UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
POSTGRADO DE MATEMÁTICAS

OPERADOR MULTIPLICACIÓN EN ESPACIOS L(p,q)

Por
Lic. Ramón R. León P.

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al
Título de Magister Scientiarum en Matemáticas
Cumaná, 2009

Part I

Índice

A mis padres:
Concepción Elizabeth (+) y
Ramón Antonio
A mi esposa:
Yasmira Delvalle
A mis hijos:
Lesbia Elizabeth
Claudio Ramón
Ramón Ricardo
Rafael Alejandro y
Yaletsy Paola

Part I
Agradecimientos

Esta tesis se ha realizado gracias a la participación directa e indirecta de varias personas. En el ámbito familiar, agradezco a mi esposa y mis hijos por brindarme la motivación y el impulso de superación que me llevaron a realizar mis estudios de Postgrado y por haber soportado con paciencia mis frecuentes ausencias durante los viajes a Puerto Ordaz y Cumaná. A mis hermanas y hermano por entender que algunos fines de semana no podía acompañarlos en las reuniones familiares. A la familia Arrioja por la hospitalidad brindada durante mis estadías en Cumaná.

En el ámbito académico, agradezco a mi asesor MSc. Eduard Trousselot y al Dr. René Castillo, quienes me iniciaron en el estudio del tema de esta tesis y siempre estuvieron a mi lado orientándome y haciéndome las sugerencias y correcciones pertinentes para lograr este trabajo final. A la Coordinación del Postgrado de Matemáticas, su cuerpo profesoral y su secretaria.

Part I

Resumen

En este trabajo extendemos los resultados obtenidos por Castillo René, León Ramón y Trousselot Eduard [5], especialmente, se caracteriza el acotamiento del operador multiplicación M_u en términos del acotamiento de la función u que lo induce. Se caracteriza la compacidad del operador M_u en términos de la dimensión de $L_{(p,q)}$ restringido al subespacio $A_\varepsilon(u) = \{x \in X : |u(x)| \geq \varepsilon\}$, para $\varepsilon > 0$ y se establecen las condiciones bajo las cuales el operador multiplicación M_u es de rango cerrado.

Part I

Introducción

La teoría de reordenamiento decreciente de funciones fué introducida por Hardy y Littlewood [6] como consecuencia de una teoría similar para series. En la literatura, encontramos varias definiciones de reordenamiento decreciente de funciones equivalentes entre si. La definición que adoptaremos en la presente investigación se obtiene a partir de la función distribución, la cual se adapta "mejor" a espacios de medida general. En tal sentido, supondremos que (X, A, μ) es un espacio de medida y que $\mathcal{F}(X, A)$ es el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X, entonces para $\lambda \geq 0$, la función distribución D_f de una función f en $\mathcal{F}(X, A)$, está dada por $D_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$. Para $f \in \mathcal{F}(X, A)$, el reordenamiento decreciente de f se denota por f^* y está definido en $[0, \infty]$ por $f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : D_f(\lambda) \leq t\}, \quad (t \geq 0)$, donde inf $\varnothing = \infty$.

Los espacios de Lorentz $L_{(p,q)}$ son familias biparamétricas de funciones que generalizan los espacios de Lebesgue L_p. Los espacios $L_{(p,q)}$ fueron introducidos por G. Lorentz en [10] y [11]. Para cualquier $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y números reales arbitrarios p y q en el conjunto $[0, \infty]$ consideremos:

$$\|f\|_{pq} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p} f^{**}(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & si \quad q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t), \quad si \quad 1 < p \leq \infty, \quad q = \infty, \end{cases}$$

donde $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$. Entonces, los espacios de Lorentz se definen como el conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{F}(X, A)$ para las cuales $\|f\|_{pq} < \infty$. Los espacios de Lorentz, han sido estudiados por diversos autores, entre ellos Hunt [8], Kato [9] y Maligranda [12].

En el presente trabajo estudiaremos los reordenamientos decrecientes de funciones junto a algunas de sus propiedades como una base fundamental para estudiar los espacios de Lorentz. Definiremos los espacios de Lorentz y estudiaremos algunas de sus propiedades más importantes y finalmente, estableceremos algunas de las propiedades de los operadores multiplicación en los espacios de Lorentz.

Consideremos la función $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$; tal que $u \cdot f \in \mathcal{F}(X, A)$. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces la transformación $f \longrightarrow u \cdot f$ sobre $\mathcal{F}(X, A)$ se denota por M_u y en caso de ser continuo, diremos que M_u es el operador multiplicación inducido por u.

El estudio del operador multiplicación en diferentes espacios de funciones ha sido de interés para diversos investigadores entre los que podemos citar: Abrahamese [3], Abramovich, Aliprantis y Burkinshaw [4], Hudzik H., Kumar Rajeev and Kumar Romesh [7], Arora S., Datt G. and Verma S. [1] y [2].

Recientemente, Castillo René, León Ramón y Trousselot Eduard [5], caracterizaron aquellos operadores multiplicación que son acotados y compactos en los espacios PreLorentz $\mathcal{L}_{(p,q)}$.

Aunque los espacios de Lebesgue L_p, $(1 \leq p \leq \infty)$, juegan un papel primordial en muchas áreas del análisis matemático, existen otras clases de espacios de Banach de funciones medibles que también son de interés, tales como: los espacios de Orlicz L_φ y los espacios de Lorentz $L_{(p,q)}$. A pesar de la existencia de una literatura considerable que trata sobre cada uno de estos espacios, hemos querido realizar un trabajo que introduzca al lector, de manera "sencilla" pero sin perder el rigor matemático, en el estudio particular de los espacios de Lorentz; tratando en ellos muchas de las propiedades conocidas de los espacios de Lebesgue, que al fin y al cabo caracterizan de manera general la teoría de los espacios de Banach de funciones y en estos espacios establecer algunas caracterizaciones del operador multiplicación M_u.

En lo que concierne al operador multiplicación, nuestra propuesta está fundamentada en los resultados obtenidos en [5]. Donde, específicamente, se caracteriza el acotamiento del operador multiplicación M_u en términos del acotamiento de la función u que lo induce. Se caracteriza la compacidad del operador M_u en términos de la dimensión de $L_{(p,q)}$ restringido al subespacio $A_\varepsilon(u) = \{x \in X : |u(x)| \geq \varepsilon\}$, para $\varepsilon > 0$ y se establacen condiciones bajo las cuales el operador multiplicación M_u es de rango cerrado.

Es necesario destacar que en el presente trabajo utilizamos la palabra decreciente en el sentido amplio de la misma, es decir, una función f será decreciente si y solo si para todos x, y en el dominio de f, con $x < y$ se cumple que $f(x) \geq f(y)$.

Part I

Capítulo 1

1 Resultados Generales

En este capítulo enunciaremos algunas definiciones y Teoremas clásicos, con el fin de hacer el presente trabajo auto contenido. Remitimos al lector interesado consultar la literatura.

1.1 Análisis Funcional

Definición 1.1

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que el operador T es acotado si y sólo si existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq c\,\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Una fórmula para la norma de T es

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|\,.$$

Además

$$\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$$

para todo $x \in X$.

Teorema 1.1

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si y sólo si T es acotado.

Teorema 1.2

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.

Definición 1.2

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que el operador T es acotado inferiormente si y sólo si existe $k > 0$ tal que

$$k\,\|x\| \leq \|Tx\|$$

para todo $x \in X$.

Teorema 1.3

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $T^{-1} : R(T) \subset Y \longrightarrow X$ existe y es acotado en $R(T)$.

b) T es acotado inferiormente.

Además, si Y es Banach, entonces (**a**) o (**b**) implica que $R(T)$ es cerrado en Y (rango cerrado).

Definición 1.3

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que el operador T es compacto (completamente continuo) si y sólo si para todo subconjunto acotado M de X, la imagen $T(M)$ es relativamente compacta en Y, esto es $\overline{T(M)}$ es compacta.

Teorema 1.4

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es compacto si y sólo si aplica toda sucesión acotada $\{x_n\}$ en X en una sucesión $\{Tx_n\}$ en Y que tiene una subsucesión convergente.

Teorema 1.5

Sean S, T operadores lineales en un espacio normado X. Si S es acotado y T es compacto,entonces ST y TS son compactos.

Definición 1.4

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Se dice que T es un operador de rango finito si y sólo si $\dim R(T) < \infty$.

Teorema 1.6

Sean X e Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Si T es acotado y de rango finito, entonces T es compacto.

Teorema 1.7

El operador identidad en un espacio normado X es compacto si y sólo si $\dim\,(X) < \infty$.

Teorema 1.8

Sea T un operdor lineal compacto e invertible. Si T^{-1} es acotado en un espacio normado X, entonces $\dim\,(X) < \infty$.

Teorema 1.9

Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales compactos de un espacio normado X en un espacio de Banach Y. Si $\{T_n\}$ converge uniformemente, esto es, $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$, entonces el operador límite T es compacto.

Teorema 1.10

La restricción de un operador compacto a un subespacio invariante cerrado es compacto.

1.2 Teoría de Integración

Teorema 1.11 (Lema de Fatou).

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces

$$\int \liminf\ f_n \leq \liminf \int f_n.$$

Teorema 1.12 (Convergencia Monótona).
Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas que converge casi siempre a una función f. Entonces

$$\int f = \lim \int f_n.$$

Teorema 1.13 (Convergencia Dominada).
Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles que converge puntualmente a la función f y supongamos que existe una función integrable F tal que $|f_n| \leq F$, entonces f es integrable y $\displaystyle\int f = \lim \int f_n$.

Teorema 1.14 (Fubini).
Sea (X, A, μ) y (X, B, ν) dos espacios de medida completos y f una función integrable sobre $X \times Y$. Entonces

i) Para casi todo x la función f_x definida por $f_x(y) = f(x, y)$ es una función integrable sobre Y,

ii) Para casi todo y la función f_y definida por $f_y(x) = f(x, y)$ es una función integrable sobre X,

iii) $\displaystyle\int_Y f(x, y)d\nu(y)$ es una función integrable sobre X,

iv) $\displaystyle\int_X f(x, y)d\mu(x)$ es una función integrable sobre Y,

v) $\displaystyle\int_X \left[\int_Y f d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f d\mu\right] d\nu.$

Teorema 1.15 (Tonelli).
Sea (X, A, μ) y (X, B, ν) dos espacios de medida σ-finitos y sea f una función medible no negativa sobre $X \times Y$. Entonces

i) Para casi todo x la función f_x definida por $f_x(y) = f(x, y)$ es una función medible sobre Y,

ii) Para casi todo y la función f_y definida por $f_y(x) = f(x, y)$ es una función medible sobre X,

iii) $\displaystyle\int_Y f(x, y)d\nu(y)$ es una función medible sobre X,

iv) $\displaystyle\int_X f(x, y)d\mu(x)$ es una función medible sobre Y,

v) $\displaystyle\int_X \left[\int_Y f d\nu\right] d\mu = \int_{X\times Y} f d(\mu\times\nu) = \int_Y \left[\int_X f d\mu\right] d\nu.$

Definición 1.5

Se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles es una sucesión de Cauchy en medida si para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu\left(\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Teorema 1.16

Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente casi siempre.

Part I

Capítulo 2

1 Función Distribución y Reordenamiento Decreciente.

1.1 2.1 Función Distribución

Definición 2.1.

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces la función $D_f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ definida por

$$D_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}), \quad \lambda \geq 0$$

se conoce como la funcion distribución de f.

Teorema 2.1

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f, g, f_n \in \mathcal{F}(X, A)$, $n = 1, 2, ...$, entonces

i) D_f es decreciente.

ii) D_f es continua a la derecha.

iii) Si $|f(x)| \leq |g(x)|$, para toda $x \in X$, entonces $D_f(\lambda) \leq D_g(\lambda)$ para todo $\lambda \geq 0$.

iv) $D_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2)$ para todos $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

v) $D_{fg}(\lambda_1 \lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2)$ para todos $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

vi) $D_{\alpha f}(\lambda) = D_f(\lambda/|\alpha|)$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$.

vii) Si $|f(x)| \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} |f_n(x)|$ para $x \in X$, entonces $D_f(\lambda) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} D_{f_n}(\lambda)$ para todo $\lambda \geq 0$.

viii) Si $|f_n| \nearrow |f|$, entonces $\lim_{n \longrightarrow \infty} D_{f_n}(\lambda) = D_f(\lambda)$.

