Saber, Universidad de Oriente, Venezuela.Vol. 12. Nº 1 (2000) 60-65

COMPARACIÓN TEÓRICA Y PRÁCTICA DEL DISEÑO FACTORIAL 3^3 CON EL DISEÑO DE SUPERFICIE DE RESPUESTA COMPUESTO CENTRAL ROTABLE

RAÚL HERRERA Y WILMER FERMÍN

Coordinación Programa de Estadística. Universidad de Oriente. Núcleo de Nueva Espatarta.

RESUMEN: Se realizó una comparación teórica y práctica del Diseño Factorial 3^3 con el Diseño de Superficie de Respuesta Compuesto Central Rotable, mediante los criterios de comparación de Diseños Experimentales: Eficiencia Relativa, D-óptimo, A-óptimo y G-óptimo. Para efectuar la comparación práctica se utilizó dos bases de datos obtenidas mediante experimentos diseñados bajo la estructura de los diseños en estudio, referente al pelado químico del durazno; se consideró como variable respuesta el porcentaje de área pelada de durazno y, como variables independientes el tiempo sumergido (X_1) en una solución de hidróxido de sodio, la temperatura (X_2) de la solución y la concentración (X_3) de la misma. De acuerdo a los resultados se concluyó que los efectos lineales, cuadráticos puros y las interacciones se estiman con mayor precisión con el Diseño Compuesto Central Rotable y que además éste es D-óptimo y A-óptimo

PALABRAS CLAVES: Diseño, Comparación, Rotable, Precisión.

ABSTRACT: In this work, we carried out a theoretical and practical comparison between Factorial 3^3 design and compound central rotatable design of response surface, by means of comparison criteria for experimental designs: relative efficiency, D-optimal, A-optimal and G-optimal. The practical comparison was made by means of two data bases obtained through experiments designed under the structure of the designs in study, referent to the chemical peeling of a peach; the percentage of peeled area of the peach was considered as the response variable, while the time (X_1) of submersion into a solution of sodium hydroxide, the temperature (X_2) of this solution and its concentration (X_3) were considered as independent variables. According to the results, we conclude that the lineal, pure quadratic effects and the interactions are estimated with higher accuracy with compound central rotatable design, and also that it is D-optimal and G-optimal.

KEY WORDS: Design, Comparison, Rotation, Accuracy.

INTRODUCCIÓN

En el área de tecnología de alimentos se realizan, con mucha frecuencia, experimentos bien sea para establecer una relación funcional entre una respuesta y los factores que influyen en ésta, o para determinar las condiciones óptimas de un proceso o sistema. Un aspecto fundamental para lograr el éxito de lo planteado es usar un diseño experimental apropiado, sensible a la detección de posibles curvaturas en la relación funcional. Existen varios diseños experimentales que se pueden utilizar para tales fines, siendo el diseño factorial y el diseño compuesto central rotable (DCCR) los de mayor uso (Box y Wilson, 1951; Martínez 1988). Dado que las estimaciones de los efectos lineales, cuadráticos puros y de interacción no son siempre igualmente precisas en los diferentes diseños se hace necesario establecer una comparación teórica y práctica entre estos para determinar su aplicabilidad. La comparación de los diseños se puede efectuar mediante los criterios: Eficiencia Relativa, D-óptimo, A-óptimo y G-óptimo (Folks, 1968; John y Draper, 1975).

Recibido: Julio 1999. Aprobado: Mayo 2000.

Los objetivos de este trabajo fueron el estimar los parámetros del modelo de segundo orden proveniente del Diseño Factorial 3_3 y del Diseño de Superficie de Respuesta Compuesto Central Rotable, Comparándolos teórica y experimentalmente por medio de los criterios de Eficiencia Relativa, D-óptimo, A-óptimo y G-óptimo.

MATERIALES Y MÉTODOS

En la elaboración de este trabajo se utilizaron dos bases de datos obtenidas de experimentos diseñados bajo la estructura del diseño factorial 3^3 y el diseño compuesto centra rotable respectivamente, correspondientes al pelado químico del durazno en soluciones de hidróxido de sodio a diferentes concentraciones (X_3), temperaturas (X_2) y tiempo de inmersión (X_1). La variable respuesta considerada fue el porcentaje de área pelada (Y). Las corridas experimentales se realizaron en la Escuela de Ciencias Aplicadas al Mar de la Universidad de Oriente Núcleo de Nueva Esparta.

