SOBRE LOS ESPACIOS PROYECTIVOS H-EQUIVALENTES

[1]RODRIGO MARTÍNEZ Y [2]LUIS ROJAS

[1]*Departamento de Matemáticas. Núcleo de Sucre, Universidad de Oriente*
[2]*Departamento de Matemáticas. Instituto Universitario de Tecnología, Cumanúná, Venezuela*

RESUMEN

Los problemas estudiados están relacionados con las nociones de espacios con conexión afín H - equivalentes y de espacios proyectivos. Se aplicarán los resultados obtenidos a la solución de un sistema no holonómico con ciertas características, tratado como un sistema holonómico desconocido y se plantearán las ecuaciones de campo de Einstein en un espacio distinto al Riemanniano.

PALABRAS CLAVES: H - equivalentes, holonómico, pro-yectivos.

ABSTRACT

The problems studied here are related with the notions of H - equivalent spaces of affine connection and projective spaces. We will apply the results presented in this work to solve a non holonomic system with certain characteristics, treated as an unknown holonomic system and we will state Einstein´s field equations in a space different from the Riemannian space.

KEY WORDS: H - equivalent, holonomic, projective.

INTRODUCCIÓN

Finalizando el siglo pasado, en el trabajo de Hertz (1894), aparece por primera vez en la Mecánica Clásica el concepto de “Enlace no Holonómico o no Integrable”, el cual genera posteriormente una nueva rama de ésta y que hoy día se denomina: Mecánica de los Sistemas No Holonómicos o sencillamente Mecánica No Holonómica (MNH).

El nacimiento de la (MNH) tuvo lugar cuando el formalismo de Euler - Lagrange fue ineficaz para describir el comportamiento de problemas sencillos, como el problema del deslizamiento sin fricción de un cuerpo rígido en el plano.

Chapliguin (1948) fue uno de los primeros investigadores de los Sistemas No Holonómicos que trató de describir el comportamiento de éstos como Sistemas Holonómicos (sin enlaces); observó que en la descripción de los fenómenos en la naturaleza, el tiempo juega un papel fundamental y planteó el siguiente problema:

“Sean dadas las ecuaciones diferenciales de segundo orden (Ecuaciones de Chapliguin):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}=\left(g_{\ell j}B^{\ell}_{kn}\right)v^j v^n,$$

donde $L=\frac{1}{2}g(v,v)$, B^{ℓ}_{kn} son las componentes del tensor de Chapliguin que cumple:

$$B^{\ell}_{kn}+B^{\ell}_{nk}=0,$$

se exige entonces, construir la función θ (factor generatriz)

$$\begin{cases}\omega=\theta v, & \theta\in C^{\infty}(M)\\ dt=\theta ds,\end{cases}$$

de tal manera que:

donde $\overline{L}=\frac{1}{2}\theta^2 g(\omega,\omega)$”.

Recibido: Diciembre 1998. Aprobado: Octubre del 2000.

Cabe hacer notar que este problema fue resuelto por Chapliguin para el caso en que la dimensión del espacio es N = 2, señalando la posibilidad de su generalización para N > 2. Martínez (1991) logra esto con la introducción de los Espacios H - equivalentes en su tesis doctoral.

Se propone entonces en este trabajo, plantear las ecuaciones de campo de Einstein de la teoría de la relatividad, en un espacio distinto al Riemanniano como una aplicación de los espacios H - equivalentes y estudiar el Problema de Chapliguin para el caso en que B^{ℓ}_{kn} sea simétrico.