Demostración

i) Sean $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, tales que $\lambda_1 \leq \lambda_2$, entonces

$$\{x \in X : |f(x)| > \lambda_2\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| > \lambda_1\},$$

de donde

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| \ > \lambda_2\}\right) \leq \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda_1\}\right),$$

por tanto

$$D_f(\lambda_2) \leq D_f(\lambda_1).$$

ii) Sea $\lambda_0 \geq 0$, escojamos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ...$ y definamos

$$E_f(\lambda) = \{x \in X : |f(x)| \ > \lambda\},$$

entonces

$$E_f(\lambda_1) \subseteq E_f(\lambda_2) \subseteq E_f(\lambda_3) \subseteq ....$$

También se observa, por el **Teorema de la Convergencia Monótona de la Medida**, que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} D_f(\lambda_0 + 1/n) &= \lim_{n \to \infty} \mu\left(E_f(\lambda_0 + 1/n)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_f(\lambda_0 + 1/n)\right) \\
&= \mu\left(E_f(\lambda_0)\right) \\
&= D_f(\lambda_0).
\end{aligned}$$

iii) Sean $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ tales que $|f(x)| \ \leq |g(x)|$ para toda $x \in X$, entonces

$$\{x \in X : |f(x)| \ > \lambda\} \subseteq \{x \in X : |g(x)| \ > \lambda\},$$

de donde

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| \ > \lambda\}\right) \leq \mu\left(\{x \in X : |g(x)| \ > \lambda\}\right),$$

por tanto

$$D_f(\lambda) \leq D_g(\lambda).$$

iv) Sean $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
& \{x \in X : |f(x) + g(x)| \ > \lambda_1 + \lambda_2\} \\
\subseteq \quad & \{x \in X : |f(x)| + |g(x)| \ > \lambda_1 + \lambda_2\} \\
\subseteq \quad & \{x \in X : |f(x)| \ > \lambda_1\} \cup \{x \in X : |g(x)| \ > \lambda_2\},
\end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
& \mu\left(\{x \in X : |f(x) + g(x)| \ > \lambda_1 + \lambda_2\}\right) \\
\leq \quad & \mu\left(\{x \in X : |f(x)| \ > \lambda_1\} \cup \{x \in X : |g(x)| \ > \lambda_2\}\right) \\
\leq \quad & \mu\left(\{x \in X : |f(x)| \ > \lambda_1\}\right) + \mu\left(\{x \in X : |g(x)| > \lambda_2\}\right),
\end{aligned}$$

por tanto

$$D_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2).$$

v) Sean $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}
& \{x \in X : |f(x)g(x)| \ > \lambda_1 \lambda_2\} \\
= \quad & \{x \in X : |f(x)||g(x)| \ > \lambda_1 \lambda_2\} \\
\subseteq \quad & \{x \in X : |f(x)| \ > \lambda_1\} \cup \{x \in X : |g(x)| \ > \lambda_2\},
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
& \mu\left(\{x \in X : |f(x)g(x)| \ > \lambda_1 \lambda_2\}\right) \\
\leq \quad & \mu\left(\{x \in X : |f(x)| \ > \lambda_1\} \cup \{x \in X : |g(x)| \ > \lambda_2\}\right) \\
\leq \quad & \mu\left(\{x \in X : |f(x)| \ > \lambda_1\}\right) + \mu\left(\{x \in X : |g(x)| > \lambda_2\}\right),
\end{aligned}$$

por tanto

$$D_{fg}(\lambda_1\lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2).$$

vi) Sean $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\{x \in X : |\alpha f(x)| \ > \lambda\} &= \{x \in X : |\alpha||f(x)| \ > \lambda\} \\ &= \{x \in X : |f(x)| \ > \lambda/|\alpha|\},\end{aligned}$$

de donde

$$\mu\left(\{x \in X : |\alpha f(x)| \ > \lambda\}\right) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| \ > \lambda/|\alpha|\}\right),$$

por tanto

$$D_{\alpha f}(\lambda) = D_f\left(\lambda/|a|\right).$$

vii) Sean $E = \{x \in X : |f(x)| \ > \lambda\}$ y $E_n = \{x \in X : |f_n(x)| \ > \lambda\}$. Nótese que

$$E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} E_n,$$

obsérvese además que

$$\mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_m \inf_{n>m} \mu(E_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \inf \ \mu(E_n).$$

Ahora

$$\bigcap_{n>m} E_n \subset \bigcap_{n>m+1} E_n,$$

luego

$$\mu(E) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \le \lim_{n\to\infty} \inf\ \mu(E_n),$$

por tanto

$$D_f(\lambda) \le \lim_{n\to\infty} \inf D_{f_n}(\lambda).$$

viii) Si $|f_n| \nearrow |f|$, entonces $|f_1| \le |f_2| \le |f_3| \le ... \le |f|$

$$E_{f_1}(\lambda) \subseteq E_{f_2}(\lambda) \subseteq E_{f_3}(\lambda) \subseteq ...$$

luego

$$E_f(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{f_n}(\lambda),$$

de donde

$$\begin{aligned} D_f(\lambda) &= \mu(E_f(\lambda)) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{f_n}(\lambda)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(E_{f_n}(\lambda)) = \lim_{n\to\infty} D_{f_n}(\lambda). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1.2 2.2 Reordenamiento Decreciente.

Definicion 2.2.

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces el reordenamiento decreciente de f es la función $f^* : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty]$ definida por

$$f^*(t) = \inf\{\lambda \ge 0 : D_f(\lambda) \le t\}, \quad t \ge 0,$$

donde por convención el $\inf \phi = \infty$.

Ejemplo 2.1 (Reordenamiento decreciente de una función simple)

Sea s una función simple de la siguiente forma:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$$

donde $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k > 0$, $E_j = \{x \in X : s(x) = \alpha_j\}$.

$$\begin{aligned} D_s(\lambda) &= \mu\left(\{x \in X : |s(x)| > \lambda\}\right) = \mu\left(\left\{x \in X : \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}(x) > \lambda\right\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{B_j}(\lambda), \end{aligned}$$

donde $\beta_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(E_i)$, $B_j = [\alpha_{j+1}, \alpha_j)$ para $j = 1, 2, ..., k$ y $\alpha_{k+1} = 0$, lo que muestra que la función distribución de una función simple es también una función simple. Ahora procedemos a encontrar el reordenamiento decreciente

$$\begin{aligned} s^*(t) &= \inf\{\lambda \geq 0 : D_s(\lambda) \leq t\} = \inf\left\{\lambda \geq 0 : \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{B_j}(x) \leq t\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(t), \end{aligned}$$

que también es una función simple.

Ejemplo 2.2

Sea $g(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$, entonces

$$D_g(\lambda) = \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| > \lambda\}\right)$$

pero

$$|g(x)| = e^{-\alpha|x|} = \frac{1}{e^{\alpha|x|}}$$

Así

$$|g(x)| > \lambda \Longrightarrow \frac{1}{e^{\alpha|x|}} > \lambda \Longrightarrow |x| < \frac{1}{\alpha}\ln(1/\lambda),$$

Ahora, si $\lambda \geq 1$ se tiene

$$\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| \ > \lambda\} = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \ < \frac{1}{\alpha}\ln(1/\lambda)\right\} = \phi,$$

por tanto

$$D_g(\lambda) = \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| \ > \lambda\}\right) = \mu\left(\phi\right) = 0.$$

Si $0 \leq \lambda < 1$ se tiene

$$D_g(\lambda) = \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |g(x)| \ > \lambda\}\right) = \frac{2}{\alpha}\ln(1/\lambda),$$

en resumen

$$D_g(\lambda) = \left\{ \begin{array}{rl} \frac{2}{\alpha}\ln(1/\lambda), & \text{si } \ 0 \leq \lambda < 1 \\ 0, & \text{si } \ \lambda \geq 1. \end{array} \right.$$

Calculamos, ahora, el reordenamiento decreciente

$$g^*(t) = \inf\left\{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda) \leq t\right\},$$

si $t = 0$ se tiene

$$g^*(t) = 1,$$

si $t > 0$ se tiene

$$D_g(\lambda) \leq t \Longrightarrow \frac{2}{\alpha}\ln(1/\lambda) \leq t \Longrightarrow e^{\frac{-\alpha t}{2}} \leq \lambda,$$

de donde

$$g^*(t) = e^{\frac{-\alpha t}{2}},$$

en resumen

$$g^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ t = 0 \\ e^{\frac{-\alpha t}{2}}, & \text{si } \ t > 0. \end{cases}$$

Definición 2.3

Sean (X, A, μ) y (Y, B, ν) dos espacios de medida y sean $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X y $\mathcal{F}(Y, B)$ el conjunto de todas las funciones $\nu-$medibles sobre Y. Dos funciones $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $g \in \mathcal{F}(Y, B)$ se dice que son equimedible si tienen la misma función distribución, esto es, si $D_f(\lambda) = D_g(\lambda)$ para todo $\lambda \geq 0$.

Lema 2.1

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces

$f^*(t) > \lambda$ si y sólo si $D_f(\lambda) > t$.

Demostración

$(\Longleftarrow)$ Supongamos que $D_f(\lambda) > t$, como D_f es una función decreciente, se tiene que

$$\lambda < \inf \{\nu : D_f(\nu) \leq t\},$$

de aquí

$$f^*(t) > \lambda.$$

$(\Longrightarrow)$ Supongamos ahora que $f^*(t) > \lambda$, esto es

$$\inf \{\nu : D_f(\nu) \leq t\} > \lambda,$$

como D_f es una función decreciente, se tiene que

$$D_f(\lambda) > t. \qquad \blacksquare$$

Lema 2.2

f y f^* son equimedible, esto es

$$D_f(\lambda) = D_{f^*}(\lambda)$$

para todo $\lambda \geq 0$.

Demostración

Sea m la medida de Lebesgue sobre $[0,\infty)$. Entonces, por el **Lema 2.1** se tiene

$$\begin{aligned} D_{f^*}(\lambda) &= m\left(\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\}\right) \\ &= m\left(\{t \geq 0 : D_f(\lambda) > t\}\right) \\ &= m\left([0, D_f(\lambda))\right) \\ &= D_f(\lambda). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

El siguiente teorema muestra que un reordenamiento decreciente es una función distribución con respecto a la medida de Lebesgue sobre $[0,\infty)$.

Teorema 2.2 (Unicidad)

Existe una única función decreciente y continua a la derecha f^* equimedible con f. De aquí, el reordenamiento decreciente es único.

Demostración

Sean $f_1^*(t)$ y $f_2^*(t)$ dos funciones distintas decrecientes y continuas a la derecha equimedibles con f. Entonces existe t_0 tal que $f_1^*(t_0) \neq f_2^*(t_0)$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0)$. Escojamos $\varepsilon > 0$ tal que $f_1^*(t_0) > f_2^*(t_0) + \varepsilon$. Entonces por la continuidad a la derecha de $f_1^*(t)$ existe un intervalo $[t_0, t_1]$ tal que $f_1^*(t) > f_1^*(t_0) + \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, lo que implica $f_1^*(t) > f_2^*(t_0) + \varepsilon$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Ahora, observemos que si $s \in (0, t_1]$ entonces

$$f_1^*(t_1) \leq f_1^*(s),$$

así

$$f_1^*(s) \geq f_1^*(t_1) > f_2^*(t_1) + \varepsilon$$

lo que significa que

$$s \in \{t \geq 0 : f_1^*(t) > f_2^*(t_1) + \varepsilon\},$$

esto es

$$(0, t_1] \subset \{t \geq 0 : f_1^*(t) > f_2^*(t_1) + \varepsilon\}.$$

Por otro lado, claramente

$$\{t \geq 0 : f_2^*(t) > f_1^*(t_1) + \varepsilon\} \subset (0, t_1],$$

luego

$$m\left(\{t \geq 0 : f_2^*(t) > f_1^*(t_1) + \varepsilon\}\right) \leq t_1 \leq m\left(\{t \geq 0 : f_1^*(t) > f_2^*(t_1) + \varepsilon\}\right),$$

que es una contradicción a la equimedibilidad con f. De aquí $f_1^*(t) = f_2^*(t)$.
$\blacksquare$

Teorema 2.3

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces

$$f^*(t) = D_{D_f}(t), \ t \geq 0.$$

Demostración

Sea m la medida de Lebesgue sobre $[0, \infty)$. Como la función distribución D_f es decreciente, **Teorema 2.1 (i)**, no es difícil observar para $t \geq 0$ que

$$\{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda) > t\} = (0, f^*(t)),$$

de donde

$$\begin{aligned} f^*(t) &= m\{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda) > t\} \\ &= D_{D_f}(t). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 2.4

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces

i) f^* es decreciente.

ii) f^* es continua a la derecha.

iii) Si $|f| \leq |g|$, entonces $f^*(t) \leq g^*(t)$.

iv) $(\alpha f^*)(t) = |\alpha| f^*(t), \ \alpha \in \mathbb{R}$.

v) Si $\lambda \geq 0$ y $D_f(\lambda) < \infty$, entonces $f^*(D_f(\lambda)) \geq \lambda$ y $f^*(D_f(\lambda) + \varepsilon) \leq \lambda$, para todo $0 < \varepsilon < f^*(t)$.

Si $t \geq 0$ y $f^*(t) < \infty$, entonces $D_f(f^*(t)) \leq t$ y $D_f(f^*(t) - \varepsilon) \geq t$ para todo $\varepsilon > 0$.

vi) Para $0 < p < \infty$, $(|f|^p)^*(t) = [f^*(t)]^p$.

vii) Si $E \in A$, entonces $(f\chi_E)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0,\mu(E))}(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demostración

i) Sean $0 \leq t \leq u$, entonces

$$\{\lambda : D_f(\lambda) \leq t\} \subseteq \{\lambda : D_f(\lambda) \leq u\}\,,$$

de donde

$$\inf\{\lambda : D_f(\lambda) \leq u\} \leq \inf\{\lambda : D_f(\lambda) \leq t\}\,,$$

de aquí

$$f^*(u) \leq f^*(t).$$

ii) Como $f^*(t) = D_{D_f}(t)$ es una función distribución, por el **Teorema 2.1 (ii)** f^* es continua a la derecha.

iii) Sean $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ tales que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para toda $x \in X$. Entonces

$$D_f(\lambda) \leq D_g(\lambda),$$

de donde

$$\{\lambda : D_g(\lambda) \leq t\} \subseteq \{\lambda : D_f(\lambda) \leq t\}\,,$$

por tanto

$$\inf\{\lambda : D_f(\lambda) \leq t\} \leq \inf\{\lambda : D_g(\lambda) \leq t\}\,,$$

lo que es equivalente a

$$f^*(t) \leq g^*(t).$$

iv) Sean $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (\alpha f)^*(t) &= \inf\ \{\lambda \geq 0 : D_{\alpha f}(\lambda) \leq t\}\,, \\ &= \inf\ \{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda/|\alpha|) \leq t\}\,. \end{aligned}$$

Hagamos, ahora, $\nu = \lambda/|\alpha|$, entonces $\lambda = |\alpha|\nu$, por tanto,

$$\begin{aligned}(\alpha f)^*(t) &= \inf\ \{|\alpha|\nu : D_f(\nu) \leq t\} \\ &= |\alpha|\ \inf\ \{\nu : D_f(\nu) \leq t\} \\ &= |\alpha|\ f^*(t).\end{aligned}$$

v) Supongamos que $D_f(\lambda) < \infty$, como D_f es una función decreciente, se tiene que

$$f^*(D_f(\lambda)) = \inf\{s \geq 0 : D_f(s) \leq D_f(\lambda)\} \geq \lambda,$$

además, para cualquier $\varepsilon > 0$

$$f^*(D_f(\lambda) + \varepsilon) = \inf\{s \geq 0 : D_f(s) \leq D_f(\lambda) + \varepsilon\} \leq \lambda.$$

Supongamos ahora que $f^*(t) < \infty$. Entonces, por la continuidad a la derecha de D_f se tiene

$$D_f(f^*(t)) = D_f\left(\inf\{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda) \leq t\}\right) \leq t.$$

Además, para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene por el **Lema 2.2** que

$$\begin{aligned}D_f(f^*(t) - \varepsilon) &= \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > f^*(t) - \varepsilon\}\right) \\ &= m\left(\{s > 0 : f^*(s) > f^*(t) - \varepsilon\}\right) \geq t.\end{aligned}$$

vi) Sea $0 < p < \infty$, entonces

$$\begin{aligned}D_{|f\ |^p}(\lambda) &= \mu\left(\{x \in X : |f(x)|^p > \lambda\}\right) \\ &= \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda^{1/p}\}) \\ &= D_f(\lambda^{1/p})\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left(|f\ |^p\right)^*(t) &= \inf\left\{\lambda : D_{|f|^p}(\lambda) \leq t\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda : D_f(\lambda^{1/p}) \leq t\right\}.\end{aligned}$$

Haciendo $u = \lambda^{1/p}$ se tiene que $u^p = \lambda$, por tanto

$$\begin{aligned} \left(|f\ |^p\right)^* (t) &= \inf \{u^p : D_f(u) \leq t\} \\ &= (\inf \{u : D_f(u) \leq t\})^p \\ &= [f^*(t)]^p . \end{aligned}$$

vi) Como $(f\chi_E)(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, se tiene que

$$D_{f\chi_E}(\lambda) \leq D_f(\lambda),$$

de donde

$$\left\{\lambda \geq 0 : D_{f\chi_E}(\lambda) > t\right\} \subseteq \{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda) > t\},$$

de aquí

$$m\left(\left\{\lambda \geq 0 : D_{f\chi_E}(\lambda) > t\right\}\right) \leq m\left(\{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda) > t\}\right),$$

esto es

$$D_{D_{f\chi_E}}(t) \leq D_{D_f}(t),$$

lo que es equivalente

$$(f\chi_E)^* (t) \leq f^*(t) \qquad (\mathbf{(2.1)})$$

para todo $t \geq 0$.

