UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

OPERADOR DE COMPOSICIÓN ENTRE CLASES CONFORMEMENTE INVARIANTES Y Q-HIPERBÓLICAS

(Modalidad: Investigación)

JUAN FÉLIX JOSÉ FARÍAS LÓPEZ

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CUMANÁ, 2009

OPERADOR DE COMPOSICIÓN ENTRE CLASES CONFORMEMENTE INVARIANTES Y Q-HIPERBÓLICAS

APROBADO POR:

Prof. Julio C. Ramos Fernández

Asesor Académico

Jurado Principal

Jurado Principal

ÍNDICE

Pág.

DEDICATORIA

Dedico este este trabajo a:

Mis padres Genoveva de Farías y Juan Félix Farías, "El Negro" por su esfuerzo y apoyo incondicional durante mi formación académica. "Lo logré mis viejos y esto es sólo el principio."

A la Señora Nélida Caraballo "Tía Margot" por lo oportuno de sus consejos y por haber fijado en mi los valores de honestidad, humildad y sobre todo de responsabilidad. "Bendición mi tía".

A mi novia Yoana "mi flaca bella" por su comprensión y amor.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a Dios Todopoderoso, y a la Virgen del Valle, por concederme el milagro de la vida.

Agradezco al profesor Julio Cesar Ramos Fernández, quien dedicadó desinteresadamente gran parte de su tiempo para llevar a feliz término este trabajo. "Gracias compinche, te debo 10 Bs"

A mis hermanos Richard Farías y Alfredo Tinoco por su apoyo y por actuar siempre en función de mi bienestar.

Por último, agradezco de todo corazón a todas aquellas personas que de alguna manera u otra aportaron su granito de arena para que este sueño se hiciera realidad.

RESUMEN

En este trabajo se estudiaron algunas propiedades topológicas de los espacios de funciones analíticas α-Bloch, Dirichlet con peso y Q_s, entre ellas, se estableció que estos espacios son de Banach, así, como también las relaciones de contención existente entre ellos. Además, se caracterizaron los operadores de composición continuos cuando actúan sobre estos espacios en términos de la continuidad del mismo sobre sus respectivas clases hiperbólicas.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se ha venido haciendo un intenso trabajo de investigación en el campo de la teoría de operadores en espacios de Banach, en particular, en espacios de funciones analíticas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, del plano complejo $\mathbb{C}$, el cual se denota por $H(\mathbb{D})$. En este sentido, si $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$, son subespacios de Banach de $H(\mathbb{D})$, se denota $B(\mathbb{D}) = \{h \in H(\mathbb{D}) : |h(z)| < 1, z \in \mathbb{D}\}$; y se tiene una función $\varphi \in B(\mathbb{D})$, entonces se define el operador de composición $C_\varphi : X \to Y$, con símbolo φ, como aquella transformación (lineal) que aplica una función $f \in X$ en otra nueva función $h = C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ en Y. Uno de los objetivos, cuando se estudia este tipo de operadores, es analizar sus propiedades tales como: acotación, compacidad, norma, entre otras; haciendo uso de las propiedades funcionales del símbolo φ y recíprocamente, de la inmersión por el operador de un espacio en otro, obtener propiedades del símbolo φ que lo induce. Un aspecto que hace interesante el estudio de estos operadores lo constituye el hecho de que esta teoría construye un puente entre la teoría de operadores y la teoría de funciones, esta fusión ha producido una cantidad de resultados como puede verse, por ejemplo, en la base de datos de la Sociedad Americana de Matemática (AMS, www.ams.org/mathscinet).

Hasta ahora, no se ha podido dotar al espacio $H(\mathbb{D})$ de una norma que lo convierta en un espacio de Banach; pero existe una extensa teoría sobre subespacios de él, que son de Banach, y quienes siguen esta linea de investigación se esfuerzan día a día por crear nuevos subespacios de $H(\mathbb{D})$ o generalizar los que ya existen y ver que propiedades heredan, tal es el caso de los espacios con los cuales se trabaja en esta Tesis (Capítulo 2) y que se describen a continuación. En primer lugar, el espacio α-Bloch, con $\alpha > 0$, denotado por $\mathcal{B}_\alpha$ el cual está constituido por aquellas funciones $f \in H(\mathbb{D})$ que satisfacen

$$\|f\|_\alpha = \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|\}.$$

Estos espacios son generalizaciones del espacio clásico de Bloch, el cual se obtiene cuando el parámetro α es igual a 1 y se denota por $\mathcal{B}$. A pesar de que a simple vista los espacios $\mathcal{B}_\alpha$ y el espacio $\mathcal{B}$ son muy semejantes, en muchos casos las demostraciones de las propiedades inherentes a cada uno de ellos requieren de un tratamiento distinto; más aún, existen propiedades que se cumplen en el espacio $\mathcal{B}$ y no en el espacio $\mathcal{B}_\alpha$, como por ejemplo la invarianza por automorfismos del disco. Similarmente, para $s > -1$, el espacio de Dirichlet con peso, $\mathcal{D}_s$ consiste de las funciones $f \in H(\mathbb{D})$ tal que

$$\|f\|_{\mathcal{D}_s} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(\log\frac{1}{|z|}\right)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{1}$$

donde $dA(z) = \pi^{-1}dxdy = r\pi^{-1}drd\theta$, con $z = x+iy = re^{i\theta}$, es la medida bidimensional normalizada de Lebesgue. En la tercera sección del Capítulo 2 de este trabajo, se establecerá que estos espacios son de Banach con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{D}_s}.$$

El espacio Q_s, con $s \geq 0$, consiste de las funciones $f \in H(\mathbb{D})$ tal que

$$\|f\|_{Q_s} = \left(\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(g(z,a)\right)^s dA(z)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{2}$$

donde

$$g(z,a) = -\log\left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right|$$

es la función de Green sobre el dominio $\mathbb{D}$. También se sabe que la relación (2) define una seminorma para el espacio Q_s y que éste es un subespacio del espacio de $\mathcal{D}_s$ y que es Banach con la norma

$$\|f\|_Q = |f(0)| + \|f\|_{Q_s}.$$

La expresión que aparece en el argumento de la función logaritmo que define a la función de Green, es el conocido automorfismo del disco, estas aplicaciones determinan un grupo, el cual se denota por $Aut(\mathbb{D})$. Además, se puede observar que la función de Green es conformemente invariante por automorfismos del disco, lo cual significa que

$$g(z,w) = g\left(\sigma(z), \sigma(w)\right), \quad z, w \in \mathbb{D},$$

para todo $\sigma \in Aut(\mathbb{D})$. En consecuencia,

$$\|f\|_{Q_s} = \|f \circ \sigma\|_{Q_s},$$

para todo $\sigma \in Aut(\mathbb{D})$ y toda $f \in Q_s$. Por tal motivo, se dice que los espacios Q_s son conformente invariantes por automorfismos del disco.

Los espacios que se han nombrado hasta ahora están definidos en términos de la primera derivada de la función, este hecho se puede aprovechar para crear un nuevo tipo de conjunto de funciones analíticas, denominado clase hiperbólica, que no es más que un subconjunto de $B(\mathbb{D})$ que se obtiene al colocar la llamada derivada hiperbólica, en el lugar de la derivada ordinaria en la expresión que define el espacio.

En este trabajo se estudian algunas propiedades topológicas de los espacios α-Bloch, Dirichlet con peso y Q_s y también se estudia la continuidad del operador de composición con símbolo φ, C_φ, cuando actúa entre estos espacios o entre sus respectivas clases hiperbólicas. En tal sentido, la primera y segunda sección de Capítulo I, se recuerdan las definiciones y resultados de los cursos de Análisis Funcional y Teoría de la Medida que se precisan, como por ejemplo la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Minkowski y el Teorema de Representación de Riesz, entre otros. En la tercera sección del Capítulo I, se introducen los conceptos y teoremas referentes a las funciones analíticas, entre los resultados que resaltan en esta sección, se puede nombrar el teorema de la fórmula integral de Cauchy, así como también las ecuaciones de Cauchy-Riemann y el Lema de Schwarz-Pick. La cuarta sección en el Capítulo I, proporciona los resultados que se requieren acerca de los automorfismos del disco y de la métrica pseudohiperbólica. La quinta y última sección del Capítulo I, se refiere a las funciones subarmónicas, que son de mucha utilidad en este trabajo; en esta sección, entre otras cosas, se da la definición de función subarmónica y se enuncia algunos criterios de subarmonicidad.

En el Capítulo II, se estudian las propiedades características de los espacios $\mathcal{B}_\alpha$, $\mathcal{D}_s$ y Q_s. La primera sección está dedicada a establecer que los espacios α-Bloch son de Banach y, además, analizar su relación con el espacio H^∞, de las funciones analíticas acotadas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$. En la segunda sección se definen los espacios α-Bloch pequeño y se establece que es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}_\alpha$, y más aún, que $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ es la clausura de los polinomios en $\mathcal{B}_\alpha$. En la tercera y cuarta sección, se estudian respectivamente los espacios de Dirichlet con peso y los espacios Q_s y se dan las técnicas de demostración que permiten establecer que estos espacios son de Banach. Este capítulo finaliza en la quinta sección, donde se asienta las relaciones de contención entre los espacios de funciones analíticas que se están estudiando y también se enuncian algunos resultados referentes a las series de Hadamard.

El tercer capítulo es, sin duda el más importante, en él, se plasman con detalle los interesantes resultados que se presentan el articulo de Li, Pérez-González y Ráttyä (2006). En la primera sección de este capítulo se define el operador de composición y se estudia sus propiedades cuando actúa entre espacios de funciones analíticas, en la segunda sección se caracterizan aquellos operadores de composición que aplican continuamente algún espacio α-Bloch en algún espacio Q_s, resultado que en la cuarta sección se extiende a las clases hiperbólicas asociadas a los espacios de funciones analíticas estudiados en el Capítulo II. Los detalles que se precisan en torno a la derivada hiperbólica, se estudian en la tercera sección del Capítulo III.

CAPÍTULO 1
NOCIONES PRELIMINARES

Este capítulo ha sido concebido, para ofrecer al lector las herramientas necesarias para el desarrollo de los capítulos posteriores. En las dos primeras secciones, se presenta un breve resumen de las definiciones y resultados concernientes a las transformaciones lineales continuas en espacios de Banach, así como un breve repaso sobre los espacios L^p y el célebre teorema de representación de Riesz. En la tercera sección, se recuerda brevemente lo concerniente a los espacios de funciones analíticas $H(\mathbb{D})$ que se utilizan en el transcurso de este trabajo. En la cuarta sección se profundiza en las propiedades de los automorfismos del disco, herramienta fundamental para trabajar con espacios de funciones analíticas definidas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$. Finaliza el capítulo dándose un resumen sobre los conceptos y los resultados que se estarán necesitando sobre funciones subarmónicas.

1.1 Elementos de Análisis Funcional

En esta sección, se resume las definiciones y los resultados de un curso de Análisis Funcional requeridos en el transcurso del siguiente trabajo. Las definiciones y resultados que se presentan en esta sección pueden ser consultados en los excelentes textos de Kreyszig (1978) y Kubrusly (2001).

Se denotará por X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$, el cual será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Recuerde que una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ se dice una *seminorma* sobre X si verifica las siguientes condiciones:

(1) Para todo $x, y \in X$, se cumple $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(2) Para todo $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

Si además $\|\cdot\|$ verifica la condición adicional "$\|x\| = 0$ implica $x = 0$ ", entonces $\|\cdot\|$ se llama una *norma* sobre X y en este caso se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, se dice que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una *sucesión de Cauchy*, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x_m|| < \varepsilon$ siempre que $n, m \geq N$. Se define un *espacio de Banach* como un espacio normado donde cada sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $x \in X$.

Un *operador lineal* T entre espacios vectoriales X e Y, es una aplicación $T : X \longrightarrow Y$ que cumple,

$$T(\alpha x + \beta y) \;=\; \alpha T(x) + \beta T(y),$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$. Si $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son dos espacios normados, entonces se dice que $T : X \longrightarrow Y$ es *acotado o continuo* si existe una constante $M > 0$ tal que,

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \tag{1.1}$$

para todo $x \in X$. Si no existe una constante que cumpla (1.1) para todo $x \in X$, se dice que T no es acotado. El conjunto de todas las transformaciones lineales continuas de X en Y se denota por $\mathcal{L}(X, Y)$ y en el caso que $Y = X$, se escribe $\mathcal{L}(X)$. El ínfimo de los números positivos que satisface (1.1) se le conoce como la *norma del operador* T y se denota por $\|T\|$. Es conocido que la norma de un operador se puede calcular mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\} \\
&= \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X, x \neq 0\right\}.
\end{aligned}$$

Además, se tiene la siguiente desigualdad,

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X.$$

Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces se define el *núcleo del operador* T por,

$$Ker(T) = \{x \in X : Tx = 0\}.$$

Entonces se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.1.1. *Un operador lineal $T : X \to Y$ es inyectivo (ó uno a uno) si y sólo si $Ker(T) = \{0\}$.*

1.2 Elementos de la Teoría de la Medida

En esta sección se presenta un breve repaso sobre los resultados de un curso de Teoría de la Medida que será de gran utilidad en el transcurso de este trabajo. Las notaciones, definiciones y resultados que se muestran en esta sección han sido tomado de los texto Lang (1993) y Royden (1968).

Recuerde que, dado dos espacios medibles $(X, \mathfrak{M})$ y $(Y, \mathfrak{N})$, una función $f : X \to Y$ se dice *medible* si para cada $B \in \mathfrak{N}$, el conjunto $f^{-1}(B)$ es un elemento de $\mathfrak{M}$. De la definición anterior, es claro que una función real f definida sobre un espacio medible $(X, \mathfrak{M})$ es medible si y sólo si $f^{-1}(\alpha, \infty) \in \mathfrak{M}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$; mientras que una función compleja $h = f + ig$ definida un espacio medible $(X, \mathfrak{M})$ es medible si y sólo si sus componentes f y g son medibles sobre $(X, \mathfrak{M})$.

Sea X un espacio medible y $\mathfrak{M}$ la colección de sus conjuntos medibles. Una *medida* (positiva) sobre $\mathfrak{M}$ es una función $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ que satisface:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Si A es medible, la cantidad $\mu(A)$ se llama *la medida de* A. Aquí se conviene que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Dado un espacio medible $(X, \mathfrak{M})$, una medida μ definida sobre $\mathfrak{M}$ y $p > 0$ se define el espacio $L^p(X, d\mu)$ como el conjunto de las funciones f medibles (reales o complejas) sobre X tales que,

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.2}$$

Aquí se considera que dos funciones f y g son iguales si son iguales en casi todas partes; es decir, si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \setminus A$, donde A es un conjunto con medida cero. Para $p = \infty$, se define $L^\infty(X, d\mu)$ como el conjunto de las funciones medibles f sobre X tales que,

$$\|f\|_\infty = ess \sup |f| < \infty. \tag{1.3}$$

Los resultados sobre espacios $L^p(X, d\mu)$ que se requieren se pueden resumir en el siguiente teorema (véase pag. 244 de Royden (1968)).

Teorema 1.2.1. *Para* $1 \leq p \leq \infty$, *los espacios* $L^p(X, d\mu)$ *son de Banach. Si* $f \in L^p(X, d\mu)$, $g \in L^q(X, d\mu)$, *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *entonces* $fg \in L^1(X, d\mu)$ *y*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, . \tag{1.4}$$

Comentarios.

1. La desigualdad triangular de la relación $\| \cdot \|_p$ con $1 \leq p \leq \infty$ se conoce como la *desigualdad de Minkowski.*

2. La desigualdad en (1.4) es conocida como *desigualdad de Hölder.*

3. El teorema que establece que los espacios $L^p(X, d\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ son Banach se conoce como el *Teorema de Riesz-Fischer.*

Se sigue de la desigualdad de Hölder que cada $g \in L^q(X, d\mu)$ define un funcional lineal y acotado F sobre $L^p(X, d\mu)$, mediante la expresión:

$$F(f) = \int_X fg d\mu,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; además, se cumple $\|F\| = \|g\|_q$. Recíprocamente, se tiene el siguiente resultado, donde σ-finita significa que existe una sucesión $\{X_n\}$ de conjuntos en $\mathfrak{M}$ tal que $X = \bigcup X_n$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Teorema 1.2.2 (Teorema de Representación de Riesz). *Sea F un funcional lineal acotado sobre $L^p(X, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$, donde μ es una medida σ-finita. Entonces existe una única función g en $L^q(X, d\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que,*

$$F(f) = \int_X fg d\mu.$$

Además $\|F\| = \|g\|_q$.

Comentarios.

1. Para $p > 1$ se puede omitir la hipótesis que μ es σ-finita (ver pag. 248 de Royden (1968)).

2. El teorema de de representación de Riesz, junto con el comentario que lo precede dice que el espacio dual de $L^p(X, d\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ es $L^q(X, d\mu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Esta sección finaliza recordando el célebre Lema de Fatou.

Lema 1.2.1 (Lema de Fatou). *Si $f_n : X \to [0, +\infty]$ es medible, para cada entero positivo n, entonces*

$$\int_X \left(\liminf_{n \to \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu.$$

1.3 Funciones Analíticas

En virtud, de que los espacios vectoriales objeto de estudio en este trabajo son espacios de funciones analíticas, se hace necesario introducir esta sección. Aquí se exhibe de manera resumida el contenido requerido de un curso de Análisis Complejo. Las nociones y resultados que se presentan en esta sección han sido tomados de los textos Churchill (1992), Conway (1978) y Rudin (1974).

Se denota y define por $\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de los números complejos. Es conocido que este conjunto forma un espacio de Banach con la norma definida a través del módulo

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}},$$

donde si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, el conjugado de z viene dado por $\overline{z} = x - iy$. El disco abierto con centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ en el plano complejo, se denota por $D(a, r)$. Cuando $a = 0$, el origen, y $r = 1$, se obtiene el disco unitario abierto, y en este caso se denota por $\mathbb{D}$; es decir,

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Se recuerda también, que un conjunto abierto y conexo en el plano complejo se llama *dominio o región* y que un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es conexo si y sólo si cada par de puntos z_1 y z_2 en él, se pueden unir por una linea poligonal, consistente de un número finito de segmentos sucesivos totalmente contenidos en Ω.

Una función compleja de variable compleja definida sobre un dominio Ω se dice *diferenciable* en $z_0 \in \Omega$ si el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. En este caso, el límite se denota por $f'(z_0)$ y se llama la *derivada* de f en z_0. Se dice que una función f es *analítica u holomorfa en un punto* z_0, si existe un entorno abierto, $D(z_0, r)$ de z_0 tal que f es diferenciable en cada punto de $D(z_0, r)$. De igual manera, se dice que f es analítica u holomorfa en un conjunto Ω si f es analítica en cada punto z de Ω. Una función f analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$, se llama *función entera.* El conjunto de las funciones analíticas sobre el conjunto Ω se denota por $H(\Omega)$ y debido a las reglas de derivación es claro que éste es un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos.

Teorema 1.3.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann). *Suponga que*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y que $f'(z_0)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces, las derivadas parciales de primer orden de u y v deben existir en (x_0, y_0) y deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann a saber

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0), \end{cases}$$

donde u_x y u_y denotan las derivadas parciales de la función u con respecto a las variables x e y, respectivamente. Además, $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.

Note que si u y v no satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto, entonces la función $f = u + iv$ no es diferenciable en ese punto; pero existen funciones u y v que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto sin que la función f sea diferenciable en ese punto.

El siguiente resultado es otra propiedad importante de las funciones analíticas que se estará usando repetidas veces en el próximo capítulo.

Teorema 1.3.2. *Si $f'(z) = 0$ en todos los puntos de un dominio Ω, entonces f es una función constante en Ω.*

Un resultado que se debe tener presente cuando se trabaja en espacios de funciones analíticas, es el famoso teorema de la fórmula integral de Cauchy. Antes de enunciarlo, se debe recordar algunos conceptos sobre integración compleja. En primer lugar, recuerde que un *contorno parametrizado* γ no es más que una función compleja definida en un intervalo $[a, b]$ la cual es continua en $[a, b]$ y diferenciable a trozos; es decir, tal que existe un conjunto finito de números $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ el cual satisface $a_1 = a$ y $a_k = b$ y con la propiedad que para cada $1 \leq j \leq k - 1$, la función γ restringida al intervalo (a_j, a_{j+1}) es una curva de clase C^1, es decir, con derivada continua en (a_j, a_{j+1}). Si el contorno γ es una función inyectiva, entonces se dice *simple*; mientras que si $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces el contorno se llama *cerrado*; si el contorno γ es cerrado y $\gamma|_{[a,b)}$ es inyectiva, entonces se le dice *simple y cerrado.*

La integral de una función continua f de valores complejos definida en un dominio Ω que contiene a un contorno γ se define por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt.$$

Note que el lado derecho de esta expresión es la integral de una función compleja de variable real. Similarmente, la integral de f sobre γ con respecto a la longitud de arco viene dada por

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)|\gamma'(t)|\,dt.$$

La integral sobre un contorno y la integral con respecto a la longitud de arco se relacionan mediante la expresión

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\,. \tag{1.5}$$

También es conocido que si f es analítica un dominio simplemente conexo Ω (ver Rudin (1974) para la definición y propiedades de los dominios simplemente conexos) y $z_1, z_2 \in \Omega$, entonces

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_\gamma f'(s)ds, \tag{1.6}$$

para todo contorno γ contenido en Ω con punto inicial en z_1 y punto final z_2.

Con esta introducción, ahora se puede enunciar el célebre teorema de la fórmula integral de Cauchy.

Teorema 1.3.3 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea f analítica en el interior y en los puntos de un contorno cerrado simple C, orientado positivamente (en sentido contrario a las agujas del reloj). Si z_0 es un punto interior a C, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz; \tag{1.7}$$

y en general para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz. \tag{1.8}$$

La expresión en (1.8) se conoce como la *fórmula integral de Cauchy para las derivadas* de la función holomorfa f. Como consecuencia inmediata del resultado anterior surge que si f es analítica en un abierto Ω, entonces la derivada f' también es analítica en Ω; es decir,

$$f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega);$$

de manera entonces que toda función analítica sobre un abierto Ω pertenece a la clase $C^\infty(\Omega)$ de las funciones infinitamente y continuamente diferenciables en Ω. Además, estas funciones coinciden con su serie de Taylor tal como se establece en el siguiente resultado.

Teorema 1.3.4 (Teorema de Taylor). *Si $f \in H(\Omega)$ con Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Entonces para cada $a \in \Omega$, existe $R > 0$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n \tag{1.9}$$

para todo $z \in D(a, R)$.

Otra consecuencia importante de la fórmula integral de Cauchy, es el *principio del máximo* el cual reza lo siguiente.

Teorema 1.3.5 (Principio del módulo máximo). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega)$. Si existe un punto $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante.*

Como consecuencia importante y útil del principio del máximo se puede mencionar el conocido Lema de Schwarz-Pick, herramienta fundamental que permite hacer acotaciones precisas de ciertos operadores sobre ciertos espacios de funciones analíticas que se estudiarán en los capítulos posteriores.

Teorema 1.3.6 (Lema de Schwarz-Pick). *Si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una función analítica, entonces*

$$\left| \frac{\varphi(w) - \varphi(z)}{1 - \bar{\varphi}(w)\varphi(z)} \right| \leq \left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right|$$

y si se obtiene la igualdad para cualquier $z \neq w$ entonces φ es un automorfismo del disco; es decir, una función biyectiva y analítica del disco $\mathbb{D}$ en si mismo.

Otros resultados que se precisan referentes a las propiedades de las funciones analíticas son: el Teorema de la aplicación abierta y el Principio de Identidad de Weierstrass que se enuncian a continuación.