El análisis estadístico desde un punto de vista teórico y práctico (con los datos) se llevó a cabo mediante: (1) la estimación de los parámetros de los modelos de segundo orden provenientes del diseño factorial 3^3 y diseño compuesto central rotable, (2) la obtención de las matrices de varianza-covarianza de los estimadores de los parámetros de los modelos provenientes del diseño factorial 3^3 y diseño compuesto central rotable, (3) el análisis de varianza de los modelos provenientes del diseño factorial 3^3 y diseño compuesto central rotable y (4) la estimación de la varianza común para cada diseño a través del programa de regresión para superficie de respuesta del paquete estadístico SAS (PROC RSREG). Seguidamente se procedió a comparar los diseños en estudio con los cuatro criterios de comparación mencionados. Con el criterio de Eficiencia Relativa se estableció la eficiencia del DCCR para $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_{ii}$, y $\hat{\beta}_{ij}$, con respecto a los estimadores $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_{ii}$, y $\hat{\beta}_{ij}$ del diseño factorial 3^3. Con el criterio D-óptimo se procedió a calcular el determinante de la matriz para cada diseño. Con el criterio A-óptimo se requirió calcular la traza de la matriz $(X'X)^{-1}$ para cada diseño y finalmente para usar el criterio G-óptimo en la comparación se procedió a calcular la varianza para cada punto experimental de cada diseño.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Cuando se quiere modelar un proceso o sistema mediante una ecuación polinómica de segundo orden, cuya forma es:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{\substack{j=1 \\ 3=2}}^{k} \beta_{ij} X_i X_j + \varepsilon, \qquad (1)$$

Se debe seleccionar un diseño experimental que proporcione una distribución razonable de puntos de datos en toda la región de interés, y permita investigar la idoneidad de la ecuación de regresión estimada, así como la construcción secuencial de diseños de orden superior, asegurando simplicidad en los cálculos de las estimaciones de los parámetros del modelo. A tales efectos el diseño factorial 3^3 y el diseño compuesto central rotable se usan con frecuencia.

Diseño Factorial 3^3: Consta de 3 factores o variables independientes con tres niveles cada uno. Los niveles codificados de cada factor se representan mediante los dígitos –1 (nivel inferior), 0 (nivel intermedio) y 1 (nivel superior). En este diseño se requieren 27 corridas experimentales. Los estimadores de los parámetros del modelo, utilizando el método de mínimos cuadrados ordinarios viene dado por: $\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$, donde X es la matriz de diseño expandida de orden 27x10 e Y representa el vector de respuestas de orden 27x1.

La matriz de varianza-covarianza de $\hat{\beta}$ permite conocer las varianzas y las covarianzas de las estimaciones de los coeficientes del modelo polinómico de segundo orden, donde los elementos de la diagonal principal son las varianzas y los que están fuera de esta corresponde a la covarianza. Esta matriz viene dada por: $\Sigma = E[(\hat{\beta} - \hat{\beta})(\hat{\beta} - \hat{\beta}')] = (X'X)^{-1}\sigma^2$. En la tabla 1 se resumen las varianzas y covarianzas para éste diseño.

TABLA 1. Varianzas y Covarianzas de los Estimadores correspondientes a los Parámetros de Regresión del Modelo Cuadrático en el Diseño factorial 3^k y DCCR de Precisión Uniforme, con k = 3, y $n_c = 6$.

k	N	$V(\hat{\beta})$	$V(\hat{\beta})$	$V(\hat{\beta}_{ii})$	$V(\hat{\beta}_{ij})$	$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_{ii})$	$Cov(\hat{\beta}_{ii}, \hat{\beta}_{ij})$
3	27	$0.259\sigma^2$	$0.056\sigma^2$	$0.167\sigma^2$	$0.0183\sigma^2$	$-0.111\sigma^2$	0
3	20	$0.166\sigma^2$	$0.073\sigma^2$	$0.069\sigma^2$	$0.125\sigma^2$	$-0.057\sigma^2$	$0.007\sigma^2$

La estimación de la varianza σ^2 viene dada por =CME= $\frac{SCE}{N-p}$, donde p es el número de parámetros a estimar.