Por otro lado

$$\{x \in X : |f\chi_E(x)|\ > \lambda\} \subseteq E,$$

por tanto

$$\mu\left(\{x \in X : |f\chi_E(x)| \ > \lambda\}\right) \leq \mu(E),$$

es decir

$$D_{f\chi_E}(\lambda) \leq \mu(E).$$

También se tiene que

$$\left(f\chi_E\right)^*(t) = \inf\left\{\lambda \geq 0 : D_{f\chi_E}(\lambda) \leq t\right\} = 0, \qquad \text{((2.2))}$$

para todo $t > \mu(E)$. Así, de **(2.1)** y **(2.2)** se tiene

$$\left(f\chi_E\right)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0,\mu(E))}(t),$$

para toda $t \geq 0$. ■

Observación. El reordenamiento no es subaditivo, esto es, en general no se cumple que

$$(f+g)^*(t) \leq f^*(t) + g^*(t),$$

para todo t.

Ejemplo 2.3

Sean E y F dos conjuntos medibles tales que $E \cap F \neq \phi$ y $0 < \mu(E) < \mu(F)$. Hagamos $f(x) = \chi_E(x)$ y $g(x) = \chi_F(x)$. Los reordenamientos decrecientes son

$$f^*(t) = \chi_{[0,\mu(E))}(t)$$

y

$$g^*(t) = \chi_{[0,\mu(F))}(t)$$

lo que significa que

$$f^*(t)+g^*(t)=\begin{cases} 2, & \text{si } 0\le t<\mu(E)\\ 1, & \text{si } \mu(E)\le t<\mu(F)\\ 0, & \text{si } t\ge \mu(F).\end{cases}$$

Ahora, como $(f+g)(x)=\chi_E(x)+\chi_F(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} D_{f+g}(\lambda) &= \mu\left(\{x\in X: |f(x)+g(x)|>\lambda\}\right)\\ &= \mu\left(\{x\in X: \chi_E(x)+\chi_F(x)>\lambda\}\right)\end{aligned}$$

pero

$$\{x\in X:\chi_E(x)+\chi_F(x)>\lambda\}=\begin{cases} \phi, & \text{si } \lambda\ge 2\\ E\cap F, & \text{si } 1\le\lambda<2\\ E\cup F, & \text{si } 0\le\lambda<1,\end{cases}$$

de donde

$$\mu\left(\{x\in X:\chi_E(x)+\chi_F(x)>\lambda\}\right)=\begin{cases} 0, & \text{si } \lambda\ge 2\\ \mu(E\cap F), & \text{si } 1\le\lambda<2\\ \mu(E\cup F), & \text{si } 0\le\lambda<1,\end{cases}$$

de aquí

$$(f+g)^*(t)=\inf\{\lambda\ge 0: D_{f+g}(\lambda)\le t\}=\begin{cases} 2, & \text{si } 0\le t<\mu(E\cap F)\\ 1, & \text{si } \mu(E\cap F)\le t<\mu(E\cup F)\\ 0, & \text{si } \mu(E\cup F)\le t,\end{cases}$$

de donde, para cualquier t tal que $\mu(E)<t<\mu(E\cup F)$ se tiene

$$(f+g)^*(t)=1>0=f^*(t)+g^*(t).$$

Teorema 2.5

Sean (X,A,μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X,A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f,g\in\mathcal{F}(X,A)$, entonces

$$(f+g)^*(t_1+t_2)\le f^*(t_1)+g^*(t_2)$$

y

$$(fg)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1)g^*(t_2)$$

para todos $t_1, t_2 \geq 0$.
En particular,

$$(f+g)^*(t) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2)$$

y

$$(fg)^*(t) \leq f^*(t/2)g^*(t/2)$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración
Supongamos que $f^*(t_1) + g^*(t_2) < \infty$, en caso contrario no hay nada que demostrar. Para $\lambda_1 = f^*(t_1)$ y $\lambda_2 = g^*(t_2)$, por el **Teorema 2.4 (v)** se tiene

$$D_f(\lambda_1) \leq t_1$$

y

$$D_g(\lambda_2) \leq t_2,$$

por el **Teorema 2.1 (iv)** se tiene

$$D_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2) \leq t_1 + t_2,$$

como la función reordenamiento es decreciente, se tiene

$$(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq (f+g)^*(D_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2)) \leq \lambda_1 + \lambda_2 = f^*(t_1) + g^*(t_2).$$

Supongase, ahora, que $f^*(t_1)g^*(t_2) < \infty$, pues, de otra forma no hay nada que demostrar. Entonces por el **Teorema 2.1 (v)** se tiene

$$D_{fg}(\lambda_1\lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2) \leq t_1 + t_2,$$

nuevamente, como la función reordenamiento es decreciente, resulta

$$(fg)^*(t_1 + t_2) \leq (fg)^*(D_{fg}(\lambda_1\lambda_2)) \leq \lambda_1\lambda_2 = f^*(t_1)g^*(t_2).$$

Ahora, haciendo $t_1 = t_2 = t/2$ se tiene

$$(f+g)^*(t) = (f+g)^*(t/2 + t/2) \leq f^*(t/2) + g^*(t/2)$$

y

$$(fg)^*(t) = (fg)^*(t/2 + t/2) \leq f^*(t/2)g^*(t/2). \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.6

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y φ es una función derivable y creciente tal que $\varphi(0) = 0$, entonces

$$\int_X \varphi\left(|f(x)|\right) d\mu = \int_0^\infty \varphi'(\lambda)\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) d\lambda.$$

Demostración

Si $\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) = \infty$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) < \infty$, queremos demostrar que el conjunto $\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$ es medible sobre $[0, \infty)$, para ello consideremos el conjunto

$$E = \{(x, \lambda) \in X \times [0, \infty) : 0 < \lambda < |f(x)|\}.$$

Demostraremos que E es medible sobre $X \times [0, \infty)$. En efecto, como $|f| \geq 0$, existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que $s_n \nearrow |f|$. Sea

$$s_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^n \chi_{A_j^n}$$

donde $A_j^n \in A$, para $j = 1, 2, ...$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned} E_n &= \{(x, \lambda) \in X \times [0, \infty) : 0 < \lambda < s_n(x)\} \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^n \times \left(0, a_j^n\right), \end{aligned}$$

es medible sobre $X \times [0, \infty)$.

Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{E_n}(x) = \chi_E(x),$$

por lo cual χ_E es medible, ya que es el límite de una sucesión de funciones medibles. Ahora, sabemos que χ_E es medible si y sólo si E es medible, por tanto

$$E = \{(x,\lambda) \in X \times [0,\infty) : 0 < \lambda < |f(x)|\}$$

es un conjunto medible sobre $X \times [0,\infty)$, en consecuencia se concluye $E^{\lambda} = \{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$ es medible sobre $[0,\infty)$.

Ahora bien, como φ es derivable, entonces

$$(x,\lambda) \longrightarrow \varphi'(\lambda)\chi_{E^{\lambda}}(x)$$

es una función medible.

Finalmente, puesto que φ es derivable podemos escribir

$$\varphi(t) = \int_0^t \varphi'(s)ds,$$

luego

$$\begin{aligned} \int_X \varphi\left(|f(x)|\right) d\mu &= \int_X \int_0^{|f(x)|} \varphi'(\lambda) d\lambda d\mu \\ &= \int_X \int_0^{\infty} \chi_{[0,|f(x)|]}(\lambda)\varphi'(\lambda) d\lambda d\mu, \end{aligned}$$

por el **Teorema de Fubini**

$$\begin{aligned} \int_X \varphi\left(|f(x)|\right) d\mu &= \int_0^{\infty} \varphi'(\lambda) \left(\int_{\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}} d\mu \right) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \varphi'\left(\lambda\right) \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) d\lambda, \end{aligned}$$

que era lo que se quería demostrar. ■

Corolario 2.1

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ una función derivable y creciente tal que $\varphi(0) = 0$, entonces

$$\int_X \varphi \circ |f|\, d\mu = \int_0^{\infty} \varphi \circ f^*(t) dt.$$

Demostración
Por el **Teorema 2.6** y el **Lema 2.2** se tiene que

$$\begin{aligned}\int_X \varphi \circ |f|\, d\mu &= \int_0^\infty \varphi'(\lambda)\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \varphi'(\lambda) m\left(\{t \geq 0 : f^*(t) > \lambda\}\right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \varphi'(\lambda)\left(\int_0^\infty \chi_{(0,f^*(t))}(\lambda) dt\right) d\lambda.\end{aligned}$$

Ahora, por el **Teorema de Fubini**

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi'(\lambda)\left(\int_0^\infty \chi_{(0,f^*(t))}(\lambda) dt\right) d\lambda &= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi'(\lambda)\chi_{(0,f^*(t))}(\lambda) d\lambda dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^{f^*(t)} \varphi'(\lambda) d\lambda dt,\end{aligned}$$

de donde

$$\int_X \varphi \circ |f|\, d\mu = \int_0^\infty \varphi\left(f^*(t)\right) dt. \qquad \blacksquare$$

Corolario 2.2
Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\int_X |f|^p\, d\mu = \int_0^\infty [f^*(t)]^p\, dt.$$

Demostración
Haciendo $\varphi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, en el **Corolario 2.1** se tiene que

$$\int_X |f|^p\, d\mu = \int_0^\infty [f^*(t)]^p\, dt. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.7
Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces

$$\int_X |f(x)|\,d\mu = \int_0^\infty D_f(\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty f^*(t)dt \qquad \textbf{((2.3))}$$

y

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) = \sup_{t>0} t f^*(t). \qquad \textbf{((2.4))}$$

Demostración

La igualdad

$$\int_X |f(x)|\,d\mu = \int_0^\infty f^*(t)dt$$

de **(2.3)** se obtiene del **Corolario 2.2**, considerando $p = 1$. Mientras que la igualdad

$$\int_X |f(x)|\,d\mu = \int_0^\infty D_f(\lambda)\,d\lambda$$

de **(2.3)** se obtiene del **Teorema 2.6** considerando $\varphi(t) = t$.

Demostraremos ahora **(2.4)**. Si existe $\lambda_0 \in (0, \infty)$ tal que $D_f(\lambda_0) = \infty$, entonces $\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) = \infty$ y

$$\sup_{t>0} t f^*(t) \geq \sup_{t>0} t\lambda_0 = \infty.$$

Recíprocamente, si existe $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $f^*(t_0) = \infty$, entonces $\sup_{t>0} t f^*(t) = \infty$ y

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) \geq \sup_{\lambda>0} \lambda t_0 = \infty.$$

Esto demuestra que **(2.4)** es cierta cuando $D_f(\lambda) = \infty$ para algún $\lambda_0 > 0$ o $f^*(t) = \infty$ para algún $t_0 > 0$. Por lo tanto, se puede asumir que $D_f(\lambda) < \infty$ para todo $\lambda \geq 0$ y $f^*(t) < \infty$ para todo $t \geq 0$. Para completar la demostración de **(2.4)** comenzamos demostrando que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) \leq \sup_{t>0} t f^*(t).$$

Supongamos que $\sup_{t>0} t f^*(t) < \infty$, en caso contrario no hay nada que probar. Ya que $D_f(\lambda) < \infty$ para todo λ, por el **Teorema (2.4) (v)** se obtiene

$$\sup_{t>0} t f^*(t) \geq D_f(\lambda) f^*\left(D_f(\lambda)\right) \geq \lambda D_f(\lambda),$$

para todo $\lambda > 0$. Tomando supremo sobre todo $\lambda > 0$ en ambos lados, se obtiene que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) \leq \sup_{t>0} t f^*(t).$$

Ahora, probamos la otra dirección, esto es,

$$\sup_{t>0} t f^*(t) \leq \sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda).$$

Supóngase que $\sup\limits_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) < \infty$, de lo contrario no hay nada que probar. Por hipótesis, $f^*(t) < \infty$ para todo $t > 0$, luego por el **Teorema (2.4) (v)** se tiene que para todo $0 < \varepsilon < f^*(t)$,

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) \geq \left(f^*(t) - \varepsilon\right) D_f\left(f^*(t) - \varepsilon\right) \geq \left(f^*(t) - \varepsilon\right) t,$$

como esta desigualdad se cumple para cualquier $\varepsilon > 0$, se sigue que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) \geq t f^*(t),$$

tomando el supremo sobre todo $t > 0$ en ambos lados, se obtiene que

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda) \geq \sup_{t>0} t f^*(t),$$

con lo cual se completa la demostración de **(2.4)**. ■

Teorema 2.8

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} D_f(\lambda) d\lambda = \int_0^\infty \left[f^*(t)\right]^p dt \qquad (\mathbf{(2.5)})$$

y

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_f(\lambda)^{1/p} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t). \qquad ((\mathbf{2.6}))$$