Teorema 1.3.7 (Teorema de la aplicación abierta). *Si Ω es una región y si f es analítica en Ω, entonces $f(\Omega)$ es otra región o un punto.*

Teorema 1.3.8 (Principio de Identidad de Weierstrass). *Sea f analítica en una región Ω del plano complejo y sea*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

Entonces o $Z(f) = \Omega$, o $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω. En el último caso, a cada $a \in Z(f)$ corresponde un único entero positivo $m = m(a)$ tal que

$$f(z) = (z - a)^m g(z) \quad (z \in \Omega),$$

donde g es analítica en Ω y $g(a) \neq 0$; además, $Z(f)$ es a lo mas contable.

Finalmente, se hace una breve introducción referente a la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos. Recuerde que una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en un conjunto Ω, se dice que *converge uniformemente* a una función f *sobre subconjuntos compactos* $K \subset \Omega$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un número natural $N = N(K, \epsilon)$ tal que,

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

para todo $z \in K$ y siempre que $n > N$.

Por ejemplo, la sucesión $\{z^n\}$ converge a la función idénticamente nula ($f \equiv 0$) sobre subconjuntos compactos del disco unitario $\mathbb{D}$, pero la convergencia no es uniforme en todo el disco $\mathbb{D}$.

El siguiente aserto dice que el espacio de las funciones analíticas sobre una región Ω, es un espacio métrico completo con la métrica de la convergencia uniforme sobre compactos.

Teorema 1.3.9. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas sobre un dominio Ω y tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω. Entonces f es analítica en Ω. Además, $f_n' \to f'$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.*

1.4 Automorfismos del disco y la Métrica Pseudohiperbólica

Entre las funciones analíticas definidas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, es de particular interés estudiar aquellas que aplican biyectivamente el disco $\mathbb{D}$ en sí mismo, es decir, los denominados *"automorfismos del disco"*, que por su extenso número de propiedades será de gran utilidad en el desarrollo del presente trabajo. En esta sección, se repasa brevemente las propiedades de los automorfismos del disco y de la métrica pseudohiperbólica, las definiciones y resultados que se presentan aquí han sido tomado del trabajo de Ramos (2002), también se puede consultar el texto de Zhu (1990).

En primer lugar, se recuerda que para $a \in \mathbb{D}$, la función $\varphi_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definida por

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.10}$$

es una función biyectiva del disco en sí mismo. Además, se tiene que éstas funciones verifican

$$\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$$

lo cual nos dice que son autoinversas; en símbolos esto es, $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$. Otras propiedades que se desprenden de manera inmediata de la definición, son las que se presentan a continuación.

Proposición 1.4.1. *Para $a \in \mathbb{D}$ la función φ_a definida en (1.10) satisface:*

(1) $\varphi_a(0) = a$, $\varphi_a(a) = 0$.

(2) $|\varphi_a'(0)| = 1 - |a|^2$, $|\varphi_a'(a)| = (1 - |a|^2)^{-1}$.

(3) Para $z \in \mathbb{D}$ se cumple

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = (1 - |z|^2)|\varphi_a'(z)| = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - z\overline{a}|^2}. \tag{1.11}$$

(4) El jacobiano de φ_a evaluado en $z \in \mathbb{D}$ satisface

$$J_{\varphi_a}(z) = |\varphi_a'(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - z\overline{a}|^4}.$$

(5) Fórmula del cambio de variable

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)dA(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\varphi_a(z)) \frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \overline{a}z|^4} dA(z).$$

Resulta, como una consecuencia del Lema de Schwarz-Pick, que las funciones φ_a (salvo rotaciones de ellas), con $a \in \mathbb{D}$ son las únicas aplicaciones biyectivas del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo. Esta afirmación está formalizada en el teorema siguiente.

Teorema 1.4.1. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica y biyectiva del disco en sí mismo y supongase que $f(\alpha) = 0$, con $\alpha \in \mathbb{D}$. Entonces existe una constante λ, con $|\lambda| = 1$, tal que*

$$f(z) = \lambda\varphi_\alpha(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

El conjunto de los automorfismos del disco se denota por $Aut(\mathbb{D})$; y es conocido, que éste forma un grupo con la operación composición de funciones. Además, a partir de los automorfismos del disco se define una nueva función sobre $\mathbb{D}$, la cual satisface las condiciones de una métrica. Más precisamente, para $z, w \in \mathbb{D}$ se define la relación

$$\rho(z, w) := |\varphi_z(w)| = \left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right|$$

esta relación define una métrica sobre $\mathbb{D}$ llamada la *métrica pseudohiperbólica*.

Entre las propiedades de esta métrica, resalta la *invarianza por automorfismos del disco*. Es decir, la relación ρ satisface

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) = \rho(z, w) \tag{1.12}$$

para todo $\varphi \in Aut(\mathbb{D})$ y todo $z, w \in \mathbb{D}$. Es de notar que la expresión (1.12) confirma que los automorfismos del disco son las funciones con las que se logra la igualdad en el Lema de Schwarz-Pick (véase el Teorema 1.3.6).

Para $a \in \mathbb{D}$ y $r \in (0, 1)$; el disco pseudohiperbólico con centro (pseudohiperbólico) a y radio (pseudohiperbólico) r se define y denota por

$$\Delta(a, r) = \{z \in: \rho(a, z) < r\}.$$

Resulta que el disco pseudohiperbólico $\Delta(a,r)$ es un disco euclídeo tal como se establece a continuación.

Teorema 1.4.2. *Para $a \in \mathbb{D}$ y $r \in (0,1)$, $\Delta(a,r)$ es un disco euclídeo con centro C y radio R dados por*

$$C = \frac{1-r^2}{1-r^2|a|^2}a \quad y \quad R = \frac{1-|a|^2}{1-r^2|a|^2}r.$$

Para ilustrar el uso de las propiedades de los automorfismos del disco y de la métrica pseudohiperbólica, se finaliza esta sección enunciando y demostrando una propiedad que se usa repetidas veces en el Capítulo 3 de este trabajo. A partir de ahora, el símbolo $\simeq$ se emplea para denotar cantidades equivalentes; es decir, $a \simeq b$ (a y b son cantidades equivalentes) si existen dos constantes positivas K_1, K_2, que no dependen ni de a ni de b, tal que

$$K_1 a \leq b \leq K_2 a.$$

Proposición 1.4.2. *Para $\rho(z,w) < r$ con $r \in (0,1)$ se tiene la equivalencia*

$$1-|w| \simeq 1-|z|.$$

Demostración: Sea $r \in (0,1)$ y $z, w \in \mathbb{D}$ tales que $\rho(z,w) < r$. Por la propiedad (1.11) de los automorfismos del disco y de la desigualdad triangular aplicada a la expresión $|1-\overline{z}w|$ se puede escribir

$$\begin{aligned} 1-|\varphi_z(w)|^2 &= \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|1-w\overline{z}|^2} \\ &\leq (1-|w|^2)\frac{1-|z|^2}{(1-|w|^2)} \\ &= \frac{(1+|w|)(1+|z|)(1-|z|)}{1-|w|} \\ &\leq 4\frac{1-|z|}{1-|w|}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $|\varphi_z(w)| < r$, se tiene

$$1 - r^2 < 1 - |\varphi_z(w)|^2$$

de donde se obtiene la primera de las desigualdades buscadas, a saber

$$\frac{1-r^2}{4}(1-|w|) \leq 1 - |z|$$

La otra desigualdad se puede obtener al considerar la simetría de la función ρ, intercambiando los papeles de z y w. ■

1.5 Funciones subarmónicas

En esta sección se da la definición de función subarmónica junto con sus propiedades, específicamente, las exigidas en este trabajo. Este tipo de funciones serán de gran utilidad al momento de establecer desigualdades en las demostraciones de algunos de los teoremas principales del último capítulo. Las nociones presentadas aquí han sido tomadas del trabajo de García (2008), también se puede consultar el texto de Ransford (1995).

Definición 1.5.1 (Función subarmónica). Sea $u(z) = f(x, y)$ con $z = x + iy$, una función real continua definida en un dominio Ω del plano complejo. La función u se dice subarmónica en Ω, si y sólo si satisface la relación

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

para cada $a \in \Omega$ y para cualquier radio $r > 0$ tal que el disco $D(a, r)$ esté contenido completamente en Ω.

Si U es un conjunto abierto y $a \in U$, entonces existe $\rho > 0$ tal que el disco de centro a y radio ρ, $\overline{D}(a, \rho)$ está totalmente contenido en U. Entonces, si f es analítica en U, claramente, $|f|$ es continua en U, de la fórmula integral de Cauchy se sigue

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{1.13}$$

Luego, haciendo la parametrización $z = a + \rho e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta < 2\pi$ se obtiene la igualdad del valor medio para funciones analíticas;

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta \tag{1.14}$$

de donde al tomar módulo, se sigue que (véase (1.5))

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|d\theta$$

lo que prueba que la función $u = |f|$ es subarmónica en U si f es analítica en U.

Por otro lado, si $p > 1$ entonces de la desigualdad de Hölder se sigue

$$\begin{aligned}
|f(a)| &\leq \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|\frac{1}{2\pi}d\theta \\
&\leq \left(\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^p \frac{1}{2\pi}d\theta\right)^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} 1^q \frac{1}{2\pi}d\theta\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^p \frac{1}{2\pi}d\theta\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Luego, elevando ambos lados a la potencia $p > 1$, se tiene

$$|f(a)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Lo anterior permite establecer el siguiente resultado.

Teorema 1.5.1. *Si f es analítica en un conjunto abierto U, entonces para $p \geq 1$ la función $u = |f|^p$ es subarmónica sobre U.*

Observación. Realmente, el teorema anterior es válido para $p > 0$; es decir, si $p > 0$ y la función f es analítica en el conjunto abierto U, entonces la función $u = |f|^p$ es subarmónica en el conjunto abierto U. (Véase Ransford (1995))

Volviendo a la expresión (1.14), en virtud de su independencia del radio r, se puede multiplicar ambos lados de la igualdad por rdr, luego integrar con respecto a r desde $r=0$ hasta $r=R$ y aplicar el Teorema de Fubini y así obtener

$$\begin{aligned} f(a)\int_0^R rdr &= \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})d\theta rdr \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})rd\theta dr \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{D(a,R)} f(a+re^{i\theta})rdrd\theta. \end{aligned}$$

Luego, de resolver la integral del miembro izquierdo y acomodar algunos elementos resulta

$$f(a)=\frac{1}{\pi R^2}\int_{D(a,R)} f(a+re^{i\theta})rdrd\theta; \tag{1.15}$$

así, denotando por

$$dA(z)=\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{r}{\pi}drd\theta$$

la medida bidimensional normalizada de Lebesgue sobre $\mathbb{D}$ con $z=x+iy=re^{i\theta}$, se obtiene

$$f(a)=\frac{1}{A(D(a,R))}\int_{D(a,R)} f(z)dA(z),$$

donde $A(E)$ es la medida del subconjunto medible E de $\mathbb{D}$. Luego, al tomar módulo, se tienen la desigualdad siguiente

$$|f(a)|\leq\frac{1}{A(D(a,R))}\int_{D(a,R)} |f(z)|dA(z). \tag{1.16}$$

También, como consecuencia de la desigualdad de Hölder se establece

$$|f(a)|^p\leq\frac{1}{A(D(a,R))}\int_{D(a,R)} |f(z)|^p dA(z) \tag{1.17}$$

para $p\geq 1$. Es conocido que esta última desigualdad también se verifica para $0<p<1$.

Existen varios criterios que permiten establecer la subarmonicidad de una función, pero en virtud, de que los objetivos de este trabajo no están enfocados en este tipo de funciones, solo se mencionan dos criterios de interés. Recuerde que, dada una función real f definida en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ tal que sus derivadas parciales de segundo orden f_{xx} y f_{yy} existen en todo punto de Ω, entonces el *Laplaciano* de f está dado por

$$\Delta f = f_{x,x} + f_{y,y}.$$

Note que, como consecuencia de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$\Delta f = 4\partial\overline{\partial}f, \tag{1.18}$$

donde

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \text{y} \quad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Ahora, se enuncia un primer criterio de subarmonicidad que se usará en el Capítulo 3.

Teorema 1.5.2. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y sea $u \in C^2(U)$, es decir, todas las derivadas parciales de segundo orden de u existen y son continuas en U. Entonces u es subarmónica en U si y sólo si $\Delta u \geq 0$ en U.*

El próximo criterio de subarmonicidad, esta relacionado con las funciones convexas, por este motivo, se da su definición y algunas de sus propiedades.

Definición 1.5.2. Una función $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$, con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, se dice *convexa*, si para cada $t_1, t_2 \in (a, b)$ y $\lambda \in [0, 1]$, se verifica la relación

$$\psi((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq (1-\lambda)\psi(t_1) + \lambda\psi(t_2)$$

Las funciones convexas satisfacen la siguiente desigualdad.

Teorema 1.5.3 (Desigualdad de Jensen). *Sea $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función convexa con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, considere (Ω, μ) un espacio medible con $\mu(\Omega) = 1$ y sea $f : \Omega \to (a, b)$ una función integrable. Entonces*

$$\psi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega \psi \circ f d\mu$$

Este resultado permite demostrar el siguiente criterio.

Teorema 1.5.4. *Sea* $u : U \to [a, b)$ *una función subarmónica sobre un conjunto* U *de* $\mathbb{C}$*, donde* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *y sea* $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ *una función creciente y convexa. Entonces* $\psi \circ u$ *es subarmónica sobre* U*, donde se define*

$$\psi(a) = \lim_{t \to a^+} \psi(t).$$

Otra propiedad importante que hay que tomar en cuenta cuando se trabaja con funciones subarmónicas lo constituye el famoso Principio del Módulo Máximo que se enuncia a continuación.

Teorema 1.5.5 (Principio del Módulo Máximo Para Funciones Subarmónicas). *Suponga que* u *es una función subarmónica sobre el disco* $\mathbb{D}$*.*

1. *Si* u *tiene un máximo en* $\mathbb{D}$*, entonces* u *es constante.*

2. *Si* $\lim_{z \to \zeta} u(z) \leq 0$ *para todo* ζ *en la frontera de* $\mathbb{D}$*, entonces* $u \geq 0$ *sobre* $\mathbb{D}$*.*

Como consecuencia del principio del máximo se puede mencionar el siguiente resultado.

Teorema 1.5.6. *Para una función subarmónica* u *definida en el disco unitario* $\mathbb{D}$ *y* $0 \leq r < 1$*, la función promedio de* u *en* $\mathbb{D}$*,*

$$P_u(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta,$$

es una función creciente de r*.*

CAPÍTULO 2
ESPACIOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS

Este capítulo constituye uno de los más importantes de este trabajo, ya que en él se estudia de manera detallada las propiedades y características de los espacios de funciones holomorfas donde posteriormente se analizará la continuidad del operador de composición. Más precisamente, entre otras propiedades, se establece que los espacios α-Bloch, α-Bloch pequeño, Dirichlet con peso y Q_s son espacios de Banach (con sus respectivas normas). El capítulo se completa con una sección donde se estudian las relaciones entre estos espacios y analizando bajo cuáles condiciones las series de Hadamard o lacunarias pertenecen a estos espacios.

2.1 Los espacios α-Bloch

Dado α un parámetro positivo, una función analítica f definida sobre $\mathbb{D}$ se dice que pertenece a la clase α-Bloch, denotado por $f \in \mathcal{B}_\alpha$, si satisface la relación

$$\|f\|_\alpha := \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|\} < \infty. \tag{2.1}$$

Se puede notar que si $f, g \in \mathcal{B}_\alpha$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces se verifica

$$\begin{aligned} \|\lambda f + g\|_\alpha &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |(\lambda f + g)'(z)|\} \\ &\le |\lambda| \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)|\} + \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |g'(z)|\} \\ &= |\lambda|\|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha < \infty, \end{aligned} \tag{2.2}$$

lo cual dice que $\mathcal{B}_\alpha$ es un subespacio del espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, $H(\mathbb{D})$, denominado *espacio α-Bloch*.

A continuación se muestran algunos ejemplos de funciones que están en estos espacios.

(1) Las funciones constantes sobre $\mathbb{D}$ están en $\mathcal{B}_\alpha$.

(2) La identidad $i_d(z) = z$ está en $\mathcal{B}_\alpha$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \|i_d\|_\alpha &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |i_d'(z)|\} \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha\} = 1, \end{aligned}$$

pues $\alpha > 0$. Así, $\|i_d\|_\alpha = 1$, por tanto $i_d \in \mathcal{B}_\alpha$.

Ahora se prueba que los automorfismos del disco son elementos del espacio $\mathcal{B}_\alpha$.

Proposición 2.1.1. *Sea $a \in \mathbb{D}$ y $\alpha > 0$, entonces $\varphi_a \in \mathcal{B}_\alpha$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{D}$ y $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, un automorfismo del disco, entonces de la desigualdad triangular, se sigue que,

$$\begin{aligned} \|\varphi_a\|_\alpha &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |\varphi_a'(z)|\} \\ &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\{|\varphi_a'(z)|\} \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\left\{\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}z|^2}\right\} \\ &\leq \frac{1-|a|^2}{(1-|a|)^2} \\ &= \frac{1+|a|}{1-|a|} < \infty \end{aligned}$$

ya que $a \in \mathbb{D}$ es fijo. ■

De hecho, el siguiente resultado muestra que toda función analítica y acotada sobre $\mathbb{D}$ está en el espacio $\alpha - \mathit{Bloch}$ cuando $\alpha \geq 1$.

Proposición 2.1.2. *Si $\alpha \geq 1$, entonces $H^\infty \subset \mathcal{B}_\alpha$, más aún, $\|f\|_\alpha \leq \|f\|_\infty$ para toda f en H^∞.*

Demostración. Sea f analítica y acotada, y se considera $r \in (0,1)$. Entonces por la fórmula integral de Cauchy para la derivada (véase el Teorema 1.3.3), se tiene que

$$f'(0) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{|s|=r}\frac{f(s)}{s^2}\,ds,$$

tomando módulo se obtiene

$$\begin{aligned} |f'(0)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|s|=r}\frac{|f(s)|}{|s|^2}\,|ds| \\ &= \frac{1}{2\pi r^2}\int_{|s|=r}|f(s)|\,|ds| \\ &\leq \frac{1}{2\pi r^2}\int_{|s|=r}||f||_\infty\,|ds| \\ &= \frac{1}{2\pi r^2}||f||_\infty 2\pi r \\ &= \frac{||f||_\infty}{r}. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $r \to 1^-$ se obtiene $|f'(0)| \leq ||f||_\infty$ para toda $f \in H^\infty$. En particular, para cada $z \in \mathbb{D}$, la función $h = f \circ \varphi_z \in H^\infty$, y por tal motivo, se puede escribir $|h'(0)| \leq ||h||_\infty$; pero $|h'(0)| = (1-|z|^2)|f'(z)|$ y

$$\|h\|_\infty = \sup_{w\in\mathbb{D}}\{|f(\varphi_z(w))|\} = \sup_{t\in\mathbb{D}}\{|f(t)|\} = \|f\|_\infty,$$

donde se ha usado que $\varphi_z(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Por tanto, sustituyendo y usando el hecho que $\alpha \geq 1$, se obtiene

$$\left(1-|z|^2\right)^\alpha |f'(z)| \leq \left(1-|z|^2\right)|f'(z)| \leq \|f\|_\infty$$

para cada $z \in \mathbb{D}$. Lo cual demuestra la proposición. ■

También se verifica la siguiente proposición.

Proposición 2.1.3. *La relación $\|\cdot\|_\alpha$ es una seminorma para el espacio $\mathcal{B}_\alpha$.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{B}_\alpha$, entonces de la relación (2.2) con $\lambda = 1$ se tiene

$$\|f + g\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha.$$

También, es fácil ver que

$$\|\lambda f\|_\alpha = |\lambda|\|f\|_\alpha,$$

para toda $f \in \mathcal{B}_\alpha$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego, solamente se debe verificar que

$$\|f\|_\alpha = 0 \text{ si y sólo si } f \text{ es constante.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \|f\|_\alpha = 0 \quad &\text{si y sólo si} \quad \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha|f'(z)|\} = 0, \\ &\text{si y sólo si} \quad |f'(z)| = 0, \quad \text{para toda } z \in \mathbb{D}, \\ &\text{si y sólo si} \quad f'(z) = 0, \quad \text{para toda } z \in \mathbb{D}, \end{aligned}$$

lo cual ocurre, en virtud del Teorema 1.3.2, si y sólo si f es constante, pues $\mathbb{D}$ es un dominio. ■

Se puede aprovechar que $\|\cdot\|_\alpha$ es una seminorma para convertir a $\mathcal{B}_\alpha$ en un espacio normado.

Proposición 2.1.4. *La relación*

$$\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} = |f(0)| + \|f\|_\alpha, \quad f \in \mathcal{B}_\alpha, \tag{2.3}$$

define una norma para $\mathcal{B}_\alpha$.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{B}_\alpha$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

1.) De la relación (2.3) es claro que,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{\mathcal{B}_\alpha} &= |(f+g)(0)| + \|f+g\|_\alpha \\ &\leq |f(0)| + \|f\|_\alpha + |g(0)| + \|g\|_\alpha \\ &= \|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} + \|g\|_{\mathcal{B}_\alpha}, \end{aligned}$$

para toda $f, g \in \mathcal{B}_\alpha$.

2.) Similarmente por (2.3)

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{\mathcal{B}_\alpha} &= |(\lambda f)(0)| + \|\lambda f\|_\alpha \\ &= |\lambda||f(0)| + |\lambda|\|f\|_\alpha \\ &= |\lambda|\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}, \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{B}_\alpha$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

3.) Finalmente, si $\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} = 0$ entonces $|f(0)| + \|f\|_\alpha = 0$; esto implica que $|f(0)| = 0$ y que $\|f\|_\alpha = 0$, es decir, $f(0) = 0$ y f es constante en $\mathbb{D}$, lo cual dice que $f(z) = 0$ para toda $z \in \mathbb{D}$. ■

Teorema 2.1.1. *$\mathcal{B}_\alpha$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{B}_\alpha, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha})$, entonces por la definición de la seminorma en $\mathcal{B}_\alpha$, se sabe que,

$$(1 - |z|^2)^\alpha |f'(z)| \leq \|f\|_\alpha$$

para toda $z \in \mathbb{D}$ y toda función $f \in \mathcal{B}_\alpha$. En particular, esta desigualdad se cumple para la función $f_n - f_m$, por lo tanto, se tiene la relación

$$|f_n'(z) - f_m'(z)| \leq \frac{1}{(1 - |z|^2)^\alpha} \|f_n - f_m\|_\alpha$$

para toda $z \in \mathbb{D}$. Ahora bien, si $z \in K$, entonces como la función $h(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha}$ es continua sobre el compacto K, existe una constante $C_K > 0$, tal que,

$$|f_n'(z) - f_m'(z)| \leq C_K \|f_n - f_m\|_\alpha$$

para todo $z \in K$. lo que dice que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Entonces como una consecuencia del Teorema 1.3.9, existe una función $g \in H(\mathbb{D})$ tal que $f_n' \to g$ cuando $n \to \infty$

uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Además, como la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy en $(\mathcal{B}_\alpha, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha})$ entonces la sucesión $\{f_n(0)\}$ también es de Cauchy pero en $\mathbb{C}$, así, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f_n(0) \to \lambda$ cuando $n \to \infty$. Se define entonces la función

$$f(z) = \lambda + \int_0^z g(s)ds, \quad z \in \mathbb{D};$$

la cual es analítica en $\mathbb{D}$ y satisface $f(0) = \lambda$ y $f'(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Para establecer que $f \in \mathcal{B}_\alpha$ y que $\|f_n - f\|_{\mathcal{B}_\alpha} \to 0$ cuando $n \to \infty$ primero considérese la dilatación $f_r(z) = f(rz)$, entonces por la definición de la norma se tiene que,

$$\|f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |f_r'(z)|\} + |f_r(0)| = r\sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |f'(rz)|\} + |f(0)|.$$

Se puede notar que $\|f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ crece a la norma $\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ cuando r crece a 1, en virtud del principio del máximo (Vease el Teorema 1.3.5). En símbolos, esto es

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} = \|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}. \tag{2.4}$$

Además, como $\{f_n\}$ es de Cauchy en $(\mathcal{B}_\alpha, \|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha})$, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ cuando $n, m \geq N$. Entonces para $r < 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \|(f_n)_r - f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} &\leq \|(f_n)_r - (f_m)_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} + \|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} \\ &\leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{B}_\alpha} + \|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} \\ &< \varepsilon + \|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} \end{aligned}$$

siempre que $n \geq N$.

