Saber, Universidad de Oriente, Venezuela.Vol. 12. Nº 1 (2000) 57-59

INESTABILIDAD POR PRIMERA APROXIMACIÓN

LICET LEZAMA Y RAÚL NAULIN

Escuela de Ciencias, Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente

RESUMEN: En este trabajo se expone un teorema de inestabilidad para la solución trivial del sistema $x'(t) = A(t)x(t) + f(t,x(t))$. Este resultado se apoya en propiedades dicotómicas del sistema lineal $y'(t) = A(t)x(t)$. El teorema principal complementa resultados anteriores de O. Perror y W.A. Coppel.

PALABRAS CLAVES: Inestabilidad, dicotomías ordinarias.

ABSTRACT: In this paper, we give a theorem of instability for the null solution of the equation $x'(t) = A(t)x(t) + f(t,x(t))$. This result relies on the dichotomic properties of the linear system $y'(t) = A(t)x(t)$. The obtained result complements those of O. Perror and W.A. Coppel.

KEY WORDS: Instability, ordinary dichotomies.

INTRODUCCIÓN

La teoría de inestabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias comienza su desarrollo a principios de este siglo, fundamentalmente, por los aportes de Liapounov, quien mediante el uso de formas cuadráticas definidas positivas (hoy con más generalidad, por el método directo de las funciones de Liapounov) estableció un criterio general de inestabilidad de la solución nula del sistema no lineal

$$x' = f(t,x), f(t,0) = 0.$$

Bajo esta metodología, se han descubierto posteriormente otros resultados de inestabilidad, entre los cuales el método de los sectores de inestabilidad de Chetaiev (Rouchet, Habets y Laloy, 1977) se cuenta entre los más exitosos.

La dificultad esencial del método de Liapounov consiste en encontrar una función de Liapounov apropiada para el sistema que se estudia. En casos concretos ésta no es una tarea sencilla. Por esta razón, el mismo Liapounov, y posteriormente otros matemáticos, investigaron asiduamente la inestabilidad mediante el llamado método de la primera aproximación, que considera el sistema

$$x' = A(t)x + f(t,x), \forall t \geq 0 \tag{1}$$

Recibido: Mayo 1999. Aprobado: Julio 2000.

donde suponemos $f(t,0) = 0$. Liapounov y Perron estudiaron la inestabilidad de este sistema para el caso *A(t)* = constante. El resultado central se resume en el siguiente

Teorema A. *Consideremos el sistema 1, donde suponemos que A(t) es una matriz constante. Supongamos además que* $f : [0,+\infty) \times V \to V$, *(V representará el espacio* R^n *o* C^n *con alguna norma fija* $|\cdot|$*), es continua y satisface la condición*

$$\lim_{|x|\to 0} \frac{|f(t,x)|}{|x|} = 0$$

uniformemente respecto a t. Bajo estas condiciones, si la matriz A admite al menos un valor propio con parte real positiva, entonces la solución nula de (1) es inestable.

Un segundo resultado en esta dirección pertenece a Coppel, quien considera el sistema lineal

$$x' = A(t)x. \tag{2}$$

donde la función *A(t)* no es constante y *f (t,x)* cumple la siguiente condición: dado $\in\ > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ y $T(\in)$ tal que para todo $|x| < \delta$, y $t \geq T$.

$$|f(t,x)| \leq \in |x|. \tag{3}$$

Teorema B. *Supongamos la condición (3). Supongamos, además la existencia de una matriz de proyección $P \neq I$ y una constante K positiva tal que para $t \geq t_0$ se cumple*

$$\int_{to}^{t} |\Phi(t) P \Phi^{-1}(s)| \, ds + \int_{t}^{\infty} |\Phi(t)(I-P)\Phi^{-1}(s)| \, ds \leq K, \tag{4}$$

donde Φ es a matrtz fundamental de1 sitema lineal (2) (notación que conservaremos en el resto del trabajo). Bajo estas condicioncs la solucion trival de (1) es inestable en el sentido de Liapounav.

En el caso $A =$ constante, la demostración del Teorema A (Coddington y Levinson, 1976) se deduce del Teorema B (Coppel, 1969).