Se designarán por medio de:

$$M; C^{\infty}(M); \chi(M); \Lambda(M); \tau(M); T(M)\, y\, T_{\bullet}(M)$$

a la variedad diferenciable con coordenadas locales en el punto $x \in M$: $\{x^1, x^2, \ldots, x^N\}$ al anillo de todas las funciones infinitamente diferenciables en M; al álgebra de *Lie* generada por todos los campos vectoriales C^{∞} sobre *M*; al álgebra de *Grassman* de todas las formas diferenciables exteriormente sobre *M*; al álgebra de todos los campos tensoriales sobre *M*; al espacio tangente a *M* con base $\left\{\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ y al espacio cotangente a *M* con base: $\{dx^i\}$

$\Re$ $V \in \chi(M)$ $\nabla_U(fV) = U(f)V + f\nabla_U V$, $[[U,V],W] + [[V,W],U] + [[W,U],V] = 0$,

La aplicación,

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(U,V) \to \nabla_U V,$$

que es $C^{\infty}(M)$ – *lineal* respecto a *U*; – *lineal* respecto a *V* y para la cual se cumple la igualdad

(1.1)

para toda $f \in C^{\infty}(M)$, se define como Derivada Covariante.

La forma bilineal, $\Gamma : \chi(M) \to \chi(M)$, tal que

$$(1.2) \qquad \begin{cases} \Gamma(U,V) = \nabla_U V - UV \\ \Gamma(\partial_i, \partial_i) = \Gamma^n_{ij}(p)\partial_n - \partial_i \partial_j, \quad p \in M, \end{cases}$$

se define como conexión afín. Las funciones $\Gamma^n_{ij}(p) \in C^{\infty}(M)$ son las componentes de Γ.

De (1.2), evidentemente se deduce que entre Γ y ∇ existe una relación biunívoca, por lo tanto, se puede de ahora en adelante llamar a ∇ como una conexión afín. La pareja $A_N = (M, \nabla)$ se llamará Espacio Conexión Afín.

Sea γ la aplicación:

$$\gamma : [a,b] \to M$$
$$\dot{\gamma} : (a,b) \to T(M), \quad a,b \in \Re.$$

y sea tal que

$$(1.3) \qquad \dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t)),$$

para todo $t \in [a,b]$. Entonces, *V* se traslada paralelamente a lo largo de γ, si

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} V = 0,$$

esto permite definir las Geodésicas del espacio con conexión afín $A_N = (M, \nabla)$, por las ecuaciones:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \dot{x}^k = V(x^k) \\ \nabla_V V = (\dot{V}^k + \Gamma^k_{nm}(x)\dot{x}^n \dot{x}^m \partial_k = 0. \end{cases}$$

La aplicación, $[U,V]$: $C^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$, $U; V \in \chi(M)$, definida por:

$$(1.5) \qquad [U,V]f = U(Vf) - V(f),$$

define el Corchete de Lie. De (1.5) se deduce que:

$$(1.6) \qquad [U,V] = -[V,U]$$

la relación (1.6) es conocida como La identidad de *Jacobi*.

En el estudio de la geometría del espacio A_N, los campos vectoriales de Torsión *S* y Curvatura *K*, juegan un papel fundamental. Estos se definen respectivamente por:

$$(1.7) \qquad S(U,V) = \nabla_U V - \nabla_V U - [U,V]$$

$$(1.8) \qquad K(U,V)W = [\nabla_U, \nabla_V]W - \nabla_{[U,V]}W,$$

para todo $U,V,W \in \chi(M)$.

En vista de que $A_N = (M, \nabla)$ no es un espacio métrico, entonces se introduce una métrica formal g, con el objeto de subir y bajar índices en los componentes tensoriales de un tensor dado, y tal que:

$$(1.9)\qquad \begin{cases} g(U,V)=g(V,U), & f\in\tau(M)\\ g(\partial_i\partial_i)=g_{ij}(x)\in C^\infty(M) \\ \det(g_{ij}(x))=|g|\neq 0, \end{cases}$$

evidentemente, en la estructura geométrica resultante: $\mu = (M, \nabla)$, se tiene en general, que la conexión ∇ no es concordante con la métrica g; es decir:

$$(\nabla_U g)(V,W)\neq 0,$$

para todo U,V,W, $\in\chi(M)$, Esto, desde el punto de vista físico, no es deseable según Shulin (1983). Martínez y Ramírez (1989), construyen, en base a ∇, una nueva conexión ∇ tal que en la estructura $\overline{\mu}=(M,\overline{\nabla},g)$ se tenga,

$$(\overline{\nabla}_U g)(V,W)=0;$$

es decir, que $\overline{\nabla}$ sea concordante con g ($\overline{\nabla}$ es una "buena conexión").