Se afirma que el segundo término se aproxima a cero cuando $m \to \infty$. En efecto,

$$\|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha |f_m'(rz) - f'(rz)|\} + |f_m(0) - f(0)|,$$

también se tiene, por construcción, que $|f_m(0) - f(0)| \to 0$ si $m \to \infty$, y

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)|f_m'(rz) - f'(rz)|\} &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\{|f_m'(rz) - f'(rz)|\} \\ &= \sup_{w\in D_r}\{|f_m'(w) - f'(w)|\} \\ &\leq \sup_{w\in \overline{D_r}}\{|f_m'(w) - f'(w)|\};\end{aligned}$$

luego, como $f_m \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, entonces por el Teorema 1.3.9, se tiene que $f_m' \to f'$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, así $\|(f_m)_r - f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ también se aproxima cero.

De esta manera $\|(f_n)_r - f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} \leq \varepsilon$ para $n \geq N$ y todo $r < 1$. Ahora si $r \to 1^-$, se puede usar la expresión (2.4) y obtener que

$$\lim_{r\to 1^-} \|(f_n)_r - f_r\|_{\mathcal{B}_\alpha} \leq \varepsilon, \quad \text{para } n \geq N$$

es decir;

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{B}_\alpha} \leq \varepsilon, \quad \text{para } n \geq N,$$

así $\|f_n - f\|_{\mathcal{B}_\alpha} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, considerando $\varepsilon = 1$, se puede encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{B}_\alpha} < 1,$$

siempre que $n \geq n_0$, en particular

$$\|f_{n_0} - f\|_\alpha < 1,$$

entonces, $h = f_{n_0} - f \in \mathcal{B}_\alpha$. Finalmente, como $\mathcal{B}_\alpha$ es un espacio vectorial se tiene que $f_{n_0} - f - f_{n_0} \in \mathcal{B}_\alpha$, así $-f \in \mathcal{B}_\alpha$ y $f \in \mathcal{B}_\alpha$. Esto finaliza la prueba. ■

Comentario. En lo que resta de este trabajo, cuando $\alpha = 1$, se obtiene el espacio clásico de Bloch y será denotado por $\mathcal{B}$.

2.2 El espacio α-Bloch pequeño

Ahora se centra la atención en un subespacio del espacio $\alpha - Bloch$ que será de gran utilidad para estudiar ciertas propiedades del operador de composición actuando en el espacio $\alpha - Bloch$ (véase la segunda sección del Capítulo 3).

Definición 2.2.1. Se dice que una función analítica f definida en el disco $\mathbb{D}$, pertenece a la clase $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ si

$$\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^{\alpha}|f'(z)| = 0. \tag{2.5}$$

Entonces se tiene el siguiente resultado

Teorema 2.2.1. *$\mathcal{B}_{\alpha,0}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}_{\alpha}$.*

Demostración. Primero se prueba que $\mathcal{B}_{\alpha,0} \subset \mathcal{B}_{\alpha}$. Con este fin, sea $f \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$, entonces $\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^{\alpha}|f'(z)| = 0$, es decir, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $r_0 \in (0,1)$ tal que la función

$$g(z) = (1-|z|^2)^{\alpha}|f'(z)|$$

satisface $g(z) < \varepsilon$ siempre que $r_0 < |z| < 1$.

Por otro lado si $|z| \leq r_0$, entonces la función g es continua sobre el compacto $\mathbb{D}_{r_0} = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r_0\}$, luego existe $M > 0$ tal que $g(z) \leq M$, para todo $z \in \mathbb{D}_{r_0}$. Así, se tiene que

$$(1-|z|^2)^{\alpha}|f'(z)| \leq \max\{\varepsilon, M\} = \widetilde{M}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Tomando supremo sobre todos los $z \in \mathbb{D}$, se obtiene que

$$\|f\|_{\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^{\alpha}|f'(z)|\} \leq \widetilde{M}$$

y $f \in \mathcal{B}_{\alpha}$.

Ahora se prueba que $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ es subespacio de $\mathcal{B}_\alpha$. Sean $f, g \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^\alpha|(\lambda f+g)'(z)| &\leq \lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^\alpha|(\lambda f)'(z)| + \lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^\alpha|g'(z)| \\
&= |\lambda|\lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^\alpha|f'(z)| + \lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^\alpha|g'(z)| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda f + g \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$.

Finalmente, se prueba que $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{B}_\alpha$. Con este fin, sea $f \in \overline{\mathcal{B}_{\alpha,0}}$, entonces existe una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{B}_{\alpha,0}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{\mathcal{B}_\alpha} = 0. \tag{2.6}$$

En particular $\{f_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{B}_\alpha$, el cual es completo, por tal motivo, se afirmar que $f \in \mathcal{B}_\alpha$ y así; $f \in H(\mathbb{D})$. Falta demostrar que

$$\lim_{|z|\to 1^-}\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f'(z)| = 0. \tag{2.7}$$

Con tal fin, sea $\varepsilon > 0$, entonces de la expresión (2.6) se garantiza que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{n_0} - f\|_{\mathcal{B}_\alpha} < \varepsilon$. Así, por la definición de la norma del espacio $\alpha - Bloch$ se debe tener que,

$$\left(1-|z|^2\right)^\alpha\left|f'_{n_0}(z) - f'(z)\right| < \varepsilon,$$

para todo $z \in \mathbb{D}$; esto último junto con la desigualdad triangular implica que,

$$\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f'(z)| < \left(1-|z|^2\right)^\alpha\left|f'_{n_0}(z)\right| + \varepsilon$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, tomando límite cuando $|z| \to 1^-$ se concluye que,

$$0 \leq \lim_{|z|\to 1^-}\left(1-|z|^2\right)^\alpha|f'(z)| \leq \varepsilon$$

y la prueba sigue de la arbitrariedad de ε. ■

Ahora se verá que las funciones en el pequeño espacio de Bloch se pueden aproximar por sus dilataciones.

Teorema 2.2.2. *Sea $f \in \mathcal{B}_\alpha$, entonces $f \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$ si y sólo si $||f_r - f||_\alpha \to 0$ $(r \to 1^-)$, donde $f_r(z) = f(rz)$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y $r \in (0,1)$.*

Demostración. Observe que cada f_r es analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ por lo tanto f_r' también será analítica en $\overline{\mathbb{D}}$, en particular, f_r' es continua sobre el compacto $\overline{\mathbb{D}}$, entonces existe una constante $M > 0$ tal que $|f_r'(z)| \leq M$ para toda $z \in \overline{\mathbb{D}}$; luego se tiene

$$\lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^\alpha |f_r'(z)| \leq \lim_{|z|\to 1^-} (1-|z|^2)^\alpha M = 0,$$

por lo tanto $f_r \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$. Ahora como $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ es cerrado en $\mathcal{B}_\alpha$ si $||f_r - f||_\alpha \to 0$ entonces $f \in B_{\alpha,0}$.

Recíprocamente, sea $f \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$, entonces para algún $\varepsilon > 0$ existe una $\delta \in (0,1)$ tal que $(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| < \varepsilon$ para toda $\delta < |z| < 1$. Considere

$$\begin{aligned} ||f_r - f||_\alpha &= \sup\{(1-|z|^2)^\alpha |rf'(rz) - f'(z)| : z \in \mathbb{D}\} \\ &\leq \sup\{(1-|z|^2)^\alpha |rf'(rz) - f'(z)| : \delta < |z| < 1\} \\ &\quad + \sup\{(1-|z|^2)^\alpha |rf'(rz) - f'(z)| : |z| \leq \delta\}. \end{aligned}$$

El segundo término se aproxima a cero cuando $r \to 1^-$ ya que $rf'(rz) \to f'(z)$ uniformemente sobre el compacto $|z| \leq \delta$. Si $\delta < r < 1$ y $\delta < |z| < 1$, entonces $\delta^2 < r|z| < 1$ y por lo tanto,

$$(1-|z|^2)^\alpha |rf'(rz)| \leq (1-r^2|z|^2)^\alpha |f'(rz)| < \varepsilon.$$

De esta manera se tiene

$$\begin{aligned} ||f_r - f||_\alpha &\leq \sup\{(1-|z|^2)^\alpha |rf'(rz) - f'(z)| : \delta < |z| < 1\} \\ &\leq \sup\{(1-|z|^2)^\alpha |rf'(rz)| : \delta^2 < r|z| < 1\} \\ &\quad + \sup\{(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| : \delta < |z| < 1\} < 2\varepsilon \end{aligned}$$

para toda $\delta < r < 1$, y se tiene

$$\lim_{r\to 1^-} ||f_r - f||_\alpha \leq 2\varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, se concluye que $||f_r - f||_\alpha \to 0$ $(r \to 1^-)$ siempre que $f \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$. ■

Ahora se establecerá que las funciones en $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ se pueden aproximar por polinomios.

Corolario 2.2.1. *$\mathcal{B}_{\alpha,0}$ es la clausura de los polinomios en $\mathcal{B}_\alpha$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$ y $\epsilon > 0$, entonces por el Teorema 2.2.2 se tiene que

$$\lim_{r\to 1^-} \|f_r - f\|_\alpha = 0,$$

de aquí que existe $r_0 \in (0,1)$ tal que $\|f_r - f\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2}$ siempre que $1 - r_0 < r < 1$. Ahora, si $r \in (1 - r_0, 1)$ es fijo, entonces como la función f_r es analítica en $\overline{\mathbb{D}}$, por el Teorema 1.3.4, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_r - P_{n_0}\|_\infty \leq \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f_r(z) - P_{n_0}(z)| < \frac{\epsilon}{2},$$

donde P_{n_0} es el polinomio de Taylor de grado n_0 de la función f_r. Ahora, como $\|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\infty$ se concluye que

$$\|f_r - P_{n_0}\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalmente, para el r dado y el n_0 encontrado, se tiene

$$\|f - P_{n_0}\|_\alpha \leq \|f - f_r\|_\alpha + \|f_r - P_{n_0}\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

que era lo que se quería demostrar. ■

Comentario. Del resultado anterior, se puede observar que para cada $\alpha > 0$, el espacio $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ es separable pues, es claro que cada polinomio analítico se puede aproximar por polinomios con coeficientes cuyas parte real e imaginaria sean racionales.

2.3 Los espacios de Dirichlet con peso

Para $s > -1$, se define $\mathcal{D}_s$ como el conjunto formado por aquellas funciones $f \in H(\mathbb{D})$ para el cual

$$\|f\|_{\mathcal{D}_s} := \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(log \frac{1}{|z|} \right)^s dA(z) \right)^{1/2} < +\infty$$

donde $dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{r}{\pi} drd\theta$ denota la medida de área de Lebesgue sobre $\mathbb{D}$ y $z = x + iy = re^{i\theta}$.

Para $f, g \in \mathcal{D}_s$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ la desigualdad triangular y la desigualdad de Hölder implican

$$\begin{aligned}
\|\lambda f + g\|^2_{\mathcal{D}_s} &= \int_{\mathbb{D}} |(\lambda f + g)'(z)||(\lambda f + g)'(z)| \left(log \frac{1}{|z|} \right)^s dA(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} |\lambda f'(z)||\lambda f'(z) + g'(z)| \left(log \frac{1}{|z|} \right)^s dA(z) \\
&\quad + \int_{\mathbb{D}} |g'(z)||\lambda f'(z) + g'(z)| \left(log \frac{1}{|z|} \right)^s dA(z) \\
&\leq \|\lambda f\|_{\mathcal{D}_s} \|\lambda f + g\|_{\mathcal{D}_s} + \|g\|_{\mathcal{D}_s} \|\lambda f + g\|_{\mathcal{D}_s} \\
&= (|\lambda| \|f\|_{\mathcal{D}_s} + \|g\|_{\mathcal{D}_s})(\|\lambda f + g\|_{\mathcal{D}_s}).
\end{aligned}$$

Así, se tiene que,

$$\|\lambda f + g\|_{\mathcal{D}_s} \leq |\lambda| \|f\|_{\mathcal{D}_s} + \|g\|_{\mathcal{D}_s} < \infty, \tag{2.8}$$

de donde se concluye que $\mathcal{D}_s$ es un subespacio del espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$.

Definición 2.3.1. Para $s > -1$, el espacio $\mathcal{D}_s$ se conoce como el espacio de Dirichlet con peso.

Entre las funciones que se encuentran en este tipo de espacio se pueden mencionar,

(1) Las funciones constantes sobre $\mathbb{D}$ están en $\mathcal{D}_s$.

(2) La identidad $i_d(z) = z$ está en $\mathcal{D}_s$.

En efecto, usando coordenadas polares, se tiene que,

$$\begin{aligned} \|i_d\|_{\mathcal{D}_s}^2 &= \int_{\mathbb{D}} 1 \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^s dA(z) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\log \frac{1}{r}\right)^s \frac{r}{\pi} d\theta dr \\ &= 2\int_0^1 \left(\log \frac{1}{r}\right)^s r dr \\ &= 2\int_0^{\infty} \tau^s e^{-\tau} d\tau = 2\Gamma(s+1), \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se ha usado el cambio $\tau = \log \frac{1}{r}$ y $\Gamma(s)$ es la función Gamma (véase Apostol (1981), para la definición y propiedades de la función Gamma).

Proposición 2.3.1. *La relación* $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_s}$ *define una seminorma en el espacio* $\mathcal{D}_s$.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}_s$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces es claro que,

$$\|f\|_{\mathcal{D}_s} \geq 0$$

y también es fácil ver que

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{D}_s} = |\lambda| \|f\|_{\mathcal{D}_s} \tag{2.9}$$

Además, de la relación (2.8) con $\lambda = 1$ se sigue que

$$\|f+g\|_{\mathcal{D}_s} \leq \|f\|_{\mathcal{D}_s} + \|g\|_{\mathcal{D}_s}. \tag{2.10}$$

Por último, falta verificar que,

$$\|f\|_{D_s} = 0 \text{ si y sólo si } f \text{ es constante.}$$

En efecto,

$$\|f\|_{D_s} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \|f\|_{\mathcal{D}_s} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(log\frac{1}{|z|} \right)^s dA(z) \right)^{1/2} = 0,$$

$$\text{si y sólo si} \quad |f'(z)|^2 \left(log\frac{1}{|z|} \right)^s = 0, \quad \text{para toda } z \in \mathbb{D},$$

$$\text{si y sólo si} \quad |f'(z)|^2 = 0, \quad \text{para toda } z \in \mathbb{D},$$

$$\text{si y sólo si} \quad f'(z) = 0 \quad \text{para toda } z \in \mathbb{D}.$$

Lo cual ocurre si y sólo si f es constante, en virtud del Teorema 1.3.2 pues, $\mathbb{D}$ es un dominio.

A partir de la seminorma establecida se define una nueva función que hace de $\mathcal{D}_s$ un espacio normado tal como se pudo observar en la demostración de la Proposición 2.1.4; formalmente, se tiene.

Proposición 2.3.2. *La relación*

$$\|f\|_D = |f(0)| + \|f\|_{\mathcal{D}_s}, \quad f \in \mathcal{D}_s \tag{2.11}$$

define una norma para $\mathcal{D}_s$.

Demostración. Véase la demostración de la Proposición 2.1.4. ∎

La norma definida en la proposición anterior convierte a $\mathcal{D}_s$ en un espacio de Banach. Para demostrar esta afirmación, se requiere del siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. *Sean $s > -1$ y K cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces existe una constante positiva $C = C(K) > 0$ tal que*

$$\sup_{z \in K} |f'(z)| \leq C\|f\|_{\mathcal{D}_s}$$

para toda $f \in \mathcal{D}_s$.

Demostración. Sea K un subconjunto compacto en $\mathbb{D}$. Sin perder generalidad, se puede suponer que

$$K = \overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

para algún $r \in (0, 1)$; puesto que cualquier compacto en $\mathbb{D}$ puede ser encerrado en un disco del tipo considerado.

Sea $f \in \mathcal{D}_s$ y $R \in (r, 1)$. Entonces, por la fórmula integral de Cauchy (véase Teorema 1.3.3) se puede escribir

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=R} \frac{f'(w)}{w - z} dw$$

para todo $z \in K$. Luego, parametrizando, $w = Re^{i\theta}$ y $dw = iRe^{-i\theta} d\theta$. Así,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z} iRe^{-i\theta} d\theta,$$

ahora, tomando módulo, se obtiene

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f'(Re^{i\theta})|}{|Re^{i\theta} - z|} R d\theta \tag{2.12}$$

para toda $z \in K$ y todo $R \in (r, 1)$.

Si se selecciona

$$R \geq \frac{3r + 1}{4},$$

entonces como $z \in K$, se obtiene que

$$\begin{aligned} |Re^{i\theta} - z| &\geq |Re^{i\theta}| - |z| = |R| - |z| \geq R - r \\ &\geq \frac{3r + 1}{4} - r = \frac{1 - r}{4}, \end{aligned}$$

de donde se encuentra la acotación

$$\frac{1}{|Re^{i\theta} - z|} \leq \frac{1 - r}{4}.$$

Sustituyendo esta última expresión en (2.12) produce

$$|f'(z)| \leq \frac{2}{\pi(1 - r)} \int_0^{2\pi} |f'(Re^{i\theta})| R d\theta \tag{2.13}$$

para toda $z \in K$ y todo $R \geq \frac{3r+1}{4}$.

Ahora, usando el hecho que $0 < r < \frac{3r+1}{4} \leq R < 1$, entonces para $s > -1$ se tiene $\left(\log \frac{1}{R}\right)^s > 0$, como esta expresión no depende del parámetro θ entonces (2.13) se puede escribir

$$|f'(z)| \left(\log \frac{1}{R}\right)^s \leq \frac{2}{\pi(1-r)} \int_0^{2\pi} |f'(Re^{i\theta})| \left(\log \frac{1}{R}\right)^s R d\theta.$$

Luego, al integrar con respecto a R desde $R_1 = \frac{3r+1}{4}$ hasta $R_2 = \frac{r+3}{4}$, y de la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_{R_1}^{R_2} |f'(z)| \left(\log \frac{1}{R}\right)^s dR &\leq \frac{2}{(1-r)} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} |f'(Re^{i\theta})| \left(\log \frac{1}{R}\right)^s \frac{R}{\pi} d\theta dR \\
&= \frac{2}{(1-r)} \int_{R_1<|w|<R_2} |f'(w)| \left(\log \frac{1}{|w|}\right)^s dA(w) \\
&= \frac{2}{(1-r)} \int_{R_1<|w|<R_2} |f'(w)| d\mu(w) \\
&\leq \left[\int_{R_1<|w|<R_2} |f'(w)|^2 d\mu(w)\right]^{1/2} \left[\int_{R_1<|w|<R_2} d\mu(w)\right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 d\mu(w)\right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{D}} d\mu(w)\right]^{1/2} \\
&= \|i_d\|_{\mathcal{D}_s} \|f\|_{\mathcal{D}_s}
\end{aligned}$$

donde $d\mu(w) = \left(\log \frac{1}{|w|}\right)^s dA(w) = \left(\log \frac{1}{|R|}\right)^s \frac{R}{\pi} d\theta dR$.

Si $s \geq 0$ y como $R \leq R_2$ entonces, por ser la función logaritmo creciente se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{R_1}^{R_2} |f'(z)| \left(\log \frac{1}{R}\right)^s dR &\geq |f'(z)| \left(\log \frac{1}{R_2}\right)^s \int_{R_1}^{R_2} dR \\
&= |f'(z)| \left(\log \frac{1}{R_2}\right)^s (R_2 - R_1) \\
&= |f'(z)| \left(\log \frac{1}{R_2}\right)^s \left(\frac{1-r}{2}\right).
\end{aligned}$$

De esta última desigualdad y la obtenida anteriormente, se obtiene

$$\frac{1}{2}|f'(z)| \left(\log \frac{1}{R_2}\right)^s \left(\frac{1-r}{2}\right) \leq \frac{2}{1-r} \|i_d\|_{\mathcal{D}_s} \|f\|_{\mathcal{D}_s};$$

lo que es equivalente a escribir

$$|f'(z)| \leq C_1 \|f\|_{\mathcal{D}_s} \tag{2.14}$$

donde

$$C_1 = \frac{4\|i_d\|_{\mathcal{D}_s}}{\left(\log \frac{1}{R_2}\right)^s (1-r)^2} > 0$$

De aquí, el resultado sigue al tomar supremo en la expresión (2.14).

Ahora, si $-1 < s < 0$ y como $R \geq R_1$, entonces por un razonamiento similar al anterior se tiene que,

$$\sup_{z \in K} |f'(z)| \leq C_2 \|f\|_{\mathcal{D}_s}$$

donde

$$C_2 = \frac{4\|i_d\|_{\mathcal{D}_s}}{\left(\log \frac{1}{R_1}\right)^s (1-r)^2} > 0.$$

Por lo tanto, cualquier sea el valor de $s \geq -1$ se tiene

$$\sup_{z \in K} |f'(z)| \leq C \|f\|_{\mathcal{D}_s}$$

para alguna constante positiva $C = \text{máx}\{C_1, C_2\}$, como se afirmó. ■

Teorema 2.3.2. *$\mathcal{D}_s$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_D$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}_s$, $\varepsilon > 0$ y K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_D = |f_n(0) - f_m(0)| + \|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_s} < \varepsilon \quad \text{siempre que } n, m \geq N_\varepsilon$$

de donde se obtiene

$$|f_n(0) - f_m(0)| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n, m \geq N_\varepsilon. \tag{2.15}$$

y

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_s} < \varepsilon \quad \text{siempre que } n, m \geq N_\varepsilon \tag{2.16}$$

De (2.15) se deduce que $\{f_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, por tanto converge a un $w_0 \in \mathbb{C}$. También, por el Teorema 2.3.1 existe una constante $C_K > 0$ tal que

$$\sup_{z\in K} |f_n'(z) - f_m'(z)| \leq C_K \|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_s} \quad \text{para todo } z \in K.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Así, por el Teorema 1.3.9, existe una función $g \in H(\mathbb{D})$ tal que $f_n' \to g$ cuando $n \to \infty$ sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Por tanto, definiendo

$$f(z) = w_0 + \int_0^z g(s)ds,$$

con $z \in \mathbb{D}$; se tiene que $f \in H(\mathbb{D})$, $f(0) = w_0$ y $f'(z) = g(z)$. Por otro lado si $m > N_\varepsilon$ se tiene por el Lema de Fatou (véase Teorema 1.2.1) que

$$\begin{aligned}
\|f - f_m\|_{D_s} &= \int_{\mathbb{D}} |f'(z) - f_m'(z)|^2 \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^s dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |\lim_{n\to\infty} f_n'(z) - f_m'(z)|^2 \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^s dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \lim_{n\to\infty} |f_n'(z) - f_m'(z)|^2 \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^s dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \liminf_{n\to\infty} |f_n'(z) - f_m'(z)|^2 \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^s dA(z) \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n'(z) - f_m'(z)|^2 \left(\log \frac{1}{|z|}\right)^s dA(z) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}_s} < \varepsilon
\end{aligned}$$

De aquí que, $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{\mathcal{D}_s} = 0$; también, de esta relación se tiene que $f - f_{N_\varepsilon}$ esta en $\mathcal{D}_s$ que es espacio vectorial, de donde se sigue que $(f - f_m) + f_m = f$ está también en $\mathcal{D}_s$. Lo que concluye la demostración. ■

Comentario. De las relaciones $-2\log t \geq 1-t^2$ con $t \in (0,1]$ y $-\log t \leq 4(1-t^2)$ para $t \in (\frac{1}{4}, 1)$ se puede ver que $f \in \mathcal{D}_s$ si y sólo si

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^s dA(z) < \infty,$$

es decir, $\mathcal{D}_s$ coincide con el espacio de Besov, B_2^s. Para más detalles acerca de las propiedades de los espacios de Besov, se recomienda consultar el trabajo de Arzolay (2006) y el texto de Zhu (1990).

