $\alpha(A) = cl(A)$ y $\beta(A) = Int(cl(A))$. Entonces

$$\Gamma_\alpha = \{\varnothing, \{a,c\}, X\}$$
$$\Gamma_\beta = \{\varnothing, X\}$$
$$\Gamma_{\alpha \vee \beta} = \{\varnothing, X\}$$
$$\Gamma_{\alpha \wedge \beta} = \{\varnothing, X\}.$$

Observe que α y β son operadores regulares.

Observe en el ejemplo 4 que:

$$\Gamma_{\alpha \wedge \beta} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta, \quad \Gamma_{\alpha \vee \beta} \subset \Gamma_{\alpha \cap \Gamma_\beta},$$

en el ejemplo 5

$$\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \subseteq \Gamma_{\alpha \wedge \beta} \text{ y } \Gamma_{\alpha \vee \beta} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta,$$

y en el ejemplo 6

$$\Gamma_{\alpha\vee\beta} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \text{ y } \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \subset \Gamma_{\alpha\wedge\beta}.$$

Ejemplo 8: Sea $\alpha, \beta : P(R) \to P(R)$ operadores asociados a la topología usual Γ sobre *R*, definidos según las fórmulas $\alpha(B) = cl(B)$ y $\beta(B) = R - Fr(B)$ para todo $B \subseteq R$. Observe que α y β son operadores regulares, además $\Gamma_\alpha = \Gamma$, $\Gamma_\beta = \Gamma$, $\Gamma_{\alpha\vee\beta} = \{\varnothing, R\}$ y $\Gamma_{\alpha\wedge\beta} = \Gamma$.

Deseamos obtener una condición bajo la cual $\Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta = \Gamma_{\alpha\wedge\beta}$.

Teorema 6. Si α y β *son operadores monótonos asociados a una topología* Γ *sobre* X *entonces* $\alpha \wedge \beta$ *es regular.*

Demostración. Sigue directamente de las definiciones 2 y 4.

Seguidamente introduciremos la noción de operador birregular, la cual trae consecuencias interesantes en la condición que deseamos obtener.

Definición 7. Se dice que $\alpha \vee \beta$ es un operador birregular si para cada $x \in X$ y cada par de vecindades U y V de x existe una vecindad abierta W de x tal que

$$(\alpha \wedge \beta)(W) \subset \alpha(U) \cap \beta(V).$$

Teorema 7. Si $\alpha \vee \beta$ es birregular entonces $\Gamma_{\alpha\vee\beta} = \Gamma_{\alpha\wedge\beta}$.

Demostración: Del teorema 5 sigue que $\Gamma_{\alpha\vee\beta} \subseteq \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \subseteq \Gamma_{\alpha\wedge\beta}$, así $\Gamma_{\alpha\vee\beta} \subseteq \Gamma_{\alpha\wedge\beta}$. Por otro lado si $A \in \Gamma_{\alpha\wedge\beta}$, entonces para todo $x \in A$ existe un abierto U_x tal que $x \in U_x$ y $\alpha \wedge \beta(U_x) \subseteq A$, luego $\alpha(U_x) \cap \beta(U_x) \subset A$. Siendo $\alpha \vee \beta$ birregular, existe un abierto W_x tal que $\alpha \vee \beta(W_x) = \alpha(U_x) \cap \beta(U_x) \subseteq A$. Así $A \in \Gamma_{\alpha\vee\beta}$.

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1. *Si* $\alpha \vee \beta$ *es birregular entonces* $\Gamma_{\alpha\wedge\beta} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$ *y* $\Gamma_{\alpha\vee\beta} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$.

Demostración: Si $\alpha \vee \beta$ es birregular, del teorema 7 y el teorema 5, $\Gamma_{\alpha\vee\beta} \subseteq \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta \subseteq \Gamma_{\alpha\wedge\beta}$, siguen que $\Gamma_{\alpha\vee\beta} = \Gamma_{\alpha\wedge\beta} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$.

Si analizamos los ejemplos anteriores, podemos observar que: en el ejemplo 4 $\alpha \vee \beta$ no es birregular, α no es regular y β es regular; en el ejemplo 5 $\alpha \vee \beta$ no es birregular y α es regular pero β no es regular, y en el ejemplo 6 $\alpha \vee \beta$ no es birregular, pero α y β son regulares. Mientras que en el ejemplo 7 α, β son regulares y $\alpha \vee \beta$ es birregular. Observe además que las condiciones $\Gamma_{\alpha\vee\beta} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$ y $\Gamma_{\alpha\wedge\beta} = \Gamma_\alpha \cap \Gamma_\beta$ no necesariamente implican que $\alpha \vee \beta$ sea birregular, como se ve en los ejemplos 4 y 5.

