UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

OBTENCIÓN DE LA NORMA EN ESPACIOS DE BERGMAN

(Modalidad: Investigación)

RAFAEL JOSÉ ANTÓN MARVAL

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

CUMANÁ, 2008

OBTENCIÓN DE LA NORMA EN ESPACIOS DE BERGMAN
APROBADO POR:

Prof. Julio C. Ramos Fernández

Asesor Académico

Carlos R Carpintero F

Prof. Carlos Carpintero

Jurado Principal

Prof. Wilmer Arzolay

Jurado Principal

DEDICATORIA

A mis padres, Rafael José Antón y Dioleida Dolores Marval.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme el ser.

Al Dr. Julio C. Ramos Fernández por su colaboración, disposición, apoyo y paciencia en la realización de este trabajo.

A mis padres, quien con sus sacrificios, trabajo y dedicación me llevaron por el camino correcto, apoyándome, hasta lograr todo lo que soy en estos momentos.

A mis hermanos Loly Nathaly (gracias por guiarme desde el cielo), Marghy Mildred, Gabriel Moises y Daniel Alejandro por compartir conmigo mi vida, momentos dulces y amargos, y ser mi apoyo en todo momento.

A mi esposa Rosa María por estar a mi lado en momentos de desmayo y ser mi motivo y apoyo para la culminación de este trabajo.

A mis amigos de toda la vida quienes han estado a mi lado siempre en momentos buenos y malos.

A mis amigos y compañeros de estudios, en especial a Renny Malave y Yakary Rengel, quienes lucharon conmigo en toda la carrera, compartiendo triunfos y fracasos.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURA

RESUMEN

En este trabajo, se establecen condiciones para que la norma de transformaciones conformes en los espacios de Bergman con peso, se pueda acotar superiormente por la expresión que se obtiene cuando se restringe la integral, que aparece en la definición de la norma, por la imagen inversa de ciertos sectores.

INTRODUCCIÓN

En 1950, Stefan Bergman publicó su clásica monografía en la que desarrollaba una elegante teoría de espacios de Hilbert de funciones analíticas sobre dominios del plano complejo. Su trabajo se centró en espacios de funciones analíticas de cuadrado integrable sobre un dominio con respecto a la medida de área de Lebesgue. También aplicó la teoría de potencial a la ingeniería eléctrica, utilizó las ecuaciones integrales tratadas por Schmidt y Hilbert y realizó un gran aporte con su función del núcleo, usándola luego para transformaciones conformes. Más tarde, cuando la atención se dirigió a los espacios A^p, de las funciones holomorfas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$ que están en los espacios L^p, fué natural denominarlos espacios de Bergman.

Si bien éstos tenían propiedades análogas a las de los espacios clásicos H^p de Hardy (véase Duren (1970) para la definición y las propiedades de los espacios de Hardy), pronto se puso de relieve que presentaban una estructura mucho más complicada que aquellos. Funciones en los espacios de Bergman pueden tener un comportamiento frontera "descontrolado", no existe un análogo claro de los productos de Blaschke ni de la factorización interna-externa y los subespacios invariantes no están necesariamente generados por una única función (de acuerdo con la teoría de Beurling) como en el caso de los espacios de Hardy. Un intento para desarrollar una teoría correspondiente a los problemas extremales duales para espacios de Bergman tropezó con serias dificultades a la hora de describir el anulador de A^p como un subespacio de L^p. Las técnicas de análisis funcional que se habían mostrado tan potentes para problemas de interpolación en los espacios H^p parecían condenadas al fracaso al ser aplicadas a los espacios de Bergman.

Revisando la base de datos de la "Mathematical Review" (véase, por ejemplo, www.ams.org/mathscinet), se puede observar que existe una gran cantidad de trabajos de investigación relacionados con los espacios de Bergman. Muchos de ellos se encuentran recopilados en las recientes monografías de Hedenmalm, Korenblum y Zhu (2000), y Duren y Schuster (2004). Entre estos trabajos de investigación, son de especial interés aquellos que tienen que ver con la caracterización de ciertos subconjuntos del disco que puedan ser utilizados para acotar la norma de las funciones en los espacios de Bergman; de estos, podemos citar los resultados de Seip (2004), donde se caracterizan los conjuntos de interpolación y los de muestreo para el espacio A^2 en términos de ciertas densidades, y los de Luecking (1985), donde se caracterizan aquellos subconjuntos del disco para los cuales el operador restricción, actuando sobre los espacios de Bergman clásicos, sea acotado inferiormente.

Dada una función f en el espacio de Bergman con peso A^p_α (véase Capítulo 3, para la definición y propiedades de los espacios de Bergman con peso), la relación

$$\mu(E) = \int_E |f(z)|^p \, dA_\alpha(z), \qquad E \subset \mathbb{D},$$

donde $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$, $dA(z) = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrd\theta$, es la medida bidimensional normalizada de Lebesgue y $z = x + iy = re^{i\theta}$; define una medida positiva y de Borel sobre $\mathbb{D}$. Un subconjunto G del disco $\mathbb{D}$ se dice *conjunto dominante para el espacio de Bergman* A^p_α si existe una constante $\delta > 0$, que depende de G, α y p, tal que

$$\mu(G) \geq \delta \|f\|^p_{\alpha,p},$$

para toda función $f \in A^p_\alpha$. Los conjuntos dominantes para los espacios de Bergman clásicos fueron caracterizados por Luecking (1981), siendo extendido este resultado para los espacios de Bergman con peso por Pérez-González y Ramos (2001); tales conjuntos deben tener una distribución uniforme de masa cerca de la frontera del disco $\mathbb{D}$. En el 2004, Arzolay y Ramos extienden estos últimos resultados a los espacios de Besov analíticos (véase Zhu (1990), para la definición y propiedades de los espacios de Besov).

En este trabajo se estudia un tema de esta naturaleza, más precisamente, dado $\varepsilon > 0$, se desea analizar cuándo las imágenes inversas de ciertos sectores

$$\Sigma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \varepsilon\}$$

se comportan como un conjunto dominante para los espacios de Bergman A^p_α con $\alpha > -1$ y $p \geq 1$; es decir, se buscan condiciones sobre los parámetros α y p para que exista una constante $\delta > 0$ tal que

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \geq \delta \|f\|^p_{\alpha,p} \tag{1}$$

para toda función $f \in A^p_\alpha$ tal que $f(0) = 0$.

Este problema ha sido motivado por un artículo de Marshall y Smith (1999), donde se demuestra que efectivamente para cada $\varepsilon > 0$, las imágenes inversas de los sectores se comportan como conjuntos dominantes para la clase de las transformaciones conformes en el espacio de Bergman A^1_0 que fijan el origen. Conjeturándose en este mismo artículo que el resultado es válido para toda función en A^1_0 que fija el origen. El resultado de Marshall y Smith ha sido extendido a los espacios de Bergman con peso A^1_α por Pérez-González y Ramos (2004), demostrándose además, mediante un contraejemplo, que tal extensión no es factible, para todo $\varepsilon > 0$, si se consideran $\alpha < 0$ y $p = 1$.

Estos últimos autores probaron que el resultado sigue siendo cierto, para todo $\varepsilon > 0$, y para toda función univalente que fije el origen, si los parámetros α y p satisfacen la relación $\alpha > 2p-1$ y que en general la desigualdad (1) no es cierta para todo $\varepsilon > 0$ si $\alpha < 2p - 2$, quedando pendiente el caso $2p - 2 \leq \alpha \leq 2p - 1$.

CAPÍTULO 1
PRELIMINARES

Este capítulo ha sido concebido, para ofrecer al lector las herramientas necesarias para el desarrollo de los capítulos posteriores. Así, en las dos primeras secciones, se presenta un breve resumen de las definiciones y resultados concernientes a los espacios L^p y $H(\mathbb{D})$. En la tercera sección se profundiza en las propiedades de los automorfismos del disco, herramienta fundamental para trabajar con espacios de funciones analíticas definidas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$. Finaliza el capítulo con los detalles de la demostración del célebre teorema de la constante de Bloch, el cual será generalizado en la tercera sección del capítulo 4 para la bola unidad de otro espacio de funciones analíticas, conocido como el espacio de Bergman.

1.1 Espacios L^p, $p > 0$.

En esta sección se presenta un breve repaso sobre los resultados de un curso de Análisis Funcional que será de gran utilidad en el transcurso de este trabajo. Las notaciones, definiciones y resultados que se muestran en esta sección han sido tomados de los textos Serge Lang (1993) y H.L. Royden (1968).

Recuerde que, dados dos espacios medibles $(X, \mathfrak{M})$ y $(Y, \mathfrak{N})$ (véase Serge Lang (1993) para la definición y propiedades de espacios medibles), una función $f : X \to Y$ se dice *medible* si para cada $B \in \mathfrak{N}$, el conjunto $f^{-1}(B)$ es un elemento de $\mathfrak{M}$. De la definición anterior, es claro que una función real f definida sobre un espacio medible $(X, \mathfrak{M})$ es medible si y sólo si $f^{-1}(\alpha, \infty) \in \mathfrak{M}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$; mientras que una función compleja $h = f + ig$ definida en un espacio medible $(X, \mathfrak{M})$ es medible si y sólo si sus componentes f y g son medibles sobre $(X, \mathfrak{M})$.