2.4 Los espacios Q_s

Para $a, z \in \mathbb{D}$, la función de Green sobre $\mathbb{D}$ se define como

$$g(a,z) = -\log|\varphi_a(z)|,$$

donde φ_a es un automorfismo del disco $\mathbb{D}$ definido en la Sección 1.4. Entre la propiedades mas importantes de la función de Green, resalta, como consecuencia de la expresión (1.12), que ésta es invariante por automorfismos del disco. En efecto, si $\varphi_c \in Aut(\mathbb{D})$, entonces se tiene que,

$$g(\varphi_c(a), \varphi_c(z)) = -\log\rho(\varphi_c(a), \varphi_c(z)) = -\log\rho(a,z) = g(a,z)$$

Para todo $a, z \in \mathbb{D}$. Para un estudio más detallado de las funciones de Green se puede consultar el texto de Ransford (1995).

De aquí en adelante, por comodidad, se utilizará la notación $a \preceq b$ con $a, b \in \mathbb{R}$, para indicar que $a \leq Cb$ para alguna constante C, que no depende ni de a ni de b.

Para $s \geq 0$ se define Q_s como el conjunto formado por aquellas funciones analíticas f sobre $\mathbb{D}$ que satisfacen

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} E_s(f,a) < \infty,$$

donde

$$E_s(f,a) = \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 g^s(z,a) dA(z) \right)^{1/2}.$$

Otra descripción equivalente y útil de los conjuntos Q_s lo da el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1. *Sea $s \in [0,\infty)$ y $f \in H(\mathbb{D})$. Entonces $f \in Q_s$ si y sólo si*

$$\|f\|_{Q_s} := \sup_{a \in \mathbb{D}} F_s(f,a) < \infty,$$

donde

$$F_s(f,a) = \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1 - |\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) \right)^{1/2}.$$

Para la demostración de este resultado se requiere el siguiente Lema.

Lema 2.4.1. *Si $f \in H(\mathbb{D})$; entonces se cumple que*

$$\int_{\mathbb{T}} |f'(rz)|^2 |dz| \preceq \int_{\mathbb{D} \setminus D(0,1/4)} |f'(z)|^2 (1 - |z|^2)^s dA(z)$$

donde $\mathbb{T}$ es la frontera de $\mathbb{D}$.

Demostración. Sea $f \in H(\mathbb{D})$, entonces por el Teorema 1.3.3 se sabe que $f' \in H(\mathbb{D})$, luego por el Teorema 1.5.1 se tiene que la función $|f'|^2$ es subarmónica en $\mathbb{D}$ así,

$$\int_{\mathbb{T}} |f'(rz)|^2 |dz| = \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi P_f(r), \quad r \in (0,1)$$

Dado que, la función P_f es una función creciente de r (véase Teorema 1.5.6), se tiene

$$P_f(\frac{1}{4}) \leq P_f(r), \qquad r \in (\frac{1}{4}, 1).$$

Luego, al multiplicar por $r(1-r^2)^s$ e integrar con respecto a r desde $r_1 = \frac{1}{4}$ hasta $r_2 = 1$ se obtiene

$$P_f(\frac{1}{4}) \int_{\frac{1}{4}}^1 (1-r^2)^s r dr \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 (1-r^2)^s \frac{r}{\pi} d\theta dr$$

de donde,

$$\frac{1}{2(s+1)}\left(\frac{15}{16}\right)^{s+1} P_f(\frac{1}{4}) \leq \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,\frac{1}{4})} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^s dA(z)$$

y así,

$$2\pi P_f(\frac{1}{4}) = \int_T |f'(\frac{1}{4}z)|^2|dz| \leq K' \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,\frac{1}{4})} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^s dA(z)$$

con

$$K' = 2\pi(s+1)\left(\frac{15}{16}\right)^{-(s+1)}.$$

Esto finaliza la prueba del Lema. ■

Ahora, se procede a demostrar el teorema enunciado anteriormente.

Demostración del Teorema 2.4.1. Sean $s \in [0, \infty)$ y $f \in Q_s$. Dado que $|\varphi_a(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $\varphi_a \in Aut(\mathbb{D})$, de la expresión $-2\log t \geq 1 - t^2$ con $t \in (0, 1]$ se sigue que,

$$\left(1 - |\varphi_a(z)|^2\right)^s \leq \left(-2\log|\varphi_a(z)|\right)^s, \tag{2.17}$$

de donde, al multiplicar por $|f'(z)|^2$ e integrar sobre $\mathbb{D}$, resulta

$$2^{\frac{p}{2}} F_s(f, a) \leq E_s(f, a)$$

para todo $\varphi_a \in Aut(\mathbb{D})$. Luego, al tomar supremo sobre los $a \in \mathbb{D}$ y dado que $f \in Q_s$ se sigue

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} F_s(f, a) \leq 2^{\frac{p}{2}} \sup_{a \in \mathbb{D}} E_s(f, a) < \infty$$

Ahora, sea $f \in H(\mathbb{D})$, tal que $\sup_{a \in \mathbb{D}} F_s(f, a) < \infty$. Se quiere probar que $f \in Q_s$; para esto basta verificar que

$$\left(E_s(f, 0)\right)^2 \preceq \left(F_s(f, 0)\right)^2$$

pues, el resultado buscado se sigue de sustituir en esta última expresión la función f por $f \circ \varphi_a$. Entonces, se puede escribir

$$\left(E_s(f, 0)\right)^2 = \int_{D(0, \frac{1}{4})} |f'(z)|^2 g^s(z, 0) dA(z) + \int_{\mathbb{D} \setminus D(0, \frac{1}{4})} |f'(z)|^2 g^s(z, 0) dA(z)$$

y se afirma que;

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{D} \setminus D(0, \frac{1}{4})} |f'(z)|^2 g^s(z, 0) dA(z) \preceq F_s(f, 0),$

(2) $\displaystyle\int_{D(0, \frac{1}{4})} |f'(z)|^2 g^s(z, 0) dA(z) \preceq F_s(f, 0).$

En efecto, de la desigualdad $-\log t \leq 4(1-t^2)$ con $t \in (\frac{1}{4}, 1)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}\setminus D(0,\frac{1}{4})} |f'(z)|^2 g^s(z,0)dA(z) &= \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,\frac{1}{4})} |f'(z)|^2(-\log|z|)^s dA(z) \\
&\leq 4^p \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,\frac{1}{4})} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^s dA(z) \\
&\leq K_1 \left(F_s(f,0)\right)^2,
\end{aligned}$$

esto prueba la afirmación (1) con $K_1 = 4^p$.

Ahora, se demuestra la afirmación (2). Como consecuencia del Lema 2.4.1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{D(0,\frac{1}{4})} |f'(z)|^2 g^s(z,0)dA(z) &= \int_{D(0,\frac{1}{4})} |f'(z)| \left(\log\frac{1}{|z|}\right)^s dA(z) \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 \left(\log\frac{1}{r}\right)^s \frac{r}{\pi} d\theta dr \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\log\frac{1}{r}\right)^s r \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta\right) dr \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{4}} P_f(r) \left(\log\frac{1}{r}\right)^s r dr \\
&\leq 2P_f(\frac{1}{4}) \int_0^{1/4} \left(\log\frac{1}{r}\right)^s r dr \\
&\leq 2\tilde{K} P_f(\frac{1}{4}) \\
&\leq K_2 \int_{\mathbb{D}\setminus D(0,\frac{1}{4})} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^s dA(z),
\end{aligned}$$

lo cual es lo afirmado en (2) con $K_2 = \frac{K'\tilde{K}}{\pi}$.

Ahora, de las afirmaciones (1) y (2) se sigue que,

$$\begin{aligned}(E_s(f,0))^2 &\leq (K_1+K_2)\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|^2)^s dA(z)\\ &= (K_1+K_2)\,(F_s(f,0))^2\,;\end{aligned}$$

es decir,

$$(E_s(f,0))^2 \preceq (F_s(f,0))^2\,.$$

Luego, al considerar la función $f\circ\varphi_a$ con $\varphi_a \in Aut(\mathbb{D})$ y haciendo el cambio $w = \varphi_a(z)$ se tiene que $z = \varphi_a(w)$ pues $\varphi_a = \varphi_a^{-1}$ y $dA(w) = Jac(\varphi_a(z)) = |\varphi_a'(z)|^2 dA(z)$, entonces como la función de Green es invariante por automorfismos del disco se tiene que,

$$\begin{aligned}(E_s(f\circ\varphi_a,0))^2 &= \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi_a(z))|^2|\varphi_a'(z)|^2 g^s(z,0)dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 g^s(\varphi_a(w),0)dA(w)\\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 g^s(\varphi_a(w),\varphi_a(0))dA(w)\\ &= (E_s(f,a))^2\,;\end{aligned}$$

mientras que por otro lado, con un procedimiento similar al anterior, se puede escribir $(F_s(f\circ\varphi_a,0))^2 = (F_s(f,a))^2$. Por lo tanto, $E_s(f,a) \preceq F_s(f,a)$ para todo $a\in\mathbb{D}$. Así, al tomar supremo sobre los $a\in\mathbb{D}$ y utilizar la hipótesis, se obtiene que $\sup_{a\in\mathbb{D}} F_s(f,a) < \infty$. Esto completa la demostración del teorema. ■

De la desigualdad triangular y la desigualdad de Hölder, se deduce que los conjuntos Q_s tienen estructura de espacio vectorial, en efecto, para $f,g\in Q_s$ y

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\|\lambda f + g\|_{Q_s}^2 &= \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |(\lambda f + g)'(z)|^2 \left(1 - |\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) \\
&= \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |(\lambda f + g)'(z)||(\lambda f + g)'(z)| \left(1 - |\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) \\
&\leq \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\lambda f'(z)||\lambda f'(z) + g'(z)| \left(1 - |\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) \\
&\quad + \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |g'(z)||\lambda f'(z) + g'(z)| \left(1 - |\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) \\
&\leq \|\lambda f\|_{Q_s}\|\lambda f + g\|_{Q_s} + \|g\|_{Q_s}\|\lambda f + g\|_{Q_s} \\
&= (|\lambda|\|f\|_{Q_s} + \|g\|_{Q_s})(\|\lambda f + g\|_{Q_s}).
\end{aligned}$$

Entonces se tiene que

$$\|\lambda f + g\|_{Q_s} \leq |\lambda|\|f\|_{Q_s} + \|g\|_{Q_s} < \infty \tag{2.18}$$

Por lo tanto, Q_s es también un subespacio del espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, $H(\mathbb{D})$.

Teorema 2.4.2. *Para $s \geq 0$, los espacios Q_s son invariantes por automorfismos del disco, es decir, satisfacen que*

$$\|f \circ \varphi_b\|_{Q_s} = \|f\|_{Q_s}$$

para toda $f \in Q_s$ y todo $\varphi_b \in Aut(\mathbb{D})$.

Demostración. Sean $f \in Q_s$ y $\varphi_b \in Aut(\mathbb{D})$, entonces haciendo el cambio de variable $w = \varphi_b(z)$, se tiene que $z = \varphi_b(w)$ y $dA(w) = Jac(\varphi_b(z)) = |\varphi_b'(z)|^2 dA(z)$, de donde

$$
\begin{aligned}
\|f \circ \varphi_b\|^2_{Q_s} &= \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi_b)'(z)|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) \\
&= \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi_b(z))|^2 |\varphi_b'(z)|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^s dA(z) \\
&= \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 (1-|\varphi_a(\varphi_b(w))|^2)^s dA(z) \\
&= \sup_{c\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 (1-|\varphi_c(w))|^2)^s dA(z) \\
&= \|f\|^2_{Q_s}.
\end{aligned}
$$

Esto completa la demostración del Teorema. ■

Proposición 2.4.1. *La relación* $\|\cdot\|_{Q_s}$ *define una seminorma en el espacio* Q_s.

Demostración. Sean $f, g \in Q_s$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces es evidente que

$$\|f\|_{Q_s} \geq 0 \tag{2.19}$$

y que

$$\|\lambda f\|_{Q_s} = |\lambda| \|f\|_{Q_s} \tag{2.20}$$

Además,

$$\|f+g\|_{Q_s} \leq \|f\|_{Q_s} + \|g\|_{Q_s} \tag{2.21}$$

se obtiene de la expresión (2.18) con $\lambda = 1$ que

$$\|f\|_{Q_s} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \|f\|_{Q_s} = \sup_{a\in\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) \right)^{1/2} = 0,$$

es decir,

$$\|f\|_{Q_s} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) = 0, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{D}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{Q_s} = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad & |f'(z)|^2 \left(1 - |\varphi_a(z)|^2\right)^s = 0, \qquad \text{para toda } a, z \in \mathbb{D}, \\
\text{si y sólo si} \quad & |f'(z)|^2 = 0, \qquad \text{para toda } z \in \mathbb{D}, \\
\text{si y sólo si} \quad & f'(z) = 0 \qquad \text{para toda } z \in \mathbb{D},
\end{aligned}$$

y esto ocurre si y sólo si f es constante (véase Teorema 1.3.2). Esto completa la demostración de la Proposición. ■

En términos de la seminorma anterior se define una nueva función que convierte a Q_s en un espacio normado.

Proposición 2.4.2. *La relación*

$$\|f\|_Q := |f(0)| + \|f\|_{Q_s} \qquad f \in Q_s \tag{2.22}$$

define una norma para Q_s.

Demostración. Véase la demostración de la Proposición 2.1.4. ■

Se procede a establecer que los espacios $(Q_s, \|\cdot\|_Q)$ son de Banach, pero para esto se requiere de los dos resultados siguientes.

Teorema 2.4.3. *Si $s > 0$ entonces Q_s es subespacio de $\mathcal{D}_s$. Más aún, se tiene la relación $\|f\|_{\mathcal{D}_s} \leq \|f\|_{Q_s}$ para toda $f \in Q_s$.*

Demostración. Sea $f \in Q_s$, por definición de supremo se tiene que,

$$\begin{aligned}
\sup_{a \in \mathbb{D}} E_s(f, a) &= \left(\sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 g^s(z, a) dA(z) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 g^s(z, 0) dA(z) \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\mathcal{D}_s}
\end{aligned}$$

Lo que es equivalente a escribir,

$$\|f\|_{\mathcal{D}_s} \leq \sup_{a\in\mathbb{D}} E_s(f,a) \leq \|f\|_{Q_s} < \infty \tag{2.23}$$

de donde se deduce que f está en $\mathcal{D}_s$, lo que concluye la prueba. ■

Teorema 2.4.4. *Sea $s > 0$ y K cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces existe una constante positiva $C = C(K) > 0$ tal que*

$$\sup_{z\in K} |f'(z)| \leq C\|f\|_{Q_s}$$

para toda $f \in Q_s$.

Demostración. Sea $f \in Q_s$ y K un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, entonces por el Teorema 2.4.3 se tiene que $f \in \mathcal{D}_s$, por lo tanto, como consecuencia del Teorema 2.3.1 se puede escribir

$$\sup_{z\in K} |f'(z)| \leq M\|f\|_{\mathcal{D}_s}$$

para alguna constante positiva M. Así, de esta última expresión y de la relación (2.23) se obtiene

$$\sup_{z\in K} |f'(z)| \leq C\|f\|_{Q_s}$$

con $C = M$. Esto finaliza la demostración. ■

Teorema 2.4.5. *Q_s es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_Q$.*

Demostración. La prueba de que la relación $\|\cdot\|_Q$ define una norma en el espacio Q_s, se sigue fácilmente del Teorema 2.4.1 y la demostración de que Q_s es de Banach con esta norma, se obtiene de un procedimiento similar al de la prueba del Teorema 2.3.2 pues, el teorema anterior es una versión del Teorema 2.3.1 para el espacio Q_s. ■

2.5 Relaciones entre espacios de funciones analíticas y series de Hadamard

En esta sección se establece algunas relaciones entre los espacios que se han estudiado en este capítulo. La primera relación de contención se enunció en el Teorema 2.4.3 donde se estableció que Q_s está contenido en $\mathcal{D}_s$. Más aún, en la proposición siguiente se demuestra que Q_s es subespacio del espacio de Bloch.

Proposición 2.5.1. *Para $s > 0$, el espacio Q_s es subespacio del espacio de Bloch $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $g \in Q_s$, en particular g es analítica en $\mathbb{D}$, por lo tanto, la función $|g'|^2$ es subarmónica, en virtud del Teorema 1.5.1. En consecuencia, se satisface

$$|g'(0)|^2 \leq \frac{1}{A(D(0,r))} \int_{D(0,r)} |g'(z)|^2 dA(z).$$

Así, sustituyendo g por $f \circ \varphi_z$ se obtiene

$$\begin{aligned} |(f \circ \varphi_z)'(0)|^2 &= |f'(\varphi_z(0))|^2 |\varphi_z'(0)|^2 \\ &= |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^2 \\ &\leq \frac{1}{A(D(0,r))} \int_{D(0,r)} |f'(\varphi_z(s))|^2 |\varphi_z'(s)|^2 dA(s) \end{aligned}$$

donde $A(D(0,r)) = \pi r^2$. Luego, para $r = \frac{1}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^2 &\leq \frac{1}{\frac{1}{4}} \int_{D(0,\frac{1}{2})} |f'(\varphi_z(s))|^2 |\varphi_z'(s)|^2 dA(s) \\ &= 4 \int_{\Delta(z,\frac{1}{2})} |f'(w)|^2 dA(w), \end{aligned} \tag{2.24}$$

donde se ha hecho el cambio de variable $w = \varphi_z(s)$ y se ha usado que $\varphi_z(D(0, \frac{1}{2})) =$

$\Delta(z,\frac{1}{2})$ (disco pseudohiperbólico de centro z y radio $\frac{1}{2}$); pero

$$\begin{aligned} w\in\Delta(z,\frac{1}{2}) &\Leftrightarrow |\varphi_z(w)|<\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow |\varphi_z(w)|^2<\frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow 1-|\varphi_z(w)|^2>\frac{3}{4}\\ &\Leftrightarrow \left(1-|\varphi_z(w)|^2\right)^s>(\frac{3}{4})^s, \end{aligned}$$

para $s>0$, así, se llega a la desigualdad

$$(\frac{3}{4})^s|f'(z)|^2(1-|z|^2)^2\leq 4\int_{\Delta(z,\frac{1}{2})}|f'(w)|^2\left(1-|\varphi_z(w)|^2\right)^s dA(w).$$

Ahora, como $\Delta(z,\frac{1}{2})\subseteq\mathbb{D}$, se tiene que para todo $z\in\mathbb{D}$

$$|f'(z)|^2(1-|z|^2)^2\leq\frac{4^{s+1}}{3^s}\int_{\mathbb{D}}|f'(w)|^2\left(1-|\varphi_z(w)|^2\right)^s dA(w).$$

Luego, al tomar raíz y supremo sobre los a en $\mathbb{D}$ en el miembro derecho de la desigualdad y sobre los z en $\mathbb{D}$ en el miembro izquierdo, se sigue que,

$$\|f\|_{\mathcal{B}}\leq M\|f\|_{Q_s}<\infty,$$

con $M=\frac{4^{\frac{s+1}{2}}}{3^{\frac{s}{2}}}$. Lo que concluye la prueba. ■

Ahora se estudia cuándo una serie de Hadamard pertenece a los espacios que se ha definidos en este Capítulo. En primer lugar, se recuerda que una función holomorfa f sobre $\mathbb{D}$ se dice que es una *serie lacunaria o de Hadamard* si existe una sucesión $\{n_k\}$ de números naturales y una constante $c>1$ tal que $n_{k+1}/n_k\geq c$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{n_k}.$$

El conjunto de las funciones holomorfas que son series de Hadamard se denotará por HG y en el siguiente teorema se dan condiciones necesarias y suficientes para que estas funciones estén en los espacios de Bloch, Dirichlet con peso y en los espacios Q_s.

Teorema 2.5.1. *Sea $s \in [0,1]$ y $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ en HG. Entonces*

(i) $f \in Q_s$ si y sólo si $f \in \mathcal{D}_s$ si y sólo si

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-s)} \sum_{2^k \le n_j < 2^{k+1}} |a_j|^2 < \infty. \tag{2.25}$$

(ii) $f \in \mathcal{B}$ si y sólo si

$$\sup_k |a_k| < \infty. \tag{2.26}$$

Demostración. (i) El caso $s = 0$ es evidente por la definición de los espacios Q_s y $\mathcal{D}_s$. Así, se considera el caso $s \in (0,1]$. Primero se supone que se cumple la expresión (2.25). Sea $w \in \mathbb{D}$ y para $k \in \mathbb{N}$ se toma $I_k = \{n \in \mathbb{N} : 2^k \le n < 2^{k+1}\}$, entonces por la desigualdad de Hölder y algunas estimaciones elementales, se obtiene

$$\begin{aligned}
\{F_s(f,w)\}^2 &\le \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} n_k |a_k| r^{n_k - 1} \right)^2 \left(\int_{\mathbb{T}} (1 - |\sigma_w(r\zeta)|^2)^s |d\zeta| \right) dr \\
&\preceq \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} n_k |a_k| r^{n_k - 1} \right)^2 \left(\int_{\mathbb{T}} (1 - |\sigma_w(r\zeta)|^2) |d\zeta| \right)^s dr \\
&\preceq \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} n_k |a_k| r^{n_k - 1} \right)^2 (1-r)^s dr \\
&\preceq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(1+s)} \left(\sum_{n_j \in I_k} n_j |a_j| \right)^2 \\
&\preceq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-s)} \left(\sum_{n_j \in I_k} |a_j| \right)^2 .
\end{aligned}$$

Luego, como $f \in HG$, existe una constante $c > 1$ tal que el número de coeficientes de Taylor a_j (de f) cuando $n_j \in I_k$ es a lo sumo 1 más que la parte entera $[\log_c 2]$ de $\log_c 2$. Esto implica que

$$\{F_s(f,w)\}^2 \preceq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-s)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2$$

y así $f \in Q_s$.

Por otro lado, si $f \in Q_s$ entonces $f \in D_s$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{Q_s} &\geq \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} n_k a_k (r\zeta)^{n_k} \right|^2 |d\zeta| \right) (1-r^2)^s r dr \\
&\succeq \sum_{k=0}^{\infty} n_k^{1-s} |a_k|^2 \\
&\succeq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n_j \in I_k} n_j^{1-s} |a_j|^2 \\
&\succeq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-s)} \sum_{n_j \in I_k} |a_j|^2,
\end{aligned}$$

y así, (2.25) se cumple.

Ahora se demuestra (ii). Sea $f \in \mathcal{B}$. Entonces para cualquier $r \in (0,1)$, se tiene

$$n_k |a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{T}} f'(r\zeta)(r\zeta)^{1-n_k} |d\zeta| \right| \preceq \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{n_k (1-r)^{n_k - 1}}.$$

Luego, seleccionando $r = 1 - n_k^{-1}$, se tiene de la expresión anterior que $|a_k| \preceq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual implica (2.26).