DEFINICIONES Y RESULTADOS PRELIMINARES

En la presente sección se darán algunas definiciones y resultados preliminares básicos para el objetivo de este trabajo. Todo versará sobre las estructuras H - equivalentes.

Definición 1. Sean $\mu=(M,\nabla,g)$ y $\overline{\mu}=(M,\overline{\nabla},g)$ *definidas respectivamente por:*

$$(2.1)\qquad \begin{cases} (\nabla_U g)(V,W)=A(U,V,W)\in C^\infty(M)\\ S(U,V)=\nabla_U V-\nabla_V U-[U,V] \end{cases}$$

$$(2.2)\qquad \begin{cases} (\overline{\nabla}_U g)(V,W)=\mathbf{0}\\ \overline{S}(U,V)=\overline{\nabla}_U V-\overline{\nabla}_V U-[U,V], \quad U,V,W\in\chi(M), \end{cases}$$

se dice que μ *es H - equivalente a* $\overline{\mu}$, *si existe una aplicación*

$$H:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M),$$

tal que:

$$(2.3)\qquad \overline{\nabla}_U V=\nabla_U V+H(U,V).$$

De inmediato se tienen las siguientes caracterizaciones, las cuales están demostradas en la tesis doctoral de Martínez, (1991).

Lema 1. *Sean* μ y $\overline{\mu}$ *H - equivalentes y definidas por (2.1) y (2.2) respectivamente, entonces:*

$$(2.4)\qquad g(H(U,V),W)+g(V,H(U,V))=A(U,V,W)$$

$$(2.5)\qquad S(U,V)=\overline{S}(U,V)+H(V,U)-H(U,V)$$

$$(2.6)\qquad K(U,V)W=\overline{K}(U,V)W+\overline{\nabla}_V W-(\overline{\nabla}_U H)(V,W)+ +H(\overline{S}(V,U),W).$$

Como consecuencias de este lema se tienen:

Consecuencia 1. *Si* $A(U,V,W)=0$, *entonces de (2.4) se tiene como componentes para H:*

$$H^n_{ij}=r(\delta^n_i\Omega_j-g^{\ell n}g_{ij}\Omega_\ell),$$

donde:

$$H^n_{ij}\partial_n=H(\partial_i,\partial_j)\in C^\infty(M);\quad \Omega_j = =\Omega(\partial_j)\in\Lambda(M),\quad \Omega^\ell = =g^{\ell j}\Omega_j \text{ y } r\in C^\infty(M).$$

Consecuencia 2. *Si S(U,V) = 0, entonces de (2.5) se tiene como componente para H:*

$$(2.7)\qquad H^\ell_{ij}=b_1\Omega_i\delta^\ell_j+b_2\Omega_j\delta^\ell_i+b_3g_{ij}\Omega^\ell+B^\ell_{ij},$$

donde B^ℓ_{ij} *son los componentes de un tensor simétrico arbitrario B;* $(b_1-b_2)=r$ *son* $C^\infty(M)$.

Consecuencia 3. *Si se cumple (2.7) con* $B^\ell_{ij}=0$, *entonces de (2.6) se deduce:*

$$(2.8)\qquad K^\ell_{ijk}=\overline{K}^\ell_{ijk}+b_1(p_{ji}-p_{ij})\delta^\ell_k+b_2(p_{jk}\delta^\ell_k- -p_{ik}\delta^\ell_j)+b_3(g_{ik}p_{jn}-g_{jk}p_{in})g^{n\ell},$$

donde

$$(2.9)\qquad p_{ij}=\overline{\nabla}_i\Omega_j+(b_1-b_2)\Omega_i\Omega_j.$$

Demostración:

El supuesto cumplimiento de (2.7), implica que:

$$(2.10)\qquad \overline{S}(U,V)=H(U,V)-H(V,U),$$

y (2.6) en los campos base: $U=\partial_i,\quad V=\partial_j,\quad W=\partial_j$, se expresa:

donde

$$K^\ell_{ijk}=K(\partial_i,\partial_j)\partial_k \quad\text{y}\quad (\overline{\nabla}_j H^\ell_{ik})\partial_\ell=(\nabla_{\partial_j}H)(\partial_i,\partial_k).$$

Ahora, usando la relación (2.7) con $B^\ell_{ij}=0$, *resulta:*

$$K^{\ell}_{ijk} = \overline{K}^{\ell}_{ijk} + b_1(\overline{\nabla}_j\Omega_j - \overline{\nabla}_i\Omega_j)\delta^{\ell}_k + $$
$$+ b_2((\overline{\nabla}_j\Omega_k)\delta^{\ell}_i - (\overline{\nabla}_i\Omega_k)\delta^{\ell}_j) +$$
$$+ b_3((\overline{\nabla}_j g_{ik}\Omega^{\ell}) - (\overline{\nabla}_i g_{jk}\Omega^{\ell})) + \overline{S}^{n}_{ji}H^{\ell}_{nk},$$

sustituyendo los campos base en (2.10) y lo que resulta en la relación anterior, se obtiene:

$$K^{\ell}_{ijk} = \overline{K}^{\ell}_{ijk} + b_1(p_{ji} - p_{ij}) + b_2(p_{jk}\delta^{\ell}_i - p_{ik}\delta^{\ell}_j) +$$
$$+ b_3(g_{ik}p_{jn} - g_{jk}p_{in})g^{n\ell} + \{b_1(b_1 - b_2)(\Omega_j\delta^n_i -$$
$$- \Omega_i\delta^n_j)\delta^{\ell}_k\Omega_n + b_2(b_1 - b_2)[(\Omega_i\delta^{\ell}_j - -\Omega_j\delta^{\ell}_i)\Omega_k +$$
$$+ (\Omega_j\delta^n_i - \Omega_i\delta^n_j)\delta^{\ell}_n\Omega_k + + b_3(b_1 - b_2)[(g_{jk}\Omega_i -$$
$$- g_{ik}\Omega_j)\Omega^{\ell} + (\Omega_j\delta^n_i - \Omega_i\delta^n)g_{nk}\Omega^{\ell}]\}$$

después de ciertas manipulaciones, se logra que la expresión encerrada entre llaves, es nula. Se concluye así la relación (2.8).

Teorema 1. *Sea μ una estructura que cumple con la relación (2.1), entonces existe una estructura $\overline{\mu}$, que es H-equivalente con μ .*

Observación 1: En base al Teorema 1, se puede afirmar que el hecho de que una conexión no sea concordante con la métrica, no representa mayores dificultades; pues siempre se puede definir una "buena conexión", para la cual se cumple (2.2).

Definición 2. Las estructuras $\mu, \overline{\mu}$ y $\tilde{\mu}$ definidas por:

$$(2.11)\begin{cases}(\nabla_U g)(V,W) = 2\Omega(U)g(V,W), & \Omega \in \chi(M)\\ S(U,V) = 0\end{cases}$$

$$(2.12)\qquad \begin{cases}(\overline{\nabla}_U g)(V,W) = 0\\ \overline{S}(U,V) = H(U,V) - H(V,U);\end{cases}$$

$$(2.13)\qquad \begin{cases}(\tilde{\nabla}_U g)(V,W) = 0\\ \tilde{S}(U,V) = H(U,V) - H(V,U);\end{cases}$$

son conocidas como las estructuras de Weyl, de Lyra y de Riemann, respectivamente.

Observación 2: Si en la relación (2.1) se hace

$$A(U,V,W) = 2\Omega(U)g(V,W),\ S(U,V) = 0$$

y en la relación (2.2)

$$\overline{S}(U,V) = r(\Omega(U)V - \Omega(V)U,$$

entonces por (2.4) y (2.5) del Lema 1, se deduce que:

$$H(U,V) = \Omega(U)V;$$

y así las estructuras de *Weyl y de Lyra* son H-equivalentes. Análogamente, las estructuras de *Lyra y de Riemann* también son H-equivalentes.