La inestabilidad del sistema (1) es una tarea interesante y un problema que mantiene su actualidad, ésto se debe a la complejidad del sistema lineal (2). El resultado de Coppel tiene dos características importantes que lo distinguen del resultado de Perron: No usa funciones de Liapounov y el sistema (2) no es autónomo.

No obstante la importancia de los Teoremas A y B,ellos no dan respuesta al problema de inestabilidad para una gran clase de sistemas. Haciendo uso del concepto de *h*-inestabilidad y de resultados obtenidos recientemente el el campo de la equivalencia asintótica (Brauer y Wong, 1969), (Naulin y Pinto 1994), Naulin consigue nuevos resultados sobre inestabilidad para el sistema (1) (Naulin, 1998). En este trabajo demostraremos un teorema de inestabilidad en el cual usaremos la noción de dicotomía ordinaria (Coppel, 1978).

DEFINICIONES

En lo que sigue se usará la notación $I = [0,\infty)$. L^1 denotará al conjunto de funciones integrables sobre *I*. Anotaremos

$$|x-y|_\infty = \sup\{|x(t)-y(t)| : t \geq t_0\}.$$

Para un número $\rho > 0$, la bola con centro en cero y radio ρ en el espacio V se distinguirá por la notación $B[0,\rho]$.

Definición 1 *Diremos que el sisterna (2) ad*mite una *dicotomía ordinaria, si y sólo si existe una matriz de proyección P y una constante $K \leq 1$ tal que*

$$\begin{aligned} |\Phi(t) P \Phi(s)^{-1}| &\leq K, t \geq s, \\ |\Phi(t)(I-P)\Phi(s)^{-1}| &\leq K, s \geq t. \end{aligned} \tag{5}$$

Del coeficiente *f* supondremos la siguiente condición: **(L)** Existe un número positivo ρ, tal que para todo $|x|, |y| < \rho$

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \gamma(t)|x-y|,$$

donde $\gamma \in L^1$.

La condición **(L)** es menos general que (3). Pero el objetivo de este artículo es mostrar como las técnicas de las dicotomías pueden ser usadas en la teoría de inestabilidad del sistema (1) donde (2) tienen un comportamiento dicotómico más general. Estas ideas ya han sido explotadas por otros autores (Avis, 1996), (Muldowney, 1984), (Naulin 1998) (Naulin y Pinto, 1994).

RESULTADO PRINCIPAL

Supongamos la siguiente condición:

$$K\int_0^\infty \gamma(s)ds < 1. \tag{6}$$

Teorema 1. *Supongamos que el sistema (2) admite la dicotomía ordinaria (5). Si la función f satisface la condicion* ***(L)*** *y (6) es válida, entonces la solución nula de (1) es inestable si la ecuación (2) admite una solución no acotada*

Demostración. Supongamos que la solución nula de la ecuación (1) es estable. Entonces para $\varepsilon = \rho$ existe un δ positivo tal que $|yo| < \delta$ implica $|y(t, t_0, y_0)| < \rho$, $\forall t \geq t_0$. Mostraremos que esto es imposible.

Consideremos el operador

$$T(y) = \int_{t_o}^{t} \Phi(t) P \Phi(s)^{-1} f(s,y(s)) ds - \int_{t}^{\infty} \Phi(t)(I-P)\Phi(s)^{-1} f(s,y(s)ds.$$

La estimación

$$|T(y)(t)| \leq K\int_{t_o}^{t} |f(s,y(s))| ds + K\int_{t}^{\infty} |f(s,y(s))| ds \leq K\int_{t_0}^{\infty} \gamma(s) ds\rho \tag{7}$$

implica $T: B[0,\rho] \to B[0,\rho]$. Además tenemos la estimación

$$|T(y)(t) - T(x)(t)| \leq K\int_{t_0}^{\infty} \gamma(s)ds \, |y-x|_\infty. \tag{8}$$