Sea X un espacio medible y $\mathfrak{M}$ la colección de sus conjuntos medibles. Una *medida* (positiva) sobre $\mathfrak{M}$ es una función $\mu : \mathfrak{M} \to [0, \infty]$ que satisface:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,

2. Si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Si A es medible, la cantidad $\mu(A)$ se llama *la medida de* A. Aquí se conviene que $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Dado un espacio medible $(X, \mathfrak{M})$, una medida μ definida sobre $\mathfrak{M}$ y $p > 0$ se define el espacio $L^p(X, d\mu)$ como el conjunto de las funciones medibles f (reales o complejas) sobre X tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.1}$$

(Véase H.L. Royden (1968) para la definición y propiedades de la integral de funciones medibles). Aquí se considera que dos funciones f y g son iguales si son iguales en casi toda parte; es decir, si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X \setminus A$, donde A es un conjunto con medida cero. Para $p = \infty$, se define $L^\infty(X, d\mu)$ como el conjunto de las funciones medibles f sobre X tales que

$$\|f\|_\infty = ess \sup |f| < \infty. \tag{1.2}$$

Los resultados sobre espacios $L^p(X, d\mu)$ que requerimos se puede resumir en el siguiente teorema (véase pag. 244 de H.L. Royden (1968)).

Teorema 1.1. *Para $1 \leq p \leq \infty$, los espacios $L^p(X, d\mu)$ son de Banach. Si $f \in L^p(X, d\mu)$, $g \in L^q(X, d\mu)$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $fg \in L^1(X, d\mu)$ y*

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.3}$$

Comentarios.

1. La desigualdad triangular de la relación $\|\cdot\|_p$, con $1 \leq p \leq \infty$, se conoce como la *desigualdad de Minkowski*.
2. La desigualdad en (1.3) es conocida como *desigualdad de Hölder*.
3. El teorema que establece que los espacios $L^p(X, d\mu)$, con $1 \leq p \leq \infty$, son de Banach se conoce como el *Teorema de Riesz-Fischer*.

Se sigue de la desigualdad de Hölder que cada $g \in L^q(X, d\mu)$ define un funcional lineal y acotado F sobre $L^p(X, d\mu)$, mediante la expresión

$$F(f) = \int_X fg d\mu,$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; además, se cumple que $\|F\| = \|g\|_q$. Recíprocamente, se tiene el siguiente resultado, donde "σ-finita" significa que existe una sucesión $\{X_n\}$ de conjuntos en $\mathfrak{M}$ tal que $X = \bigcup X_n$ y $\mu(X_n) < \infty$.

Teorema 1.2 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Sea F un funcional lineal acotado sobre $L^p(X, d\mu)$, $1 \leq p < \infty$, donde μ es una medida σ-finita. Entonces existe una única función g en $L^q(X, d\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tal que*

$$F(f) = \int_X fg d\mu.$$

Además, $\|F\| = \|g\|_q$.

Comentarios.

1. Para $p > 1$ se puede omitir la hipótesis "μ es σ-finita" (ver pag. 248 de H.L. Royden (1968)).
2. El teorema de representación de Riesz junto con el comentario que le precede nos dice que el espacio dual de $L^p(X, d\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ es $L^q(X, d\mu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 1.3 (Desigualdad de Jensen). *Si* (X, Σ, μ) *es un espacio de probabilidad; es decir,* $\mu(X) = 1$*,* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo,* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *una función convexa y* $f : X \to I$ *una función integrable, entonces*

$$\varphi\left[\int f d\mu\right] \leq \int \varphi \circ f d\mu.$$

Lema 1.1 (Lema de Fatou). *Si* $f_n : X \to [0, +\infty]$ *es medible, para cada entero positivo* n*, entonces*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Finalizamos esta sección recordando el célebre teorema de extensión de Hahn-Banach (véase pag. 69 Serge Lang (1993)).

Teorema 1.4 (Teorema de Hahn-Banach). *Sea* X *un espacio normado (real o complejo) y* E *un subespacio de* X*. Sea* f *un funcional lineal y acotado definido sobre* E*, entonces existe un funcional lineal y acotado* F *definido sobre* X *tal que* $F(x) = f(x)$ *para todo* $x \in E$ *y* $\|F\| = \|f\|$*.*

1.2 Funciones analíticas.

En esta sección se da un resumen sobre los aspectos más importantes de los espacios de funciones analíticas que se requieren y se estarán usando en el transcurso del siguiente trabajo. Las definiciones y resultados que se presentan en esta sección han sido tomados de los textos W. Rudin (1974), J. Howie (2003) y Krantz y Greene (2006).

Se denota por $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos y por $D(a, r)$ al disco euclídeo con centro a y radio $r > 0$. Una *región o dominio* Ω en el plano complejo no es más que un subconjunto de $\mathbb{C}$ que es abierto y conexo. Una función compleja de variable compleja definida sobre un dominio Ω se dice *diferenciable* en $z_0 \in \Omega$ si el límite

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. En este caso, el límite se denota por $f'(z_0)$ y se llama la *derivada* de f en z_0. Se dice que una función f es *holomorfa en un punto* z_0, si existe un entorno abierto, $D(z_0, r)$ de z_0 tal que f es diferenciable en cada punto de $D(z_0, r)$. De igual manera, se dice que f es holomorfa en un conjunto Ω si f es holomorfa en cada punto z de Ω. Una función f holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$, se llama *función entera*. El conjunto de las funciones holomorfas sobre el conjunto Ω se denota por $H(\Omega)$ y debido a las reglas de derivación es claro que éste es un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos.

Si Ω es un conjunto abierto y $f \in H(\Omega)$ es de la forma $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$, con $z = x+iy$; donde u y v son funciones de valores reales, entonces u y v satisfacen las famosas *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} u_x(x, y) = v_y(x, y) \\ u_y(x, y) = -v_x(x, y) \end{cases}$$

en cada punto de $z = x + iy \in \Omega$. Note que si u y v no satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto, entonces la función f no es diferenciable en ese punto; pero existen funciones u y v que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto sin que la función f sea diferenciable en ese punto.

Recuerde que un *contorno parametrizado* γ no es más que una función compleja definida en un intervalo $[a, b]$ la cual es continua en $[a, b]$ y diferenciable a trozos; es decir, tal que existe un conjunto finito de números $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ tal que $a_1 = a$ y $a_k = b$ y con la propiedad que para cada $1 \leq j \leq k-1$, $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ es una curva C^1. Si el contorno γ es una función inyectiva, entonces se dice *simple*; mientras que si $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces el contorno se llama *cerrado*; si el contorno γ es cerrado y $\gamma|_{[a,b)}$ es inyectiva, entonces se le dice *simple y cerrado*.

La integral de una función continua f de valores complejos definida en un dominio Ω que contiene a un contorno γ se define por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)dt.$$

Note que el lado derecho de esta expresión es la integral de una función compleja de variable real. Similarmente, la integral de f sobre γ con respecto a la longitud de arco viene dada por

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)|\gamma'(t)|\,dt.$$

La integral sobre un contorno y la integral con respecto a la longitud de arco se relacionan mediante la expresión

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\,. \tag{1.4}$$

También es conocido que si f es holomorfa en un dominio simplemente conexo Ω (ver W. Rudin (1974) para la definición y propiedades de los dominios simplementes conexos) y $z_1, z_2 \in \Omega$, entonces

$$f\left(z_2\right) - f\left(z_1\right) = \int_\gamma f'(s)ds, \tag{1.5}$$

para todo contorno γ contenido en Ω con punto inicial z_1 y punto final z_2.

Un resultado que hay que tener presente cuando se trabaja en espacios de funciones holomorfas es el famoso teorema de la fórmula integral de Cauchy que se enuncia a continuación.

Teorema 1.5 (Fórmula integral de Cauchy)**.** *Sea f holomorfa en el interior y en los puntos de un contorno cerrado simple C, orientado positivamente (en sentido contrario a las agujas del reloj). Si z_0 es un punto interior a C, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz; \tag{1.6}$$

y en general para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{\left(z - z_0\right)^{n+1}}dz. \tag{1.7}$$

La expresión en (1.7) se conoce como la *fórmula integral de Cauchy para las derivadas* de la función holomorfa f. Como consecuencia inmediata del resultado anterior surge que si f es holomorfa en un abierto Ω, entonces la derivada f' también es holomorfa en Ω; es decir,

$$f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega);$$

de manera entonces que toda función holomorfa sobre un abierto Ω pertenece a la clase $C^{\infty}(\Omega)$ de las funciones infinita y continuamente diferenciables en Ω.

El siguiente concepto desempeña un papel central en la teoría de funciones de variable compleja.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Se dice que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es *analítica en* Ω si para cada $z_0 \in \Omega$ existen una sucesión de números complejos a_n, $n \geq 1$, y un número real $R > 0$ tales que $D_R(z_0) \subset \Omega$ y para cada $z \in D_R(z_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Las funciones holomorfas coinciden con su serie de Taylor tal como se establece en el siguiente resultado.

Teorema 1.6 (Teorema de Taylor). *Si $f \in H(\Omega)$ con Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Entonces para cada $a \in \Omega$, existe $R > 0$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \tag{1.8}$$

para todo $z \in D(a, R)$.

Ahora se enunciará uno de los resultados más importante de esta sección.