Recíprocamente, supóngase que $\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| < \infty$ y sea

$$K = K_n = \max\{k : n_k \leq n\},$$

entonces como $f \in HG$, existe una constante $c > 1$ tal que,

$$\frac{1}{n} \sum_{n_j \leq n} n_j = \frac{n_K}{n} \sum_{n=0}^{K-1} \frac{n_{K-n}}{n_K} \leq \frac{c}{c-1},$$

por tal motivo, se puede escribir

$$\frac{|zf'(z)|}{1-|z|} \preceq \left(\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}n_j|z|^{n_j}\right) \preceq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{n_j\leq n}n_j\right)|z|^n \preceq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

de donde se sigue que $f \in \mathcal{B}$. ■

Ahora se analiza cuándo una serie de Hadamard pertenece a los espacios α-Bloch. El siguiente resultado, generaliza la parte (ii) del teorema anterior.

Teorema 2.5.2. *Sea* $\alpha \in (0,\infty)$ *y* $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ *perteneciente a HG. Entonces* $f \in \mathcal{B}_\alpha$ *si y sólo si*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| n_j^{1-\alpha} < \infty. \tag{2.27}$$

Demostración. Se puede observar, de la demostración de la segunda parte del Teorema 2.5.1, que si $f \in \mathcal{B}_\alpha \cap HG$, entonces la expresión (2.27) se cumple. Así que basta demostrar el recíproco.

Con este fin, se supone que $\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| n_k^{1-\alpha} < \infty$, y, como antes, sea

$$K = K(n) = \text{máx}\{k : n_k \leq n\},$$

entonces se tiene

$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{n_j\leq n} n_j^\alpha = \left(\frac{n_K}{n}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{K-1}\left(\frac{n_{K-j}}{n_K}\right)^\alpha \preceq 1.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{|zf'(z)|}{1-|z|} &\preceq \left(\sum_{k=0}^{\infty}|z|^k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}n_j^\alpha|z|^{n_j}\right)\\ &\preceq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{n_j\leq n}n_j^\alpha\right)|z|^n \preceq \frac{|z|}{(1-|z|)^{1+\alpha}}\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $f \in \mathcal{B}_\alpha$ ■

CAPÍTULO 3
OPERADOR DE COMPOSICIÓN Y CLASES HIPERBÓLICAS

En este capítulo se describen los operadores de composición continuos actuando sobre los espacios que se han definidos en el capítulo anterior. Más precisamente, se estudian en detalles los resultados que se presentan en el artículo de X. Li, F. Pérez-Gonzalez y J. Rättyä (2006); así como los preliminares necesarios para establecer sus demostraciones. En primer lugar, en la primera sección del presente capítulo, se estudia la definición y algunas propiedades del operador de composición actuando sobre los espacios de funciones analíticas. En la segunda sección, se caracterizan aquellos operadores de composición que aplican continuamente el espacio de Bloch en algún espacio Q_s. Este resultado será extendido en la cuarta sección, es decir, se darán caracterizaciones de continuidad del operador de composición cuando actúa entre los espacios de α-Bloch, Dirichlet y Q_s con $s > 0$, en términos de la continuidad de estos operadores cuando actúa sobre sus respectivas clases hiperbólicas, que se definen e la tercera sección.

3.1 Operador de composición sobre el espacio de funciones analíticas

Dada cualquier función analítica φ que aplica el disco unitario $\mathbb{D}$ en sí mismo, el *operador de composición* inducido por φ, actuando sobre el espacio de las funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$, denotado por C_φ, es la función $C_\varphi : H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ definida por

$$C_\varphi f = f \circ \varphi,$$

donde $f \in H(\mathbb{D})$. Claramente, para $f, g \in H(\mathbb{D})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple

$$C_\varphi (\lambda f + g) = \lambda C_\varphi f + C_\varphi g$$

y por tal motivo, el operador de composición es una transformación lineal sobre $H(\mathbb{D})$. Dos referencias obligatorias para el estudio del operador de composición en espacios de funciones analíticas son los textos de Cowen y Maccluer (2000) y Shapiro (1993).

Se observa que si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es constante, es decir, si para $a \in \mathbb{D}$ fijo, $\varphi(z) = a$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces

$$C_\varphi f(z) = f(\varphi(z)) = f(a)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y así, en este caso, el operador de composición coincide con el *funcional evaluación* en el punto $a \in \mathbb{D}$, actuando sobre el espacio de las funciones analíticas $H(\mathbb{D})$. Mientras, que si la función $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica y no es constante, entonces, el operador de composición C_φ es una transformación inyectiva.

En efecto, sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica y no constante, entonces, por el Teorema 1.3.7, el rango de esta función $\varphi(\mathbb{D})$ es una región, es decir, un conjunto abierto y conexo. De manera entonces que si $f \in Ker(C_\varphi)$, el núcleo del operador C_φ, se debe tener que $C_\varphi(f(z)) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Esto significa que $f(\varphi(z)) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, o equivalentemente que $f(w) = 0$ para todo $w \in \varphi(\mathbb{D})$. Así, la función analítica f se anula en un conjunto $G = \varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ que es abierto y no vacío, luego, este conjunto G debe contener al menos un punto de acumulación (de hecho, tiene infinito), entonces se puede invocar el Principio de Identidad de Weierstrass (ver Teorema 1.3.8) para concluir que f es la función nula sobre $\mathbb{D}$. Esto dice que $Ker(C_\varphi) = \{0\}$ y por tanto el operador de composición C_φ es inyectivo, en virtud del Teorema 1.1.1.

Formalmente, se ha establecido el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1. *Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ una función analítica y no constante, entonces C_φ, el operador de composición inducido por φ, actuando sobre el espacio de las funciones analíticas $H(\mathbb{D})$ es inyectivo.*

Con la finalidad de establecer otras propiedades del operador de composición, como por ejemplo, la continuidad, es necesario restringir el dominio de C_φ sobre ciertos subespacios de $H(\mathbb{D})$ que sean normados. Es por esto, que en este capítulo se dan caracterizaciones de operadores de composición continuos actuando sobre los espacios B_α, $\mathcal{D}_s$ y Q_s definidos en el capítulo anterior.

3.2 Operador de composición continuo entre los espacios de Bloch y Q_s

El objetivo de esta sección es caracterizar aquellos operadores de composición que aplican continuamente el espacio de Bloch sobre algún espacio Q_s, con $s > 0$. El siguiente resultado será de gran importancia para demostrar el teorema principal de esta sección (véase el Teorema 3.2.2).

Teorema 3.2.1. *Sea $\alpha \in (0, \infty)$. Entonces existen dos funciones $f_1, f_2 \in H(\mathbb{D})$ tal que*

$$|f_1'(z)| + |f_2'(z)| \simeq (1 - |z|^2)^{-\alpha} \tag{3.1}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. Se considera para $\alpha \in (0, 1)$ y $q \in \mathbb{N}$ (el cual será un número suficientemente grande que se seleccionará después), la función analítica

$$f_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(\alpha-1)} z^{q^j}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Entonces, como una consecuencia del Lema 2.5.2 con $a_j = q^{j(\alpha-1)}$ y $n_j = q^j$ se obtiene que

$$(1 - |z|^2)|f_\alpha'(z)| \preceq 1$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Se afirma que para $q \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande, cualquier $k \in \mathbb{N}$ y

$$1 - q^{-k} \leq |z| \leq 1 - q^{-(k+1/2)}$$

se verifica la siguiente relación

$$(1-|z|^2)^\alpha |f'_\alpha(z)| \succeq 1. \tag{3.2}$$

En efecto, en primer lugar, se observa que, debido a la desigualdad triangular, para cualquier $z \in \mathbb{D}$, se cumple

$$|f'_\alpha(z)| \geq T_1 - T_2 - T_3, \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{aligned} T_1 &= q^{k\alpha}|z|^{q^k}, \\ T_2 &= \sum_{j=0}^{k-1} q^{j\alpha}|z|^{q^j}, \end{aligned}$$

y

$$T_3 = \sum_{j=k+1}^{\infty} q^{j\alpha}|z|^{q^j}.$$

El objetivo será acotar de manera adecuada las expresiones para T_1, T_2 y T_3.

Para esto, se fija un punto $z \in \mathbb{D}$ tal que $1-q^{-k} \leq |z| \leq 1-q^{-(k+1/2)}$, donde $k \in \mathbb{N}$ y sea $x = |z|^{q^k}$. Entonces se obtiene la desigualdad

$$(1-q^{-k})^{q^k} \leq x \leq \left[(1-q^{-(k+1/2)})^{q^{k+1/2}}\right]^{q^{-1/2}};$$

y por tal motivo, para q lo suficientemente grande, y para cualquier $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\frac{1}{3} \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} \tag{3.4}$$

lo cual claramente implica que

$$T_1 \geq \frac{1}{3} q^{k\alpha}.$$

La suma en T_2 se puede acotar usando la fórmula para la suma de una progresión geométrica; es decir,

$$T_2 \leq \sum_{j=0}^{k-1} q^{j\alpha} \leq \frac{q^{k\alpha}}{q^\alpha - 1}.$$

Ahora, se acota la expresión en T_3. Es de notar, que como $|z|<1$, entonces para $n \geq k+1$ se cumple

$$|z|^{q^n(q-1)} \leq |z|^{q^{k+1}(q-1)}.$$

Además, se puede observar que en la expresión para T_3 el cociente de dos términos consecutivos no es mayor que el cociente entre los primeros dos términos, es decir, para $j \geq k+1$ se cumple

$$\begin{aligned} \frac{q^{(j+1)\alpha}|z|^{q^{(j+1)}}}{q^{j\alpha}|z|^{q^j}} &= q^{\alpha}|z|^{q^j(q-1)} \\ &\leq q^{\alpha}|z|^{q^(k+1)(q-1)} \\ &= \frac{q^{(k+2)\alpha}|z|^{q^{(k+2)}}}{q^{(k+1)\alpha}|z|^{q^{(k+1)}}}; \end{aligned}$$

por tal motivo, se tiene que la serie T_3 está dominada por la serie geométrica que tiene los mismos primeros dos términos. Así, se puede escribir

$$\begin{aligned} T_3 &\leq q^{(k+1)\alpha}|z|^{q^{k+1}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(q^{\alpha}|z|^{(q^{k+2}-q^{k+1})}\right)^j \\ &= \frac{q^{(k+1)\alpha}|z|^{q^{k+1}}}{1-q^{\alpha}|z|^{(q^{k+2}-q^{k+1})}} \\ &= \frac{q^{k\alpha}q^{\alpha}x^q}{1-q^{\alpha}x^{(q^2-q)}} \\ &\leq \frac{q^{k\alpha}q^{\alpha}2^{-q^{1/2}}}{1-q^{\alpha}2^{-(q^{3/2}-q^{1/2})}} \end{aligned}$$

donde se han usado las acotaciones en (3.4).

Sustituyendo las acotaciones precedentes para T_1,T_2 y T_3 en (3.3) se obtiene

$$|f'_{\alpha}(z)| \geq \frac{q^{k\alpha}}{4} = \frac{(q^{\alpha})^{k+1/2}}{4q^{\alpha/2}} \geq \frac{1}{4q^{\alpha/2}(1-|z|)^{\alpha}},$$

de donde se concluye lo afirmado en (3.2).

De una manera completamente similar se puede demostrar que si q es un número natural suficientemente grande, por ejemplo $q = m^2$ donde m es un número natural grande, y si

$$g_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q^{(j+1/2)(\alpha-1)} z^{q^j}, \quad z \in \mathbb{D},$$

entonces

$$(1 - |z|^2)^\alpha |g'_\alpha(z)| \preceq 1$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ (debido al Lema 2.5.2) y que si $1 - q^{-(k+1/2)} \leq |z| \leq 1 - q^{-(k+1)}$ con $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$(1 - |z|^2)^{\alpha|} g'_\alpha(z)| \succeq 1. \tag{3.5}$$

Luego, de (3.2) y (3.5) se obtiene (3.1) a menos que ocurra que f'_α y g'_α compartan un cero en $\{z \in \mathbb{D} : |z| < 1 - q^{-1}\}$, en este caso, se reemplaza g_α con $g_\alpha(\zeta z)$ para un valor apropiado de $\zeta \in \mathbb{T}$. ■

Ahora se puede enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.2.2. *Sean $0 < \alpha < \infty$, $0 \leq s < \infty$ y $\varphi \in B(\mathbb{D})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to Q_s$ *es acotado;*

(2) $C_\varphi : \mathcal{B}_{\alpha,0} \to Q_s$ *es acotado;*

(3) $\displaystyle\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} g^s(z,a)\,dA(z) < \infty;$

(4) $\displaystyle\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} \left(1 - |\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) < \infty.$

Demostración. Para establecer este resultado, se sigue la siguiente secuencia

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$$

La primera implicación es evidente, pues al considerar $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to Q_s$ acotado, por definición existe $K > 0$ tal que

$$\|C_\varphi(f)\|_{Q_s} \leq K\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} \tag{3.6}$$

para toda $f \in \mathcal{B}_\alpha$, en particular (3.6) se cumple para toda $f \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$ pues $\mathcal{B}_{\alpha,0} \subset \mathcal{B}_\alpha$, en virtud del Teorema 2.2.1, de donde se concluye que $C_\varphi : \mathcal{B}_{\alpha,0} \to Q_s$ es acotado. Esto finaliza la demostración de la implicación (1) $\Rightarrow$ (2).

Siguiendo la secuencia de la demostración, considere que $C_\varphi : \mathcal{B}_{\alpha,0} \to Q_s$ es acotado, se quiere establecer (3), con tal fin, sea f_w con $w \in \mathbb{D}$ fijo, la antiderivada de la función $\frac{1}{(1-\overline{w}z)^\alpha}$ con $z \in \mathbb{D}$ y tal que $f_w(0) = 0$. Es decir,

$$f_w'(z) = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^\alpha}$$

esta función satisface que

$$(1-|z|^2)^\alpha |f_w'(z)| = \frac{1-|z|^2}{|1-\overline{w}z|^\alpha} \leq \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-|w|)^\alpha}$$

y es claro que $\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{(1-|w|)^\alpha} \to 0$ cuando $|z| \to 1^-$ pues $w \in \mathbb{D}$ es fijo, por lo tanto, $f_w \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$ entonces por hipótesis, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |f_w'(\varphi(z))|^2 g^s(z,a)\,dA(z) \leq C\|f_w\|_{\mathcal{B}}$$

lo que es equivalente a escribir

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{|1-\overline{w}\varphi(z)|^{2\alpha}} g^s(z,a)\,dA(z) \leq C\|f_w\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.7}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}} g^s(z,a)\,dA(z) \\
&\qquad \leq \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 g^s(z,a) \left(\sup_{w\in\varphi(\mathbb{D})} \frac{1}{|1-\overline{w}\varphi(z)|^{2\alpha}}\right) dA(z) \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

para $z\in\mathbb{D}$ fijo. Ahora bien, por definición de supremo, dado $\epsilon>0$ existe $w_0\in\varphi(\mathbb{D})$ (que puede depender de ϵ, φ y z) tal que

$$\sup_{w\in\varphi(\mathbb{D})}\frac{1}{|1-\overline{w}\varphi(z)|^{2\alpha}}\leq\frac{1}{|1-\overline{w_0}\varphi(z)|^{2\alpha}}+\epsilon$$

Así, de esta última expresión en (3.8) se tiene

$$\begin{aligned}\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}}g^s(z,a)dA(z) &\leq \epsilon\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}|\varphi'(z)|^2g^s(z,a)dA(z)\\ &\quad+\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\frac{|\varphi'(z)|^2}{|1-\overline{w_0}\varphi(z)|^{2\alpha}}g^s(z,a)dA(z)\end{aligned}$$

pero, por hipótesis $C_\varphi:\mathcal{B}_{\alpha,0}\to Q_s$ es acotado y la función identidad en $\mathbb{D}$ está en $\mathcal{B}_{\alpha,0}$, por lo tanto el primer sumando del miembro derecho de la última desigualdad es finito, de esto con $w_0=\varphi(z)$ y de (3.7) se sigue que existe $C_1>0$ tal que

$$\begin{aligned}\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}}g^s(z,a)dA(z) &\leq \epsilon C_1+C\|f_{w_0}\|_{\mathcal{B}_{\alpha,0}}\\ &= \epsilon C_1+C\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-w_0z|^\alpha}\\ &\leq \epsilon C_1+C\sup_{z\in\mathbb{D}}\frac{(1-|z|)^\alpha(1+|z|)^\alpha}{(1-|z|)^\alpha}\\ &\leq \epsilon C_1+C2^\alpha<\infty\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración de la implicación (2) $\Rightarrow$ (3).

Ahora, se quiere demostrar (4) teniendo como hipótesis (3). Al suponer (3) cierto, se tiene que existe una constante M tal que

$$\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}}g^s(z,a)dA(z)\leq M<\infty. \tag{3.9}$$

Por otro lado, al multiplicar la expresión (2.17) por $\frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} \geq 0$ e integrar sobre $\mathbb{D}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} \left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} 2^s g^s(z,a) dA(z) \\ &= 2^s \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} g^s(z,a) dA(z) \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathbb{D}$. Luego, de tomar supremo en ambos lados de la última desigualdad y de (3.9) se sigue que,

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} \left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z) \leq 2^s M < \infty$$

es decir, se cumple (4).

Para finalizar, se demuestra la implicación (4) $\Rightarrow$ (1). Si (4) es cierto, entonces para establecer que existe $K > 0$ tal que,

$$|f(\varphi(0))| + \|f \circ \varphi\|_{Q_s} = |||C_\varphi(f)|||_{Q_s} \leq K\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} = K\{|f(0)| + \|f\|_\alpha\}$$

para toda $f \in \mathcal{B}_\alpha$. Es suficiente probar que

$$\|f \circ \varphi\|_{Q_s} \leq K\|f\|_\alpha \tag{3.10}$$

para alguna constante $K > 0$.

En efecto, de las definiciones de las seminormas para los espacios Q_s y $\mathcal{B}_\alpha$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|f\circ\varphi\|_{Q_s}^2 &\le \sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2|\varphi'(z)|^2\left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z)\\
&= \sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \left(|f'(\varphi(z))|(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\right)^2 \frac{|\varphi'(z)|^2\left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}} dA(z)\\
&\le \sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \left(\sup_{\varphi(z)\in\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\right)^2 \frac{|\varphi'(z)|^2\left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}} dA(z)\\
&\le \sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \left(\sup_{\eta\in\mathbb{D}} |f'(\eta)|(1-|\eta|^2)^\alpha\right)^2 \frac{|\varphi'(z)|^2\left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}} dA(z)\\
&= \|f\|_\alpha^2 \sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2\left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}} dA(z),
\end{aligned}
$$

donde, en la primera igualdad se ha multiplicado y dividido por la expresión $(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}$. Luego al tomar raíz y de la hipótesis se concluye (3.10) con

$$
K = \left(\sup_{a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2\alpha}}\left(1-|\varphi_a(z)|^2\right)^s dA(z)\right)^{1/2} < \infty.
$$

Esto finaliza la demostración del teorema. ■

3.3 Clases hiperbólicas

Se denota por $B(\mathbb{D})$ al conjunto de todas las funciones analíticas $h\in H(\mathbb{D})$ que satisfacen $|h(z)|<1$ para todo $z\in\mathbb{D}$, es decir,

$$
B(\mathbb{D}) = \{h\in H(\mathbb{D}) : \|h\|_\infty < 1\},
$$

donde

$$
\|h\|_\infty = \sup\{|h(z)| : z\in\mathbb{D}\}.
$$

Es de notar que $B(\mathbb{D})$ no tiene estructura de espacio vectorial, pues basta tomar $f(z)=g(z)=\frac{1}{2}$ para todo $z\in\mathbb{D}$, y es claro que $f+g\equiv 1$ no está en $B(\mathbb{D})$.

La *clase hiperbólica* X^* de un espacio de funciones analíticas X, definido a través de ciertas expresiones que involucran la primera derivada de estas funciones analíticas, nace al sustituir la derivada ordinaria, en la expresión que define el espacio, por la llamada *derivada hiperbólica*, la cual se define y denota por

$$h^*(z) = \frac{|h'(z)|}{1 - |h(z)|^2}, \tag{3.11}$$

donde $h \in B(\mathbb{D})$. Es de notar que, la clase hiperbólica correspondiente a cada espacio no es un espacio vectorial pues, $B(\mathbb{D})$ no lo es. Entre las propiedades más importantes de la derivada hiperbólica, se puede mencionar la siguiente.

Teorema 3.3.1. *Para $h \in B(\mathbb{D})$, la derivada hiperbólica $(h^*)^2$ es una función subarmónica sobre $\mathbb{D}$.*

Demostración. Sea $h \in B(\mathbb{D})$, entonces basta con verificar la subarmonicidad de h^*, pues, por el Teorema 1.5.4; al considerar la función convexa $f(x) = x^2$ se tiene el resultado deseado, a saber, $f \circ h^* = (h^*)^2$ es subarmónica.

Para demostrar que h^* es subarmónica, se considera el criterio de subarmonicidad establecido en el Teorema 1.5.2, es decir, es suficiente probar que

$$\Delta h^* = 4\partial\overline{\partial} h^* \geq 0.$$

Con tal fin; en primer lugar se tiene de la expresión (3.11) y de las reglas de derivación que

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\{h^*(z)\} = \frac{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\{|h'(z)|\}\,(1 - |h(z)|^2) - |h'(z)|\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\{1 - |h(z)|^2\}}{(1 - |h(z)|^2)^2}$$

derivando esta expresión ahora con respecto a z se tiene que,

$$
\begin{aligned}
&\left(1-|h(z)|^2\right)^4 \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\{h^*(z)\}\\
=\ &\Bigg(\frac{1}{4}\Delta\{|h'(z)|\}\left(1-|h(z)|^2\right)+\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\{|h'(z)|\}\frac{\partial}{\partial z}\{1-|h(z)|^2\}\\
&-\frac{\partial}{\partial z}\{|h'(z)|\}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\{1-|h(z)|^2\}-|h'(z)|\frac{1}{4}\Delta\{1-|h(z)|^2\}\Bigg)\left(1-|h(z)|^2\right)^2\\
&-2\left(1-|h(z)|^2\right)\frac{\partial}{\partial z}\{1-|h(z)|^2\}\Bigg(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\{|h'(z)|\}\left(1-|h(z)|^2\right)\\
&-|h'(z)|\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\{1-|h(z)|^2\}\Bigg)
\end{aligned}
$$

Luego, desarrollando las derivadas y simplificando utilizando las identidades

$$
\frac{\partial}{\partial \overline{z}}|f(z)|=\frac{f(z)}{2|f(z)|}\overline{f'(z)} \quad y \quad \frac{\partial}{\partial z}|f(z)|=\frac{\overline{f(z)}}{2|f(z)|}f'(z)
$$

se puede escribir

$$
\begin{aligned}
&|h'(z)|\left(1-|h(z)|^2\right)^3\Delta\{h^*(z)\}\\
=\ &\left(1-|h(z)|^2\right)\Bigg(|h''(z)|^2\left(1-|h(z)|^2\right)-2\overline{h(z)}(h'(z))^2\overline{h''(z)}\\
&+2h(z)(\overline{h'(z)})^2h''(z)+4|h'(z)|^4\Bigg)+2\overline{h(z)}h'(z)\Bigg(h'(z)\overline{h''(z)}\left(1-|h(z)|^2\right)\\
&+4h(z)\overline{h'(z)}|h'(z)|^2\Bigg)\\
=\ &|h''(z)|^2\left(1-|h(z)|^2\right)^2+4Re\{h(z)(\overline{h'(z)})^2h''(z)\}\left(1-|h(z)|^2\right)+4|h'(z)|^4\\
&+4|h(z)|^2|h'(z)|^4\\
\geq\ &\Bigg(|h''(z)|^2+4Re\{h(z)(\overline{h'(z)})^2h''(z)\}+4|h'(z)|^4\\
&+4|h(z)|^2|h'(z)|^4\Bigg)\left(1-|h(z)|^2\right)^2
\end{aligned}
$$

Ahora, para concluir, se afirma que

$$
|h''(z)|^2+4Re\{h(z)(\overline{h'(z)})^2h''(z)\}+4|h'(z)|^4+4|h(z)|^2|h'(z)|^4\geq 0
$$

o equivalentemente;

$$
|h''(z)|^2+4|h'(z)|^4+4|h(z)|^2|h'(z)|^4\geq -4Re\{h(z)(\overline{h'(z)})^2h''(z)\} \tag{3.12}
$$

En efecto; como

$$\left(|h''(z)| - 2|h(z)||h'(z)|^2\right)^2 + 4|h'(z)|^4 \geq 0$$

la afirmación se sigue al desarrollar esta última expresión y de la relación

$$\left|4Re\{h(z)(\overline{h'(z)})^2 h''(z)\}\right| \leq 4|h(z)||h'(z)|^2|h''(z)|$$

de donde se concluye que $\Delta h^*(z) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y así, el Teorema 1.5.2 permite establecer que h^* es subarmónica. ■

Una consecuencia inmediata de la definición de funciones subarmónica y del resultado anterior es el siguiente.