Para $| yo | < \delta$, consideremos la función

$$x(t) = y(t,t_0,y_0) - T(y(.,t_0,y_0))(t),$$

Es fácil ver que $x(t)$ es una solución acotada de la ecuación (2). Por lo tanto $x(t_0) \in V_1$, donde V_1 denota el espacio de las condiciones iniciales de la ecuación (2) que generan las soluciones acotadas de esta ecuación. Podemos considerar que $x(t_0) \in V_1 = P[V]$ (Proposición 2.2 en (Coppel, 1978)). Sea y_0 una condición inicial que cumple las propiedades

$$y_0 \in (I-P)[V],\ 0 < |y_0| < \delta \qquad (9)$$

De la definición de la función $x(t)$ obtenemos

$$x(t_0) = y_0 + (I-P)\int_{t_0}^{\infty} \Phi^{-1}(s)$$

$$f(s, y(s, t_0, y_0))ds \in (I-P)[V]$$

lo que implica $x(t_0) = 0$. Pero en este caso $y(.,t_0,y_0)$ satisface la ecuación integral

$$y(.,t_0,y_0) = T(y(.,t_0,y_0))$$

Así, cualquier solución $y(., t_0, y_0)$ que satisfaga (9) es un punto fijo de el operador dicotómico T. Pero de (7) y (8) vemos que el operador T es una contracción que actúa de $B[O, r$ en $B[0,r$]. Además $T(0) = 0$, por lo tanto $y(.,t_0,y_0) = 0$, que contradice $y_0 = y(t_0,t_0,y_0) \neq 0$.

□

COMENTARIOS

El Teorema 1 demostrado en este trabajo no puede ser considerado más general que el Teorema B. El punto importante radica en la idea de su demostración, que puede ser extendida, por ejemplo, a ecuaciones en diferencias finitas (Lezama 1996).

Por otro lado, la demostración del Teorema 1, puede ser extendida a coeficientes más generales los considerados en la condición **(L)**, por ejemplo si $|f(t,x)| \leq g(t, |x|)$, donde $g(t,r)$ es continua y creciente en la variable r para cada t fijo (Brauer y Wong, 1969), (Naulin y Pinto, 1994), (Avis, 1996), (Naulin, 1998).

Para concluir nuestro trabajo comentamos el siguiente ejemplo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1/t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f(t,x,y),$$

donde $f(t, x, y)$ satisface la condición **(L)** de nuestro artículo. Es claro que la parte lineal del sistema posee una dicotomía ordinaria, y también posee soluciones no acotadas. La solución trivial de este sistema no es estable. Este resultado no puede ser obtenido del Teorema B, pues Φ, la matriz fundamental del sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1/t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

no cumple la condición integral (4).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVIS, R. 1996. *Inestabilidad h-Asintótica de ecuaciones Diferenciales Ordinarias,* Trabajo de Ascenso, Departamento de Matemáticas, UDO.

BRAUER, F. 1969. WONG J.S., On the asymptotic relationships between solutions of two systems of ordinary differential equations, J. *Diff. Eqns.* 9: 527-543.

CODDINGTON, E. Y LEVINSON, N. 1976.*Theory of Ordinary Differential Equations,* McGraw-Hill Book Co., New York.

COPPEL, W. A**.** 1969. On the stability of ordinary differential equations *J. London Math. Soc* 39, 255-260.

COPPEL W. A. 1978 *Dichotomies in Stability Theory,* Lecture Notes, 629, Springer.

MULDOWNEY, J.S., 1984**.** Dichotomies and asymptotic behavior for linear differential systems, *Trans. Amer. Math. Soc.,* Vol. 283, 2, 465-484.

LEZAMA, L. 1996. *Inestabilidad de Sistemas Diferenciales,* Departamento de Matemáticas, UDO, Tesis.

NAULIN, R. 1998. Instability of nonautonomous differential systems, *Differential Equations and Dynamical Systems,* 6, 3, 363-376.

NAULIN, R. and PINTO M. 1994. Dichotomies and asymptotic solutions of nonlinear differential systems, *Nonlinear Analysis and Applications,* T.M.A., Vol 23, *N^o* 7, 871-882.

ROUCHE, N., HABETS, P. y LALOY, M. 1977. *Stability Theory by Liapunov's Direct Method,* Springer Verlag, New York.