Teorema 1.7 (Teorema de analiticidad). *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Entonces, $f \in H(\Omega)$ si, y sólo si, f es analítica en Ω.*

Otra consecuencia importante de la fórmula integral de Cauchy es el *principio del máximo* el cual reza de la siguiente manera

Teorema 1.8 (Principio del módulo máximo). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega)$. Si existe un punto $z_0 \in \Omega$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in \Omega$, entonces f es constante.*

Como consecuencia inmediata de este resultado se tiene el *principio del mínimo*

Corolario 1.1 (Principio del mínimo). *Si f es analítica sobre y en el interior de la curva simple y cerrada γ y $f(z) \neq 0$ para todo z en el interior de la región cuya frontera es γ, entonces $|f(z)|$ asume su valor mínimo sobre γ.*

El siguiente resultado permite realizar acotaciones muy finas del módulo de funciones analíticas definidas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$.

Teorema 1.9 (Lema de Schwarz). *Sea f analítica sobre el disco unitario $\mathbb{D}$. Suponga que*

1. *$|f(z)| < 1$ para toda $z \in \mathbb{D}$ y que*

2. *$f(0) = 0$.*

Entonces $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $|f'(0)| = 1$. Si además $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ o si $|f'(0)| = 1$, entonces f es una rotación de la identidad; es decir, $f(z) \equiv \alpha z$ para alguna constante compleja α de módulo igual a 1 y para todo $z \in \mathbb{D}$.

También se requiere del famoso teorema de la función inversa que dice que las funciones analíticas con derivada no nula en un punto es inyectiva en un entorno de ese punto.

Teorema 1.10 (Teorema de la función inversa). *Suponga que f es analítica en un conjunto abierto que contiene a c y que $f'(c) \neq 0$. Entonces existe $\eta > 0$ tal que f es 1-1 sobre $N = N(c, \eta)$. Sea g la función inversa de $f|_N$ (la restricción de f sobre N). Sea $z \in N$ y $f(z) = w$. Entonces $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$.*

Una sucesión de funciones $\{f_j\}$ definidas en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ se dice que *converge uniformemente a f sobre subconjuntos compactos de Ω*, si para cada subconjunto compacto $K \subseteq \Omega$ y cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ (que depende de K y ε) tal que

$$\sup_{z \in K} |f_j(z) - f(z)| < \varepsilon$$

siempre que $j \geq N$.

El siguiente resultado dice que el espacio de funciones analíticas $H(\Omega)$ con Ω un dominio de $\mathbb{C}$ es completo con la métrica de la convergencia uniforme sobre compactos.

Teorema 1.11. *Sea $\{f_j\} \subset H(\Omega)$ con Ω un dominio y suponga que $\{f_j\}$ converge uniformemente a f sobre subconjuntos compactos de Ω. Entonces $f \in H(\Omega)$ y $f_j' \to f'$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de Ω.*

Esta sección finaliza, recordando el célebre Teorema de Rouché, el cual permite contar los ceros de las funciones analíticas.

Teorema 1.12. *(Teorema de Rouche) Suponga que $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son funciones analíticas sobre un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Suponga también que $\overline{D}(P,r) \subseteq \Omega$ y que, para cada $\zeta \in \partial D(P,r)$,*

$$|f(\zeta) - g(\zeta)| < |f(\zeta)| + |g(\zeta)|$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(P,r)} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(P,r)} \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} d\zeta.$$

Esto es, el número de ceros de f en $D(P,r)$ contiene multiplicidad igual a la multiplicidad del número de ceros de g en $D(P,r)$.

1.3 Automorfismos del disco

Para el logro de los objetivos planteados en este Trabajo de Grado, es necesario trabajar con espacios de funciones analíticas definidas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$. Es por esta razón que en esta sección, se estudia en detalles la definición y las propiedades de los automorfismos del disco que no son más que funciones analíticas biyectivas del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo.

Recuerde, en primer lugar, que una *transformación de Möbius o transformación lineal fraccionada* es una función de la forma

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0;$$

y entre sus propiedades se puede destacar que éstas son funciones biyectivas y analíticas en $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ que aplican circunferencias en circunferencias, donde una recta es considerada una circunferencia. Luego, para $a \in \mathbb{D}$ fijo, la función

$$\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z},$$

es una transformación de Möbius que satisface las siguientes propiedades:

Proposición 1.1. *Para cada $a \in \mathbb{D}$, las funciones φ_a son funciones analíticas y biyectivas del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo que satisfacen:*

1. $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$,

2. *El determinante Jacobiano de φ_a en z es*

$$J_{\varphi_a}(z) = |\varphi_a'(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)^2}{|1-\overline{a}z|^4};$$

3. *Para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple*

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|a|^2)}{|1-\overline{a}z|^2} = (1-|z|^2)|\varphi_a'(z)|. \tag{1.9}$$

Prueba: En efecto, para $a \in \mathbb{D}$ fijo, como φ_a es una función racional, entonces es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$; en particular $\varphi_a \in H(\mathbb{D})$. Además, como $|a| < 1$, entonces para cada $|z| < 1$, se cumple

$$|a|^2(1-|z|^2) < 1-|z|^2,$$

luego agrupando y sumando $-a\overline{z} - \overline{a}z$ a ambos lados de la desigualdad se obtiene

$$|a|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |z|^2 < 1 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2|z|^2,$$

esto es, $(a-z)\overline{(a-z)} < (1-\overline{a}z)\overline{1-\overline{a}z}$ y por tanto

$$|\varphi_a(z)| = \left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right| < 1,$$

lo que significa que $\varphi_a(z) \in \mathbb{D}$ y $\varphi_a(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Recíprocamente, escribiendo $w = \varphi_a(z)$ y despejando la z, se obtiene que

$$z = \frac{a-w}{1-\overline{a}w} \in \mathbb{D},$$

y φ_a es una función biyectiva del disco $\mathbb{D}$ en sí mismo que satisface $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$.

(2) Sea $z = x+iy$ y $\varphi_a(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, entonces

$$J_{\varphi_a}(z) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x v_y - u_y v_x;$$

pero por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, y como

$$\varphi_a'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y),$$

entonces

$$\begin{aligned} J_{\varphi_a(z)} &= u_x u_x + u_y u_y \\ &= u_x^2 + v_x^2 \\ &= |\varphi_a'(z)|^2. \end{aligned}$$

Ahora, si se deriva $\varphi_a(z)$, se obtiene

$$\varphi_a'(z) = \frac{-1+|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}, \tag{1.10}$$

de donde

$$|\varphi_a'(z)|^2 = \frac{|1-|a|^2|^2}{|1-\overline{a}z|^4}.$$

(3) Finalmente, sin más que sustituir la función φ_a y usando la expresión de la derivada en (1.10), se obtiene

$$\begin{aligned} 1-|\varphi_a(z)|^2 &= 1 - \left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right|^2 \\ &= \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2}(1-|z|^2) \\ &= (1-|z|^2)|\varphi_a'(z)|. \end{aligned}$$

La prueba está completa. ■

Esta sección finaliza demostrando, como aplicación del Lema de Schwarz, que salvo rotaciones, las únicas funciones analíticas y biyectivas que aplican el disco unitario $\mathbb{D}$ en sí mismo son los φ_a con $a \in \mathbb{D}$; pero antes, es necesario el siguiente lema:

Lema 1.2. *Si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es analítica, $a \in \mathbb{D}$ y $f(a) = \alpha$, entonces*

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |a|^2}. \tag{1.11}$$

Prueba: Sea $g = \varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_a$, entonces g es una función analítica sobre el disco que satisface

$$\begin{array}{lrcl} (1) & |g(z)| & \leq & 1, \text{para todo } z \in \mathbb{D}; \\ (2) & g(0) & = & \varphi_\alpha(f(\varphi_a(0))) = \varphi_\alpha(f(a)) = \varphi_\alpha(\alpha) = 0, \end{array}$$

las cuales son las condiciones del Lema de Schwarz; por lo tanto, $|g'(0)| \leq 1$, y dado que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \varphi'_\alpha(f(\varphi_a(0)))f'(\varphi_a(0))\varphi'_a(0) \\ &= \varphi'_\alpha(\alpha)f'(a)[-(1 - |a|^2)] \\ &= -\frac{1}{1 - |\alpha|^2} f'(a)[-(1 - |a|^2)] \\ &= \frac{1 - |a|^2}{1 - |\alpha|^2} f'(a), \end{aligned}$$

se concluye que

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |\alpha|^2}{1 - |a|^2}$$

y la prueba está completa. ■

Observación. Note que la igualdad se cumple cuando $|g'(0)| = 1$. En este caso el Lema de Schwarz implica que existe $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$ tal que $g(z) = cz$; es decir,

$$f(z) = \varphi_{-\alpha}(c\varphi_a(z)).$$

Teorema 1.13. *Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una aplicación biyectiva y analítica del disco en sí mismo y supóngase que $f(a) = 0$. Entonces existe un número complejo c con $|c| = 1$ tal que $f = c\varphi_a$.*

Prueba: Dado que la función f es biyectiva, entonces existe una función $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tal que $g(f(z)) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Aplicando la desigualdad (1.11) del lema anterior a f y a g se tiene

$$|f'(a)| \leq \frac{1}{1-|a|^2} \tag{1.12}$$

$$|g'(0)| \leq \frac{1-|g(0)|^2}{1-|0|^2} = 1-|a|^2, \tag{1.13}$$

ya que $f(a) = 0$ y $g(0) = a$. Por la regla de la cadena, $g'(f(z))f'(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$; en particular, para $z = a$ se cumple $g'(0)f'(a) = 1$, de donde se tiene

$$|f'(a)| = \frac{1}{|g'(0)|} \geq \frac{1}{1-|a|^2}. \tag{1.14}$$

Así de (1.12) y (1.14) se sigue que

$$|f'(a)| = \frac{1}{1-|a|^2}. \tag{1.15}$$

Luego, definiendo la función $h = f \circ \varphi_a = \varphi_0 \circ f \circ \varphi_a = \varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_a$, se tiene que

(1) $|h(z)| \leq 1$

(2) $h(0) = 0$

(3) $h'(0) = f'(\varphi_a(0))\varphi_a'(0) = -f'(a)(1-|a|^2)$, lo cual implica que

$$|h'(0)| = |f'(a)|(1-|a|^2) = 1,$$

en virtud de (1.15).