Definición 8. Se dice que $\alpha \wedge \beta$ es un operador simétrico si por cada par de vecindades U y V de x, existe una vecindad W de x tal que

$$(\alpha \wedge \beta)(W) \subset \alpha(U) \cap \beta(V).$$

Es de observar fácilmente que si $\alpha = \beta$, entonces la definición de operador simétrico coincide con la definición de operador regular.

Observe además, que si $\alpha \vee \beta$ es birregular, entonces $\alpha \wedge \beta$ es simétrico.

Es de notar que en los ejemplos 2, 6 y 7 $\alpha \wedge \beta$ es simétrico mientras que en el ejemplo 5 $\alpha \wedge \beta$ no es simétrico.

Como una consecuencia de la definición del operador $\alpha \wedge \beta$ simétrico, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 9. Si $\alpha \wedge \beta$ *es un operador regular entonces* $\alpha \wedge \beta$ *es simétrico.*

Demostración: Sean U y V vecindades de x, como $\alpha \wedge \beta$ es regular, existe una vecindad W de x tal que

$$(\alpha \wedge \beta)(W) \subset (\alpha \wedge \beta)(U) \cap (\alpha \wedge \beta)(V);$$

luego

$$(\alpha \wedge \beta)(W) \subset \alpha(U) \cap \beta(V).$$

Teorema 10. *Si* (X, Γ) *es un espacio* $\alpha \wedge \beta$ *-regular entonces* $\alpha \wedge \beta$ *es un operador simétrico.*

Demostración : Como (X, Γ) es $\alpha \wedge \beta$ -regular, entonces $\Gamma_{\alpha \wedge \beta} = \Gamma.$

Sea $x \in X$, U y V vecindades abiertas de x, luego $U \wedge V \in \Gamma_{\alpha \wedge \beta}$ si existe una vecindad W de x tal que $(\alpha \wedge \beta)(W) \subset \alpha(U) \cap \beta(V).$

Es de observar que la condición de que $\alpha \wedge \beta$ sea simétrico no es suficiente para que el espacio sea $\alpha \wedge \beta$ -regular, como se demuestra en los ejemplos 4 y 7.

Definición 9. Sean (X, Γ) un espacio topológico y α un operador asociado a Γ. Para un subconjunto $A \subseteq X$, definimos:

$cl_\alpha(A) = \{x \in X / \alpha(U) \cap A \neq \varnothing$ para cada vecindad U de x en $X\}$, y $\Gamma_\alpha - cl(A) = \bigcap \{F / A \subseteq F$ y $X - F \in \Gamma_\alpha\}.$

En el trabajo de Ogata (1991) existe una equivalencia que dice:

$x \in \Gamma_\alpha - cl(A)$ si y solo si $V \cap A \neq \varnothing$ para cualquier $V \in \Gamma_\alpha$ y $x \in V.$

También tenemos

$$A \subset cl(A) \subset cl_\alpha(A) \subset \Gamma_\alpha - cl(A).$$

Teorema 11. *Sean* (X, Γ) *un espacio topológico,* α y β *operadores asociados a* Γ *y* A, B *subconjuntos de* X; *entonces*

1. $cl_{\alpha \wedge \beta}(A) \subseteq cl_\alpha(A) \cap cl_\beta(A)$
2. $cl_{\alpha \wedge \beta}(A) \subseteq cl_{\alpha \vee \beta}(A)$
3. $cl_{\alpha \wedge \beta}(A \cup B) = cl_{\alpha \wedge \beta}(A) \cup cl_{\alpha \wedge \beta}(B)$
4. Si $\alpha \vee \beta$ es birregular, entonces $\Gamma_{\alpha \wedge \beta} - cl(A) = \Gamma_\alpha - cl(A) \cap \Gamma_\beta - cl(A).$

Demostración : 1, 2 y 3 siguen de la definición 5; 4 sigue de la definición 7 y el teorema 7.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Kasahara, S. 1979. Operation-compact spaces. Math. Japonica 24:97-105.

Ogata, H. 1991. Operator on topological spaces and associated topological. Math. Japonica 36(1):175-184.

Ogata, H. and Maki, H. 1993. Bioperation on topological spaces. Mathematica Japonica. 38(5):981-985.

Rosas, E. and Vielma, J. 1998. Operator-compact and operator-connected spaces. Scientiae Mathematicae 1(2): 203-208.