Diseño Compuesto Central Rotable: Es un caso particular del Diseño Compuesto Central (DCC) Bajo la condición de rotabilidad. Si en un DCC la varianza predicha, $V(Y_h)$, de un punto dado es función sólo de la distancia de dicho punto al centro del diseño y no de la dirección, se dice que el diseño es Rotable. El DCC está constituido por: (1) Un conjunto de puntos factoriales, $F=2^k$, siendo en este caso k=3; (2) Un conjunto de puntos estrellas o axiales que están a una distancia $\pm\alpha$ del centro del diseño; cuya cantidad es 2k; y (3) Un número n_c de puntos centrales. Los estimadores mínimos cuadrados ordinarios del modelo polinómico de segundo orden para éste diseño sigue siendo $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}$; donde X es la matriz de diseño ampliada que corresponde a la estructura del diseño compuesto central.

El valor de α se selecciona para lograr Ortogonalidad o Rotabilidad. Para lograr la rotabilidad en el DCC se debe satisfacer, según Box y Hunter (1957), que los momentos puros de cuarto orden sean el triple de los momentos mixtos de cuarto orden; esto es: $\frac{1}{N}\sum_{h=1}^{N} X_{ih}^4 = \frac{3}{N}\sum_{h=1}^{N} X_{jh}^2$, i,j=1,...,k. Los momentos puros y mixtos se obtienen de la matriz de momentos, la cual viene dada por $\frac{1}{N}$ X'X; de su estructura se establece que $\sum_{h=1}^{20} X_{jh}^4 = F + 2\alpha^4$ y $\sum_{h=1}^{20} X_{ih}^2 X_{jh}^2 = F$, consecuentemente $\alpha = F^{1/4}$. Para k=3, que es el caso en estudio, $F=2^3=8$ por tanto $\alpha=1.682$ y el DCC es Rotable.

En un Diseño Compuesto Central Rotable (DCCR) la elección apropiada de n_c lo convertiría en Rotable Ortogonal ó Rotable de Precisión uniforme. Montgomery (1991), señala que un diseño de precisión uniforme permite mayor protección que un diseño ortogonal contra el sesgo de los coeficientes de regresión, puesto que mantiene homogénea la varianza al alejarse hasta una unidad del centro del diseño. Para lograr precisión uniforme se debe determinar $\lambda_4 = \frac{1}{N} \sum X_{ih}^2 X_{jh}^2$ para distintos n_c y seleccionar aquel valor que mantenga homogénea la variación en el radio de rango [0,1]. Por otro lado, Box y Hunter (1957) sostienen que la selección de λ_4 se debe hacer de modo tal que la varianza de $\hat{y}$ en el centro del diseño sea igual a la varianza de $\hat{y}$ en un punto cualquiera situado a una distancia unitaria del centro del diseño, $\rho = \sum X_{ih}^2 = 1$, donde la varianza de $\hat{Y}$ viene dada por:

$$\frac{N}{\sigma^2} Var(\hat{Y}) = \frac{N}{\sigma^2}\Big[Var(\hat{\beta}_0) + \sum_{i=1}^{k} X_i^2 Var(\hat{\beta}_i) + \sum_{i=1}^{k} X_i^4 Var(\hat{\beta}_{ii}) + \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} X_i^2 X_j^2 Var(\hat{\beta}_{ij}) \tag{2}$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{k} X_i^2 Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_{ii}) + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} X_i^2 X_j^2 Cov(\hat{\beta}_{ii}, \hat{\beta}_{jj})\ \Big]$$

Considerando la matriz de momentos $N^{-1}(X'X)^{-1}$ con n_c=o presentada por Box y Hunter (1957), Myers (1971) y Villasmil (1978) se establece que las expresiones generales para las varianzas y covarianzas de los estimadores de los parámetros del modelo de regresión polinómico cuadrático son:

$$\frac{N}{\sigma^2} Var(\hat{\beta}_0) = \frac{2\lambda_4^2(k+2)}{2\lambda_4\left[(k+2)\lambda_4 - k\right]} \quad (3) \qquad \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$\frac{N}{\sigma^2} Var(\hat{\beta}) = \frac{(k+1)\lambda_4 - (k-1)}{2\lambda_4\left[(k+2)\lambda_4 - k\right]} \quad (5) \qquad \frac{N}{\sigma^2} Var(\hat{\beta}_y) 0 \frac{1}{\lambda_4} \quad (6)$$