Corolario 3.3.1. *Sea $p \geq 1$ y $h \in B(\mathbb{D})$, entonces la función $(h^*)^p$ satisface la relación*

$$(h^*(a))^p \leq \frac{1}{A(D(a,R))} \int_{D(a,R)} (h^*(z))^p \, dA(z)$$

Ahora se procede a definir las clases hiperbólicas correspondientes a los espacios estudiados en el capítulo II y a enumerar algunas de sus propiedades.

Definición 3.3.1. Para $\alpha > 0$ las clases hiperbólicas correspondiente a los espacios $\alpha - Bloch$, se denota por $\mathcal{B}^*_\alpha$ y está dado por el conjunto de aquellas funciones $h \in B(\mathbb{D})$ para la cual

$$\|h\|_{\mathcal{B}^*_\alpha} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \{\left(1 - |z|^2\right)^\alpha h^*(z)\} < \infty. \tag{3.13}$$

Si $\alpha = 1$ entonces se tiene la clase hiperbólica del clásico espacio de Bloch y se denotará por $\mathcal{B}^*$. Similarmente, la clase hiperbólica correspondiente al pequeño $\alpha - Bloch$, se denota por $\mathcal{B}^*_{\alpha,0}$ y está constituido por las funciones $h \in B(\mathbb{D})$ tales que

$$\lim_{|z| \to 1^-} \left(1 - |z|^2\right)^\alpha h^*(z) = 0. \tag{3.14}$$

Si $\alpha = 1$ entonces el pequeño espacio de Bloch hiperbólico se denotará por $\mathcal{B}^*_0$.

En primer lugar, se demostrará, como una consecuencia del Lema de Schwarz-Pick, que para $\alpha > 1$, la clase de Bloch hiperbólica $\mathcal{B}^*_\alpha$ coincide con el conjunto $B(\mathbb{D})$.

Teorema 3.3.2. *Si* $\alpha > 1$*, entonces* $\mathcal{B}^*_\alpha = B(\mathbb{D})$*.*

Demostración. En efecto, por definición de la clase de α-Bloch hiperbólica, es claro que $\mathcal{B}^*_\alpha \subset B(\mathbb{D})$. Ahora, si se considera una función $h \in B(\mathbb{D})$ y $\alpha > 1$, entonces del Lema de Schwarz-Pick (Teorema 1.3.6), se sigue que

$$\left|\frac{h(z) - h(w)}{z - w}\right| \leq \left|\frac{1 - \overline{h(w)}h(z)}{1 - \overline{w}z}\right|$$

para todo $z, w \in \mathbb{D}$. Luego, al tomar el límite cuando $w \to z$, se tiene

$$|h'(z)| \leq \frac{1 - |h(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, o, equivalentemente,

$$\frac{|h'(z)|}{1 - |h(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Así, de la definición de derivada hiperbólica y al multiplicar esta última expresión por $(1 - |z|^2)^\alpha > 0$ se obtiene

$$h^*(z)(1 - |z|^2)^\alpha \leq (1 - |z|^2)^{\alpha - 1};$$

pero $(1 - |z|^2)^{\alpha - 1} < 1$ pues $\alpha - 1 > 0$. Por tanto, al tomar supremo sobre los $z \in \mathbb{D}$ se encuentra que,

$$\|h\|_{\mathcal{B}^*_\alpha} < 1,$$

es decir, $h \in \mathcal{B}^*_\alpha$, y de donde se concluye que $B(\mathbb{D}) \subset \mathcal{B}^*_\alpha$. Esto culmina la demostración de este resultado. ■

En virtud del resultado anterior, la clase hiperbólica del espacio $\alpha - Bloch$ será considerada sólo cuando $0 < \alpha < 1$. También, se requiere el siguiente aserto.

Teorema 3.3.3. *Para* $\alpha \in (0,1)$*, se cumple que* $\mathcal{B}^*_{\alpha,0} \subset \mathcal{B}^*_{\alpha}$.

Demostración. En efecto, sea $h \in \mathcal{B}^*_{\alpha,0}$, usando un procedimiento similar a la primera parte de la demostración del Teorema 2.2.1, se tiene que si

$$g(z) = (1-|z|^2)^{\alpha}(h^*(z)) = \frac{(1-|z|^2)^{\alpha}|h'(z)|}{1-|h(z)|^2},$$

entonces g es continua en $\mathbb{D}$ pues, $|h(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego, como $\text{lím}_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^{\alpha}|h^*(z)| = 0$, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar $r_0 \in (0,1)$ tal que $g(z) < \varepsilon$ siempre que $r_0 < |z| < 1$; mientras que si $|z| \leq r_0$, entonces la función g es continua sobre el compacto $\mathbb{D}_{r_0} = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq r_0\}$, luego existe $M > 0$ tal que $g(z) \leq M$, para todo $z \in \mathbb{D}_{r_0}$. Así, se tiene que

$$(1-|z|^2)^{\alpha}|h^*(z)| \leq \text{máx}\{\varepsilon, M\} = \widetilde{M}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$; es decir, se obtiene que $h \in \mathcal{B}^*_{\alpha}$. ■

Otras clases hiperbólicas que se estarán usando en este capítulo son las siguientes:

1. **La clase Dirichlet hiperbólica.** Para $s > -1$, la clase hiperbólica del espacio de Dirichlet $\mathcal{D}_s$, se denota por $\mathcal{D}^*_s$ y se define como el conjunto de las funciones $h \in B(\mathbb{D})$ que satisfacen

   $$\|h\|_{\mathcal{D}^*_s} = \left(\int_{\mathbb{D}} (h^*(z))^2 \left(\log\frac{1}{|z|}\right)^s dA(z)\right)^{1/2} < \infty.$$

   Del Lema de Schwarz-Pick también se deduce que para $s > 1$, $\mathcal{D}^*_s = B(\mathbb{D})$. Por lo tanto, la clase hiperbólica de este espacio es considerada sólo cuando $-1 < s \leq 1$.

2. **La clase Q_s hiperbólica.** Para $0 \leq s < \infty$, la clase hiperbólica del espacio Q_s, se define como el conjunto de las funciones $h \in B(\mathbb{D})$ que satisfacen

   $$\|h\|_{Q_s} := \left(\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} (h^*(z))^2 g^s(z,a)dA(z)\right)^{1/2} < \infty.$$

Como consecuencia, también de Lema de Schwarz-Pick se tiene que para $s > 1$ la clase Q_s^* coincide con $B(\mathbb{D})$. Por lo tanto, como en los casos anteriores, la clase hiperbólica de este espacio es considerada sólo cuando $0 < s \leq 1$.

La misma relación de contención entre los espacios que aquí se analizan, generalmente se da entre las respectivas clases hiperbólicas, pero sólo se abordará aquellas contenciones de interés, por tal motivo se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.3.4. *Para $0 \leq s < \infty$ y $\varphi \in B(\mathbb{D})$ se cumple que $Q_s^* \subseteq \mathcal{B}^*$. Más aún, existe una constante $C(s) > 0$ que depende solo de s tal que $\|h\|_{\mathcal{B}^*} \leq C(s)\|h\|_{Q_s}^*$*

Demostración. Sea $h \in Q_s^*$ y $z \in \mathbb{D}$ fijo. Como $(h^*)^2$ es subarmónica en $\mathbb{D}$ (véase el Teorema 3.3.1), por definición se tiene que,

$$(h^*(z))^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h^*(z+re^{i\theta}))^2 d\theta$$

y esto se cumple para todo $r > 0$ tal que $D(z,r) \subseteq \mathbb{D}$. Luego, al multiplicar por r e integrar con respecto a r desde $r = 0$ hasta $r = \frac{1-|z|}{2}$, resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1-|z|}{2}}(h^*(z))^2 r dr &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1-|z|}{2}}\int_0^{2\pi}(h^*(z+re^{i\theta}))^2 r d\theta dr \\
&= \frac{1}{2}\int_{D\left(z,\frac{1-|z|}{2}\right)}(h^*(w))^2 dA(w)
\end{aligned}$$

Pero, como $(1-|z|^2)^2 \leq 4(1-|z|)^2$; entonces al desarrollar la integral del lado izquierdo queda

$$\int_0^{\frac{1-|z|}{2}}(h^*(z))^2 r dr = \frac{1}{8}(h^*(z))^2(1-|z|)^2 \geq \frac{1}{32}(h^*(z))^2(1-|z|^2)^2$$

por lo tanto, se tiene la relación

$$(h^*(z))^2(1-|z|^2)^2 \leq 16\int_{D\left(z,\frac{1-|z|}{2}\right)}(h^*(w))^2 dA(w) \tag{3.15}$$

Ahora, si $w \in D\left(z, \frac{1-|z|}{2}\right)$ entonces $|w - z| < \frac{1-|z|}{2}$; así, por la desigualdad triangular se tiene

$$|\varphi_z(w)| = \left|\frac{w-z}{1-\overline{z}w}\right| \leq \frac{|w-z|}{1-|z|} < \frac{1}{2}$$

de donde,

$$\left(1 - |\varphi_z(w)|^2\right)^s > \left(\frac{3}{4}\right)^s$$

con $s > 0$. Luego, multiplicando esta última expresión por $16(h^*(w))^2 > 0$ e integrando sobre el disco $D\left(z, \frac{1-|z|}{2}\right)$ junto con (3.15) se tiene

$$\begin{aligned} 16\int_{D\left(z,\frac{1-|z|}{2}\right)} (h^*(w))^2 \left(1-|\varphi_z(w)|^2\right)^s dA(w) &\geq 16\left(\frac{3}{4}\right)^s \int_{D\left(z,\frac{1-|z|}{2}\right)} (h^*(w))^2 dA(w) \\ &\geq \left(\frac{3}{4}\right)^s (h^*(z))^2(1-|z|^2)^2 \end{aligned}$$

de donde, al acomodar algunos términos, y tomar raíz, se obtiene

$$(h^*(z))(1-|z|^2) \leq \left(\frac{4^{s+2}}{3^s}\int_{D\left(z,\frac{1-|z|}{2}\right)} (h^*(w))^2 \left(1-|\varphi_z(w)|^2\right)^s dA(w)\right)^{1/2}$$

y luego al tomar supremo sobre los $z \in \mathbb{D}$ se establece que

$$\|h\|_{\mathcal{B}^*} \leq K\|h\|_{Q_s^*} \tag{3.16}$$

con $K = \frac{4^{\frac{s+2}{2}}}{3^{\frac{s}{2}}} > 0$. Pero, por hipótesis $\|h\|_{Q_s^*} < \infty$ en consecuencia, $\|h\|_{\mathcal{B}^*} < \infty$ de donde se concluye que $Q_s^* \subseteq \mathcal{B}^*$. Esto culmina la demostración del teorema. ■

Cuando se estudian operadores lineales intuitivamente se sabe que existen espacios vectoriales entre las cuales éste actúa, pero en vista de que la clase hiperbólica no tiene estructura de espacio vectorial, es necesario introducir la siguiente definición.

Definición 3.3.2. Sean X^* y Y^* las clases hiperbólicas correspondientes a los espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$ y $(Y, \|\cdot\|_Y)$ respectivamente. Un operador de composición $C_\varphi : (X^*, \|\cdot\|_{X^*}) \to (Y^*, \|\cdot\|_{Y^*})$ se dice *acotado* si existe una constante positiva C tal que

$$\|C_\varphi(h)\|_{Y^*} \leq C\|h\|_{X^*}$$

para todo $h \in X^*$.

Del estudio del operador de composición entre clases hiperbólicas se obtienen resultados importantes de este operador cuando actúa entre los respectivos espacios vectoriales. Tal como se establece en las siguientes secciones.

3.4 Operador de composición continuo y clases hiperbólicas

En esta sección se estudian varias caracterizaciones del operador de composición acotado cuando actúa sobre los espacios de α-Bloch, Dirichlet y Q_s con $s > 0$, en términos de la continuidad de estos operadores cuando actúa sobre sus respectivas clases hiperbólicas. Para una mejor lectura de estos resultados, se ha colocado cada caracterización junto con los lemas previos requeridos en una subsección.

3.4.1 Operador de composición continuo entre clases de Bloch y Q_s^*

En esta subsección se caracteriza los operadores de composición que aplican continuamente el espacio de Bloch sobre algún espacio Q_s^*, donde el parámetro $s \in [0, 1]$. La caracterización que se presenta en esta subsección será dada en términos de la continuidad de este operador sobre sus respectivas clases hiperbólicas.

Teorema 3.4.1. *Sea* $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ *y* $\varphi \in B(\mathbb{D})$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to Q_s$ *es acotado;*

(2) $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha^* \to Q_s^*$ *es acotado;*

(3) $C_\varphi : \mathcal{B}_{\alpha,0}^* \to Q_s^*$ *es acotado;*

Demostración. Para demostrar este resultado, se procede de la siguiente manera.

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1).$$

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Considere que $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha \to Q_s$ es un operador acotado, es decir, que el inciso (1) es cierto y sea $h \in B_\alpha^*$, entonces por la definición de la derivada hiperbólica se puede escribir

$$\int_{\mathbb{D}} \left((h \circ \varphi)^* (z)\right)^2 g^s(z,a)dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{|h'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2}{\left(1 - |h(\varphi(z))|^2\right)^2} g^s(z,a)dA(z),$$

luego, al multiplicar y dividir el integrando del miembro derecho por $\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}$ y como $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} \left((h \circ \varphi)^* (z)\right)^2 g^s(z,a)dA(z) \\ &\quad = \int_{\mathbb{D}} \frac{|h'(\varphi(z))|^2 \left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}}{\left(1 - |h(\varphi(z))|^2\right)^2} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} g^s(z,a)dA(z) \\ &\quad \leq \|h\|_{B_\alpha^*}^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} g^s(z,a)dA(z) \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathbb{D}$. Aplicando el Teorema 3.2.2, se puede encontrar una constante $K > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{2\alpha}} g^s(z,a)dA(z) \leq K,$$

de donde se obtiene que

$$\int_{\mathbb{D}} \left((h \circ \varphi)^* (z)\right)^2 g^s(z,a)dA(z) \leq K \|h\|_{B_\alpha^*}^2.$$

Por tanto, al tomar raíz cuadrada en ambos lados de la desigualdad y usando la definición de supremo sobre los a en $\mathbb{D}$, se tiene la expresión

$$\|C_\varphi(h)\|_{Q_s^*} \leq K \|h\|_{B_\alpha^*},$$

lo cual demuestra (2).

[(2) $\Rightarrow$ (3)] Considere ahora que $C_\varphi : \mathcal{B}_\alpha^* \to Q_s^*$ es un operador acotado. Esto significa que existe una constante $K > 0$ tal que

$$\|C_\varphi(h)\|_{Q_s^*} \leq K\|h\|_{\mathcal{B}_\alpha^*} \tag{3.17}$$

para toda función $h \in \mathcal{B}_\alpha^*$; pero, por el Teorema 3.3.3, se tiene que $\mathcal{B}_{\alpha,0}^*$ es un subconjunto de $\mathcal{B}_\alpha^*$. En particular, la expresión (3.17) se cumple para toda función $h \in \mathcal{B}_{\alpha,0}^*$ lo que es equivalente a decir que el operador $C_\varphi : \mathcal{B}_{\alpha,0}^* \to Q_s^*$ es acotado y la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) está demostrada.

[(3) $\Rightarrow$ (1)] Suponga ahora que el operador $C_\varphi : \mathcal{B}_{\alpha,0}^* \to Q_s^*$ es acotado. Se estudia por separados los casos $\alpha = 1$ y $\alpha \in (0,1)$. Considere primero que $\alpha = 1$. Para $b \in \mathbb{D}$, se tiene la función

$$h_b(z) = bz,$$

donde $z \in \mathbb{D}$. Entonces, es claro que

$$|h_b(z)| = |bz| < 1$$

para todo $z, b \in \mathbb{D}$, lo cual significa que $h_b \in B(\mathbb{D})$ para cualquier $b \in \mathbb{D}$. Además, por la definición de la derivada hiperbólica, se tiene

$$h_b^*(z) = \frac{|h_b'(z)|}{1 - |h_b(z)|^2} = |b|\left(1 - |bz|^2\right)^{-1},$$

de donde se obtiene que

$$\lim_{|z|\to 1^-} h_b^*(z)\left(1 - |z|^2\right) = 0,$$

para todo $b \in \mathbb{D}$ fijo. Por lo tanto, $h_b \in \mathcal{B}_{\alpha,0}^* = \mathcal{B}_0^*$. Así, por la hipótesis, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\|h_b \circ \varphi\|^2_{Q_s^*} &= \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left((h_b \circ \varphi)^* (z) \right)^2 g^s(z,a)dA(z) \\
&= \sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|b|^2 |\varphi'(z)|^2}{(1-|b\varphi(z)|^2)^2} g^s(z,a)dA(z) \\
&\leq C\|h_b\|^2_{B_0^*} \leq C|b|^2.
\end{aligned}$$

para todo $b \in \mathbb{D}$. Luego, al tomar límite cuando $|b| \to 1^-$, y usando el Lema de Fatou, (Lema 1.2.1) se obtiene

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^2} g^s(z,a)dA(z) \leq C < \infty. \tag{3.18}$$

Esta última expresión y el Teorema 3.2.2 implican que el operador $C_\varphi : \mathcal{B} \to Q_s$ es acotado. La implicación (3) $\Rightarrow$ (1) está probado para el caso $\alpha = 1$.

Considere ahora el caso $\alpha \in (0,1)$. Se está suponiendo que el operador $C_\varphi : \mathcal{B}^*_{\alpha,0} \to Q_s^*$ está acotado. Esto significa que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2}{\left(1-|f(\varphi(z))|^2\right)^2} g^s(z,a)dA(z) \leq M \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^\alpha \frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \tag{3.19}$$

para toda función $f \in \mathcal{B}^*_{\alpha,0}$. La idea es considerar una sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{B}^*_{\alpha,0}$ de tal manera que al sustituir en (3.19) se obtenga la expresión (3.18). Con este fin, para $n \in \mathbb{N}$, se definen las funciones analíticas $g_n \in H(\mathbb{D})$ tales que

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha-1)} (b_n z)^{2^k},$$

donde $\{b_n\} \subset \mathbb{D}$ y $|b_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$. Entonces, como una aplicación de la desigualdad triangular, se puede ver que existe una constante $C(\alpha) > 0$ tal que

$$|g_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(\alpha-1)} = C(\alpha) < \infty$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ pues $\alpha \in (0,1)$. En particular, esto implica que $g_n \in \mathcal{B}_{\alpha,0}$. Luego, si se define las funciones $h_n(z) = \frac{1}{2C(\alpha)} g_n(z)$ con $z \in \mathbb{D}$, es claro que

$$|h_n(z)| \leq \frac{1}{2}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y $n \in \mathbb{N}$, y por tanto

$$h_n^*(z) \simeq |h_n'(z)|$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, se obtiene que $h_n \in \mathcal{B}_{\alpha,0}^*$, lo cual junto con la hipótesis (3.19) dice que existe una constante $K > 0$, que depende sólo de α, tal que

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \frac{|h_n'(\varphi(z))|^2 \, |\varphi'(z)|^2}{\left(1 - |h_n(\varphi(z))|^2\right)^2} g^s(z,a) dA(z) \leq K. \tag{3.20}$$

Por otra parte, se observa que las funciones g_n que se han definidos en esta parte de la demostración coincide con la definición de las funciones f_α (con $q = 2$) en la demostración del Teorema 3.2.1; y por tal motivo, de la relación (3.2) se obtiene que

$$(1 - |z|^2)^\alpha |h_n'(z)| \succeq 1,$$

para $|z|$ cercano a 1 y para n suficientemente grande. Por tanto, combinando estas informaciones, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1 - |\varphi(z)|^2)^2} g^s(z,a) dA(z) &\leq \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{D}} |h_n'(\varphi(z))|^2 \, |\varphi'(z)|^2 g^s(z,a) dA(z) \\
&\leq C \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{D}} \frac{|h_n'(\varphi(z))|^2 \, |\varphi'(z)|^2}{\left(1 - |h_n(\varphi(z))|^2\right)^2} g^s(z,a) dA(z) \\
&\leq CK.
\end{aligned}$$

Esto culmina la demostración del Teorema. ■

3.4.2 Operador de composición continuo entre clases de Bloch y $\mathcal{B}_\alpha$

Ahora se caracterizan los operadores de composición que aplican continuamente el espacio de Bloch sobre algún espacio α-Bloch, donde, como ya se ha comentado antes, el parámetro $\alpha \in (0,1]$. La caracterización que se presenta en esta sección será dada en términos de la continuidad de este operador sobre sus respectivas clases hiperbólicas; pero antes, se precisa de los siguientes dos lemas.

Lema 3.4.1. *Existe $\beta_0 \in (0,1)$ tal que*

$$\frac{\beta|a||1-\bar{a}z|^{\beta-1}}{1-|1-(1-\bar{a}z)^{\beta}|^2} \backsimeq \frac{\beta|a|}{|1-\bar{a}z|}.$$

para todo $a, z \in \mathbb{D}$ y para todo $0<\beta<\beta_0$.