Además, para $p=\infty$ se tiene

$$ess \sup_{x\in X} |f(x)| = \inf \{\lambda : D_f(\lambda)=0\} = f^*(0).$$

Demostración
Haciendo $\varphi(t)=t^p,\ 1\leq p<\infty$, en el **Teorema 2.6**, se obtiene **(2.5)**.
Ahora, por el **Teorema 2.4 (vi)** y el **Teorema 2.7** se tiene que

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) &= \sup_{t>0} \left(t|f^*(t)|^p\right)^{1/p} = \sup_{t>0} \left(t(|f\ |^p)^*(t)\right)^{1/p} = \left(\sup_{\lambda>0} \lambda D_{|f\ |^p}(\lambda)\right)^{1/p} \\
&= \sup_{\lambda>0} \left(\lambda D_f(\lambda^{1/p})\right)^{1/p} = \sup_{u>0} \left(u^p D_f(u)\right)^{1/p} = \sup_{u>0} u[D_f(u)]^{1/p},
\end{aligned}$$

que demuestra **(2.6)**.
Ahora, para el caso cuando $p=\infty$, por la definición de supremo essencial y puesto que la función distribución es positiva, se tiene que

$$\begin{aligned}
ess \sup_{x\in X} |f(x)| &= \inf \{\lambda : \mu\left(\{x\in X : |f(x)|>\lambda\}\right)=0\} = \inf\{\lambda : D_f(\lambda)=0\} \\
&= \inf\{\lambda : D_f(\lambda)\leq 0\} = f^*(0). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.9
Sean (X, A, μ) un espacio de medida σ-finito y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f\in\mathcal{F}(X, A)$, entonces

$$\int_E |f(x)| d\mu \leq \int_0^a f^*(t) dt$$

para todo $E\in A$, tal que $\mu(E)\leq a$.
Demostración
Si $a=\infty$ la desigualdad es verdadera por el **Teorema 2.7**. Supongase que $a<\infty$, entonces por el **Teorema 2.7** y el **Teorema 2.4 (vii)**, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|d\mu &= \int_X |f(x)\chi_E(x)|d\mu = \int_0^\infty (f\chi_E)^*(t)dt \\
&\leq \int_0^\infty f^*(t)\chi_{[0,\mu(E))}(t)dt = \int_0^{\mu(E)} f^*(t)dt \leq \int_0^a f^*(t)dt. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 2.10 (Hardy-Littlewood).

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces

$$\int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.$$

Demostración

Demostraremos la desigualdad para $f = \chi_E$ y $g = \chi_F$, donde $E, F \in A$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\int_X |fg|\, d\mu &= \int_X \chi_E\chi_F\ d\mu = \int_X \chi_{E\cap F}\ d\mu = \mu(E\cap F) \\
&\leq \int_0^{\min(\mu(E),\mu(F))} dt = \int_0^{\mu(E)} \chi_{(0,\mu(F))}(t)dt \\
&= \int_0^{\mu(E)} g^*(t)dt = \int_0^\infty \chi_{(0,\mu(E))} g^*(t)dt = \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt.
\end{aligned}$$

Sean ahora $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_X |fg|\, d\mu &= \int_X |f|\,|g|\, d\mu = \int_X \left(\int_0^{|f|} d\alpha\right)\left(\int_0^{|g|} d\beta\right) d\mu \\
&= \int_X \left(\int_0^\infty \chi_{(0,|f|)}(\alpha)d\alpha\right)\left(\int_0^\infty \chi_{(0,|g|)}(\beta)d\beta\right) d\mu \\
&= \int_X \left(\int_0^\infty \chi_{E_f(\alpha)}(x)d\alpha\right)\left(\int_0^\infty \chi_{E_g(\beta)}(x)d\beta\right) d\mu,
\end{aligned}$$

por el **Teorema de Tonelli** se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_X \left(\int_0^\infty \chi_{E_f(\alpha)}(x)d\alpha\right)\left(\int_0^\infty \chi_{E_g(\beta)}(x)d\beta\right)d\mu \\
= & \int_0^\infty\int_0^\infty\int_X \chi_{E_f(\alpha)}(x)\chi_{E_g(\beta)}(x)d\mu\ d\alpha\ d\beta \\
\leq & \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\chi_{E_f(\alpha)}\right)^*(t)\left(\chi_{E_g(\beta)}\right)^*(t)dt\ d\alpha\ d\beta \\
= & \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_{E_{f^*}(\alpha)}(t)\chi_{E_{g^*}(\beta)}(t)dt\ d\alpha\ d\beta,
\end{aligned}$$

por el **Teorema de Fubini** se tiene

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \chi_{E_{f^*}(\alpha)}(t)\chi_{E_{g^*}(\beta)}(t)\ dt\ d\alpha\ d\beta \\
= & \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{E_{f^*}(\alpha)}(t)d\alpha\right)\left(\int_0^\infty \chi_{E_{g^*}(\beta)}(t)d\beta\right)dt \\
= & \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \chi_{(0,f^*(t))}(\alpha)d\alpha\right)\left(\int_0^\infty \chi_{(0,g^*(t))}(\beta)d\beta\right)dt \\
= & \int_0^\infty \left(\int_0^{f^*(t)} d\alpha\right)\left(\int_0^{g^*(t)} d\beta\right)dt \\
= & \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt,
\end{aligned}$$

esto es

$$\int_X |fg|\,d\mu = \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt. \qquad \blacksquare$$

Part I

Capítulo 3

1 Espacios de Lorentz

Definición 3.1
Sea (X, A, μ) un espacio de medida y $0 < p, q \leq \infty$. El espacio PreLorentz $\mathcal{L}_{(p,q)}$ es el conjunto de todas las clases de funciones $\mu-$medibles f tal que $||f\,||_{(p,q)} < \infty$, donde

$$||f\,||_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & \text{si } 0 < p \leq \infty, \;\; 0 < q < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & \text{si } 0 < p \leq \infty, \;\; q = \infty. \end{cases}$$

Observación. En los espacios PreLorentz $\mathcal{L}_{(p,q)}$, el caso cuando $p = \infty$ y $0 < q < \infty$, no es de interés, pués si $f \in L_{(\infty,q)}$ entonces $f = 0$ $\mu-$casi siempre sobre X. En efecto, supongamos que $f \in L_{(\infty,q)}$ entonces $\|f\|_{(\infty,q)} < \infty$, luego

$$\infty > \|f\|_{(\infty,q)}^q = \int_0^\infty [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^s [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \geq [f^*(s)]^q \int_0^s \frac{dt}{t} = [f^*(s)]^q .\infty,$$

para todo $s > 0$, por tanto $f^*(s) = 0$ para todo $s > 0$ y como

$$\int_X |f\,|\, d\mu = \int_0^\infty f^*(t) dt = 0,$$

se tiene que $f = 0$ $\mu-$casi siempre.

Los espacios PreLorentz pueden verse como una generalización de los espacios ordinarios L_p. La razón de esto es que si tomamos $p = q$ se obtiene que $\mathcal{L}_{(p,q)} = L_p$, para $0 < p \leq \infty$. En efecto, para $0 < p = q < \infty$, se obtiene por la definición de $||.||_{(p,q)}$ que

$$||f\,||_{(p,p)} = \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t)\right]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty t\,[f^*(t)]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty [f^*(t)]^p\, dt \right)^{1/p},$$

usando el **Teorema 2.8** se obtiene, entonces

$$||f\,||_{(p,p)} = \left(\int_0^\infty [f^*(t)]^p\, dt \right)^{1/p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} = \|f\|_p \,.$$

Por otro lado, dado que f^* es decreciente y en virtud, nuevamente, del **Teorema 2.8**, se tiene que

$$||f\ ||_{(\infty,\infty)} = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \underset{x\in X}{ess\ \sup}|f(x)| = ||f\ ||_\infty,$$

para $p = q = \infty$.
De lo anterior, $||f\ ||_{(p,p)} = ||f\ ||_p$, lo cual implica que $\mathcal{L}_{(p,p)} = L_p$.

Ejemplo 3.1
Sea E cualquier conjunto $A-$medible, de medida finita. Entonces

i) Si $1 \leq p \leq q < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}
||\chi_E||_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} \chi_E^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} \chi_{[0,\mu(E)]}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^{\mu(E)} t^{q/p-1} dt \right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{p}{q} \right)^{1/q} \left[[\mu(E)]^{q/p} \right]^{1/q} \\
&= \left(\frac{p}{q} \right)^{1/q} [\mu(E)]^{1/p} .
\end{aligned}$$

ii) Si $p < \infty$ y $q = \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}
||\chi_E||_{(p,q)} &= \sup_{t>0} t^{1/p} \chi_E^*(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{1/p} \chi_{[0,\mu(E)]}(t) \\
&= [\mu(E)]^{1/p} .
\end{aligned}$$

iii) Si $p = q = \infty$, se tiene que

$$\|\chi_E\|_{(p,q)} = \sup_{t>0} \chi_E^*(t) = \sup_{t>0} \chi_{[0,\mu(E)]}(t) = 1.$$

Proposición 3.1
Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f, g \in \mathcal{L}_{(p,q)}$ y $p, q \in [1, \infty]$, entonces

i) $\|f + g\|_{(p,q)} \leq 2^{1/p} \left(\|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)} \right)$,

ii) $\mathcal{L}_{(p,q)}$ es un espacio vectorial,

iii) $\|f\|_{(p,q)} = 0$ si y sólo si $f = 0$ $\mu-$casi siempre.

Demostración

i) Si $q = \infty$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{1/p}(f+g)^*(t)\\
&\leq \sup_{t>0} t^{1/p}\left[f^*(t/2)+g^*(t/2)\right]\\
&\leq \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t/2) + \sup_{t>0} t^{1/p} g^*(t/2)
\end{aligned}
$$

haciendo $w = t/2$, resulta

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{(p,\infty)} &\leq 2^{1/p}\left[\sup_{t>0} w^{1/p} f^*(w) + \sup_{t>0} w^{1/p} g^*(w)\right]\\
&= 2^{1/p}\left(\|f\|_{(p,\infty)} + \|g\|_{(p,\infty)}\right).
\end{aligned}
$$

Si $q<\infty$, por la **desigualdad de Minkowski** se tiene

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}\left(f+g\right)^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}\\
&\leq \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t/2)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p} g^*(t/2)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q},
\end{aligned}
$$

haciendo $w = t/2$, resulta

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_{(p,q)} &\leq 2^{1/p}\left[\left(\int_0^\infty \left[w^{1/p} f^*(w)\right]^q \frac{dw}{w}\right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty \left[w^{1/p} g^*(w)\right]^q \frac{dw}{w}\right)^{1/q}\right]\\
&= 2^{1/p}\left(\|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}\right).
\end{aligned}
$$

ii) Sean $f, g \in \mathcal{L}_{(p,q)}$, entonces por **(i)** se tiene que

$$
\|f+g\|_{(p,q)} \leq 2^{1/p}\left(\|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}\right) < \infty,
$$

luego, $f+g \in \mathcal{L}_{(p,q)}$.

Ahora, para cualquier escalar α, si $q=\infty$, se tiene por el **Teorema 2.4 (iv)** que

$$
\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{1/p}\left(\alpha f\right)^*(t) = \sup_{t>0} t^{1/p}\left|\alpha\right| f^*(t)\\
&= |\alpha| \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = |\alpha|\,\|f\|_{(p,\infty)} < \infty,
\end{aligned}
$$

si $0<q<\infty$, se tiene, por el **Teorema 2.4 (iv)** que

$$
\begin{aligned}
\|\alpha f\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}(\alpha f)^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q} = \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}\,|\alpha|\,f^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= |\alpha| \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}f^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q} = |\alpha|\,\|f\|_{(p,q)} < \infty,
\end{aligned}
$$

de este modo, se observa que $\alpha f \in \mathcal{L}_{(p,q)}$. En consecuencia $\mathcal{L}_{(p,q)}$ es un espacio vectorial.

iii) Supongamos que $\|f\|_{(p,q)} = 0$, entonces si $q = \infty$, se tiene

$$
0 = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) \geq t^{1/p} f^*(t),
$$

para todo $t > 0$, luego $f^*(t) = 0$ y en consecuencia $f = 0$ $\mu-$casi siempre.

Ahora, si $0 < q < \infty$, se tiene

$$
\begin{aligned}
0 &= \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}f^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q} \geq \left(\int_0^s \left[t^{1/p}f^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\geq \left\{[f^*(s)]^q \int_0^s t^{q/p-1}dt\right\}^{1/q} = f^*(s)s^{1/p},
\end{aligned}
$$

para todo $s > 0$, luego $f^*(s) = 0$, y en consecuencia $f = 0$ $\mu-$casi siempre. ■

De la proposición anterior se desprende que $||.||_{(p,q)}$ es una cuasi-norma.

Proposición 3.2

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $1 \leq p \leq q < r \leq \infty$, entonces

i) $\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)}$,

ii) $\mathcal{L}_{(p,q)} \subseteq \mathcal{L}_{(p,r)}$.