Observación 3: La Consecuencia 3, en realidad establece la relación existente entre las componentes de las curvaturas de *Weyl* y de *Lyra*.

Esta última observación, produce un resultado similar para las estructuras de *Lyra* y de *Riemann.*

Consecuencia 4. Si se cumple (2.7) con $B^{\ell}_{ij} = 0$, entonces para los campos de curvatura de las estructuras de Lyra y de Riemann, se tiene la relación tensorial:

$$\overline{K}^{\ell}_{ijk} = \tilde{K}^{\ell}_{ijk} + r(p_{ik}\delta^{\ell}_j - p_{jk}\delta^{\ell}_i + g_{ik}p^{\ell}_{j\bullet} - g_{jk}p^{\ell}_{j\bullet}),$$

donde $p^{\ell}_{j\bullet} = p_{jn}g^{n\ell}$.

La prueba de esta consecuencia se logra utilizando las relación (2.8) considerando los valores:

$$b_1 = 0;\quad b_2 = r \quad \text{y} \quad b_3 = -r.$$

ESPACIOS PROYECTIVOS H-EQUIVALENTES

En esta sección se definen los espacios proyectivos H-equivalentes, se enuncian algunas propiedades importantes que servirán de base para lograr una vía para transformar un sistema no holonómico en un sistema holonómico, para el caso en que el tensor de Chapliguin sea simétrico.

Es conocido que un sistema mecánico se define por la tripleta:

$$(3.1)\qquad \mu = \left(M;\ \phi(\gamma) = \int_{\gamma} L(\dot{x}, x, t)dt;\ \theta = F_k dx^k\right),$$

donde M como variedad diferenciable, representa el espacio de fase con *"N"* grados de libertad; ϕ es un funcional y $\theta \in \Lambda(M)$. Si este sistema mecánico se describe por la ecuación Lagrangiana:

$$(3.2)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

entonces se dice que es un sistema holonómico, y cuando el lado derecho de (3.2) es no nulo, entonces el sistema se denomina no holonómico. Así se puede enunciar el siguiente

Lema 2. *Sea μ un sistema mecánico definido por (3.1) donde*

$$L=\frac{1}{2}g(V,V), \quad \dot{x}=V=V^j\partial_j, \quad F_k=0, \quad k=\overline{1,N}.$$

entonces,

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}\right)U^k=g(\nabla_V V,U), \quad U\in\chi(M).$$

Demostración: El tensor *"L"* se puede expresar localmente por:

$$L=\frac{1}{2}g_{jn}V^jV^n,$$

luego,

$$\text{(3.4)} \qquad \frac{\partial L}{\partial V^k}=g_{nk}V^n,$$

y de aquí se obtiene,

(3.5)

Por otro lado.

$$\frac{\partial L}{\partial x^k}=\frac{1}{2}\partial_k(g_{jn})V^jV^n,$$

se concluye de (3.4) y (3.5) que:

donde $\Gamma^s_{jn}=\frac{1}{2}g^{ks}\{\partial_j(g_{nk})+\partial_n(g_{jk})+\partial_k(g_{jn})\}$, es la conexión afín de la variedad M.

Comparando ahora la relación (1.4), con la relación (3.6), se deduce la relación (3.3).

Observación 4: La relación (3.3) es muy importante, ya que si la expresamos como:

$$\text{(3.7)} \qquad g(\overline{\nabla}_V V,U)=\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial V^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}-\overline{S}^m_{kn}\frac{\partial L}{\partial x^m}V^n\right\}U^k,$$

y teniendo en cuenta la relación (2.2), se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial V^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}=\overline{S}^m_{kn}\frac{\partial L}{\partial x^m}V^n+g_{k\ell}H^\ell_{mn}V^nV^m+$$
$$\text{(3.8)} \qquad +\lambda V_k\equiv F_k,$$

donde γ es un parámetro arbitrario. La relación (3.8), describe cualquier sistema mecánico.