Por la observación del lema anterior, se tiene $f(z) = \varphi_{-0}(c\varphi_a(z)) = c\varphi_a(z)$, para algún $c \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$.

Esto completa la prueba. ■

1.4 El teorema de Bloch

Se culmina este capítulo estableciendo el famoso teorema de la constante de Bloch, el cual será generalizado en la tercera sección del Capítulo 4 para la bola unidad de un espacio de funciones analíticas conocido como el espacio de Bergman. Los resultados presentados en esta sección se pueden consultar en el libro de J. Conway (1978).

Antes de establecer el teorema principal de esta sección necesitamos los siguientes lemas:

Lema 1.3. *Sea $f \in H(\mathbb{D})$ y suponga que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y que $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces $M \geq 1$ y*

$$D\left(0, \frac{1}{6M}\right) \subset f(\mathbb{D}).$$

Prueba: Sea $0 < r < 1$, por el Teorema de Taylor (Teorema 1.6) se puede escribir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad |z| < 1;$$

entonces tomando módulo en la fórmula integral de Cauchy (Teorema 1.7) y usando el hecho que f es acotada, se obtiene la desigualdad de Cauchy,

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n};$$

luego, tomando $n = 1$ y haciendo que $r \to 1^-$, se obtiene $1 = |a_1| \leq M$ y así $M \geq 1$.

Por otra parte, considere $w_0 \in D\left(0, \frac{1}{6M}\right)$; se probará que $w_0 \in f(\mathbb{D})$, para esto, se debe buscar $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $w_0 = f(z_0)$. En efecto, nótese que si $|z| = \frac{1}{4M}$, entonces por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |z| - \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n z^n| \\ &\geq \frac{1}{4M} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{M}{(4M)^n} \\ &= \frac{1}{4M} - \frac{1}{16M-4} \\ &\geq \frac{1}{6M} \end{aligned}$$

pues $M \geq 1$; luego, la función $g(z) = f(z) - w_0$ es analítica sobre $\mathbb{D}$. Además, para $|z| = \frac{1}{4M}$

$$|f(z) - g(z)| = |w_0| < \frac{1}{6M} \leq |f(z)|,$$

se deduce(por el Teorema de Rouche) que f y g tienen el mismo número de ceros en el disco $D\left(0, \frac{1}{4M}\right)$ y dado que $f(0) = 0$, entonces existe $z_0 \in D\left(0, \frac{1}{4M}\right) \subset \mathbb{D}$ tal que $g(z_0) = 0$; es decir, existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = w_0$.

La prueba del lema está completa. ■

Lema 1.4. *Suponga que g es una función analítica en el disco $D(0, R)$, con $g(0) = 0$, $|g'(0)| = \mu > 0$ y $|g(z)| \leq M$, para toda $z \in D(0, R)$, entonces*

$$D\left(0, \frac{R^2\mu^2}{6M}\right) \subset g\left(D(0, R)\right).$$

Prueba: Para $|z| < 1$, definase

$$f(z) = \frac{1}{Rg'(0)} g(Rz),$$

entonces $f \in H(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $|f(z)| \leq \frac{M}{R\mu}$, por lo que, el Lema 1.3 implica el resultado.

La prueba está completa. ■

Lema 1.5. *Sea f una función analítica en el disco $D(a; r)$ tal que*

$$|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)|$$

para cada $z \in D(a, r) \setminus \{a\}$, entonces f es 1-1 en $D(a, r)$.

Prueba: Sea $z_1, z_2 \in D(a, r)$, $z_1 \neq z_2$ y $\gamma = [z_1, z_2]$, un segmento de recta en $\mathbb{D}$ que une z_1 con z_2, entonces

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= |\int_\gamma f'(z)dz| \\ &\geq |\int_\gamma f'(a)dz| - |\int_\gamma (f'(z) - f'(a))dz| \\ &> |f'(a)||z_1 - z_2| - |f'(a)||z_1 - z_2| \\ &= 0, \end{aligned}$$

de donde, $f(z_1) \neq f(z_2)$ y f es 1-1. ■

Ahora ya se tienen todas las herramientas para enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.14 (Teorema de Bloch)**.** *Sea f analítica en una región que contiene a $\overline{\mathbb{D}}$ con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Entonces existe un disco $S \subset \mathbb{D}$ en el cual f es 1-1 y tal que $f(S)$ contiene un disco de radio $\frac{1}{72}$.*

Prueba: Para $r \in [0, 1]$, sea

$$K(r) = \max\{|f'(z)| : |z| = r\}$$

y $h(r) = (1 - r)K(r)$, entonces como f es analítica en $\overline{\mathbb{D}}$, claramente $K(r)$ y, consecuentemente $h(r)$, son funciones reales continuas en $[0, 1]$. En efecto, sea $r_0 \in [0, 1]$ y seleccione $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$, $|z_0| = r_0$ tal que

$$|f'(z_0)| = K(r_0) = \max\{|f'(z)| : |z| = r_0\}$$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces como f' es continua en z_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f'(z) - f'(z_0)| < \varepsilon,$$

por tanto, seleccionando $z_r \in D(z_0, \delta)$ tal que $|z_1| = r$ y

$$|f'(z_1)| = K(r) = \max\{|f'(z)| : |z| = 1\},$$

se tiene

$$|r - r_0| = ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| < \delta$$

y por tanto

$$|K(r) - K(r_0)| = ||f'(z_1)| - |f'(z_0)|| \leq |f'(z_1) - f'(z_1)| < \varepsilon,$$

lo que dice que K es continua en r_0. Luego, la función $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua, $h(0) = 1$ y $h(1) = 0$.

Considerese ahora

$$r_0 = \sup\{r : h(r) = 1\},$$

entonces, por la continuidad de la función h, se tiene $h(r_o) = 1$, $r_0 < 1$ y por definición de r_0, se concluye que $h(r) < 1$ si $r > r_0$; luego, seleccionando a tal que $|a| = r_0$ y

$$|f'(a)| = K(r_0) = \frac{h(r_0)}{1 - r_0},$$

se obtiene

$$|f'(a)| = \frac{1}{1 - r_0}.$$

Ahora, si $|z - a| < \frac{1}{2}(1 - r_0) = \rho_0$, entonces por la desigualdad triangular se tiene $|z| < \frac{1}{2}(1 + r_0)$; y por el principio del módulo máximo

$$\begin{aligned} |f'(a)| &\leq K(\frac{1}{2}(1 + r_0)) \\ &= h(\frac{1}{2}(1 + r_0))[1 - \frac{1}{2}(1 + r_0)]^{-1} \\ &< [1 - \frac{1}{2}(1 + r_0)]^{-1} \\ &= \frac{1}{\rho_0}, \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se ha usado que $h(1) < 1$ si $r > r_0$ y $\frac{1}{2}(1 + r_0) > r_0$; luego para $|z - a| < \rho_0$, se tiene

$$\begin{aligned} |f'(z) - f'(a)| &\leq |f'(z)| + |f'(a)| \\ &< \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{1 - r_0} \\ &= \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{2\rho_0} = \frac{3}{2\rho_0}. \end{aligned}$$

De aquí que, definiendo la función

$$g(z) = \frac{2\rho_0}{3}\{f'(\rho_0 z + a) - f'(a)\}, \ z \in \mathbb{D}$$

se satisface: $g(0) = 0$, y, si $z \in \mathbb{D}$ entonces

$$w = \rho_0 z + a$$

satisface $|w-a| = \rho_0|z| < \rho_0$, por lo que

$$|g(z)| = \frac{2\rho_0}{3}|f'(w) - f'(a)| < \frac{2\rho_0}{3}\left(\frac{3}{2\rho_0}\right) < 1,$$

luego el Lema de Schwarz implica

$$|g(z)| < |z|$$

para toda $z \in \mathbb{D}$, es decir,

$$|f'(w) - f'(a)| < \frac{3}{2\rho_0}\frac{|w-a|}{\rho_0} = \frac{3}{2\rho_0^2}|w-a|$$

para toda $w \in D(a, \rho_0)$. De aquí, que si $z \in S = D\left(a, \frac{1}{3}\rho_0\right)$ se tiene

$$|f'(z) - f'(a)| < \frac{1}{2}\rho_0 = |f'(a)|$$

y por el Lema 1.5, f es 1-1 en $S = D\left(a, \frac{1}{3}\rho_0\right)$.