Demostración

i) Si $r = \infty$, se tiene

$$
\|f\|^q_{(p,q)} = \int_0^\infty \left[t^{1/p}f^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t} \geq [f^*(s)]^q \int_0^s t^{q/p-1}dt = \tfrac{p}{q}\,[f^*(s)]^q\, s^{q/p},
$$

para todo $s > 0$. De aquí

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} \|f\|_{(p,q)} \geq s^{1/p} f^*(s),$$

para todo $s > 0$. Luego

$$\|f\|_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} \|f\|_{(p,q)}.$$

Si $r < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,r)}^r &= \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t)\right]^r \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t)\right]^{r-q} \left[t^{1/p} f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t} \\
&\leq \|f\|_{(p,\infty)}^{r-q} \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t)\right]^q \frac{dt}{t} \\
&\leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}} \|f\|_{(p,q)}^{r-q} \|f\|_{(p,q)}^q \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}} \|f\|_{(p,q)}^r,
\end{aligned}$$

es decir

$$\|f\|_{(p,r)}^r \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}} \|f\|_{(p,q)}^r,$$

de aquí

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)}.$$

ii) Se obtiene como una consecuencia inmediata de **(i)**. ∎

Proposición 3.3
Sean (X, A, μ) un espacio de medida σ-finito y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $E \in A$, entonces

$$\sup_{\mu(E)=t} \int_E |f| \; du = \int_0^t f^*(s) ds.$$

Demostración
Sea E un conjunto $A-$medible, tal que $\mu(E) = t$, entonces del **Teorema 2.9** se tiene

$$\int_E |f| \, du \leq \int_0^t f^*(s) ds.$$

Ahora, por el **Teorema 2.7** se tiene

$$\int_E |f| \, d\mu = \int_X |f \chi_E| \, d\mu = \int_0^\infty \mu \left\{x \in X : |f \chi_E(x)| > \lambda\right\} d\lambda,$$

pero

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x\in X:|f\chi_E(x)|>\lambda\}\right) &= \mu\left(\{x\in E:|f(x)|>\lambda\}\right)\\ &= \begin{cases}\mu_f(\lambda), & si\ \ f^*(t)<\lambda\\ \mu(E), & si\ \ 0\le\lambda\le f^*(t),\end{cases}\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\int_E |f|\,d\mu &= \int_0^{f^*(t)}\mu(E)d\lambda + \int_{f^*(t)}^{\infty}\mu_f(\lambda)d\lambda\\ &= tf^*(t) + \int_{f^*(t)}^{\infty}\mu_f(\lambda)d\lambda\\ &= tf^*(t) + \int_{f^*(t)}^{\infty}m_{f^*}(\lambda)d\lambda\\ &= tf^*(t) + \int_{f^*(t)}^{\infty}m\left(\{\lambda: f^*(s)>\lambda\}\right)d\lambda\\ &= tf^*(t) + \int_{f^*(t)}^{\infty}\left[\int_0^t \chi_{\{\lambda:f^*(s)>\lambda\}}(s)ds\right]d\lambda\\ &= tf^*(t) + \int_0^{\infty}\chi_{(f^*(t),\infty)}(\lambda)\left[\int_0^t \chi_{(0,f^*(t))}(\lambda)ds\right]d\lambda\\ &= tf^*(t) + \int_0^t\int_0^{\infty}\chi_{(f^*(t),\infty)}(\lambda)\chi_{(0,f^*(t))}(\lambda)d\lambda ds\\ &= tf^*(t) + \int_0^t\left[\int_0^{\infty}\chi_{(f^*(t),\infty)\cap(0,f^*(s))}(\lambda)d\lambda\right]ds\\ &= tf^*(t) + \int_0^t\int_0^{\infty}\chi_{(f^*(t),f^*(s))}(\lambda)d\lambda ds\\ &= tf^*(t) + \int_0^t\int_{f^*(t)}^{f^*(s)}d\lambda ds\\ &= tf^*(t) + \int_0^t\left[f^*(s)-f^*(t)\right]ds\\ &= tf^*(t) + \int_0^t f^*(s)ds - f^*(t)t\\ &= \int_0^t f^*(s)ds,\end{aligned}$$

es decir

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_0^t f^*(s)ds, \quad \text{donde} \ \ \mu(E)=t,$$

en consecuencia

$$\sup_{\mu(E)=t}\int_E |f|\,du = \int_0^t f^*(s)ds. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.1

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Supongamos que $1 \leq q \leq p < \infty$ y que q' y q son números conjugados, es decir $1/q' + 1/q = 1$. Si h es cualquier función en $\mathcal{L}_{(p,q)}$, entonces

$$\|h\|_{(p,q)} = \sup \left\{ \int_0^\infty t^{1/p-1/q} h^*(t)k(t)dt : k \in \mathcal{F}_0 \text{ y } \|k\|_{L_{q'(0,\infty)}} = 1 \right\},$$

donde $\mathcal{F}_0$ es el conjunto de todas las funciones no negativas y decrecientes en $(0, \infty)$.

Demostración

Por la **desigualdad de Hölder** se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{1/p-1/q} h^*(t)k(t)dt &\leq \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p-1/q} h^*(t) \right]^q dt \right)^{1/q} \left(\int_0^\infty [k(t)]^{q'} dt \right)^{1/q'} \\
&= \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p} h^*(t) \right]^q \tfrac{dt}{t} \right)^{1/q} \|k\|_{L_{q'(0,\infty)}} \\
&= \|h\|_{(p,q)} \|k\|_{L_{q'(0,\infty)}}.
\end{aligned}$$

Así

$$\sup \left\{ \int_0^\infty t^{1/p-1/q} h^*(t)k(t)dt : k \in \mathcal{F}_0 \text{ y } \|k\|_{L_{q'(0,\infty)}} = 1 \right\} \leq \|h\|_{(p,q)}. \qquad ((\mathbf{3.1}))$$

Definamos, ahora $k(t) = c \left[t^{1/p-1/q} h^*(t) \right]^{q-1}$ y calculemos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty [k(t)]^{q'} dt &= c \int_0^\infty \left[t^{1/p-1/q} h^*(t) \right]^{q'(q-1)} dt \\
&= c \int_0^\infty \left[t^{1/p-1/q} h^*(t) \right]^q dt \\
&= c \int_0^\infty \left[t^{1/p} h^*(t) \right]^q \tfrac{dt}{t} = c \|h\|_{(p,q)}^q,
\end{aligned}$$

de donde

$$\|k\|_{L_{q'(0,\infty)}} = c \|h\|_{(p,q)}^{q/q'} = c \|h\|_{(p,q)}^{q-1},$$

si hacemos $c = \|h\|_{(p,q)}^{1-q}$, entonces $\|k\|_{L_{q'(0,\infty)}} = 1$. Nótese, además, que

$$t^{1/p-1/q}h^*(t)k(t) = c\left[t^{1/p-1/q}h^*(t)\right]^q,$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{1/p-1/q}h^*(t)k(t)dt &= c\int_0^\infty \left[t^{1/p}h^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t} \\
&= c\left\|h\right\|_{(p,q)}^q = \left\|h\right\|_{(p,q)}^{1-q}\left\|h\right\|_{(p,q)}^q = \left\|h\right\|_{(p,q)},
\end{aligned}$$

por tanto

$$\left\|h\right\|_{(p,q)} \leq \sup\left\{\int_0^\infty t^{1/p-1/q}h^*(t)k(t)dt : k \in \mathcal{F}_0 \;\text{ y }\; \left\|k\right\|_{L_{q'(0,\infty)}} = 1\right\} \quad (\mathbf{(3.2)})$$

De **(3.1)** y **(3.2)** se concluye que

$$\left\|h\right\|_{(p,q)} = \sup\left\{\int_0^\infty t^{1/p-1/q}h^*(t)k(t)dt : k \in \mathcal{F}_0 \text{ y } \left\|k\right\|_{L_{q'(0,\infty)}} = 1\right\}. \qquad \blacksquare$$

Lema 3.1 (Hardy)

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Sean $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$ no negativas en $(0, \infty)$, tales que

$$\int_0^t f(s)ds \leq \int_0^t g(s)ds, \qquad t > 0.$$

Si k es no negativa y decreciente en $(0, \infty)$, entonces

$$\int_0^\infty f(s)k(s)ds \leq \int_0^\infty g(s)k(s)ds.$$

Demostración

Sea k una función simple de la forma

$$k = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{(0,t_j)},$$

donde $a_j > 0$, $\;j = 1, 2, ..., n$; $\;\; t_1 < t_2 < ... < t_n$. Entonces k es decreciente y se tiene que

$$\int_0^\infty f(s)k(s)ds = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} f(s)ds \leq \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} g(s)ds = \int_0^\infty g(s)k(s)ds.$$

Ahora, si k es una función medible no negativa, existe una sucesión creciente de funciones simples $\{\phi_n\}$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\phi_n = k,$$

luego, para todo $k\in\mathbb{N}$, $\phi_n\leq k$, así $f\phi_n\leq fk$, por el **Teorema de la Convergencia Monótona** tenemos

$$\int_0^\infty f(s)k(s)ds = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^\infty f(s)\phi_n(s)ds,$$

también $g\phi_n\leq gk$, nuevamente por el **Teorema de la Convergencia Monótona**

$$\int_0^\infty g(s)k(s)ds = \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^\infty g(s)\phi_n(s)ds,$$

pero, como ϕ_n es una función simple

$$\int_0^\infty f(s)\phi_n(s)ds \leq \int_0^\infty g(s)\phi_n(s)ds,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Luego

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^\infty f(s)\phi_n(s)ds \leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_0^\infty g(s)\phi_n(s)ds,$$

lo que es equivalente

$$\int_0^\infty f(s)k(s)ds \leq \int_0^\infty g(s)k(s)ds. \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2

Sean (X,A,μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X,A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Sean $f,g\in\mathcal{L}_{(p,q)}$ y $1\leq q\leq p<\infty$, q' y q conjugados. Entonces

$$\|f+g\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}\,.$$

Demostración

Sea k no negativa y decreciente en $(0,\infty)$ con $\|k\|_{L_{q'(0,\infty)}}=1$, q' y q conjugados, entonces por el **Lema 3.1** y la **desigualdad de Hölder**

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{1/p-1/q}\left(f+g\right)^*(t)k(t)dt &\leq \int_0^\infty t^{1/p-1/q}f^*(t)k(t)dt + \int_0^\infty t^{1/p-1/q}g^*(t)k(t)dt\\ &\leq \|f\|_{(p,q)}\|k\|_{L_{q'(0,\infty)}} + \|g\|_{(p,q)}\|k\|_{L_{q'(0,\infty)}}\,,\end{aligned}$$

como $\|k\|_{L_{q'(0,\infty)}} = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{(p,q)} &= \sup\left\{\int_0^\infty t^{1/p-1/q}(f+g)^*(t)k(t)dt : k\in\mathcal{F}_0 \text{ y } \|k\|_{L_{q'(0,\infty)}}\right\}\\ &\leq \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 3.3

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Sean $1/p' + 1/p = 1$ y $1/q' + 1/q = 1$, $1 \leq q \leq p < \infty$. Si $f \in \mathcal{L}_{(p,q)}$ y $g \in \mathcal{L}_{(p',q')}$, entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{(p,q)} \|g\|_{(p',q')}.$$

Demostración

Por la **desigualdad de Hardy-Littlewood**, se tiene

$$\begin{aligned}\int_X |fg|\, d\mu &\leq \int_0^\infty f^*(t)g^*(t)dt\\ &= \int_0^\infty t^{1/p-1/q}f^*(t)t^{1/p'-1/q'}g^*(t)dt,\end{aligned}$$

luego, por la **desigualdad de Hölder**, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{1/p-1/q}f^*(t)t^{1/p'-1/q'}g^*(t)dt &\leq \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}f^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q}\left(\int_0^\infty \left[t^{1/p'}g^*(t)\right]^{q'} \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q'}\\ &= \|f\|_{(p,q)}\|g\|_{(p',q')},\end{aligned}$$

de donde

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{(p,q)}\|g\|_{(p',q')},$$

por lo tanto

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_{(p,q)}\|g\|_{(p',q')}. \qquad \blacksquare$$

Definición 3.2

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces la función $f^{**} : (0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ definida como

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds,$$

se conoce como la función maximal de f.

Aunque el valor de $f^{**}(t)$ cuando $t = 0$ no se considera en la definición, el límite cuando t se aproxima a cero por la derecha está definido para todos los reordenamientos. De hecho,

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} f^{**}(t) = f^*(0) = \underset{x \in X}{ess\sup}|f(x)|.$$

Ejemplo 3.3

Sean A un conjunto medible y $f = \chi_A$. Entonces como

$$f^*(t) = \chi_{[0,\mu(A))},$$

de la definición de f^{**} se tiene que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds = \min\left(1, \frac{\mu(A)}{t}\right).$$

Ejemplo 3.4

Sea s una función simple de la forma

$$s(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}(x),$$

donde $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_k > 0$ y $A_j = \{x \in X : s(x) = \alpha_j\}$. Entonces por el **Ejemplo 2.1**, se tiene que

$$s^*(t) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{\left[\beta_{j-1},\beta_j\right)}(t),$$

donde

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_j).$$

Usando la definición de $s^{**}(t)$, se tiene que

$$s^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t s^*(u)du = \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{\left[\beta_{j-1},\beta_j\right)}(t),$$

para todo $t > 0$. Consideramos dos casos: primero, si $\beta_{m-1} < t \leq \beta_m$ para $m = 1, 2, ..., k$, entonces

$$
\begin{aligned}
s^{**}(t) &= \tfrac{1}{t}\int_0^t \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{[\beta_{j-1},\beta_j)}(t) \\
&= \tfrac{1}{t}\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \mu(A_j) + \tfrac{\alpha_m}{t}\left(t - \sum_{j=1}^{m-1}\mu(A_j)\right),
\end{aligned}
$$

segundo, si $t > \beta_k$, entonces

$$
s^{**}(t) = \tfrac{1}{t}\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j).
$$

De aquí

$$
s^{**}(t) = \begin{cases} \tfrac{1}{t}\left[\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \mu(A_j) + \alpha_m \left(t - \sum_{j=1}^{m-1}\mu(A_j)\right)\right], & \text{si } \ \beta_{m-1} < t \le \beta_m,\ m = 1,2,...,k \\ \tfrac{1}{t}\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j), & \text{si } \ t > \beta_k. \end{cases}
$$

Teorema 3.4

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f, g, f_n \in \mathcal{F}(X, A)$, $n = 1, 2, ...$, entonces

i) f^{**} es decreciente y continua en $(0, \infty)$.

ii) $f^*(t) \le f^{**}(t)$, para todo $t > 0$.

iii) Si $|f(x)| \le |g(x)|$ μ-casi siempre, entonces $f^{**}(t) \le g^{**}(t)$, para todo $t > 0$.

iv) Si $\{f_n\}$ es una sucesión tal que $|f_n(x)| \le |f(x)|$ μ-casi siempre, $n = 1, 2, ...$ y $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |f_n(x)| = |f(x)|$ μ-casi siempre, entonces $f_n^{**}(t) \le f^{**}(t)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{**}(t) = f^{**}(t)$, para todo $t > 0$.