Observación 5: El comportamiento del sistema mecánico definido en el Lema 2, se puede interpretar como el comportamiento de una partícula que se mueve por las geodésicas del espacio $\mathbf{A_N}=(M,\nabla)$; lo cual es lo mismo decir que el sistema μ es dinámico equivalente con $\overline{\mu}$, descrito por la relación (3.8).

Lema 3. *Sean μ y $\overline{\mu}$, las estructuras de Weyl y de Lyra respectivamente. Entonces:*

(i) μ se puede representar como un sistema mecánico no holonómico si $\lambda\neq-\Omega_m V^m$.

(ii) $\overline{\mu}$, se puede representar como un sistema mecánico holonómico si $\lambda=0$.

Demostración: De la relación (2.2) y la Observación 2, sededuce que

$$\overline{S}^m_{kn}=0 \quad \text{y} \quad H^\ell_{mn}=\Omega_m\delta^\ell_n,$$

sustituyendo esto en la relación (3.8) resulta:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial V^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}=g_{k\ell}\Omega_m\delta^\ell_nV^nV^m+\lambda V_k\neq 0,$$

pues $\lambda\neq-\Omega_m V^m$. Esto prueba entonces, que la relación (2.20) es equivalente a un sistema mecánico no holonómico.

Por otro lado, de la relación (2.12) y la Consecuencia 1, se tiene

$$\overline{S}^m_{kn}=r(\Omega_k\delta^m_n-\Omega_n\delta^m_k)$$
$$H^\ell_{mn}=r(\Omega_n\delta^\ell_m-g^{s\ell}g_{mn}\Omega_s),$$

sustituyendo estas relaciones en (3.8), con $\lambda=0$, se deduce después de ciertas manipulaciones que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial V^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}=0.$$

Esto prueba entonces, que la relación (2.12) es equivalente a un sistema mecánico holonómico.

Definición 3. *Las estructuras H-equivalentes* μ y $\bar{\mu}$ *y se llaman proyectivas, si las ecuaciones de las geodésicas de los espacios* $A_N = (M,\nabla)$ y $\bar{A}_N = (M,\bar{\nabla})$, *tienen las mismas soluciones; es decir,*

$$\nabla_V V = \lambda_1(t)V \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}_V V = \lambda_2(t)V,$$

donde el campo V cumple con la relación (1.3).

Lema 4. *Las estructuras de Weyl y de Lyra, son proyectivas, si y solo si:*

(3.9)
$$H(U,V)+H(V,U)=a(\Omega(U)V+\Omega(V)U)$$

donde "a" es un parámetro arbitrario.

Demostración: Si las estructuras definidas por (2.11) y (2.12) son proyectivas, entonces

$$\nabla_V V = \lambda_1(t)V \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}_V V = \lambda_2(t)V,$$

se sigue del Lema 2 y la Observación 4 que:

$$g(\lambda_1(t)V,U)=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial V^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}-\bar{S}^m_{kn}\frac{\partial L}{\partial x^m}V^n\right)U^k$$

$$g(\lambda_2(t)V,U)=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial V^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}\right)U^k,$$

ahora, por el Lema 3, se deduce:

$$\lambda_1(t)=a\Omega(V) \quad \text{y} \quad \lambda_2(t)=0, \quad a\in\Re.$$

Así que

$$\nabla_V V = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\nabla}_V V = a\Omega(V).$$

Como

$$H(V,V)=\bar{\nabla}_V V-\nabla_V V,$$

entonces se concluye,

$$H(V,V)=a\Omega(V)V,$$

y de aquí,

$$H(U,V)+H(V,U)=a(\Omega(U)V+\Omega(V)U)$$

Recíprocamente, si H cumple con (3.9) y si $\nabla_V = {}_1(t)V$, entonces

$$\lambda_2(t)=\lambda_1(t)+a\Omega(V)$$

o

$$\bar{\nabla}_V V = \lambda_2(t)V,$$

y así μ y $\bar{\mu}$ son proyectivas.