Se probará que $f(S)$ contiene un disco de radio $\frac{1}{72}$. Para esto, considerese la función $g : D\left(0, \frac{1}{3}\rho_0\right) \to \mathbb{C}$ que asigna z a $g(z) = f(z+a) - f(a)$, entonces $g(0) = 0$, $|g'(0)| = |f'(a)| = \frac{1}{2\rho_0}$. Además, si $z \in D\left(0, \frac{1}{3}\rho_0\right)$, entonces el segmento $[a, z+a]$ está contenido en $S \subset D(a, \rho_0)$ y por tanto

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left|\int_{[a,z+a]} f'(s)ds\right| \\ &\leq \int_{[a,z+a]} |f'(s)|ds \\ &\leq \frac{1}{\rho_0}|z| < \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que si $s \in [a, z+a]$, entonces $|f'(s)| < \frac{1}{\rho_0}$. Luego, aplicando el Lema 1.3, se obtiene

$$D(0, \sigma) \subset g\left(D\left(0, \frac{1}{3}\rho_0\right)\right),$$

donde

$$\sigma = \frac{(\frac{1}{3}\rho_0)^2(\frac{1}{2\rho_0})}{6(\frac{1}{3})} = \frac{1}{72}$$

haciendo la traslación se concluye que

$$D\left(f(a), \frac{1}{72}\right) \subset f(S).$$

La prueba está completa. $\blacksquare$

Comentario. Uno de los problemas más famoso en el análisis complejo es hallar la menor constante B, llamada *constante de Bloch*, para la cual el teorema de Bloch es válido. Muchos matemáticos famosos han abordado este problema; por ejemplo, Ahlfors y Grunsky (1937), demostraron que

$$\frac{1}{4}\sqrt{3} \leq B \leq \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{11}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

En este mismo artículo ellos conjeturan que esta cota superior es realmente el valor de B; pero hasta la fecha esto no ha sido demostrado. Más recientemente, Finch (2004) ha encontrado que $B \geq \sqrt{3}/4 + 2 \times 10^{-4}$.

CAPÍTULO 2

FUNCIONES UNIVALENTES Y TEOREMAS DE DISTORSIÓN

En este capítulo se estudian los resultados sobre la teoría geométrica de funciones analíticas que se usarán en el resto de este trabajo. En primer lugar, recuerde que una función compleja f de variable compleja, definida y analítica sobre un dominio G se dice *univalente* en $G \subset \mathbb{C}$, si ésta es inyectiva en G; es decir, si no toma el mismo valor dos veces; en particular, si $z_1, z_2 \in G$ con $z_1 \neq z_2$, entonces $f(z_1) \neq f(z_2)$. Una función $f \in H(G)$ se dice *localmente univalente* en un punto $z_0 \in G$, si ésta es univalente en algún entorno de z_0.

Claramente, toda función univalente es localmente univalente; pero el recíproco es falso. Para ver esto basta considerar la función $f(z) = e^z$. También, por el Teorema de la función inversa, $f \in H(G)$ es localmente univalente en $z_0 \in G$ si y sólo si $f'(z_0) \neq 0$; luego, una función analítica y univalente tiene la propiedad de preservar ángulos. Por tal motivo también se le suele llamar a estas funciones *transformaciones conformes.*

2.1 La clase S y la clase Σ

Ahora se pasará a estudiar una de las clases de funciones univalentes más importantes del análisis complejo; a saber, la *clase* S de funciones f univalentes en $\mathbb{D}$, tales que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Se puede observar que, por el Teorema de Taylor, cada $f \in S$ tiene una serie de potencias de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots, \quad |z| < 1;$$

y entre las funciones que se encuentran en esta clase podemos citar *la función de Koebe* dada por

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

En vista que la transformación de Möbius

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

aplica el disco unitario $\mathbb{D}$ en el semiplano $Re(w) > 0$ y la transformación $w = z^2$ aplica el semiplano derecho $Re(w) > 0$ en el semiplano superior $Im(w) > 0$, es claro que, por una dilatación y una traslación, la transformación de Koebe aplica conformemente el disco $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C} \setminus [-\frac{1}{4}, +\infty)$.

Otra propiedad evidente de la transformación de Koebe es que $|a_n| = n$ para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$. Un problema muy famoso (planteado por Bieberbach en 1916) establecía que

$$|a_n| \leq n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

para toda función $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots +$, $|z| < 1$, en la clase S. Este problema fue resuelto en 1985 por L. de Branges. El siguiente resultado ayuda a construir otras transformaciones conformes en la clase S.

Teorema 2.1. *Sea $f \in S$, $z \in \mathbb{D}$. La clase S se preserva bajo un número de transformaciones elementales:*

1. Conjugación*: Si $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2} z^2 + \overline{a_3} z^3 + \cdots$, entonces $g \in S$.*

2. Rotación*: Si $g(z) = e^{-i\theta} f(z e^{i\theta})$, entonces $g \in S$.*

3. Dilatación*: Si $g(z) = r^{-1} f(rz)$, $0 < r < 1$, entonces $g \in S$.*

4. Automorfismo del disco*: Si*

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha} z}) - f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2) f'(\alpha)}, \quad |\alpha| < 1,$$

   entonces $g \in S$.

5. Rango transformación*: Si ψ es univalente en el rango de f, con $\psi(0) = 0$ y $\psi'(0) = 1$, entonces $g = \psi \circ f \in S$.*

6. Transformación valor omitido*: Si $w \notin Rang(f)$, entonces*

$$g = \frac{wf}{w - f} \in S.$$

7. Raíz cuadrada*: Si*

$$g(z) = \left[f\left(z^2\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

entonces $g \in S$.

Prueba: Se debe verificar que las funciones son analíticas e inyectivas, que fijan el origen y que la derivada evaluada en $z = 0$ es igual a 1. En efecto, sólo se hará la demostración de los item (*4.*) y (*7.*). La prueba de los demás casos es similar.

4. En primer lugar, nótese que como f es analítica, entonces g hereda esta propiedad; además

$$g(0) = \frac{f(\alpha) - f(\alpha)}{(1 - |\alpha|^2)f'(\alpha)} = 0$$

y como

$$g'(z) = \frac{f'(\frac{z+\alpha}{1+\overline{\alpha}z})}{(1 - \overline{\alpha}z)^2 f'(\alpha)},$$

entonces

$$g'(0) = \frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} = 1.$$

Solo falta probar que g es 1-1. En efecto, si $g(z_1) = g(z_2)$, entonces por definición se tiene, para $|\alpha| < 1$

$$\frac{f\left(\frac{z_1+\alpha}{1+\overline{\alpha}z_1}\right) - f(\alpha)}{(1 - |\alpha|^2)f'(\alpha)} = \frac{f\left(\frac{z_2+\alpha}{1+\overline{\alpha}z_2}\right) - f(\alpha)}{(1 - |\alpha|^2)f'(\alpha)},$$

de donde

$$f\left(\frac{z_1 + \alpha}{1 + \overline{\alpha}z_1}\right) - f(\alpha) = f\left(\frac{z_2 + \alpha}{1 + \overline{\alpha}z_2}\right) - f(\alpha);$$

luego, como f es 1-1, entonces se verifican las siguientes relaciones

$$\frac{z_1 + \alpha}{1 + \overline{\alpha}z_1} = \frac{z_2 + \alpha}{1 + \overline{\alpha}z_2}$$

$$(z_1 + \alpha)\left(1 + \overline{\alpha}z_2\right) = (z_2 + \alpha)\left(1 + \overline{\alpha}z_1\right)$$

$$z_1 + \overline{\alpha} z_1 z_2 + \alpha + |\alpha|^2 z_2 = z_2 + \overline{\alpha} z_1 z_2 + \alpha + |\alpha|^2 z_1$$

$$z_1 - |\alpha|^2 z_1 = z_2 - |\alpha|^2 z_2$$

$$z_1 \left(1 - |\alpha|^2\right) = z_2 \left(1 - |\alpha|^2\right)$$

$$z_1 = z_2$$

con lo que se muestra que g es 1-1 y de esta manera que pertenece a la clase S.