Demostración

i) La continuidad de $f^{**}(t)$ se sigue directamente de la continuidad de la integral, así nos queda por demostrar que $f^{**}(t)$ es decreciente. Sean $0 < t_1 < t_2$ arbitrarios, entonces

$$
\begin{aligned}
f^{**}(t_2) &= \tfrac{1}{t_2}\int_0^{t_2} f^*(s)ds \\
&= \tfrac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)ds + \tfrac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f^*(s)ds \\
&\leq \tfrac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)ds + \tfrac{1}{t_2} f^*(t_1)(t_2-t_1) \\
&= \tfrac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)ds + \left(\tfrac{1}{t_1}-\tfrac{1}{t_2}\right) t_1 f^*(t_1) \\
&\leq \tfrac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)ds + \left(\tfrac{1}{t_1}-\tfrac{1}{t_2}\right)\int_0^{t_1} f^*(s)ds \\
&= \tfrac{1}{t_1}\int_0^{t_1} f^*(s)ds = f^{**}(t_1).
\end{aligned}
$$

ii) Ya que f^* es una función decreciente se tiene que

$$f^{**}(t) = \tfrac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \geq \tfrac{1}{t} f^*(t)\int_0^t ds = f^*(t).$$

iii) Por el **Teorema 2.4 (iii)** se tiene que $f^*(t) \leq g^*(t)$ para todo $t \geq 0$. Por otro lado, ya que f^* y g^* son funciones positivas se tiene para $t > 0$ que

$$f^{**}(t) = \tfrac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \leq \tfrac{1}{t}\int_0^t g^*(s)ds = g^{**}(t).$$

iv) Por el **Teorema 2.4 (iii)** se tiene que $f_n^*(t) \leq f^*(t)$ para $n = 1, 2, ...$, de donde $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n^*(t) = f^*(t)$ para $t \geq 0$. Como

$$f^{**}(t) = \tfrac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds, \quad t > 0,$$

y como $f_n^{**}(t) \leq f^{**}(t)$ por **(iii)**, se obtiene por el **Teorema de la Convergencia Monótona** que $f_n^{**}(t) \longrightarrow f^{**}(t)$, para todo $t > 0$.

Teorema 3.5

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f, g \in \mathcal{F}(X, A)$, entonces

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t),$$

para todo $t > 0$. De aquí, la doble reordenada es subaditiva.

Demostración

Por la **Proposición 3.3** se tiene

$$f^{**}(t) = \tfrac{1}{t}\int_0^t f^*(t)dt = \tfrac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\int_E |f(x)|d\mu,$$

por la desigualdad triangular y la subaditividad del supremo, se tiene

$$\begin{aligned}
(f+g)^{**}(t) &= \tfrac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\int_E |f(x)+g(x)|d\mu \\
&\leq \tfrac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\left(\int_E |f(x)d\mu + \int_E |g(x)|d\mu\right) \\
&\leq \tfrac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\int_E |f(x)|d\mu + \tfrac{1}{t}\sup_{\mu(E)=t}\int_E |g(x)|d\mu \\
&= \tfrac{1}{t}\int_0^t f^*(t)dt + \tfrac{1}{t}\int_0^t g^*(t)dt \\
&= f^{**}(t)+g^{**}(t). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Observación. Del **Teorema 3.5** se deduce que $\|f\|_{pq}$ es una seminorma. En lo sucesivo, incurriendo en un abuso del lenguaje, nos referiremos a $\|f\|_{pq}$ como una norma.

Definición 3.3

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $1 < p \leq \infty$ y $0 < q \leq \infty$, entonces el espacio de Lorentz $L_{(p,q)}$ es el conjunto de todas las funciones $f \in \mathcal{F}(X, A)$ tal que $||f\,||_{pq} < \infty$, donde

$$||f\,||_{pq} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left[t^{1/p}f^{**}(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}, & \text{si } 1 < p \leq \infty, \quad 0 < q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{1/p}f^{**}(t), \quad \text{si } 1 < p \leq \infty, \quad q = \infty. \end{cases}$$

Teorema 3.6 (Desigualdad de Hardy)

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Sean $1 \leq q < p < \infty$, conjugados y $0 < r < \infty$, entonces

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(s)ds\right)^q t^{-r-1}dt \leq \left(\tfrac{q}{r}\right)^q \int_0^\infty [sf(s)]^q\, s^{-r-1}ds.$$

Demostración

Si $q = 1$, por el **Teorema de Fubini** se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_0^t f(s)ds\right)^q t^{-r-1}dt &= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty t^{-r-1}dt\right) f(s)ds \\
&= \int_0^\infty \left[\tfrac{t^{-r}}{-r}\right]_s^\infty f(s)ds \\
&= \tfrac{1}{r}\int_0^\infty s^{-r} f(s)ds \\
&= \tfrac{1}{r}\int_0^\infty [sf(s)]\, s^{-r-1}ds.
\end{aligned}
$$

Si $q > 1$ y $1 < p < \infty$, tal que $1/p + 1/q = 1$, entonces escogiendo $\alpha = \frac{q-r}{pq}$, resulta

$$
\begin{aligned}
\int_0^t f(s)ds &= \int_0^t f(s)s^{\alpha}s^{-\alpha}ds \le \left(\int_0^t s^{-\alpha p}ds\right)^{1/p} \left(\int_0^t [f(s)]^q\, s^{\alpha q}ds\right)^{1/q} \\
&= \left(\left[\tfrac{s^{-\alpha p+1}}{-\alpha p+1}\right]_0^t\right)^{1/p} \left(\int_0^t [f(s)]^q\, s^{\alpha q}ds\right)^{1/q}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_0^t f(s)ds\right)^q t^{-r-1}dt &\le \int_0^\infty \left[\left(\tfrac{q}{r}\right)^{1/p} t^{\frac{r}{pq}} \left(\int_0^t [f(s)]^q\, s^{\alpha q}ds\right)^{1/q}\right]^q t^{-r-1}dt \\
&= \left(\tfrac{q}{r}\right)^{q/p} \int_0^\infty \left(\int_0^t [f(s)]^q\, s^{\alpha q}ds\right) t^{\frac{r}{p}-r-1}dt \\
&= \left(\tfrac{q}{r}\right)^{q/p} \int_0^\infty \left(\int_0^t [f(s)]^q\, s^{\alpha q}ds\right) t^{\frac{-r}{q}-1}dt \\
&= \left(\tfrac{q}{r}\right)^{p/q} \int_0^\infty \left(\int_s^\infty t^{\frac{-r}{q}-1}dt\right) [f(s)]^q\, s^{\alpha q}ds \\
&= \left(\tfrac{q}{r}\right)^{p/q} \int_0^\infty \left[\frac{t^{\frac{-r}{q}}}{\frac{-r}{q}}\right]_s^\infty [f(s)]^q\, s^{\alpha q}ds \\
&= \left(\tfrac{q}{r}\right)^{p/q+1} \int_0^\infty [f(s)]^q\, s^{\frac{-r}{q}}\, s^{\frac{q-r}{p}}\, ds \\
&= \left(\tfrac{q}{r}\right)^{q} \int_0^\infty [f(s)]^q\, s^{\frac{q}{p}-r\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}ds \\
&= \left(\tfrac{q}{r}\right)^{q} \int_0^\infty [f(s)]^q\, s^{q-r-1}ds \\
&= \left(\tfrac{q}{r}\right)^{q} \int_0^\infty [sf(s)]^q\, s^{-r-1}ds. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Proposición 3.4

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $1 < p < \infty$, entonces

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{pp} \leq \tfrac{p}{p-1} \|f\|_p .$$

Demostración
Tenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_0^\infty [f^*(t)]^p \, dt \leq \int_0^\infty [f^{**}(t)]^p \, dt \\ &= \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^{**}(t)\right]^p \tfrac{dt}{t} = \|f\|_{pp}^p . \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la **desigualdad de Hardy**

$$\begin{aligned} \|f\|_{pp}^p &= \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^{**}(t)\right]^p \tfrac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[t^{1/p-1} \int_0^t f^*(s) ds\right]^p \tfrac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f^*(s) ds\right]^p t^{-(p-1)-1} dt \\ &\leq \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty [s f^*(s)]^p \, s^{-(p-1)-1} ds \\ &= \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty [f^*(s)]^p \, dt \\ &= \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^p \|f\|_p^p . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 3.5
Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, entonces

$$\|f\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{pq} \leq \tfrac{p}{p-1} \|f\|_{(p,q)} .$$

Demostración
Si $1 \leq q < \infty$, tenemos

$$\|f\|_{(p,q)}^q = \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^*(t)\right]^q \tfrac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^{**}(t)\right]^q \tfrac{dt}{t} = \|f\|_{pq} ,$$

de donde

$$\|f\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{pq} .$$

Por otro lado, usando la **Desigualdad de Hardy**

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{pq}^q &= \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^{**}(t)\right]^q \tfrac{dt}{t} = \int_0^\infty \left[t^{1/p-1}\int_0^t f^*(s)ds\right]^q t^{-1}dt \\
&= \int_0^\infty \left[\int_0^t f^*(s)ds\right]^q t^{q/p-q-1}dt = \int_0^\infty \left[\int_0^t f^*(s)ds\right]^q t^{-(q-\frac{q}{p})-1}dt \\
&\leq \left(\tfrac{q}{q(1-1/p)}\right)^q \int_0^\infty \left[sf^*(s)\right]^q s^q s^{-\left(q-\frac{q}{p}\right)-1}ds \\
&\leq \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^q \int_0^\infty \left[f^*(s)\right]^q s^q s^{-q+q/p-1}ds \\
&= \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^q \int_0^\infty \left[sf^*(s)\right]^q s^q \tfrac{ds}{s} = \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^q \|f\|_{(p,q)}^q ,
\end{aligned}
$$

de donde

$$\|f\|_{pq} \leq \left(\tfrac{p}{p-1}\right) \|f\|_{(p,q)} .$$

Así, en este caso se tiene

$$\|f\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{pq} \leq \tfrac{p}{p-1} \|f\|_{(p,q)} .$$

Si $q = \infty$, se tiene

$$t^{1/p} f^*(t) \leq t^{1/p} f^{**}(t) \leq \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) = \|f\|_{p\infty} ,$$

de donde

$$\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) \leq \|f\|_{p\infty} ,$$

lo que es equivalente a

$$\|f\|_{(p,\infty)} \leq \|f\|_{p\infty} .$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
t^{1/p} f^{**}(t) &= t^{1/p}\tfrac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds = t^{1/p-1}\int_0^t s^{1/p} f^*(s) s^{-1/p}ds \\
&\leq t^{1/p-1} \|f\|_{(p,\infty)} \int_0^t s^{-1/p}ds = t^{1/p-1} \|f\|_{(p,q)} \left(\tfrac{p}{p-1}\right) t^{-\frac{1}{p}+1} \\
&= \left(\tfrac{p}{p-1}\right) \|f\|_{(p,\infty)} ,
\end{aligned}
$$

de donde

$$\sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) \leq \left(\tfrac{p}{p-1}\right) \|f\|_{(p,\infty)} ,$$

lo que es equivalente a

$$\|f\|_{p\infty} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) \|f\|_{(p,\infty)} .$$

Así, en este caso, también se tiene

$$\|f\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{pq} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{(p,q)} . \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.7

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, entonces

$$f^{**}(t) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{q/p} \frac{\|f\|_{pq}}{t^{1/p}}.$$

Demostración

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{pq}^q &= \int_0^\infty \left[t^{1/p} f^{**}(t)\right]^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^t \left[s^{1/p} f^{**}(s)\right]^q \frac{ds}{s} \\ &\geq [f^{**}(t)]^q \int_0^t s^{q/p-1} ds \geq [f^{**}(t)]^q \left(\frac{p}{q}\right) t^{q/p} \end{aligned}$$

esto es

$$\|f\|_{pq}^q \geq [f^{**}(t)]^q \left(\frac{p}{q}\right) t^{q/p},$$

de donde

$$[f^{**}(t)]^q \leq \left(\frac{q}{p}\right) \frac{\|f\|_{pq}^q}{t^{q/p}},$$

de aquí

$$f^{**}(t) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} \frac{\|f\|_{pq}}{t^{1/p}}. \qquad \blacksquare$$

Corolario 3.1 (Calderón)

Sean (X, A, μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X, A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Si $f \in \mathcal{F}(X, A)$ y $1 < p < \infty$, $1 \leq q < r < \infty$, entonces

$$\|f\|_{pr} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{pq} .$$

Demostración

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{pr}^{r} &= \int_0^{\infty}\left[t^{1/p}f^{**}(t)\right]^{r}\frac{dt}{t}=\int_0^{\infty}\left[f^{**}(t)\right]^{r}t^{r/p-1}dt\\
&= \int_0^{\infty}\left[f^{**}(t)\right]^{q}\left[f^{**}(t)\right]^{r-q}t^{r/p-1}dt\\
&\leq \int_0^{\infty}\left[f^{**}(t)\right]^{q}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{1/q}\frac{\|f\|_{pq}}{t^{1/p}}\right]^{r-q}t^{\frac{r}{p}-1}dt\\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}}\int_0^{\infty}\left[f^{**}(t)\right]^{q}\|f\|_{pq}^{r-q}\,t^{-\frac{(r-q)}{p}}\,t^{\frac{r}{p}-1}dt\\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}}\|f\|_{pq}^{r-q}\int_0^{\infty}\left[f^{**}(t)\right]^{q}t^{\frac{q}{p}-1}dt\\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}}\|f\|_{pq}^{r-q}\int_0^{\infty}\left[t^{1/p}f^{**}(t)\right]^{q}\frac{dt}{t}\\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r-q}{q}}\|f\|_{pq}^{r-q}\|f\|_{pq}^{q}=\left(\frac{q}{p}\right)^{r/q-1}\|f\|_{pq}^{r},
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\|f\|_{pr}\leq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|f\|_{pq}. \qquad \blacksquare
$$

Teorema 3.8

Sean (X,A,μ) un espacio de medida y $\mathcal{F}(X,A)$ el conjunto de todas las funciones $\mu-$medibles sobre X. Sean $1<p\leq\infty$ y $1\leq q\leq\infty$. Entonces $L_{(p,q)}$ es completo y $L_{(p,q)}$ es de Banach con respecto a la norma $\|\cdot\|_{pq}$.

Demostración

Si $p=\infty$, entonces $L_{(\infty,q)}=\{0\}$.

Si $p=q=\infty$, entonces $L_{(\infty,\infty)}=L_{\infty}$.