RESULTADOS

I. Se considera un sistema mecánico no holonómico μ, el cual se describe por las ecuaciones:

(4.1)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial V^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^k}=(g_{\ell j}B^{\ell}_{kn})V^jV^n,$$

donde

$$B^{\ell}_{kn}-B^{\ell}_{nk}=0$$

$$L=\frac{1}{2}g(V,V),$$

entonces se tiene el siguiente;

Teorema 2. *Las ecuaciones definidas por (4.1) se pueden expresar de la forma*

(4.2)
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\bar{L}}{\partial W^k}\right)-\frac{\partial\bar{L}}{\partial x^k}=0,$$

donde $L=\frac{1}{2}\Theta^2 g(W,W);\quad W=\Theta V,\quad dt=\Theta ds,$ *si y solo si*

(4.3)
$$B^{\ell}_{jk}=\frac{1}{N+1}\left\{B^n_{jn}\delta^{\ell}_k+B^n_{kn}\delta^{\ell}_j\right\}$$

y

(4.4)
$$\Theta=\Theta_0\exp\left(\frac{2}{N+1}\int B^n_{\ell n}dx^{\ell}\right).$$

En base al Lema 3, se deduce que el Teorema 2, se puede plantear de la siguiente manera:

Teorema 3. *Sean* μ y $\bar{\mu}$ *estructuras para las cuales se cumplen*

$$\begin{cases}(\nabla_U g)(V,W)=2U(\ln\Theta)g(V\\ S(U,W)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} (\overline{\nabla}_U g)(V,W) = 0 \\ \overline{S}(V,W) = B(W,V) - B(V,W) \end{cases}$$

se exige determinar la función $\Theta : M \to \Re$, *de tal manera que estas estructuras sean proyectivas.*

Observación 6: Las estructuras μ y $\overline{\mu}$, definidas en el Teorema 3 son respectivamente las estructuras de *Weyl* y la de *Lyra*. En efecto, si $\Omega(U) = U(\ln\Theta)$, entonces μ es la estructura de *Weyl*. Si se usan la relación (2.3) y la Consecuencia 2, entonces

$$\overline{S}^{\ell}_{jk} = H^{\ell}_{jk} - H^{\ell}_{kj} = B^{\ell}_{kj} - B^{\ell}_{jk} = (b_1 - b_2)(\Omega_j \delta^{\ell}_k - \Omega_k \delta^{\ell}_j),$$

que es la torsión de Lyra.

Demostración del Teorema 3: Puesto que las estructuras μ y $\overline{\mu}$, son proyectivas, entonces por el Lema 4 se tiene:

(4.5) $$B^{\ell}_{jk} = \frac{1}{2}\left(\Omega_j \delta^{\ell}_k + \Omega_k \delta^{\ell}_j\right),$$

haciendo la contracción $k = \ell$ y sumando, resulta:

(4.6) $$B^{\ell}_{i\ell} = \frac{N+1}{2}\Omega_i = \frac{N+1}{2}\partial_i(\ln\Theta),$$

sustituyendo (4.6) en (4.5), se concluye la relación (4.3). Por otro lado, resolviendo (4.6), se concluye la relación (4.4).

Recíprocamente, si se cumplen las relaciones (4.3) y (4.4), entonces de (4.4) se deduce (4.6) y que al sustituirla en la (4.3) se obtiene:

$$B^{\ell}_{jk} = \frac{1}{2}(\Omega_j \delta^{\ell}_k + \Omega_k \delta^{\ell}_j) = H^{\ell}_{kj},$$

como B^{ℓ}_{jk} es simétrico, entonces

$$H(W,V) + H(V,W) = \Omega(W)V + \Omega(V)W,$$

y así μ y $\overline{\mu}$ son proyectivas.