7. Como $f(0) = 0$, entonces

$$g(0) = \left[f(0^2)\right]^{\frac{1}{2}} = [f(0)]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Por otro lado,

$$g(z) = \left[f(z^2)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \cdots\right)^{\frac{1}{2}}, \ |z| < 1$$

pero considerando una rama de la raíz cuadrada y usando el hecho de que f es univalente, se puede escribir

$$g(z) = \left[z^2 \left(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \cdots\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \ |z| < 1$$

de donde

$$g(z) = z\left(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \cdots\right)^{\frac{1}{2}}, |z| < 1.$$

Ahora, si se define la función h mediante la expresión

$$h(w) = (1 + w)^{\frac{1}{2}}$$

entonces, por el teorema de binomio

$$h(w) = (1 + w)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n w^n, \ |w| < 1$$

donde $c_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!}$. Además, se verifica que $h(0) = 1, \ h'(0) = \frac{1}{2}, \ h''(0) = -\frac{1}{4}, \ h'''(0) = \frac{3}{8}$; así

$$h(w) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{2}\frac{w}{1!} - \frac{1}{4}\frac{w^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{w^3}{3!} + \cdots$$

es decir,

$$(1+w)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}w - \frac{1}{8}w^2 + \frac{1}{16}w^3 + \cdots$$

de donde haciendo $w = a_2z^2 + a_3z^4 + a_4z^6 + \cdots$, se obtiene

$$\left(1 + a_2z^2 + a_3z^4 + a_4z^6 + \cdots\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(a_2z^2 + a_3z^4 + \cdots) - \frac{1}{8}(a_2z^2 + a_3z^4 + \cdots) + \cdots$$

luego, se puede escribir

$$\left(1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \cdots\right) = 1 + b_1z^2 + b_2z^4 + b_3z^6 + \cdots, \ |z| < 1$$

por lo tanto

$$g(z) = \left[f\left(z^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = z\left[1 + b_1z^2 + b_2z^4 + b_3z^6 + \cdots\right], \ |z| < 1$$

y

$$g(z) = 1 + b_1z^3 + b_2z^4 + b_3z^5 + \cdots, \ |z| < 1.$$

De esta forma g es una función analítica que satisface $g(-z) = -g(z)$. Así, si $g(z_1) = g(z_2)$, entonces $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ y $z_1^2 = z_2^2$, con lo que se obtiene $z_1 = \pm z_2$, pero si $z_1 = -z_2$ entonces

$$g(z_1) = g(-z_2) = \left[f\left((-z_2)^2\right)\right] = \left[f\left(z_2^2\right)\right] = g(z_2) = g(-z_1) = -g(z_1)$$

luego $g(z_1) = 0$, y $z_1 = 0$, lo que muestra que $z_1 = z_2$, y así $g \in S$.

$\blacksquare$

Otra clase de funciones univalentes relacionada con la clase S es la *clase* Σ de las funciones en el dominio $\Delta = \{z : |z| > 1\}$ de la forma

$$g(z) = z + b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \cdots .$$

Una de las propiedades más importantes de las funciones en la clase Σ se enuncia en el siguiente resultado.

Teorema 2.2 (Teorema del área). *Si $g \in \Sigma$, entonces*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n|b_n|^2 \leq 1.$$

Prueba: Sea $E = \mathbb{C} \setminus Rang(g)$, el conjunto omitido por g. Para $r > 1$, sea C_r la imagen por g del círculo $|z| = r$. Dado que g es univalente, C_r es una curva simple y cerrada la cual encierra un dominio $E_r \supset E$. Por otro lado,

$$A(E_r) = \int\int_{E_r} dxdy,$$

pero para $P = -\frac{1}{2}y$ y $Q = \frac{1}{2}x$, tenemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ y por el Teorema de Green

$$\begin{aligned} A(E_r) &= \int\int_{E_r} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{C_r} (Pdx + Qdy) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{C_r} xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2i} \int_{C_r} \overline{w} dw = \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (re^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{b_n} r^{-n} e^{in\theta})(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k r^{-k-1} e^{-(k+1)\theta}) d\theta \\ &= \pi(r^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} n|b_n|^2 r^{-2n}); \end{aligned}$$

luego, como $A(E_r) \geq 0$, para todo $r > 1$, podemos hacer $r \to 1^+$ y obtener

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n|b_n|^2 \leq 1.$$

La prueba está completa. ■

Un corolario inmediato del teorema anterior, pero no menos importante, es el siguiente resultado:

Corolario 2.1. *Si $g \in \Sigma$, entonces $|b_1| \leq 1$. Además, la igualdad ocurre si y sólo si g tiene la forma*

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z}, \quad |b_1| = 1.$$

Prueba: Por el teorema del área

$$|b_1| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n|b_n|^2 \leq 1,$$

luego, si $|b_1| = 1$ se debe tener $0 = b_2 = b_3 = ...$ y por tanto

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z}.$$

Esto completa la prueba del resultado. ■

2.2 Teorema 1/4 de Koebe

En esta sección se establece el célebre Teorema 1/4 de Koebe. Con este fin, primero se enuncia y demuestra el siguiente resultado debido a Bieberbach (1916).

Teorema 2.3 (Teorema de Bieberbach)**.** *Si $f \in S$, entonces $|a_2| \leq 2$. Además, la igualdad ocurre si y sólo si f es una rotación de la transformación de Koebe.*

Prueba: Si $f \in S$, entonces por el Teorema 2.1, la función

$$g(z) = \left[f\left(\frac{1}{z^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} = z - \frac{a_2}{2} z^{-1} + \cdots$$

es un elemento de la clase Σ. Luego, por el Corolario 2.1 se tiene

$$|a_2| \leq 2,$$

donde la igualdad vale si g tiene la forma

$$g(z) = z - \frac{e^{i\theta}}{z};$$

esto es, sustituyendo, si f tiene la forma

$$f(w) = \left[g\left(\frac{1}{(w)^{\frac{1}{2}}}\right) \right]^{-2} = \frac{w}{[1 - e^{i\theta} w]^2} = e^{-i\theta} K(e^{i\theta} w).$$

Lo cual es una rotación de la transformación de Koebe. ■

Ahora se enunciará y demostrará el famoso Teorema 1/4 de Koebe, el cual será de gran utilidad en el capítulo final de esta tesis.

Teorema 2.4 (Teorema $\frac{1}{4}$ de Koebe)**.** *El rango de cada función f en la clase S contiene al disco $\{w : |w| < \frac{1}{4}\}$.*

Prueba: Se va a probar que $\mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C} \setminus D(0, \frac{1}{4})$. Sea $w \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$; es decir, suponga que f omite el valor $w \in \mathbb{C}$. Entonces por el Teorema 2.1

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} = z + (a_2 + \frac{1}{w})z^2 + \cdots$$

es una función en la clase S y por el Teorema de Bieberbach, se obtiene

$$\left| a_2 + \frac{1}{w} \right| \leq 2$$

que junto con la desigualdad $|a_2| \leq 2$ implica $|\frac{1}{w}| \leq 4$ o equivalentemente $|w| \geq \frac{1}{4}$. Esto completa la prueba. ■

2.3 Teoremas de distorsión

En esta sección se establecen los resultados que permitirán controlar el crecimiento de una aplicación conforme definida sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, así como obtener cotas para controlar el crecimiento de su derivada. El lector interesado en profundizar en la teoría relativa a las transformaciones conformes se le recomienda revisar las excelentes obras de C. Pommerenke (1975) y (1992) y de P. Duren (1980).

Teorema 2.5. *Para cada $f \in S$ y $z \in \mathbb{D}$, se cumple*

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2}. \tag{2.1}$$

Prueba: Sea $f \in S$ y fije $\xi \in \mathbb{D}$, entonces

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+\xi}{1+\bar{\xi}z}\right) - f(\xi)}{(1 - |\xi|^2)\, f'(\xi)} = z + A_2(\xi)z^2 + \ldots$$

es una función en la clase S con

$$g''(z) = \frac{f''\left(\frac{z+\xi}{1+z\bar{\xi}}\right)(1 - |\xi|^2) - f'\left(\frac{z+\xi}{1+z\bar{\xi}}\right) 2(1 + z\bar{\xi})\bar{\xi}}{f'(\xi)(1 + z\bar{\xi})^4},$$

luego,

$$A_2(\xi) = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}\left\{(1 - |\xi|^2)\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} - 2\bar{\xi}\right\}.$$

Luego, por el Teorema de Bierberbach, $|A_2(\xi)| \leq 2$ y por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\left|(1-|\xi|^2)\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} - 2\overline{\xi}\right| \leq 2,$$

de donde

$$\frac{1}{2}(1-|\xi|^2)|\xi|\left|\frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{2\overline{\xi}}{1-|\xi|^2}\right| \leq 2|\xi|,$$

esto es,

$$\frac{1}{2}(1-|\xi|^2)\left|\frac{\xi f''(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{2\xi\overline{\xi}}{1-|\xi|^2}\right| \leq 2|\xi|$$

Así, cambiando ξ por z se obtiene

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}.$$

La prueba está completa. ■

Como consecuencia del resultado anterior, se enuncia y demuestra el siguiente resultado, el cual sirve para estimar el módulo de la derivada de una transformación conforme en la clase S.

Teorema 2.6 (Teorema de distorsión)**.** *Para cada $f \in S$ y $z \in \mathbb{D}$,*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{2.2}$$

La igualdad ocurre si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe.

Prueba: Sea $z \in \mathbb{D}$ y $r = |z|$; dado que $|Re(a)| \leq |a|$, el Teorema 2.5 implica que

$$-\frac{4r}{1-r^2} \leq Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right) \leq \frac{4r}{1-r^2},$$

de donde

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}. \tag{2.3}$$

Por otra parte, dado que $f'(z) \neq 0$ y $f'(0) = 1$, se puede considerar una rama de $Log(f'(z))$ que se anule en el origen y como

$$Re\left(Log(f'(z))\right) = Ln|f'(z)| = Ln\left|f'(re^{i\theta})\right|,$$

se puede derivar con respecto a r y obtener

$$\frac{\partial}{\partial r} Re\left(Log(f'(z))\right) = Re\left\{\frac{\partial}{\partial r} Log(f'(z))\right\},$$

es decir, multiplicando por r

$$r\frac{\partial}{\partial r} Re\left(Log(f'(z))\right) = Re\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right). \tag{2.4}$$

Sustituyendo (2.4) en (2.3) se obtiene

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} Log\left|f'(re^{i\theta})\right| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}. \tag{2.5}$$

Luego, para θ fijo, una integración con respecto a r desde 0 a R y la monotonía de la exponencial implica

$$\frac{1-R}{(1+R)^3} \leq \left|f'(Re^{i\theta})\right| \leq \frac{1+R}{(1-R)^3}$$

y la desigualdad (2.2) está probada.