$$\frac{N}{\sigma^2} Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_{ii}) = \frac{-2\lambda_4}{2\lambda_4\left[(k+2)\lambda_4 - k\right]} \tag{7}$$

$$\frac{N}{\sigma^2} Cov(\hat{\beta}_{ii}, \hat{\beta}_{jj},) = \frac{1 - \lambda_4}{2\lambda_4\left[(k+2)\lambda_4 - k\right]} \tag{8}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (2) se tiene que:

$$\frac{N}{\sigma^2} Var(\hat{Y}) = \frac{1}{A}\left\{2\lambda_4^2(k+2) + 2\rho^2\lambda_4\left[(\lambda_4 - 1)(k-2)\right] + \rho^4\left[(k+1)\lambda_4 - (k-1)\right]\right\} \tag{9}$$

dode $\rho^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ y $A = 2\lambda_4\left[(k+2)\lambda_4 - k\right]$. Así que se puede decir que la varianza en la respuesta estimada de un diseño rotable de segundo orden es función de ρ, k y λ_4. Variando ρ en [0,1], k=3, y λ_4= 0.86 ocurre que $\frac{N}{\sigma^2} Var(\hat{Y})$ se estabiliza, es decir se tiene un diseño de precisión uniforme; así que con la estructura del DCC con α=1.682 y n_c= 6 se tiene un DCCR de precisión uniforme. La matriz de Va-rianza-covarianza del DCCR viene dada por: $\Sigma=(X'X)^{-1}\sigma^2$. Las varianzas y covarianzas, para éste diseño, se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Varianza de las Estimaciones Correspondientes a los Parámetros de Regresión del Modelo Cuadrático del Diseño Factorial 3^3 y del DCCR, después de la estandarización

	k	$V(\hat{\beta}_i)$	$V(\hat{\beta}_{ii})$	$V(\hat{\beta}_j)$
Factorial 3^3	3	$0.037\sigma^2$	$0.074\sigma^2$	$0.037\sigma^2$
DCCR	3	$0.0498\sigma^2$	$0.032\sigma^2$	$0.058\sigma^2$

La estimación de la varianza viene dada por: $\sigma^2 = \frac{Y'Y - \hat{\beta}XY}{N-P}$, donde p es el número de coeficientes a estimar.

Criterios de comparación de los diseños

Eficiencia Relativa: Este criterio considera la precisión con que se estiman los efectos lineales, cuadráticos, de interacción y el número de observaciones o corridas que requiere el experimento. La eficiencia relativa de un diseño 1 con respecto a un diseño 2, para estimar cierto parámetro de regresión ß viene dado por: $\frac{(\text{Variamnza de } \hat{\beta} \text{ con el diseño2})*N_2}{(\text{Variamnza de } \hat{\beta} \text{ con el diseño1})*N_1}$, donde N_1 es el número de corridas necesarias para el diseño 1 y N_2 es el número de corridas necesarias para el diseño 2. Para comparar los dos diseños con este criterio, ambos deben abarcar la misma región de exploración; de no ser así Myers [8] recomienda estandarizar los diseños de modo que la dispersión de los puntos experimentales sea la misma para los dos diseños. Al medir la dispersión, en términos de los momentos de segundo orden, se debe cumplir que $\sum_{h=1}^{N} X_{ih}^2 = N$; i=1,...,k; ; i=1,...,k; para cada diseño; por tal razón los niveles de los factores del diseño factorial 3^3 deben multiplicarse por $\sqrt{\frac{27}{18}}$ en tanto que los del DCCR deben multiplicarse por $\sqrt{\frac{F+T}{F+2\alpha^2}}$ De la tabla 1 se tienen las varianzas de las estimaciones $\hat{\beta}_i$, $\hat{\beta}_{ii}$ y $\hat{\beta}_{ij}$ y para los diseños objeto de estudio; las varianzas de éstos después de la estandarización de las dispersiones se presentan en la tabla 3.