Ejemplo Un cuerpo con dos ruedas se mueve en una superficie plana. Como es conocido, las ecuaciones de movimiento para este sistema, se describe por las ecuaciones donde

$$L = \frac{1}{2}(g_{11}\dot{x}^2 + g_{22}\dot{y}^2) - U,\ g_{11} = m + \frac{c}{2b^2},\ g_{22} = \frac{m}{2b} + \frac{c}{8b^3},\ m + m_0 + 2m_1,\ m_0, m, m_1, \ell, b\ y\ c$$

son ciertos parámetros relacionados con el sistema.
De acuerdo con la relación (4.1), para N = 2, se obtienen:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = g_{11} B^1_{12}\dot{x}\dot{y} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y} = g_{22} B^1_{21}\dot{y}\dot{x}, \end{cases}$$

donde $x = x^1$ y $y = x^2$.
De aquí se deduce,

$$B^1_{12} = \frac{m_0 \ell}{2g_{11}b} \quad \text{y} \quad B^1_{21} = \frac{m_0 \ell}{g_{22}(2b)^2},$$

sustituyendo las designaciones para g_{11} y g_{22} resulta

$$B^1_{12} = B^2_{21},$$

así las condiciones del Teorema 2 se cumplen y

$$\Theta = \Theta_0 \exp\left(\frac{m_0 \ell}{3g_{11}b} y\right)$$

II. Las ecuaciones

(4.7) $$\tilde{K}_{ij} = \tilde{\rho} g_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N},$$

donde $\tilde{K}_{ij}$ es el tensor de Ricci, es una constante universal y $\tilde{K} = \tilde{K}_{ij} g^{ij}$, representan las ecuaciones de campo de Einstein en presencia de materia, las cuales, como es conocido, fueron planteadas en un espacio Riemanniano de dimensión *N=4*. Soluciones de esta ecuación han dado origen a diversas teorías cosmológicas y han generado especulaciones sobre la expansión del universo.

Se pretende ahora, plantear estas ecuaciones en un espacio distinto al Riemanniano, pero *H*-equivalente con él como lo es el espacio de *Lyra*. En efecto: Usando la Consecuencia 4 con $p_{ij} = g_{ij}$, resulta

(4.8)

haciendo la contracción $\ell = j$, y sumando, se tiene,

(4.9) $$\overline{K}_{ik} = \left[\frac{\widetilde{K}}{N} + 2r(N-1)\right] g_{ik} = \overline{\rho} g_{ik},$$

que son precisamente las ecuaciones de campo de Einstein en un espacio de *Lyra,* donde $\overline{\rho} = \widetilde{\rho} + 2r(N-1)$.

CONCLUSIONES

El estudio de los espacios proyectivos H-equivalentes, permite establecer las siguientes conclusiones:

1. Relacionar sistemas mecánicos a través de la equivalencia de las ecuaciones lagrangianas que los definen, es decir, las ecuaciones de las geodésicas de estos espacios tienen las mismas soluciones.

2. Proporcionan un modelo matemático que permite plantear y resolver ciertos problemas de la mecánica lagrangiana como el que se planteó y resolvió en los resultados de este trabajo.

3. En el segundo resultado del trabajo solo se plantearon las ecuaciones de campo de Einstein en un espacio de Lyra. La posible solución de estas ecuaciones en el citado espacio se desconoce y es objeto de investigación en estos momentos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHAPLIGUIN, S.A. 1948. *Colleted words*, Gosteyizdat, Moscú, pp.50-120.

HERTZ, H. 1894. *Die principien der Mechanic*, Lipsig, France, pp.35-62.

MARTÍNEZ, R. 1991. *Espacios de conexión afín H-equivalentes y su importancia en la mecánica*, Universidad Central de Venezuela, Venezuela, pp.32-107.

MARTÍNEZ, R. Y RAMÍREZ, R. 1989. *Lyra spaces. Their application to machanics*. H. Journal. 12: 223 - 236.

SHULIN, L. 1983. *On the integrable character of connection*. Inst. Math., Acad. Sinica 3 (2) : 159 - 170.