Por otra parte, seleccionando una rotación de la función de Koebe cuya derivada sea

$$K'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3},$$

se tiene que las cotas de $f'(z)$ son las mejores posibles. Todavía más, si en (2.3) ocurre alguna de las igualdades, entonces ocurre lo mismo en (2.5) para todo $r \in [0, R]$; en particular,

$$Re\left(e^{i\theta}\frac{f''(0)}{f'(0)}\right) = \pm 4$$

lo cual implica que $|a_2| = 2$ y el Teorema de Bieberbach implica que f debe ser una rotación de la función de Koebe. ■

Una consecuencia inmediata del resultado anterior para transformaciones conformes definidas sobre el disco es:

Corolario 2.2. *Si f es una transformación conforme del disco $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C}$, entonces para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq |f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

Prueba: Si f es univalente sobre $\mathbb{D}$, entonces en particular $f'(0) \neq 0$ y se puede definir

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)}.$$

Entonces, claramente g hereda la univalencia de f y satisface $g(0) = 0$. También, de la relación $g'(z) = \frac{1}{f'(0)} f'(z)$, se obtiene $g'(0) = 1$, y por tanto $g \in S$. Aplicando el teorema de distorsión a g, se tiene

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |g'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3},$$

luego, haciendo el cambio respectivo, se obtiene

$$|f'(0)| \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq |f'(0)| \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}.$$

La prueba está completa. ■

Teorema 2.7 (Teorema del Crecimiento)**.** *Para cada $f \in S$ y $z \in \mathbb{D}$,*

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}. \tag{2.6}$$

La igualdad ocurre si y sólo si f es una rotación de la función de Koebe.

Prueba: Sea $f \in S$ y $z = re^{i\theta}$ fijo con $0 < r < 1$, dado que $f(0) = 0$, entonces

$$f(z) = \int_{[0,z]} f'(s) ds = \int_0^r f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho,$$

luego por el Teorema de distorsión, se obtiene

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \leq \int_0^r \frac{1 + \rho}{(1 - \rho)^3} d\rho = \frac{r}{(1 - r)^2}.$$

Para la cota inferior, se puede suponer $|f(z)| < \frac{1}{4}$, pues en el caso contrario, se tendría

$$r(1 + r)^{-2} < \frac{1}{4} \leq |f(z)|.$$

El Teorema $\frac{1}{4}$ de Koebe implica que el segmento radial desde 0 hasta z está totalmente contenido en el rango de f. Si C es la preimagen de este segmento, entonces C es un arco simple desde 0 a z y

$$f(z) = \int_C f'(\xi) d\xi;$$

pero por construcción $f'(\xi)$ tiene signo constante a lo largo de C, así que por el Teorema de distorsión

$$|f(z)| = \int_C |f'(\xi)||d\xi| \geq \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3}d\rho = \frac{r}{(1+r)^2}.$$

Esto completa la prueba. ■

Considerando, como antes, la función

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)},$$

se obtiene el siguiente corolario:

Corolario 2.3. *Para cada transformación conforme f definida sobre $\mathbb{D}$ y para cada $z \in \mathbb{D}$, se cumple*

$$|f'(0)|\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z) - f(0)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}|f'(0)|.$$

Suponga ahora que f es una transformación conforme del disco $\mathbb{D}$ sobre Ω y denótese por $\delta_\Omega(f(z))$ la distancia euclídea de $f(z)$ a $\partial\Omega$, la frontera de Ω. A continuación se establece que $\delta_\Omega(f(z))$ es comparable con la distancia de z a la frontera del disco $\mathbb{D}$ multiplicado, donde el módulo de $f'(z)$ es valor variable de comparación.

Teorema 2.8. *Para cada transformación conforme f del disco $\mathbb{D}$ en un dominio simplemente conexoΩ y para cada $z \in \mathbb{D}$, se cumple*

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)|f'(z)| \leq \delta_\Omega(f(z)) \leq (1-|z|^2)|f'(z)|. \tag{2.7}$$

Prueba: Sea f una transformación conforme del disco $\mathbb{D}$ sobre Ω y considere $z_0 \in \mathbb{D}$, entonces, por el Teorema 2.1, la función

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}$$

es univalente y está en la clase S.

Aplicando el teorema del crecimiento a la función g se obtiene

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |g(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \ z \in \mathbb{D},$$

de donde claramente se obtiene

$$\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq \frac{|g(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}, \tag{2.8}$$

siempre que $|z| \neq 0$. Note que como $g \in S$, entonces g tiene la forma

$$g(z) = z(1 + a_2 z + a_3 z^2 + a_4 z^3 + \cdots), \quad z \in \mathbb{D}$$

luego, definiendo $h(z) = \frac{1}{z} g(z)$, $z \in \mathbb{D}$, se tiene que $h \in H(\mathbb{D})$, con una singularidad evitable en $z = 0$, pues $g(0) = 0$. Además $h(0) = 1$; luego, por el Principio del Mínimo

$$\begin{aligned} |g'(0)| &= \left|\lim_{z\to 0} \frac{g(z)}{z}\right| = \left|\lim_{z\to 0} h(z)\right| = |h(0)| \\ &\geq \inf_{z\in\mathbb{D}} |h(z)| = \liminf_{|z|\to 1^-} |h(z)| \\ &= \liminf_{|z|\to 1^-} \frac{|g(z)|}{|z|}; \end{aligned}$$

así, de esta última relación y la acotación en (2.8), se puede escribir

$$\liminf_{|z|\to 1} \frac{1}{(1+|z|)^2} \leq \liminf_{|z|\to 1} \frac{|g(z)|}{|z|} \leq |g'(0)| = 1,$$

esto es

$$\frac{1}{4} \leq \liminf_{|z|\to 1} \frac{|f(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}) - f(z_0)|}{|z||(1-|z_0|^2)f'(z_0)|} \leq 1$$

y por lo tanto, haciendo el cambio de variable

$$\xi = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$$

y tomando en cuenta que

$$\delta_\Omega(f(z_0)) = dist(\partial\Omega, f(z_0)) = \liminf_{|\xi|\to 1} |f(\xi) - f(z_0)|,$$

se concluye que

$$\frac{1}{4}(1-|z_0|^2)|f'(z_0)| \leq \delta_\Omega(f(z_0)) \leq (1-|z_0|^2)|f'(z_0)|$$

Esto completa la prueba. ■

Finalmente, si g es una transformación conforme del disco D_R, con centro en el origen y radio $R < 1$ sobre el dominio Ω con $g(0) = 0$, entonces sin más que considerar la función

$$f(z) = \frac{1}{g'(0)R} g(Rz)$$

se puede reescribir los teoremas de distorsión y de crecimiento de la siguiente manera:

Teorema 2.9. *Para todo $z \in D_R$ se cumple:*

1. $R^2|g'(0)|\dfrac{|z|}{(R+|z|)^2} \leq |g(z)| \leq R^2|g'(0)|\dfrac{|z|}{(R-|z|)^2}$.
2. $R^2|g'(0)|\dfrac{R-|z|}{(R+|z|)^3} \leq |g'(z)| \leq R^2|g'(0)|\dfrac{R+|z|}{(R-|z|)^3}$.
3. $\dfrac{1}{4R}(R^2-|z|^2)|g'(z)| \leq \delta_\Omega(g(z)) \leq \dfrac{1}{R}(R^2-|z|^2)|g'(z)|$.

CAPÍTULO 3
ESPACIOS DE BERGMAN

En este capítulo se hará un estudio sobre los espacios de Bergman con pesos A^p_α con $p > 0$ y $\alpha > -1$. En la primera sección, del presente capítulo, se establecerá que estos son espacios métricos completos separables. La segunda sección está dedicada al estudio de la proyección de Bergman y a establecer una fórmula reproductora que satisface todas las funciones de estos espacios; la tercera y última sección de este capítulo está concebida a establecer los espacios duales de los espacios de Bergman. Un estudio más detallado de estos espacios se puede consultar en los excelentes textos de Zhu (1990), Hedelmann, Korenblum y Zhu (2000) y Duren y Schuster (2004).

3.1 El espacio A^p_α, con $\alpha > -1$ y $p > 0$

Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unitario abierto del plano complejo $\mathbb{C}$. Para $p > 0$ y $\alpha > -1$, denote por A^p_α el conjunto de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tal que

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{3.1}$$

donde, $dA_\alpha(z) = (\alpha+1)(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$ y dA es la medida normalizada de Lebesgue sobre $\mathbb{D}$, es decir,

$$dA(z) = \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} r dr d\theta,$$

con $z = x + iy = re^{i\theta}$.