TABLA 3. Eficiencia Relativa del DCCR con $n_c = 6$ y $k = 3$ con respecto al Diseño Factorial 3^3 suponiendo igualdad en la varianza σ^2.

k	n_c	N	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\beta}_{ii}$	$\hat{\beta}_{ij}$
3	1	15	1.000	0.974	0.643
	2	16	1.000	1.592	0.684
	3	17	1.000	2.052	0.726
	4	18	1.000	2.448	0.769
	5	19	1.000	2.797	0.812
	6	20	1.000	3.105	0.857

TABLA 4. Valores de $\text{Var}(Y_h)$ correspondientes a cada una de las combinaciones de los diseños comparados en función de σ^2.

Se puede observar que: (1) ambos diseños son igualmente eficientes para estimar efectos lineales, (2) el DCCR es más eficiente para estimar los efectos Cuadráticos puros; y (3) el Factorial es más eficiente para estimar los efectos de interacción.

D-ópimo: Un diseño es D-óptimo con relación a otro cuándo $|(X'X)^{-1}|$ de este es el que tiene menor valor (Kiefer 1959). Los valores de los determinantes para el diseño Factorial 3^3 y DCCR son 1.70×10^{-11} y 1.24×10^{-11} respectivamente. Pudiéndose decir que el DCCR es D-ópimo.

A-óptimo: Un diseño es A-óptimo con relación a otro cuando la traza de la matriz $(X'X)^{-1}$de este es mínima (Kiefer, 1959). El valor de la traza de la matriz $(X'X)^{-1}$ para diseño Factorial 3^3 es 0.969 y para el DCCR es 1.177; lo que permite decir que el DCCR es A-óptimo.

G-óptimo: Un Diseño es G-óptimo cuando la varianza de las respuestas estimada Y_h en un mismo punto para los diseños comparados es mínima (Kiefer, 1959)

La varianza de la respuesta estimada viene dada por:

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{Y}) = {} & \text{Var}(\hat{\beta}_0) + \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \text{Var}(\hat{\beta}_i) + \sum_{i=1}^{k} X_i^4 \text{Var}(\hat{\beta}_{ii}) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} X_i^2 X_j^2 \text{Var}(\hat{\beta}_{ij}) \\ & + 2\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_{ii}) + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} X_i^2 X_j^2 \text{Cov}(\hat{\beta}_{ii}, \hat{\beta}_{jj})\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las varianzas y covarianzas dados en la tabla 1 correspondiente a cada diseño, se obtienen los valores de las varianzas estimadas en cada punto experimental. La tabla 5 presenta estos resultados.

TABLA 4. Valores de $Var(\hat{\beta}_h)$ correspondientes a cada una de las combinaciones de los diseños conmparados en función de σ^2.

COMBINACIONES			Diseño Factorial 3^3	DCCR
X_1	X_2	X_3		
-1	-1	-1	$0,508\sigma^2$	$0,6697\sigma^2$
0	-1	-1	$0,341\sigma^2$	-----------
1	-1	-1	$0,508\sigma^2$	$0,6697\sigma^2$
-1	0	-1	$0,341\sigma^2$	-----------
0	0	-1	$0,257\sigma^2$	-----------
1	0	-1	$0,341\sigma^2$	-----------
-1	1	-1	$0,508\sigma^2$	$0,6697\sigma^2$
0	1	-1	$0,341\sigma^2$	-----------
1	1	-1	$0,508\sigma^2$	$0,6697\sigma^2$
-1	-1	0	$0,341\sigma^2$	-----------
0	-1	0	$0,257\sigma^2$	-----------
1	-1	0	$0,341\sigma^2$	-----------
-1	0	0	$0,257\sigma^2$	-----------
0	0	0	$0,256\sigma^2$	$0,166\sigma^2$
1	0	0	$0,257\sigma^2$	-----------
-1	1	0	$0,341\sigma^2$	-----------
0	1	0	$0,257\sigma^2$	-----------
1	1	0	$0,341\sigma^2$	-----------
-1	-1	1	$0,508\sigma^2$	$0,6697\sigma^2$
0	-1	1	$0,341\sigma^2$	-----------
1	-1	1	$0,508\sigma^2$	$0,6697\sigma^2$
-1	0	1	$0,341\sigma^2$	-----------
0	0	1	$0,257\sigma^2$	-----------
1	0	1	$0,341\sigma^2$	-----------
-1	1	1	$0,508\sigma^2$	$0,6697\sigma^2$
0	1	1	$0,341\sigma^2$	-----------
1	1	1	$0,508\sigma^2$	$0,6697\sigma^2$
-1,682	0	0	---------------	$0,6031\sigma^2$
1,682	0	0	---------------	$0,6031\sigma^2$
0	-1,682	0	---------------	$0,6031\sigma^2$
0	-1,682	0	-------------	$0,6031\sigma^2$
0	0	-1,682	-------------	$0,6031\sigma^2$
0	0	1,682	-------------	$0,6031\sigma^2$