Supongamos que $p<\infty$. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L_{(p,q)}$ con respecto a la norma $\|\cdot\|_{pq}$ y sean ε y δ, números positivos arbitrariamente pequeños. Escojamos $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$
\|f_n-f_m\|_{pq}<\varepsilon\delta^{1/p}, \qquad \forall n,m\geq n_0,
$$

si $q=\infty$, entonces

$$
\begin{aligned}
\delta^{1/p}\left(f_n-f_m\right)^{*}(\delta) &\leq \|f_n-f_m\|_{(p,\infty)}\\
&\leq \|f_n-f_m\|_{p\infty}<\varepsilon\delta^{1/p},
\end{aligned}
$$

de donde

$$(f_n - f_m)^* (\delta) < \varepsilon,$$

en consecuencia

$$D_{f_n - f_m}(\varepsilon) < \delta,$$

es decir

$$\mu \left(\{ x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \ > \varepsilon \} \right) < \delta,$$

para $n, m \geq n_0$. Esto nos dice que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida, luego, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} f_{n_k} = f, \text{ casi siempre.}$$

Vamos a demostrar que $f \in L_{(p,q)}$ y $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\|_{pq} = 0$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|f_n - f_m\|_{pq} < \left(\tfrac{p-1}{p} \right) \varepsilon \text{ para todos } n, m \geq n_0.$$

Fijemos $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq n_0$, escribamos $g = f - f_m$ y $g_k = f_{n_k} - f_m$, para $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} g_k = g, \quad \text{casi siempre.}$$

Dados α y β números positivos, arbitrariamente pequeños, existe un conjunto $E \in A$ y un entero k_0 tal que $\mu(E) < \alpha$ y $|g_k - g| < \beta$ en $X|E$ para todo $k \geq k_0$. Ahora, existe $k' \geq k_0$ tal que para todo $k \geq k'$,

$$E_g(\lambda + \beta) \subseteq E_{g_k}(\lambda) \cup E.$$

En efecto,

$$\text{si } x \in E_g(\lambda + \beta), \text{ entonces } x \in \{x \in X : |g(x)| > \lambda + \beta\}.$$

Si $x \in E$, entonces $x \in E_{g_k}(\lambda) \cup E$, en este caso $E_g(\lambda + \beta) \subseteq E_{g_k}(\lambda) \cup E$.
Si $x \in X|E$, entonces

$$x \in \{x \in X|E : |g(x)| > \lambda + \beta\},$$

de donde

$$x \in \{x \in X|E : |g(x)| > \lambda\},$$

por tanto

$$x \in \{x \in X|E : |g_k(x)| > \lambda\},$$

pués en $X|E$ se tiene que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} g_k = g$. Luego

$$\text{Si } x \in \{x \in X : |g_k(x)| > \lambda\}\,, \text{ entonces } x \in E_{g_k}(\lambda),$$

para todo $k \geq k'$, y en este caso, nuevamente, $E_g(\lambda+\beta) \subseteq E_{g_k}(\lambda) \cup E$. Por tanto

$$D_g(\lambda+\beta) < D_{g_k}(\lambda) + \alpha,$$

ahora, para todo $\lambda > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
g_k^*(t) &= \inf\{\lambda > 0 : D_{g_k} \leq t\} \\
&\geq \inf\{\lambda > 0 : D_g(\lambda+\beta) - \alpha \leq t\} \\
&= \inf\{\lambda - \beta : \lambda > 0 \ \text{ y } \ D_g(\lambda) \leq t + \alpha\} \\
&= g^*(t+\alpha) - \beta,
\end{aligned}$$

es decir

$$g_k^*(t) \geq g^*(t+\alpha) - \beta.$$

Para cualquier $t > 0$, esta última desigualdad implica que

$$g^*(t+\alpha) - \beta \leq \lim_{k\longrightarrow\infty} \inf \ g_k^*(t),$$

como g^* es continua por la derecha y α, β son arbitrarios, entonces

$$g^*(t) \leq \lim_{k\longrightarrow\infty} \inf \ g_k^*(t).$$

Ahora, es posible demostrar que $f \in L_{(p,q)}$ y $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \|f - f_n\|_{pq} = 0$.
Si $q = \infty$, entonces

$$\begin{aligned}
\|f - f_m\|_{p\infty} &\leq \tfrac{p}{p-1} \|f - f_m\|_{(p,\infty)} \\
&= \tfrac{p}{p-1} \sup_{t>0} t^{1/p} g^*(t) \\
&\leq \tfrac{p}{p-1} \sup_{t>0} \lim_{k\longrightarrow\infty} t^{1/p} g_k^*(t) \\
&\leq \tfrac{p}{p-1} \lim_{k\longrightarrow\infty} \inf \ \|f_{m_k} - f_m\|_{(p,q)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Si $q < \infty$, entonces aplicando el **Lema de Fatou**

$$
\begin{aligned}
\|f-f_m\|_{pq}^q &\leq \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^q \|f-f_m\|_{(p,q)}^q \\
&= \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^q \int_0^\infty t^{q/p-1}\,[g^*(t)]^q\,dt \\
&\leq \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^q \int_0^\infty t^{q/p-1} \lim_{k\longrightarrow\infty}\inf\ [g_k^*(t)]^q\,dt \\
&\leq \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^q \lim_{k\longrightarrow\infty}\inf\ \int_0^\infty t^{q/p-1}\,[g_k^*(t)]^q\,dt \\
&= \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^q \lim_{k\longrightarrow\infty}\inf\ \|f_{n_k}-f_m\|_{(p,q)}^q < \varepsilon^q.
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$\|f\|_{pq} \leq \|f-f_n\|_{pq} + \|f_n\|_{pq} < \infty,$$

así, $f \in L_{(p,q)}$. ■

Teorema 3.9

Las funciones simples son densas en $L_{(p,q)}$, cuando $0 < q < \infty$.

Demostración

Supongamos que $f \in L_{(p,q)}$ y $f \geq 0$. Nótese que si $D_f(\lambda) = 0$, entonces $\lim_{t\longrightarrow\infty} f^*(t) = 0$, luego $D_f(\lambda) < \infty$.

Ahora, dados $\varepsilon, \delta > 0$ podemos encontrar una función simple $s_n \geq 0$ tal que $s_n = 0$ cuando $f(x) < \varepsilon$ y $f(x) - \varepsilon \leq s_n(x) \leq f_n$ cuando $f(x) > \varepsilon$,

excepto en un conjunto de medida menor que δ. Así, la medida del conjunto

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - s_n(x)|\ > \varepsilon\}\right) < \delta.$$

Ahora, escojamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 1/\varepsilon$, entonces

$$(f-s_n)^*(t) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : D_{f-s_n}(\lambda) < \delta \leq t\right\},$$

luego

$$(f-s_n)^*(t) \leq \varepsilon, \text{ para todo } t \geq \delta.$$

Como $s_n \leq f$, entonces $s_n^*(t) \leq f^*(t)$ para cada $t > 0$. Dado que $n > 1/\varepsilon$, entonces

$$(f-s_n)^*(t) \leq \tfrac{1}{n} < \varepsilon,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} (f-s_n)^*(t) = 0 \ y \ (f-s_n)^*(t) \leq f^*(t/2) + s_n(t/2) \leq 2f^*(t/2),$$

finalmente, por el **Teorema de la Convergencia Dominada**, se tiene que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f-s_n\|_{(p,q)} = 0. \quad ■$$

Part I

Capítulo 4

1 Operador Multiplicación en Espacios L(p,q)

En este capítulo definiremos el operador multiplicación M_u en los espacios de Lorentz $L_{(p,q)}$, se caracterizarán el acotamiento y la compacidad de este operador en términos del acotamiento de la función medible de valor complejo, u, y la dimensión de $L_{(p,q)}$ restringido al subespacio $A_\varepsilon(u)$, para $\varepsilon > 0$.

Definición 4.1.

Sea (X, A, μ) un espacio de medida. Sean $f \in L_{(p,q)}$ y $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $u \cdot f \in L_{(p,q)}$. Entonces el operador $f \longrightarrow u \cdot f$ sobre $L_{(p,q)}$, se denota por M_u y en caso de ser continuo, se llama operador multiplicación inducido por u.

Teorema 4.1

El operador lineal $M_u : f \longrightarrow u \cdot f$ sobre el espacio de Lorentz $L_{(p,q)}$ es acotado si y sólo si u es essencialmente acotada. Además,

$$\|M_u\| = \|u\|_\infty .$$

Demostración

Si $u = 0$, entonces el resultado es trivial, luego supongamos que $0 \neq u \in L_\infty(u)$, entonces

$$|(u \cdot f)(x)| = |u(x)|\,|f(x)| \leq \|u\|_\infty |f(x)|, \quad \mu\text{−casi siempre}, \quad x \in X$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \{x \in X : |(u \cdot f)(x)| > \lambda\} &\subseteq \{x \in X : \|u\|_\infty |f(x)| > \lambda\} \\ &= \left\{x \in X : |f(x)| > \tfrac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right\}, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

de aquí

$$\mu\left(\{x \in X : |(u \cdot f)(x)| > \lambda\}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \tfrac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right\}\right),$$

es decir

$$D_{u \cdot f}(\lambda) \leq D_f\left(\tfrac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right),$$

luego

$$\left\{\lambda > 0 : D_f\left(\frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right) \le t\right\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{u\cdot f}(\lambda) \le t\}, \quad t > 0$$

por tanto

$$\inf\{\lambda > 0 : D_{u\cdot f}(\lambda) \le t\} \le \inf\left\{\lambda > 0 : D_f\left(\frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right) \le t\right\},$$

definiendo $\alpha = \frac{\lambda}{\|u\|_\infty}$, se tiene que $\lambda = \alpha\|u\|_\infty$, en consecuencia

$$\inf\{\lambda > 0 : D_{u\cdot f}(\lambda) \le t\} \le \inf\{\alpha\|u\|_\infty : D_f(\alpha) \le t\} = \|u\|_\infty \inf\{\alpha > 0 : D_f(\alpha) \le t\},$$

lo que es equivalente a

$$(u\cdot f)^*(t) \le \|u\|_\infty f^*(t),$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{t}\int_0^t (u\cdot f)^*(s)ds \le \|u\|_\infty \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds,$$

es decir

$$(u\cdot f)^{**}(t) \le \|u\|_\infty f^{**}(t).$$

Por otro lado, si $q < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|M_u f\|_{pq} &= \|u\cdot f\|_{pq} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(u\cdot f)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\le \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\|u\|_\infty f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= \|u\|_\infty \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&= \|u\|_\infty \|f\|_{pq}.
\end{aligned}$$

Si $q = \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}\|M_u f\|_{p\ \infty} &= \|u \cdot f\|_{p\ \infty} = \sup_{t>0} t^{1/p} (u \cdot f)^{**}(t) \\ &\leq \sup_{t>0} t^{1/p} \|u\|_\infty f^{**}(t) = \|u\|_\infty \sup_{t>0} t^{1/p} f^{**}(t) \\ &= \|u\|_\infty \|f\|_{p\ \infty}.\end{aligned}$$

Así, para $1 \leq q \leq \infty$, se cumple que

$$\|M_u f\|_{pq} \leq \|u\|_\infty \|f\|_{pq},$$

luego, de la **Definición 1.1** se obtiene

$$\|M_u\| = \sup_{\substack{f \in L_{(p,q)} \\ \|f\|_{pq}=1}} \|M_u f\|_{pq} \leq \sup_{\substack{f \in L_{(p,q)} \\ \|f\|_{pq}=1}} \|u\|_\infty \|f\|_{pq} \leq \|u\|_\infty.$$

Recíprocamente, supongamos que M_u es un operador acotado. Si u no es una función esencialmente acotada, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$E_n = \{x \in X : |u(x)| > n\}$$

tiene medida positiva. Además

$$\left|u \cdot \chi_{E_n}(x)\right| \geq n\chi_{E_n}(x), \qquad x \in X,$$

por lo cual

$$\left\{x \in X : n\chi_{E_n}(x) > \lambda\right\} \subseteq \left\{x \in X : \left|u \cdot \chi_{E_n}(x)\right| > \lambda\right\}, \qquad \lambda > 0,$$

de donde

$$\mu\left(\left\{x \in X : n\chi_{E_n}(x) > \lambda\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in X : \left|u \cdot \chi_{E_n}(x)\right| > \lambda\right\}\right),$$

es decir

$$D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq D_{u\cdot\chi_{E_n}}(\lambda),$$

de aquí

$$\left\{\lambda > 0 : D_{u\cdot\chi_{E_n}}(\lambda) \leq t\right\} \subseteq \left\{\lambda > 0 : D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq t\right\}, \qquad t > 0,$$

luego

$$\inf\left\{\lambda > 0 : D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq t\right\} \leq \inf\left\{\lambda > 0 : D_{u\cdot\chi_{E_n}}(\lambda) \leq t\right\},$$

esto es

$$\left(n\chi_{E_n}\right)^*(t) \leq \left(u\cdot\chi_{E_n}\right)^*(t),$$

de esto último se tiene

$$\left(n\chi_{E_n}\right)^{**}(t) \leq \left(u\cdot\chi_{E_n}\right)^{**}(t),$$

en consecuencia, si $q < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|M_u\chi_{E_n}\right\|_{pq} &= \left\|u\cdot\chi_{E_n}\right\|_{pq} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(u\cdot\chi_{E_n}\right)^{**}(t))^q \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q} \\
&\geq n\left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\left(\chi_{E_n}\right)^{**}(t)\right)^q \tfrac{dt}{t}\right)^{1/q} = n\left\|\chi_{E_n}\right\|_{pq}.
\end{aligned}$$

Si $q = \infty$

$$\begin{aligned}
\left\|M_u\chi_{E_n}\right\|_{p\ \infty} &= \left\|u\cdot\chi_{E_n}\right\|_{p\ \infty} = \sup_{t>0} t^{1/p}(u\cdot\chi_{E_n})^{**}(t) \\
&\geq n\sup_{t>0} t^{1/p}\left(\chi_{E_n}\right)^{**}(t) = n\left\|\chi_{E_n}\right\|_{p\ \infty}.
\end{aligned}$$

Así, para $1 \leq q \leq \infty$, se cumple que

$$\left\|M_u\chi_{E_n}\right\|_{pq} \geq n\left\|\chi_{E_n}\right\|_{pq}.$$

Esto contradice el acotamiento de M_u, por lo tanto u debe ser esencialmente acotada.