Demostración. Sea $\beta \in (0,1)$ y sea $a \in \mathbb{D}$ fijos. Se quiere encontrar constantes positivas K_1 y K_2 tales que

$$K_1\frac{\beta|a|}{|1-\overline{a}z|} \leq \frac{\beta|a||1-\overline{a}z|^{\beta-1}}{1-|1-(1-\overline{a}z)^{\beta}|^2} \leq K_2\frac{\beta|a|}{|1-\overline{a}z|}$$

o equivalentemente que

$$K_1 \leq \frac{|1-\overline{a}z|^{\beta}}{1-|1-(1-\overline{a}z)^{\beta}|^2} \leq K_2$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

En primer lugar, se observa, de la definición del módulo de un complejo, que $Re(z) \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Este simple hecho, implica que

$$\begin{aligned}
1-|1-(1-\overline{a}z)^{\beta}|^2 &= 1-\left(1-(1-\overline{a}z)^{\beta}\right)\left(\overline{1-(1-\overline{a}z)^{\beta}}\right)\\
&= 1-\left(1-2Re(1-\overline{a}z)^{\beta}+|1-\overline{a}z|^{2\beta}\right)\\
&= 2Re(1-\overline{a}z)^{\beta}-|1-\overline{a}z|^{2\beta}\\
&\leq 2|1-\overline{a}z)|^{\beta}-|1-\overline{a}z|^{2\beta}\\
&= |1-\overline{a}z)|^{\beta}\left(2-|1-\overline{a}z|^{\beta}\right)
\end{aligned}$$

pero, también se tiene la relación $2-|1-\overline{a}z|^{\beta}<2$ de donde se sigue que

$$1-|1-(1-\overline{a}z)^{\beta}|^2 < 2|1-\overline{a}z|^{\beta}$$

es decir,

$$\frac{|1-\overline{a}z|^{\beta}}{1-|1-(1-\overline{a}z)^{\beta}|^{2}} \geq K_1$$

con $K_1 = \frac{1}{2}$. Para establecer la otra desigualdad, se debe encontrar una constante K positiva tal que

$$2Re(1-\overline{a}z)^{\beta} - |1-\overline{a}z|^{2\beta} \geq K|1-\overline{a}z|^{\beta} \tag{3.21}$$

o equivalentemente

$$2Re(1-\overline{a}z)^{\beta} \geq |1-\overline{a}z|^{2\beta} + K|1-\overline{a}z|^{\beta} \tag{3.22}$$

en tal sentido, se considera los siguientes dos casos:

Caso 1. Si $|1-\overline{a}z| \leq 1$ entonces $|1-\overline{a}z|^{2\beta} \leq |1-\overline{a}z|^{\beta}$ de donde se sigue que

$$|1-\overline{a}z|^{2\beta} + K|1-\overline{a}z|^{\beta} \leq (K+1)|1-\overline{a}z|^{\beta} \tag{3.23}$$

para algún $K > 0$. Ahora bien, haciendo $w = (1-\overline{a}z)^{\beta}$; se afirma que

$$|w| \leq \frac{2}{K+1} Re(w)$$

En efecto, pues, dado que w está en el disco $D(1, |a|)$ entonces $Re(w) > 0$, de donde se tiene que

$$|w| = |Re(w) + iIm(w)| \leq Re(w) + |Im(w)| \leq Re(w) + |Im(w)|$$

así de las relaciones

$$Re(w) = |w|\cos(\beta arg(w)) \quad y \quad |Im(z)| = |w|\text{sen}(\beta arg(w))$$

se tiene que

$$\begin{aligned} |Im(z)| < MRe(w) \;&\Leftrightarrow\; \tan(\beta arg(w)) < M < 1 \\ &\Leftrightarrow\; \beta arg(w) < \tan^{-1}(M) \end{aligned}$$

entonces, al seleccionar β bastante pequeño se tiene lo deseado; a saber

$$|w| \leq Re(w) + |Im(w)| \leq (1+M)Re(w) = \frac{2}{K+1}$$

Así, volviendo al valor original de w, lo que se ha establecido es que

$$(M+1)|1-\overline{a}z|^{\beta} \leq 2Re(1-\overline{a}z)$$

de esta última expresión junto con la relación (3.23) se sigue que

$$2Re(1-\overline{a}z)^{\beta} - |1-\overline{a}z|^{2\beta} \geq K|1-\overline{a}z|^{\beta}$$

que era lo que se quería demostrar.

Caso 2. Si $|1-\overline{a}z| > 1$ entonces $|1-\overline{a}z|^{2\beta} > |1-\overline{a}z|^{\beta}$; de aquí que

$$\widetilde{K}|1-\overline{a}z|^{\beta} + |1-\overline{a}z|^{2\beta} \leq (\widetilde{K}+1)|1-\overline{a}z|^{2\beta} \tag{3.24}$$

para alguna constante positiva $\widetilde{K}$. Nuevamente tomando $w = (1-\overline{a}z)^{\beta}$, entonces basta demostrar que $2Re(w) \geq (\widetilde{K}+1)|w|^2$ o lo que es equivalente $|w|^2 \leq \frac{2}{\widetilde{K}+1}Re(w)$, pero esto es cierto, pues como $|1-\overline{a}z| \leq 2$ se tiene que $|w| \leq 2^{\beta}$, además del caso anterior se tiene que $|w| \leq (1+M)Re(w)$, así;

$$|w|^2 \leq 2^{\beta}(1+M)Re(w)$$

luego, haciendo $2^{\beta}(1+M) = \frac{2}{\widetilde{K}+1}$ se tiene que $\widetilde{K}+1 = \frac{2^{1-\beta}}{1+M}$ el cual está bien definido, pues, si $\widetilde{K} \to 0$ entonces $1+M \to 2^{1-\beta}$ es decir, $M \to 2^{1-\beta} > 0$. Por lo tanto, sustituyendo w en la expresión $2Re(w) \geq (\widetilde{K}+1)|w|^2$ y de la relación (3.24) se obtiene

$$2Re(1-\overline{a}z)^{\beta} \geq |1-\overline{a}z|^{2\beta} + \widetilde{K}|1-\overline{a}z|^{\beta}$$

que es, para el caso 2, el resultado deseado.

Finalmente, cualquiera sea el caso se concluye que existe una constante positiva K' tal que

$$1-|1-(1-\overline{a}z)^{\beta}|^2 = 2Re(1-\overline{a}z)^{\beta} - |1-\overline{a}z|^{2\beta} \geq K'|1-\overline{a}z|$$

es decir,

$$\frac{|1-\overline{a}z|}{1-|1-(1-\overline{a}z)^{\beta}|^2} \leq K_2$$

con $K_2 = \frac{1}{K'}$. Que era la otra desigualdad buscada. Esto finaliza la demostración del Lema. ■

El siguiente Lema es una versión un poco más general de un resultado que aparece el texto de Zhu (1990) (Lema 3.10) los detalles de la demostración del mismo se puede consultar en Malavé (2007). Aquí se incluye un esbozo de la prueba.

Lema 3.4.2. *Sea $0 \leq s \leq 1$ y $a, b \in \mathbb{D}$. Entonces existe una constante positiva C tal que*

$$I = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^s}{|1-\bar{b}z|^{2s}|1-\bar{a}z|^2} dA(z) \leq \frac{C^2}{|1-\bar{a}b|^s}.$$

Demostración. En efecto, en primer lugar, se recuerda (véase Malavé (2007)) que si $c < 0$, entonces la relación

$$I_c(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{2+\alpha+c}} dA(w)$$

con $z \in \mathbb{D}$, define una función acotada. Por tal motivo, se sigue que, si $|b| < \frac{1}{2}$, entonces por la desigualdad triangular, se tiene que $|1-\bar{b}z| \geq 1-|b| > \frac{1}{2}$ y así,

$$I \leq 2^{2s} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^s}{|1-\overline{a}z|^{2+s-s}} dA(z),$$

lo cual implica, por la información dada anteriormente, que existe una constante $C_1(s) > 0$, que depende sólo de $s \in (0,1)$, tal que $I \leq C_1(s)$. También, es claro que $|1-\overline{a}b|^s \leq 2^s$ por lo que se obtiene

$$I \leq C_1(s)\frac{2^s}{2^s} \leq \frac{C_1(s)2^s}{|1-\overline{a}b|^s}$$

lo cual implica el resultado en este caso.

Similarmente, si $|a| < \frac{1}{2}$, entonces $|1 - \overline{a}z| > \frac{1}{2}$ y por tanto

$$I \leq 2^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^s}{\left|1 - \overline{b}z\right|^{2+s+(s-2)}} dA(z);$$

luego, como $s \in (0, 1)$, la integral del lado derecho está acotada; y con un procedimiento similar al caso $|b| < \frac{1}{2}$ se concluye que existe otra constante $C_2(s) > 0$ tal que

$$I \leq C_1(s) \frac{2^s}{2^s} \leq \frac{C_2(s)}{|1 - \overline{a}b|^s}$$

y el resultado también es cierto en este caso.

De todo lo anterior, se puede suponer que $|a| \geq \frac{1}{2}$ y que $|b| \geq \frac{1}{2}$. Entonces de la relación

$$\frac{1}{(1 - w)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \lambda)}{n!\Gamma(n)} w^n,$$

válida para $\lambda > 0$ y $|w| < 1$, es claro que

$$\frac{1}{\left|1 - \overline{b}z\right|^{2s}} = \frac{1}{\left(1 - \overline{b}z\right)^s} \frac{1}{(1 - b\overline{z})^s} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j + s)\Gamma(k + s)}{j!k!\Gamma^2(s)} (\overline{b})^j b^k z^j (\overline{z})^k,$$

y, similarmente,

$$\frac{1}{|1 - \overline{a}z|^2} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{H=0}^{\infty} \frac{\Gamma(l + 1)\Gamma(H + 1)}{l!H!\Gamma^2(1)} (\overline{a})^l a^H z^l (\overline{z})^H = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{H=0}^{\infty} (\overline{a})^l a^H z^l (\overline{z})^H,$$

donde se ha usado la identidad $\Gamma(m) = (m - 1)!$, válida para $m \in \mathbb{N}$.

Usando coordenadas polares y sustituyendo estas expresiones en la definición de la integral I, se obtiene que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)^s}{\left|1 - \overline{b}re^{i\theta}\right|^{2s} |1 - \overline{a}re^{i\theta}|^2} \frac{r}{\pi} d\theta dr \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j,k,l,H=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma(j + s)\Gamma(k + s)}{j!k!\Gamma^2(s)} (\overline{b})^j b^k (\overline{a})^l a^H e^{i(j+l-k-H)\theta} \cdot \\ &\quad \left(1 - r^2\right)^s r^{j+k+l+H+1} d\theta dr; \end{aligned}$$

pero

$$\int_0^{2\pi} e^{i(j+l-k-H)\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } j+l = k+H, \\ 0, & \text{otros casos,} \end{cases}$$

por lo que la expresión para la integral I queda

$$I = 2 \sum_{j,k,l,H=0: j+l=k+H}^{\infty} \frac{\Gamma(j+s)\Gamma(k+s)}{j!k!\Gamma^2(s)} (\bar{b})^j b^k (\overline{a})^l a^H \int_0^1 \left(1-r^2\right)^s r^{2(j+l)+1} dr.$$

También por cálculo elemental, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(1-r^2\right)^s r^{2(j+l)+1} dr &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\tau)^{j+l} \tau^s d\tau \\ &= \frac{1}{2} B\left(s+1, j+l+1\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(j+l+1)}{\Gamma(s+j+l+2)}, \end{aligned}$$

donde B es la función beta (véase Apostol (1981) , para más propiedades de la función beta). Así, la integral I queda

$$I = \sum_{j,k,l,H=0: j+l=k+H}^{\infty} \frac{\Gamma(j+s)\Gamma(k+s)}{j!k!\Gamma^2(s)} \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(j+l+1)}{\Gamma(s+j+l+2)} (\bar{b})^j b^k (\overline{a})^l a^H;$$

pero de la condición $j+l = k+H$, es claro que

$$\begin{aligned} (\bar{b})^j b^k (\overline{a})^l a^H &= (\overline{a})^l b^l a^H (\bar{b})^H b^{k-l} (\bar{b})^{j-H} \\ &= (\overline{a})^l b^l a^H (\bar{b})^H |b|^{2(j-H)}. \end{aligned}$$

Luego, se puede escribir

$$I = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{H=0}^{\infty} S(j,b) \frac{\Gamma(l+s/2)\Gamma(H+s/2)}{l!H!\Gamma^2(s/2)} (\overline{a})^l b^l a^H (\bar{b})^H,$$

donde

$$S(j,b) = \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+s)\Gamma(j+l-H+s)}{j!(j+l-H)!\Gamma^2(s)} \frac{\Gamma(s+1)(j+l)!}{\Gamma(s+j+l+2)} \frac{l!H!\Gamma^2(s/2)}{\Gamma(l+s/2)\Gamma(H+s/2)}.$$
$$|b|^{2(j-H)}$$

y $j_0 = \frac{1}{2}\left(|H-l| + (H-l)\right)$. Por tanto, como

$$\frac{1}{|1-\overline{a}b|^s} = \frac{1}{\left(1-\bar{b}z\right)^{s/2}}\frac{1}{(1-b\overline{z})^{s/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+s/2)\Gamma(m+s/2)}{n!m!\Gamma^2(s/2)}(\bar{b})^m b^n a^m (\overline{a})^n,$$

el resultado sigue si se puede encontrar una constante $C(s) > 0$, que depende sólo de $s \in (0,1)$, tal que $S(j,b) \leq C(s)$. Esto se logra de manera similar a la prueba del Lema 2.2 que se encuentra en el trabajo de Malave (2007), usando las identidades $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y la fórmula de Stirling que establece que

$$\frac{\Gamma(n+c)}{n!} \sim n^{c-1}$$

cuando $n \to \infty$. ■

Comentario. Realmente es válido un resultado más general que el que se ha presentado en el lema anterior. Más precisamente (véase Fábrega y Ortega (1996)), para $s > -1$, $r, t \geq 0$ y $r+t-s > 2$ se tiene

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^s}{\left|1-\overline{\zeta}z\right|^r \left|1-\overline{\zeta}w\right|^t} dA(\zeta)$$

$$\leq \begin{cases} \dfrac{C}{|1-\overline{z}w|^{r+t-s-2}}, & r-s, t-s < 2, \\ \dfrac{C}{(1-|z|^2)^{r-s-2}\,|1-\overline{z}w|^t}, & t-s < 2 < r-s, \\ \dfrac{C}{(1-|z|^2)^{r-s-2}\,|1-\overline{z}w|^t} + \dfrac{C}{(1-|w|^2)^{t-s-2}\,|1-\overline{z}w|^r}, & r-s, t-s > 2. \end{cases}$$

Este tipo de acotaciones se le suelen llamar *estimaciones de Forelli-Rudin* (véase Perez-González y Rättyä (2006)).

Ahora se puede enunciar y demostrar el resultado principal de esta subsección.

Teorema 3.4.2. *Sea $0 < \alpha \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ y $\varphi \in B(\mathbb{D})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_\alpha$ *es acotado;*

(2) $C_\varphi : \mathcal{B}^* \to \mathcal{B}_\alpha^*$ *es acotado;*

(3) $C_\varphi : Q_s^* \to \mathcal{B}_\alpha^*$ *es acotado;*

(4) $\varphi \in \mathcal{B}_\alpha^*$

Demostración. Para establecer este resultado, se seguirá la siguiente secuencia

$$(3) \Rightarrow (4),\ (4) \Rightarrow (2),\ (2) \Rightarrow (3) \text{ y } (1) \Leftrightarrow (4).$$

[(3) $\Rightarrow$ (4)] Considere que el operador de composición $C_\varphi : Q_s^* \to \mathcal{B}_\alpha^*$ es acotado, donde $0 \leq s \leq 1$ y $0 < \alpha \leq 1$ son valores fijo. Se quiere establecer que la función φ es un elemento de la clase $\mathcal{B}_\alpha^*$. Con este fin, se analiza por separado los casos $s \in (0, 1]$ y $s = 0$.

Primero, se supone que $s \in (0, 1]$, y se fija $0 < \beta < 1$, $a \in \mathbb{D}$ y se considera la función

$$\phi_{\beta,a}(z) = 1 - (1 - \bar{a}z)^\beta .$$

Entonces, de la serie del binomio, se puede observar que

$$(1 - \overline{a}z)^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} C(\beta, n)\,(-1)^n\,\overline{a}^n z^n,$$

donde

$$C(\beta, n) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\beta - k)\,;$$

luego, como $|a| < 1$ y $|z| < 1$ se obtiene que

$$\left|(1 - \overline{a}z)^\beta - 1\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} C(\beta, n) = 2^\beta - 1 < 1$$

pues $\beta \in (0,1)$; así $\phi_{\beta,a} \in B(\mathbb{D})$. Además, su derivada es

$$\phi'_{\beta,a}(z) = \beta\bar{a}\,(1-\bar{a}z)^{\beta-1}\,.$$

De aquí, por la definición de la derivada hiperbólica, y, en virtud del Lema 3.4.1 se sigue que para $\beta \in (0,1)$ suficientemente pequeño se cumple

$$\phi^*_{\beta,a}(z) = \frac{\beta|a||1-\bar{a}z|^{\beta-1}}{1-|1-(1-\bar{a}z)^{\beta}|^2} \simeq \frac{\beta|a|}{|1-\bar{a}z|},$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, por (1.11) y el Lema 3.4.2 se puede escribir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \left(\phi^*_{\beta,a}(z)\right)^2 \left(1-|\varphi_b(z)|^2\right)^s dA(z) &\simeq \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{\beta|a|}{|1-\bar{a}z|}\right)^2 \left(\frac{(1-|b|^2)\,(1-|z|^2)}{|1-\bar{b}z|^2}\right)^s dA(z)\\
&= \beta^2|a|^2\left(1-|b|^2\right)^s \int_{\mathbb{D}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^s}{|1-\bar{a}z|^2|1-\bar{b}z|^{2s}} dA(z)\\
&\leq C_1^2\beta^2|a|^2\frac{\left(1-|b|^2\right)^s}{|1-\bar{a}b|^s}\\
&\leq C_1^2\beta^2|a|^2 2^s,
\end{aligned}$$

donde C_1 es una constante positiva y $b \in \mathbb{D}$. También, en la última desigualdad se usó el hecho que

$$\frac{1-|b|^2}{|1-\bar{a}b|} \leq 2$$

para todo $a, b \in \mathbb{D}$. En efecto, de la desigualdad triangular se tiene

$$2|1-\bar{a}b| \geq 2\,(1-|a||b|)\,.$$

Luego, como $2 > 1+|b|$ pues $b \in \mathbb{D}$, y $1-|a||b| > 0$ se tiene

$$2\,(1-|a||b|) > (1+|b|)(1-|a||b|).$$

Además, como también $a \in \mathbb{D}$, entonces $1-|a||b| > 1-|b|$; de donde se obtiene que

$$(1+|b|)(1-|a||b|) \geq (1-|b|)(1+|b|),$$

lo cual implica que $2|1-\bar{a}b| \geq 1-|b|^2$ como se afirmó.

Lo anterior establece que, para $\beta \in (0,1)$ suficientemente pequeño y $0 < s \leq 1$ se cumple

$$\int_{\mathbb{D}} \left(\phi^*_{\beta,a}(z)\right)^2 \left(1 - |\varphi_b(z)|^2\right)^s dA(z) \simeq C_1^2 \beta^2 |a|^2 2^s \qquad a, b \in \mathbb{D}.$$

Luego, al tomar raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad y considerando el supremo sobre los $b \in \mathbb{D}$ se obtiene que

$$\|\phi_{\beta,a}\|_{Q_s^*} \leq C_1 \beta |a| 2^{\frac{s}{2}} < \infty \tag{3.25}$$

es decir; $\phi_{\beta,a} \in Q_s^*$. Así, de la hipótesis y la desigualdad (3.25), existe una constante $C_2 > 0$ tal que,

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \{ (\phi_{\beta,a} \circ \varphi)^* (z) \left(1 - |z|^2\right)^\alpha \} \leq C_2 \|\phi_{\beta,a}\|_{Q_s^*} \leq C_1 \beta |a| 2^{s/2} < \infty. \tag{3.26}$$

Por otro lado, aplicando el Lema 3.4.1, se puede encontrar otra constante $C_3 > 0$ tal que,

$$\begin{aligned} (\phi_{\beta,a} \circ \varphi)^* (z) &= \frac{|\left(\phi_{\beta,a} \circ \varphi\right)'(z)|}{1 - |\left(\phi_{\beta,a} \circ \varphi\right)(z)|^2} \\ &= \frac{\beta |a| |1 - \bar{a}\varphi(z)| |\varphi'(z)|}{1 - |1 - \left(1 - \bar{a}\varphi(z)\right)^\beta|^2} \\ &\geq C_3 \frac{\beta |a| |\varphi'(z)|}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|} \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathbb{D}$. Luego, al multiplicar esta última desigualdad por $\left(1 - |z|^2\right)^\alpha > 0$ se obtiene la expresión

$$C_3 \frac{\beta |a| |\varphi'(z)|}{|1 - \bar{a}\varphi(z)|} \left(1 - |z|^2\right)^\alpha \leq (\phi_{\beta,a} \circ \varphi)^* (z) \left(1 - |z|^2\right)^\alpha,$$

la cual es válida para todo $a, b \in \mathbb{D}$. Por tanto, al escoger $a = \varphi(z)$ y tomar el supremo sobre todos los z en $\mathbb{D}$ en ambos lados de la desigualdad; se sigue de (3.26) que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\alpha^*} \leq \frac{C_1 C_2 2^{s/2}}{C_3} < \infty$$

de donde se concluye que $\varphi \in \mathcal{B}^*_\alpha$. Esto demuestra la implicación (3) $\Rightarrow$ (4) para el caso $0 < s \leq 1$.

Considere ahora el caso $s = 0$. Para $a \in \mathbb{D}$ fijo se escoge la función

$$\frac{1}{2}\varphi_a(z) = \frac{1}{2}\frac{a - z}{1 - \bar{a}z},$$

donde $z \in \mathbb{D}$ y se procede de manera similar al caso anterior. En primer lugar, se observa que la función $\frac{1}{2}\varphi_a$ es un elemento de la clase hiperbólica $Q^*_s = Q^*_0$.

En efecto, como $|\varphi_a(z)| < 1$ para todo z en $\mathbb{D}$ entonces

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{4}|\varphi_a(z)|^2} < \frac{4}{3}.$$

En consecuencia, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2}\varphi^*_a(z)\right)^2 dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2}\frac{|\varphi'_a(z)|}{1 - \frac{1}{4}|\varphi_a(z)|^2}\right)^2 dA(z) \\
&< \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{2}{3}|\varphi'_a(z)|\right)^2 dA(z) \\
&< \int_{\mathbb{D}} |\varphi'_a(z)|^2 dA(z) = \int_{\mathbb{D}} dA(z) = A(\mathbb{D}) = 1,
\end{aligned}$$

donde se ha usado las fórmulas de cambio de variables (véase las propiedades *(4)* y *(5)* de la Proposición 1.4.1). Así, $\frac{1}{2}\varphi_a \in Q^*_s = Q^*_0$ como se afirmó.

Como el operador de composición $C_\varphi : Q^*_0 \to \mathcal{B}^*_\alpha$ es acotado, se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que $\|\frac{1}{2}\varphi_a \circ \varphi\|_{\mathcal{B}^*_\alpha} \leq C\|\frac{1}{2}\varphi_a\|_{Q^*_0}$; luego el resultado deseado sigue, si se establece que $\|\varphi\|_{\mathcal{B}^*_\alpha} \leq K\|\frac{1}{2}\varphi_a \circ \varphi\|_{\mathcal{B}^*_\alpha}$ para alguna constante $K > 0$.

Con este fin, se observa que $1 - \frac{1}{4}|\varphi_a(z)|^2 < 1$ para todo $a, z \in \mathbb{D}$, de aquí, es claro que

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{4}|\varphi_a(z)|^2} > 1.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\varphi_a \circ \varphi\right)^*(z) &= \left(\frac{1}{2}\varphi_a\left(\varphi(z)\right)\right)^* = \frac{\frac{1}{2}\left(\varphi_a\left(\varphi(z)\right)\right)'}{1 - |\frac{1}{2}\varphi_a\left(\varphi(z)\right)|^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{|\varphi_a'\left(\varphi(z)\right)||\varphi'(z)|}{1 - \frac{1}{4}|\varphi_a\left(\varphi(z)\right)|^2} > \frac{1}{2}|\varphi_a'\left(\varphi(z)\right)||\varphi'(z)| \\
&= \frac{1}{2}|\varphi'(z)|\frac{(1-|a|^2)}{|1-\bar{a}\varphi(z)|^2}.
\end{aligned}$$

En particular, escogiendo $a = \varphi(z)$ se obtiene que

$$\left(\frac{1}{2}\varphi_a \circ \varphi\right)^*(z) > \frac{1}{2}\frac{|\varphi'(z)|\,(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}.$$

Luego, al multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $(1-|z|^2)^\alpha$ y al considerar el supremo sobre todos los z en $\mathbb{D}$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\alpha^*} < \|\frac{1}{2}\varphi_a \circ \varphi\|_{\mathcal{B}_\alpha^*}. \tag{3.27}$$

Esto completa la demostración de la implicación (3) $\Rightarrow$ (4) para todos los valores de $s \in [0,1]$.