Se puede decir que el diseño factorial 3^3 tiene mayor precisión en las estimaciones de los Y_h de los vértices, mientras que el DCCR tiene mayor precisión en el punto central.

ECUACION DE PREDICCIÓN Y COMPARACCIÓN PRÁCTICA DE LOS DISEÑOS

Las bases de datos para los diseños factorial 3^3 y DCCR se presentan en la tabla 5, bajo las niveles codificados y sus equivalentes valores reales. Realizados los análisis de varianzas correspondientes se obtuvo la siguiente ecuación de predicción de segundo orden para el diseño factorial 3^3:

$$\hat{Y} = 61.2667 + 10.4328X_1 + 22.5061X_2 + 6.7989X_3 - 13.4067\,X_3^2 + 11.5767X_1X_3 \qquad (11)$$

Tabla 5. Niveles Codificados y Reales de los Factores y la Respuesta en cada punto experimental del Diseño Factorial 3^3 y el DCCR.

Variables codificadas			Variables originales			Respuesta	
X1	X2	X3	ξ_1(min.)	ξ_2(°C)	ξ_3(%)	DF 3^3	DCCR
-1	-1	-1	2	40	1	5.04	5.05
0	-1	-1	4	40	1	30.19	-
1	-1	-1	6	40	1	31.98	31.98
-1	0	-1	2	50	1	40.15	-
0	0	-1	4	50	1	60.45	-
1	0	-1	6	50	1	66.58	-
-1	1	-1	2	60	1	25.43	25.45
0	1	-1	4	60	1	70.95	-
1	1	-1	6	60	1	38.76	38.76
-1	-1	0	2	40	2	17.45	-
0	-1	0	4	40	2	43.25	-
1	-1	0	6	40	2	50.5	-
-1	0	0	2	50	2	54.17	-
0	0	0	4	50	2	68.95	68.95
1	0	0	6	50	2	75.59	-
-1	1	0	2	60	2	70.95	-
0	1	0	4	60	2	85.14	-
1	1	0	6	60	2	85.4	-
-1	-1	1	2	40	3	5.24	5.24
0	-1	1	4	40	3	20.65	-
1	-1	1	6	40	3	39.85	39.85
-1	0	1	2	50	3	40.25	-
0	0	1	4	50	3	55.5	-
1	0	1	6	50	3	57.83	-
-1	1	1	2	60	3	100	100
0	1	1	4	60	3	72.61	-
1	1	1	6	60	3	100	100
-1.682	0	0	0.6	40	2	-	35.98
1.682	0	0	7.4	40	2	-	1.47
0	-1.682	0	4	33.2	2	-	100
0	1.682	0	4	66.8	2	-	12.92
0	0	-1.682	4	50	0.3	-	46.17
0	0	1.682	4	50	3.7	-	68.95
0	0	0	4	50	2	-	69
0	0	0	4	50	2	-	65.1
0	0	0	4	50	2	-	57.85
0	0	0	4	50	2	-	63.33
0	0	0	4		2	-	54.93

Esta ecuación presenta un coeficiente de determinación de 81.22%; la estadística de Durbin-Watson dio 2.45 lo cual indica independencia entre los residuos; la prueba de Kolmogorov-Smirnov indica no rechazar la hipótesis de normalidad de los residuos. La estimación de la varianza σ^2 resultó σ^2 =CME=160,72007.

La ecuación de predicción obtenida a través de los datos del DCCR fue la siguiente:

$$\hat{Y} = 57.132 + 9.5313X_1 + 25.4665X_2 + 14.6265X_3 - 11.1167X_3^2 + 15.965X_2X_3 \quad (12)$$

Esta ecuación presenta un coeficiente de determinación de 92,78%; la estadística de Durbin-Watson dio 1,799 lo cual indica independencia entre los residuos y, además la estadística de Kolmogorov-Smirnov indica que los residuos tienen un comportamiento normal. La estimación de la varianza resultó σ^2=CME=93,7305.