Ahora, para $\varepsilon > 0$, definamos

$$E = \{x \in X : |u(x)| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon\},$$

claramente $\mu(E) > 0$, luego

$$\{x \in X : (\|u\|_\infty - \varepsilon)\,\chi_E(x) > \lambda\} \subseteq \{x \in X : |u \cdot \chi_E(x)| > \lambda\}, \qquad \lambda > 0,$$

por lo tanto

$$D_{\left(\|u\|_\infty - \varepsilon\right)\chi_E}(\lambda) \leq D_{u\cdot\chi_E}(\lambda),$$

así

$$\left\{\lambda > 0 : D_{u\cdot\chi_E}(\lambda) \leq t\right\} \subset \left\{\lambda > 0 : D_{\left(\|u\|_\infty - \varepsilon\right)\chi_E}(\lambda) \leq t\right\}, \qquad t > 0,$$

en consecuencia

$$\inf\left\{\lambda > 0 : D_{\left(\|u\|_\infty - \varepsilon\right)\chi_E}(\lambda) \leq t\right\} \leq \inf\left\{\lambda > 0 : D_{u\cdot\chi_E}(\lambda) \leq t\right\},$$

lo que es equivalente

$$(u \cdot \chi_E)^*(t) \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)\,(\chi_E)^*(t),$$

de aquí tenemos

$$(u \cdot \chi_E)^{**}(t) \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)\,(\chi_E)^{**}(t)$$

de esta última desigualdad resulta

$$\|u \cdot \chi_E\|_{pq} \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)\,\|\chi_E\|_{pq},$$

luego

$$(\|u\|_\infty - \varepsilon) \leq \frac{\|M_u \chi_E\|_{pq}}{\|\chi_E\|_{pq}}, \qquad 0 \leq q \leq \infty,$$

de donde

$$\|M_u\| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Así

$$\|M_u\| \geq \|u\|_\infty ,$$

por lo tanto

$$\|M_u\| = \|u\|_\infty . \qquad \blacksquare$$

Lema 4.1

Sea M_u un operador compacto, definamos, para $\varepsilon > 0$, $A_\varepsilon(u) = \{x \in X : |u(x)| \geq \varepsilon\}$ y $L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u)) = \left\{f\chi_{A_\varepsilon(u)} : f \in L_{(p,q)}\right\}$. Entonces $L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))$ es un subespacio invariante cerrado de $L_{(p,q)}$ bajo M_u. Además $M_u|_{L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))}$ es un operador compacto.

Demostración

Sean $h, k \in L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))$ y α, β escalares. Entonces $h = f\chi_{A_\varepsilon(u)}$ y $k = g\chi_{A_\varepsilon(u)}$, donde $f, g \in L_{(p,q)}$. Luego,

$$\alpha h+\beta k = \alpha(f\chi_{A_\varepsilon(u)}))+\alpha(g\chi_{A_\varepsilon(u)}) = (\alpha f)\,\chi_{A_\varepsilon(u)}+(\beta g)\,\chi_{A_\varepsilon(u)} = (\alpha f+\beta g)\chi_{A_\varepsilon(u)},$$

donde $(\alpha f + \beta g) \in L_{(p,q)}$. Asi, $\alpha h + \beta k \in L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))$, en consecuencia $L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))$ es un subespacio vectorial de $L_{(p,q)}$.

Para todo $h \in L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))$, se tiene que $h = f\chi_{A_\varepsilon(u)}$, donde $f \in L_{(p,q)}$, así se cumple que

$$M_u h = u \cdot h = u \cdot \left(f\chi_{A_\varepsilon(u)}\right) = (u \cdot f)\,\chi_{A_\varepsilon(u)},$$

donde $u \cdot f \in L_{(p,q)}$. Por lo cual, $M_u h \in L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))$ y en consecuencia $L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))$ es un subespacio invariante de $L_{(p,q)}$, bajo el operador M_u.

Por el **Teorema 1.10,** $M_u|_{L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))}$ es un operador compacto. $\blacksquare$

Teorema 4.2

Sea $u \in L_\infty$. Entonces M_u es compacto si y sólo si $L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))$ es de dimensión finita para cada $\varepsilon > 0$, donde

$$A_\varepsilon(u) = \{x \in X : |u(x)| \geq \varepsilon\} \quad y \quad L_{(p,q)}\left(A_\varepsilon(u)\right) = \left\{ f\chi_{A_\varepsilon(u)} : f \in L_{(p,q)} \right\}.$$

Demostración
Sea $\varepsilon > 0$. Si $|u(x)| \geq \varepsilon$, se puede notar que

$$\left| u \cdot f\chi_{A_\varepsilon(u)}(x) \right| \geq \left| \varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}(x) \right|, \qquad x \in X,$$

de aquí

$$\left\{ x : \left| \varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}(x) \right| > \lambda \right\} \subseteq \left\{ x : \left| u \cdot f\chi_{A_\varepsilon(u)}(x) \right| > \lambda \right\}, \qquad \lambda > 0,$$

así

$$D_{\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq D_{u\cdot f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda),$$

de esta última desigualdad se tiene

$$\left\{ \lambda > 0 : D_{u\cdot f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq t \right\} \subseteq \left\{ \lambda > 0 : D_{\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq t \right\}, \qquad t > 0,$$

y

$$\inf \left\{ \lambda > 0 : D_{\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq t \right\} \leq \inf \left\{ \lambda > 0 : D_{u\cdot f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq t \right\},$$

esto es

$$\left(\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)} \right)^* (t) \leq \left(u \cdot f\chi_{A_\varepsilon(u)} \right)^* (t),$$

de aquí

$$\left(\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)} \right)^{**} (t) \leq \left(u \cdot f\chi_{A_\varepsilon(u)} \right)^{**} (t),$$

en consecuencia

$$\left\|M_u f\chi_{A_\varepsilon(u)}\right\|_{pq} \geq \varepsilon \left\|f\chi_{A_\varepsilon(u)}\right\|_{pq}, \qquad 0 \leq q \leq \infty, \qquad ((\mathbf{4.1}))$$

lo que quiere decir que $M_u|_{L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))}$ es acotado inferiormente y por lo tanto es invertible. Como $M_u|_{L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u))}$ es compacto se obtiene que la dimensión de $L_{(p,q)}\left(A_\varepsilon(u)\right)$ es finita (ver **Teorema 1.8**).

Recíprocamente, supongamos que $L_{(p,q)}\left(A_\varepsilon(u)\right)$ es de dimensión finita para cada $\varepsilon > 0$, entonces en particular para cada $n \in \mathbb{N}$, $L_{(p,q)}\left(A_{1/n}(u)\right)$ es de dimensión finita. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínamos $u_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), & si \;\; x \in A_{1/n}(u) \\ 0, & si \;\; x \notin A_{1/n}(u). \end{cases}$$

Entonces, para $f \in L_{(p,q)}$, se tiene

$$|(u_n - u) \cdot f| = |u_n - u|\,|f| \leq \tfrac{1}{n}\,|f|\,,$$

en consecuencia

$$((u_n - u) \cdot f)^*\,(t) \leq \tfrac{1}{n} f^*(t),$$

para todo $t > 0$, luego

$$\|(u_n - u) \cdot f\|_{pq} \leq \tfrac{1}{n}\,\|f\|_{pq}\,,$$

por lo tanto

$$\|M_{u_n} - M_u\| = \sup_{\substack{f \in L_{(p,q)}(A_\varepsilon(u)) \\ \|f\|_{pq}=1}} \|(M_{u_n} - M_u)\,f\|_{pq} \leq \tfrac{1}{n}\,\|f\|_{pq} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

lo que implica que M_{u_n} converge a M_u uniformemente. Como $L_{(p,q)}\left(A_\varepsilon(u)\right)$ es de dimensión finita se tiene que M_{u_n} es un operador de rango finito. Por lo tanto, del **Teorema 1.6**, M_{u_n} es un operador compacto, por el **Teorema 1.9**, M_u es un operador compacto. ■

Toerema 4.3

Sea $M_u \in B\left(L_{(p,q)}\right)$. Entonces M_u tiene rango cerrado si y sólo si existe un $\delta > 0$ tal que $|u(x)| \geq \delta$ μ-casi siempre sobre $S = \{x \in X : u(x) \neq 0\}$, el soporte de u.

Demostración

Si existe un $\delta > 0$ tal que $|u(x)| \geq \delta$ μ-casi siempre sobre S, entonces para todo $f \in L_{(p,q)}$, se tiene que

$$|(\delta f\chi_S)(x)| \leq |(u \cdot f\chi_S)(x)|, \qquad x \in X,$$

de donde

$$\{x \in X : |(\delta f\chi_S)(x)| > \lambda\} \subseteq \{x \in X : |(u \cdot f\chi_S)(x)| > \lambda\}, \qquad \lambda > 0,$$

así

$$\mu(\{x \in X : |(\delta f\chi_S)(x)| > \lambda\}) \leq \mu(\{x \in X : |(u \cdot f\chi_S)(x)| > \lambda\}),$$

lo que es equivalente

$$D_{\delta f\chi_S}(\lambda) \leq D_{u\cdot f\chi_S}(\lambda),$$

luego

$$\left\{\lambda > 0 : D_{u\cdot f\chi_S}(\lambda) \leq t\right\} \subseteq \left\{\lambda > 0 : D_{\delta f\chi_S}(\lambda) \leq t\right\}, \qquad t > 0,$$

por lo cual

$$\inf\left\{\lambda > 0 : D_{\delta f\chi_S}(\lambda) \leq t\right\} \leq \inf\left\{\lambda > 0 : D_{u\cdot f\chi_S}(\lambda) \leq t\right\},$$

de aquí

$$(u \cdot f\chi_S)^*(t) \geq \delta (f\chi_S)^*(t).$$

De lo anterior, se tiene

$$\|\delta f\chi_S\|_{pq} \leq \|M_u f\chi_S\|_{pq},$$

es decir

$$\|M_u f\chi_S\|_{pq} \geq \delta \|f\chi_S\|_{pq},$$

para todo $f \in L_{(p,q)}$, lo que implica, por el **Teorema 1.3**, que M_u tiene rango cerrado.

Recíprocamente, si M_u tiene rango cerrado, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left\| M_u \overline{f} \right\|_{pq} \geq \varepsilon \left\| \overline{f} \right\|_{pq}$$

para todo $\overline{f} \in L_{(p,q)}(S)$, donde

$$L_{(p,q)}(S) = \left\{ f\chi_S : f \in L_{(p,q)} \right\}.$$

Sea $E = \{x \in S : |u(x)| < \varepsilon/2\}$. Si $\mu(E) > 0$, entonces se puede encontrar un conjunto medible $F \subseteq E$ tal que $\chi_F \in L_{(p,q)}(S)$. En efecto,

$$F \subseteq E \subseteq S \Longrightarrow F \cap S = F,$$

luego

$$\chi_F = \chi_{F\cap S} = \chi_F \chi_{S,}$$

donde $\chi_F \in L_{(p,q)}$ y por tanto $\chi_F \in L_{(p,q)}(S)$.

Ahora

$$|u \cdot \chi_F(x)| \leq \left| \tfrac{\varepsilon}{2} \chi_F(x) \right|, \qquad x \in X,$$

por lo cual

$$\{x \in X : |u \cdot \chi_F(x)| > \lambda\} \subseteq \left\{ x \in X : \left| \tfrac{\varepsilon}{2} \chi_F(x) \right| > \lambda \right\}, \qquad \lambda > 0,$$

de donde

$$\mu\left(\{x \in X : |u\chi_F(x)| > \lambda\}\right) \leq \mu\left(\left\{ x \in X : \left| \tfrac{\varepsilon}{2} \chi_F(x) \right| > \lambda \right\}\right),$$

es decir

$$D_{u\cdot\chi_F}(\lambda) \leq D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda),$$

así

$$\left\{\lambda > 0 : D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda) \leq t\right\} \subseteq \left\{\lambda > 0 : D_{u\cdot\chi_F}(\lambda) \leq t\right\}, \qquad t > 0,$$

de esta última inclusión se tiene

$$\inf\left\{\lambda > 0 : D_{u\cdot\chi_F}(\lambda) \leq t\right\} \leq \inf\left\{\lambda > 0 : D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda) \leq t\right\},$$

lo que es equivalente a

$$(u \cdot \chi_F)^* (t) \leq \tfrac{\varepsilon}{2} (\chi_F)^* (t).$$

En consecuencia

$$\|M_u \chi_F\|_{pq} \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \|\chi_F\|_{pq},$$

que es una contradicción, por lo tanto $\mu(E) = 0$. Esto completa la prueba del teorema. ■

Part I

Bibliografía

[1] Arora S., Datt G. and Verma S., Multiplication operators on Lorentz spaces, Indian Journal of Mathematics, vol. 48, (3) (2006), 317-329.

[2] Arora S., Datt G. and Verma S., Multiplication operators on Orlicz-Lorentz spaces, International Journal of Mathematical Analysis, vol. 1, (25) (2007), 1227-1234.

[3] Abrahamese M. B., Multiplication Operators, Lecture notes in Math, vol. 693 (1978), 17-36, Springer-Verlag, New York, 1978.

[4] Abramovich Y. A., Aliprantis C. D., and Burkinshaw O., Multiplication and compact-friendly operators, Positivity 1 (1997), 171-180.

[5] Castillo René E., León Ramón and Trousselot Eduard, Multiplication operators on $L_{(p,q)}$ spaces, PanAmerican Mathematical Journal, Volume 19 (2009), Number 1, 37-44.

[6] Hardy G. H. and Littlewood J. E., A maximal theorem with funtion-theoretic applications, Act Math 54 (1930), 81-116.

[7] Hudzik H., Kumar Rajeev and Kumar Romesh, Matrix multiplication operators on Banach funtion spaces, Proceedings of Indian Academy of Sciences, vol. 116, No. 1, February 2003, pp. 71-81.

[8] Hunt R. A., On $L_{(p,q)}$ spaces, L'Enseignement Math, vol. 12 (2) (1966), 249-276.

[9] Kato M., On Lorentz spaces $L_{(p,q)}\{E\}$, Hiroshima Math. J. 6 (1976), 74-75.

[10] Lorentz G., Some new function spaces, Ann of Math 51 (1950), 37-55.

[11] Lorentz G., On the Theory of spaces Λ, Pacific. J.Math. 1 (1951), 411-429.

[12] Maligranda L., Indices and interpolation, Dissert. Math. 234 (1984), 1-49.