Con el fin de demostrar la implicación (4) $\Rightarrow$ (2), sea $\varphi \in \mathcal{B}_\alpha^*$ se debe demostrar que $C_\varphi : \mathcal{B}^* \to \mathcal{B}_\alpha^*$ es acotado. En este sentido, sea $h \in \mathcal{B}^*$, entonces por la definición de derivada hiperbólica se tiene

$$\begin{aligned}
\left(h \circ \varphi\right)^*(z) &= \frac{|\left(h\left(\varphi(z)\right)\right)'|}{1-|h\left(\varphi(z)\right)|^2} = \frac{h'\left(\varphi(z)\right)|\varphi'(z)|}{1-|h\left(\varphi(z)\right)|^2} \\
&= \frac{h'\left(\varphi(z)\right)|\varphi'(z)|}{(1-|h\left(\varphi(z)\right)|^2)}\frac{(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|\varphi(z)|^2)} \\
&= \frac{|h'\left(\varphi(z)\right)|\,(1-|\varphi(z)|^2)}{(1-|h\left(\varphi(z)\right)|^2)}\frac{|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)}
\end{aligned}$$

Luego, haciendo el cambio $w = \varphi(z)$ se puede escribir

$$\begin{aligned} (h \circ \varphi)^{*}(z) &= \frac{|h'(w)|}{1-|h(w)|^2}(1-|w|^2)\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} \\ &\leq \|h\|_{\mathcal{B}^*}\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}; \end{aligned}$$

Ahora, multiplicando por $(1-|z|^2)^{\alpha}$ queda

$$(h \circ \varphi)^{*}(z)(1-|z|^2)^{\alpha} \leq \|h\|_{\mathcal{B}^*}\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}(1-|z|)^{\alpha}$$

de donde, al tomar supremo sobre los $z \in \mathbb{D}$ y usar el hecho de que $h \in \mathcal{B}^*$ conjuntamente con la hipótesis, se tiene

$$\|C_\varphi(h)\|_{\mathcal{B}^*_\alpha} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{B}^*_\alpha}\|h\|_{\mathcal{B}^*} = K\|h\|_{\mathcal{B}^*}$$

Con $K = \|\varphi\|_{\mathcal{B}^*_\alpha}$. Así, se ha encontrado una constante $K > 0$ tal que

$$\|C_\varphi(h)\|_{\mathcal{B}^*_\alpha} \leq K\|h\|_{\mathcal{B}^*}$$

para h en $\mathcal{B}^*$. Como h es una función arbitraria, se concluye que $C_\varphi : \mathcal{B}^* \to \mathcal{B}^*_\alpha$ es acotado. Esto finaliza la demostración de la implicación (4) $\Rightarrow$ (2).

Ahora, se demuestra (2) $\Rightarrow$ (3). Sea $C_\varphi : \mathcal{B}^* \to \mathcal{B}^*_\alpha$ acotado, entonces existe una constante $\widetilde{K} > 0$ tal que

$$\|C_\varphi(h)\|_{\mathcal{B}^*_\alpha} \leq \widetilde{K}\|h\|_{\mathcal{B}^*} \tag{3.28}$$

para toda función h en $\mathcal{B}^*$. En particular, se cumple para toda $h \in Q^*_s$ en virtud del Teorema 3.3.4. Entonces de las relaciones (3.16) y (3.28) se sigue que

$$\|C_\varphi(h)\|_{\mathcal{B}^*_\alpha} \leq C_K\|h\|_{Q^*_s}$$

para toda $h \in Q^*_s$ y $C_K = \widetilde{K}K > 0$. Lo que permite concluir que $C_\varphi : Q^*_s \to \mathcal{B}^*_\alpha$ es acotado. La demostración de la implicación (2) $\Rightarrow$ (3) está completa.

Ahora se demuestra la implicación (1) $\Rightarrow$ (4). Suponga que se cumple *(1)*, es decir, que el operador $C_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_\alpha$ es acotado, y sea $z_0 \in \mathbb{D}$ fijo, tal que $w = \varphi(z_0)$. Entonces se escoge la función

$$f_w(z) = \frac{1}{w}\log(1 - \overline{w}z),$$

y se afirma que $f_w \in \mathcal{B}$.

En efecto, por la definición de la seminorma en Bloch y de la desigualdad triangular, se tiene

$$\begin{aligned}
\|f_w\|_{\mathcal{B}} &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)|f_w'(z)|\} \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)\frac{1}{|w|}\frac{|\overline{w}|}{|1-\overline{w}z|}\} \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1+|z|)(1-|z|)\frac{1}{1-|z|}\} \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1+|z|)\} < 2.
\end{aligned}$$

Luego, de la hipótesis, es claro que

$$\|C_\varphi(f_w)\|_{\mathcal{B}_\alpha} \leq C\|f_w\|_{\mathcal{B}} < \infty$$

para alguna constante positiva C. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi(f_w)\|_{\mathcal{B}_\alpha} &= |f_w(\varphi(0))| + \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha|f_w'(\varphi(z))|\} \\
&= |f_w(\varphi(0))| + \sup_{z\in\mathbb{D}}\{(1-|z|^2)^\alpha\frac{|\varphi'(z)|}{1-\overline{w}\varphi(z)}\} \\
&\geq (1-|z_0|^2)^\alpha\frac{|\varphi'(z_0)|}{1-|\varphi(z_0)|^2} \\
&= (1-|z_0|^2)^\alpha\varphi^*(z_0) \\
&\geq \frac{1}{2}\|\varphi\|_{\mathcal{B}_\alpha^*},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $\varphi \in \mathcal{B}_\alpha^*$. Esto concluye la demostración de la implicación (1) $\Rightarrow$ (4).

Finalmente, la demostración de este teorema concluye con la prueba de la implicación (4) $\Rightarrow$ (1). Sea $\varphi \in \mathcal{B}_{\alpha}^{*}$; se quiere verificar que el operador $C_{\varphi} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{\alpha}$ es acotado, con esta intención, sea $f \in \mathcal{B}$. Entonces, por la definición de la seminorma en α-Bloch y de las propiedades del supremo se tiene

$$\begin{aligned}
\|C_{\varphi}(f)\|_{\alpha} &= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{|(f\circ\varphi)'(z)|(1-|z|^2)^{\alpha}\} \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{|(f'(\varphi(z))||\varphi'(z)|(1-|z|^2)^{\alpha}\frac{1-|\varphi'(z)|^2}{1-|\varphi'(z)|^2}\} \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}}\{\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi'(z)|^2}|(1-|z|^2)^{\alpha}|f'(\varphi(z))|\left(1-|\varphi'(z)|^2\right)\} \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}}\{\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi'(z)|^2}|(1-|z|^2)^{\alpha}\}\sup_{z\in\mathbb{D}}\{|f'(\varphi(z))|\left(1-|\varphi'(z)|^2\right)\};
\end{aligned}$$

pero, por hipótesis, se sabe que $\varphi \in \mathcal{B}_{\alpha}^{*}$ es decir, existe una constante positiva M tal que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\{\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi'(z)|^2}|(1-|z|^2)^{\alpha}\} < M < \infty$$

por lo tanto, al considerar al cambio $w = \varphi(z)$ se puede escribir

$$\begin{aligned}
\|C_{\varphi}(f)\|_{\alpha} &\leq M \sup_{w\in\varphi(\mathbb{D})}\{|f'(w)|(1-|w|^2)^{\alpha}\} \\
&\leq M\|f\|_{\alpha},
\end{aligned}$$

lo cual significa que el operador $C_{\varphi} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{\alpha}$ es acotado. Esto finaliza la demostración del teorema. ■

3.4.3 Operador de composición continuo entre clases de Dirichlet y Q_s

En esta subsección, se caracterizan aquellos operadores de composición que aplican continuamente algún espacio de Dirichlet en algún espacio Q_s. El resultado que se presenta es el siguiente.

Teorema 3.4.3. *Sea* $-1 < s_1 < \infty$*,* $0 < s_2 < \infty$ *y* $\varphi \in B(\mathbb{D})$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) El operador $C_\varphi : \mathcal{D}_{s_1} \to Q_{s_2}$ *es acotado;*

(2) $\sup_{a,b\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\varphi_a'(\varphi(z))|^{2+s_1}|\varphi'(z)|^2 g^{s_2}(z,b)dA(z) < \infty$*;*

(3) $\sup_{a,b\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\varphi_a'(\varphi(z))|^{2+s_1}|\varphi'(z)|^2 \left(1-|\varphi_b(z)|^2\right)^{s_2} dA(z) < \infty$*;*

Más aún, si $s_1 \leq 0$ *y* $s_2 \leq 1$*, entonces (1)-(3) son equivalentes a*

(4) El operador $C_\varphi : \mathcal{D}^*_{s_1} \to Q^*_{s_2}$ *es acotado.*

Demostración. Se establece primero la implicación (2) $\Rightarrow$ (1). En efecto, para $a \in \mathbb{D}$ fijo, se tiene, por un cambio de variable, que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2 g^{s_2}(z,a)dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z)|^2 g^{s_2}(z,a)dA(z)\\ &= \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 U(\varphi,a,s_2,w)dA(w),\end{aligned}$$

donde

$$U(\varphi,a,s_2,w) = \sum_{z\in\varphi^{-1}(\{w\})} g^{s_2}(z,a),$$

con $w \in \mathbb{D}\setminus\{\varphi(0)\}$. Luego, por la desigualdad del valor promedio que aparece en (2.24), existe una constante positiva C_1 tal que

$$\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2 g^{s_2}(z,a)dA(z) \leq C_1 \int_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{(1-|w|^2)^2}\int_{\Delta(w,1/2)} |f'(z)|^2 dA(z)\right) d\mu_{a,s_2}(w),$$

donde $d\mu_{a,s_2}(w) = U(\varphi,a,s_2,w)dA(w)$; pero de la simetría de las funciones características sobre el disco pseudohiperbólico es claro que

$$\chi_{D_{(z,r)}}(w) = \chi_{D_{(w,r)}}(z).$$

Con esta información y aplicando el teorema de Fubini se obtiene

$$\int_{\mathbb{D}} |(f\circ\varphi)'(z)|^2 g^{s_2}(z,a)dA(z) \leq C_1 \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(\int_{\Delta(z,1/2)} \frac{d\mu_{a,s_2}(w)}{(1-|w|^2)^2}\right) dA(z) \tag{3.29}$$

También de la Proposición 1.4.2, se tiene que $1-|w|^2 \simeq 1-|z|^2$ para todo $w \in \Delta(z,1/2)$; por lo cual, en virtud de (3.29), para que el operador $C_\varphi : \mathcal{D}_{s_1} \to Q_{s_2}$ sea acotado, es suficiente establecer que existe una constante $C>0$ tal que

$$I = \int_{\Delta(z,1/2)} d\mu_{a,s_2}(w) \leq C\left(1-|z|^2\right)^{2+s_1}.$$

Para esto, se puede observar de la relación

$$\left(1-|w|^2\right)|\varphi_z'(w)| = 1-|\varphi_z(w)|^2,$$

y de la Proposición 1.4.2 que

$$\left(1-|z|^2\right)|\varphi_z'(w)| \simeq 1 \tag{3.30}$$

para todo $w \in \Delta(z,1/2)$; por lo que se puede escribir

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Delta(z,1/2)} 1.U(\varphi,a,s_2,w)dA(w)\\
&\simeq \left(1-|z|^2\right)^{2+s_1}\int_{\Delta(z,1/2)} |\varphi_z'(w)|^{2+s_1} U(\varphi,a,s_2,w)dA(w)\\
&\preceq \left(1-|z|^2\right)^{2+s_1}\int_{\mathbb{D}} |\varphi_z'(w)|^{2+s_1} U(\varphi,a,s_2,w)dA(w)\\
&= \left(1-|z|^2\right)^{2+s_1}\int_{\mathbb{D}} |\varphi_z'(\varphi(s))|^{2+s_1} |\varphi'(s)|^2 g^{s_2}(s,a)dA(s)\\
&\preceq \left(1-|z|^2\right)^{2+s_1}\sup_{b,a\in\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} |\varphi_b'(\varphi(s))|^{2+s_1} |\varphi'(s)|^2 g^{s_2}(s,a)dA(s)\\
&\leq C\left(1-|z|^2\right)^{2+s_1},
\end{aligned}$$

donde se usó la equivalencia (3.30) en la segunda línea, se devolvió el cambio de variable en la cuarta línea y la hipótesis (2) en la última desigualdad. Esto concluye la prueba de la implicación (2) $\Rightarrow$ (1).

Suponga ahora que el operador $C_\varphi : \mathcal{D}_{\mathrm{s}_1} \to Q_{s_2}$ es acotado, es decir, que se cumple la condición *(1)*. Para $a \in \mathbb{D}$, se define la función analítica

$$f_a(z) = \int_0^z \left(\varphi_a'(w)\right)^{1+s_1/2} dw.$$

Entonces por las estimaciones de Forelli-Rudin (Lema 3.4.2), se puede encontrar una constante positiva C_1, que depende sólo de s_1, tal que

$$\|f_a\|^2_{\mathcal{D}_{s_1}} = (1-|a|^2)^{1+s_1/2}\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{s_1}}{|1-\bar{a}z|^{2+s_1}}dA(z) \leq C_1$$

para toda $a \in \mathbb{D}$. Así la familia de funciones $\{f_a : a \in \mathbb{D}\}$ está uniformemente acotada sobre $\mathcal{D}_{s_1}$. Además, como el operador $C_\varphi : \mathcal{D}_{s_1} \to Q_{s_2}$ es acotado, existe una constante positiva C_2 tal que

$$\begin{aligned} \sup_{b\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\varphi_a'(\varphi(z))|^{2+s_1}|\varphi'(z)|^2 \left(1-|\varphi_b(z)|^2\right)^{s_2} dA(z) & \\ &= \|f_a \circ \varphi\|^2_{Q_{s_2}} \\ &\leq C_2\|f_a\|^2_{D_{s_1}} \leq C_1C_2 \end{aligned}$$

para toda $a \in \mathbb{D}$. Esto demuestra la implicación (1) $\Rightarrow$ (2); y por tanto, se ha establecido que (1) y (2) son equivalentes.

De la demostración del Teorema 2.4.1, es claro que (2) y (3) son equivalentes.

Por tanto, se procede a considerar el caso hiperbólico; es decir, se quiere establecer la implicación (2) $\Rightarrow$ (4). Con tal fin, sea $s_1 \leq 0$ y $s_2 \leq 1$. Si (2) es cierto, como la función $(h^*)^2$ es subarmónica sobre $\mathbb{D}$, en virtud del Teorema 3.3.1, se puede utilizar el mismo argumento de la demostración de la implicación (2) $\Rightarrow$ (1) para concluir que el operador $C_\varphi : \mathcal{D}_{s_1} \to Q_{s_2}$ es acotado.

Se supone ahora que la proposición (4) es cierta, es decir, que el operador $C_\varphi : \mathcal{D}^*_{s_1} \to Q^*_{s_2}$ es acotado. Para $a \in \mathbb{D}$ y $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ considere las funciones analíticas

$$f_{a,\gamma}(z) = \int_0^z (\varphi_a'(w))^\gamma\, dw = \begin{cases} \dfrac{(1-|a|^2)^\gamma}{\bar{a}(1-2\gamma)}\left((1-\bar{a}z)^{1-2\gamma}-1\right), & a \in \mathbb{D}\backslash\{0\}, \\ z, & a = 0, \end{cases} \tag{3.31}$$

y definamos las funciones

$$h_{a,\gamma}(z) = \begin{cases} \dfrac{(2\gamma-1)\bar{a}}{6} f_{a,\gamma}(z), & a \in \mathbb{D}\backslash\{0\}, \\ \dfrac{z}{2}, & a = 0. \end{cases} \tag{3.32}$$

Entonces, es claro que, $\|h_{a,\gamma}\|_\infty \le \frac{1}{2}$ para todo $a \in \mathbb{D}$, y por lo tanto $h^*_{a,\gamma}(z) \simeq |h'_{a,\gamma}(z)|$ en $\mathbb{D}$. Luego, aplicando el mismo razonamiento en la demostración de la implicación (1) $\Rightarrow$ (2) con la función

$$h_{a,1+s_1/2}(z) = \frac{(1+s_1)\bar{a}}{6} \int_0^z (\varphi_a'(w))^{1+s_1/2}\, dw$$

se concluye que la proposición (2) es cierta. La demostración del Teorema 3.4.3 está concluida. ■

Este capítulo finaliza con un ejemplo que ilustra como se puede aplicar el Teorema 3.4.3.

Ejemplo 3.4.1. Se considera un parámetro $p \in [0, \infty)$ y se define la función

$$\psi_p(z) = \frac{(p+z)}{(p+1)}.$$

Entonces ψ_p es una aplicación conforme el cual envía el disco unitario $\mathbb{D}$ sobre el disco de centro $\frac{p}{p+1}$ y radio $\frac{1}{p+1}$. De la demostración del Teorema 2.4.1, se puede ver que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|f \circ \varphi\|_{Q_{s_2}} \le C\|f \circ \varphi\|_{\mathcal{D}} \le C\|f\|_{\mathcal{D}}$$

para toda función $f \in \mathcal{D}$ y toda $\varphi \in B(\mathbb{D})$, así, en particular, $C_{\psi_p} : \mathcal{D} \to Q_{s_2}$ es un operador acotado. Un razonamiento similar prueba que $C_{\psi_p} : \mathcal{D}^* \to Q^*_{s_2}$ es también acotado. Sin embargo, un argumento geométrico o un cálculo directo basado en la identidad

$$1 - \overline{a}\psi_p(z) = \frac{p(1-\overline{a}) + 1 - \overline{a}z}{p+1}$$

prueba que $|1 - a\psi_p(z)| \leq |1 - az|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $a \in (0,1)$, y por tanto

$$\sup_{a,b\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |\varphi_a'\left(\psi_p(z)\right)|^{2+s_1} |\psi_p'(z)|^2 \left(1 - |\varphi_b(z)|^2\right)^{s_2} dA(z)$$

$$\geq \lim_{a\to 1} \frac{(1-a^2)^{2+s_1+s_2}}{(p+1)^2} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{s_2}}{|1-a\psi_p(z)|^{2(2+s_1)}|1-az|^{2s_2}} dA(z) \backsimeq \lim_{a\to 1} (1-a^2)^{-s_1}$$

del cual se sigue por el Teorema 3.4.3 que $C_{\psi_p} : \mathcal{D}_{s_1} \to Q_{s_2}$ no es un operador acotado si el parámetro s_1 es positivo.

CONCLUSIONES

En el transcurso de esta investigación se ha podido dotar a cada uno de los espacios de funciones analíticas $\mathcal{B}_\alpha$, $\mathcal{D}_s$ y Q_s de una norma que los convierte en espacios de Banach. Se caracterizaron los operadores de composición continuos cuando actúan entre estos espacios en términos de la continuidad del mismo cuando actúa entre sus respectivas clases hiperbólicas.

BIBLIOGRAFÍA

Apostol, T. 1981. Análisis Matemático. Segunda edición, Reverté S.A. Barcelona.

Arzolay, W. 2006. Conjuntos dominantes en espacios de Besov. Tesis de Maestría. Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná.

Churchill, R. y Brown, J. 1992. Variable Compleja y Aplicaciones. Quinta edición, McGraw-Hill. Madrid.

Conway, J. 1978. Functions of One Complex Variable. Springer Verlag. New York.

Cowen, C. y Maccluer, B. 2000. Composition operators on spaces of analytic functions. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press. New York

García, A. 2008. Condiciones de Carleson en los Espacios de Bergman-Orlicz. Tesis de Maestría. Departamento de Matemáticas. Universidad de Oriente, Cumaná.

Greene, R. y Krantz, S. 2006. Function Theory of One Complex Variable. Third Edition (Graduate Studies in Mathematics). American Mathematical Society, Providence. New York.

Howie, J. 2003. Complex Análisis. Springer-Verlag. London.

Kreyszig, E. 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. New York.

Kubrusly, C. 2001. Elements of Operator Theory. Birkhäuser. Boston.

Lang, S. 1993. Real and Functional Analysis. Third Edition, Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. New-York.

Li, X., Pérez-González, F. y Rättyä, J. 2006. Composition Operators on Space of Analytic Function. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31:* 391-404.

Malavé, R. 2007. Operador de composición sobre el espacio de Bloch. Trabajo de Grado. Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná.

Ortega, J. y Fábrega, J. 1996. Pointwise multipliers and corona tipe decomposition BMOA. *Ann. Inst. Fourier, 46:* 111-137.

Pérez-González, F.; y Rättyä, J. 2006. Forelli-Rudin estimates, Carleson measures and F(p; q; s) -functions. *J. Math. Anal. Appl. 315:* 384-414.

Ramos, J. 2002. Caracterización de los conjuntos dominantes en los espacios de Bergman con peso. Trabajo de Ascenso para ascender a la categoría de Profesor Agregado. Departamento de Matemáticas, Universidad de Oriente, Cumaná.

Ransford, T. 1995. Potential Theory in the Complex Plane. Cambridge Univ. Press. London

Royden, H. 1988. Real Analysis. Third Edition, Prentice Hall, New Jersey.

Rudin, W. 1980. Real and Complex Analysis. Third Edition, McGraw-Hill. New York.

Shapiro, J. 1993. Composition operators and classical function theory. Springer-Verlag. New York.

Xiao, J. 2001. Holomorphic Q Classes. Springer-Verlag. Berlin.

Zhu, K. 1990. Operator theory in function Spaces. Marcel Dekker. New York.

Hoja de Metadatos

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/5

Título	OPERADOR DE COMPOSICIÓN ENTRE CLASES CONFORMEMENTE INVARIANTES Y Q-HIPERBÓLICAS
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
Farías L., Juan Félix J.	CVLAC	V-16.255.848
	e-mail	Juan.farias.lopez@gmail.com
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Espacios de funciones analíticas.
Operador de composición.
Clases hiperbólicas.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/5

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias	Matemáticas

Resumen (abstract):
En este trabajo se estudiaron algunas propiedades topológicas de los espacios de funciones analíticas $\alpha-$Bloch, Dirichlet con peso y Q_s, entre ellas, se estableció que estos espacios son de Banach, así, como también las relaciones de contención existente entre Ellos. Además, se caracterizaron los operadores de composición continuos cuando actúan sobre estos espacios en términos de la continuidad del mismo sobre sus respectivas clases hiperbólicas.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/5

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Ramos F., Julio C.	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [x] JU [ ]
	CVLAC	V-10.949.733
	e-mail	jramos@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
Martínez., Rodrigo	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	V-4.187.417
	e-mail	yigo54@cantv.net
	e-mail	
Trousselot., Eduard	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	E-80.851.651
	e-mail	Eddycharles2007@hotmaail.com
	e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [ ]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2009	05	08

Lenguaje: Spa

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/5

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
Tesis-JuanFarias.pdf	Aplication / PDF

Alcance:

Espacial : **Universal** (Opcional)

Temporal: **Intemporal** (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciatura en Matemática

Nivel Asociado con el Trabajo: Licenciatura

Área de Estudio: Matemáticas

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

Universidad de Oriente

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/5

Derechos:

Yo, Juan Félix José Farías López, autor de la tesis de grado titulada: Operador de composición entre clases conformemente invariantes y Q-hiperbólicas, autorizo la publicación del título y resumen de este trabajo.

Br. Juan Farías
AUTOR 1

AUTOR 2

AUTOR 3

AUTOR 4

Prof. Julio Ramos
TUTOR

Prof. Rodrigo Martínez
JURADO 1

Prof. Eduard Trousselot
JURADO 2

POR LA SUBCOMISIÓN DE TESIS:

República Bolivariana de Venezuela · Universidad de Oriente · Núcleo de Sucre · Escuela de Ciencias · Departamento de Matemáticas

Prof. Juan González