La comparación práctica de los diseños, (véase tablas 6 y 7) indica que el DCCR estima con mayor precisión los efectos lineales, cuadráticos y de interacción, además de ser D-óptimo y A-óptimo.

Tabla 6. Eficiencia relativa respecto a la estimación de los parámetros del modelo utilizando el valor estimado de σ^2 de cada diseño.

Eficiencia Relativa	$\hat{\beta}_i$	$\hat{\beta}_{ii}$	$\hat{\beta}_{ij}$
Diseño Factorial 3^3 / DCCR	1.718	5.324	1.470

Tabla 7. Valores de $Var(\hat{Y}_h)$ correspondientes a cada una de las combinaciones de los diseños comparados.

COMBINACIONES				
X_1	X_2	X3	Diseño Factorial 3^3	DCCR
-1	-1	-1	81.646	62.771
0	-1	-1	54.806	------------
1	-1	-1	81.646	62.771
-1	0	-1	54.806	------------
0	0	-1	41.305	------------
1	0	-1	54.806	------------
-1	1	-1	81.646	62.771
0	1	-1	54.806	------------
1	1	-1	81.646	62.771
-1	-1	0	54.806	------------
0	-1	0	41.305	------------
1	-1	0	54.806	------------
-1	0	0	41.305	-----------
0	0	0	41.144	15.559
1	0	0	41.305	------------
-1	1	0	54.806	------------
0	1	0	41.305	------------
1	1	0	54.806	------------
-1	-1	1	81.646	62.771
0	-1	1	54.806	-----------
1	-1	1	81.646	62.771
-1	0	1	54.806	------------
0	0	1	41.305	------------
1	0	1	54.806	------------
-1	1	1	81.646	62.771
0	1	1	54.806	------------
1	1	1	81.646	62.771
-1,682	0	0	----------------	56.529
1,682	0	0	---------------	56.529
0	-1,682	0	---------------	56.529
0	-1,682	0	--------------	56.529
0	0	-1,682	--------------	56.529
0	0	1,682		56.529

CONCLUSIONES

1. Teóricamente el DCCR es igual de eficiente que el diseño factorial 3^3 para estimar los efectos lineales, $\hat{\beta}_i$, pero más eficiente para estimar los efectos cuadráticos puros, $\hat{\beta}_{ii}$; sin embargo, el diseño factorial es más eficiente para estimar los efectos de interacción.

2. De acuerdo con los resultados prácticos obtenidos, se puede establecer que con el DCCR se estima con mayor precisión los efectos lineales, cuadráticos y de interacción; además se presenta mayor precisión en la estimación del porcentaje de área pelada del durazno.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOX, G.E.P. y WILSON, K.B. 1951.On the Experimental Attainment of Optimun Conditions Surfaces. Journal of the Royal Statistical Society. 13 (1):1-45.

BOX, G.E.P. y HUNTER, J.S. 1957. Multifactor Experimental Designs for Exploring Response Surfaces. Annals of Matematical Statistics. 28:195-241.

FOLKS, J.S. 1958. Comparison of Designs of Exploration of Relation Ships. Disertación Doctoral no publicada. Iowa State University.

JOHN, R.C. AND DRAPER, N.R. 1975. D-optimality for Regression Designs: A Review. Technometrics. 17 (1):15-23.

KIEFER, J. 1959. Optimun Experimental Designs. Journal of the Royal Statistical Society.B21 (2):272-319.

MARTÍNEZ GARZA, Angel. 1988. Diseños Experimentales. Métodos y Elementos de Teoría. Editorial Trillas México.

MONTGOMERY, C.D. 1991. Diseño y Análisis de Experimentos. Editorial Iberoamérica, S.A. México.

MYERS, R.H. 1971 Response Surface Methodology. Allyn and Bacon, Boston.

VILLASMIL, J.J. 1978. Estructura, Eficiencia Relativa y Análisis Estadístico del Diseño San Cristóbal Ortogonalizado. Universidad del Zulia, Facultad de Agronomía. Maracaibo.