De la definición se puede notar que para cada $p > 0$ y cada $\alpha > -1$,

$$A^p_\alpha = L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha) \cap H(\mathbb{D});$$

es decir, la intersección de dos espacios vectoriales. Por este motivo, A^p_α es un espacio vectorial, el cual es conocido como el *espacio de Bergman*. Además, es conocido (ver Royden (1968)) que para $p \geq 1$, el espacio $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es de Banach con la norma definida en (3.1); mientras que para $0 < p < 1$, el espacio vectorial $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es un espacio métrico completo con la métrica dada por

$$d(f,g) = \|f-g\|_{p,\alpha}^p \,.$$

Antes de enunciar y demostrar las propiedades más importante de los espacios de Bergman, se necesita el siguiente resultado que es consecuencia de la fórmula integral de Cauchy (Teorema 1.6).

Proposición 3.1. *Si $f \in H(\mathbb{D})$, $a \in \mathbb{D}$ y $r > 0$ es tal que $D(a,r) \subset \mathbb{D}$, entonces*

$$f(a) = \frac{1}{r^2}\int_{D(a,r)} f(w)dA(w). \tag{3.2}$$

Prueba: Sea $f \in H(\mathbb{D}), a \in \mathbb{D}$ y $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \mathbb{D}$, entonces parametrizando la fórmula integral de Cauchy (Teorema 1.6) se obtiene

$$\int_0^{2\pi} f\left(a+\rho e^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi f(a),$$

donde ρ es cualquier valor en $(0,r)$. Luego, multiplicando por $\frac{\rho}{\pi}$ e integrando con respecto a ρ desde 0 a r se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{D(a,r)} f(w)dA(w) &= \frac{1}{\pi}\int_0^r\int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta})\rho d\theta d\rho \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^r 2\pi f(a)\rho d\rho = r^2 f(a);\end{aligned}$$

es decir,

$$f(a) = \frac{1}{r^2}\int_{D(a,r)} f(w)dA(w),$$

como se afirmó. ■

Seguidamente se probará que la función $|f|^p$ con $p > 0$ y $f \in H(\mathbb{D})$ es una función subarmónica (ver Ransford (1995) para la definición y propiedades de las funciones subarmónicas)

Teorema 3.1. *Sea $p > 0$, $g \in H(\mathbb{D})$, $a \in \mathbb{D}$ y $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \mathbb{D}$, entonces*

$$|g(a)|^p \leq \frac{1}{r^2}\int_{D(a,r)} |g(w)|^p dA(w).$$

Prueba: En efecto, de la proposición anterior, es claro que si $g \in H(D(a,r))$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,r)$, entonces, tomando parte real en la expresión (3.2) con $f = Log(g)$, se obtiene

$$Ln\,|g(a)| = \frac{1}{r^2}\int_{D(a,r)} Ln\,|g(z)|\,dA(z),$$

lo cual implica que para todo $p > 0$ y para todo $g \in H(D(a,r))$

$$Ln\,|g(a)|^p \leq \frac{1}{r^2}\int_{D(a,r)} Ln\,|g(z)|^p\,dA(z).$$

Observe que, en esta última desigualdad, no se exige que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,r)$. Así, tomando exponencial a ambos lados de esta última expresión y usando la desigualdad de Jensen (Teorema 1.3), se obtiene

$$\begin{aligned} |g(a)|^p &\leq exp\left(\int_{D(a,r)} Ln\,|g(z)|^p\,\frac{dA(z)}{r^2}\right) \\ &\leq \int_{D(a,r)} |g(z)|^p\,\frac{dA(z)}{r^2}. \end{aligned}$$

La prueba está completa. ■

Comentario: Para el caso $p \geq 1$ se puede hacer una demostración del resultado anterior usando la desigualdad de Hölder.

En efecto, sea $g \in H(\mathbb{D})$, $a \in \mathbb{D}$ y $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \mathbb{D}$, entonces por la Proposición 3.1

$$g(a) = \frac{1}{r^2}\int_{D(a,r)} g(w)dA(w),$$

luego, tomando módulos a ambos lados de la expresión y usando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\begin{aligned} |g(a)| &\leq \frac{1}{r^2}\int_{D(a,r)} |g(w)|dA(w) \\ &\leq \frac{1}{r^2}\left(\int_{D(a,r)} 1^q dA(w)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{D(a,r)} |g(w)|^p dA(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{r^2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{D(a,r)} |g(w)|^p dA(w)\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

donde se ha usado que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y que $A\left(D(a,r)\right) = r^2$.

Finalmente, elevando a la potencia p, se obtiene

$$|g(a)|^p \leq \frac{1}{r^2} \int_{D(a,r)} |g(w)|^p dA(w)$$

y la prueba de la afirmación está completa. ■

Ahora se enuncia y demuestra una propiedad importante que trata sobre el crecimiento de las funciones (y de sus derivadas) en los espacios de Bergman sobre subconjuntos compactos del disco $\mathbb{D}$.

Teorema 3.2. *Suponga $p > 0$, $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$. Entonces existe una constante $C = C(n, K, p, \alpha) > 0$ tal que*

$$\sup\{|f^{(n)}(z)| : z \in K\} \leq C\|f\|_{p,\alpha}$$

para toda $f \in A^p_\alpha$.

Prueba: Dado que todo subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ es cerrado y acotado, sin pérdida de generalidad, se puede asumir que

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

para algún $r \in (0, 1)$.

Suponga primero que $n = 0$. Sea $D(z, \sigma)$ el disco euclídeo de centro z y radio σ, donde $\sigma = \frac{1}{2}(1-r)$. Se puede notar que, por construcción, $D(z, \sigma) \subset \mathbb{D}$ para todo $z \in K$, entonces, por el Teorema 3.1, se cumple

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\sigma^2} \int_{D(z,\sigma)} |f(w)|^p dA(w). \tag{3.3}$$

Se afirma que existe una constante $C_1(\alpha, r) > 0$ tal que

$$\left(1 - |w|^2\right)^\alpha \geq C_1(\alpha, r) \tag{3.4}$$

para cada $w \in D(z, \sigma)$. En efecto, note que si $\alpha < 0$ entonces

$$\left(1 - |w|^2\right)^\alpha > 1$$

pues $|w| < 1$; mientras que si $\alpha \geq 0$ entonces por la desigualdad triangular se puede escribir

$$|w| - |z| \leq |w - z| < \sigma;$$

luego, usando el hecho que $\sigma = \frac{1}{2}(1 - r) < \frac{1}{2}(1 - |z|)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(1 - |w|^2\right)^{\alpha} &= (1 - |w|)^{\alpha} (1 + |w|)^{\alpha} \\ &\geq (1 - |w|)^{\alpha} \\ &\geq (1 - |z| - \sigma)^{\alpha} \geq (1 - r - \sigma)^{\alpha} = \sigma^{\alpha}, \end{aligned}$$

como se afirmó.

En consecuencia, en virtud de las expresiones (3.3) y (3.4), se puede escribir

$$\begin{aligned} \int_{D(z,\sigma)} |f(w)|^p dA_{\alpha}(w) &= (\alpha + 1) \int_{D(z,\sigma)} |f(w)|^p (1 - |w|^2)^{\alpha} dA(w) \\ &\geq (\alpha + 1) C_1(\alpha, r) \int_{D(z,\sigma)} |f(w)|^p dA(w) \\ &\geq (\alpha + 1) C_1(\alpha, r) \sigma^2 |f(z)|^p, \end{aligned}$$

luego, existe una constante $C_2(\alpha, r) > 0$ tal que

$$|f(z)|^p \leq C_2(\alpha, r) \int_{D(z,\sigma)} |f(w)|^p dA_{\alpha}(w),$$

y como $D(z, \sigma) \subset \mathbb{D}$, se obtiene

$$|f(z)|^p \leq C_2(\alpha, r) \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p dA_{\alpha}(w)$$

y así, el resultado se cumple para $n = 0$.

Ahora suponga que $n > 0$. Sea $z \in K$ y considere $R = \frac{1}{2}(1 + r)$, entonces $z \in D(0, R)$ y la fórmula integral de Cauchy para la derivada garantiza que

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D(0,R)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

de donde, tomando módulos a ambos lados de la desigualdad, se obtiene

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\partial D(0,R)} \frac{|f(w)|}{|w - z|^{n+1}} dw; \tag{3.5}$$

pero la frontera de la bola cerrada $D(0,R)$, $\partial\overline{D}(0,R)$, es un subconjunto compacto de $\mathbb{D}$ (que depende sólo de r y por tanto del compacto K); luego, por el caso $n=0$, probado anteriormente, existe una constante $C_3(\alpha,r,p)>0$ tal que

$$|f(w)| \leq C_3(\alpha,r,p)\|f\|_{p,\alpha}$$

para todo $w \in \partial\overline{D}(0,R)$. De aquí que, sustituyendo en (3.5), se obtiene

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!C_3(\alpha,r,p)}{2\pi}\|f\|_{p,\alpha}\int_{\partial D(0,R)} \frac{1}{|w-z|^{n+1}}dw.$$

Finalmente, como $|z|\leq r$ y $|w|=R$ para cada $w\in\partial D(0,R)$ se tiene que

$$|w-z| \geq |w|-|z| \geq R-r = \frac{1+r}{2}-r = \frac{1-r}{2} = \sigma$$

y por tanto, existe una constante $C_4(\alpha,r,p,n)>0$ tal que

$$|f^{(n)}(z)| \leq C_4(\alpha,r,p,n)\|f\|_{p,\alpha},$$

para todo $z\in K$. Esto completa la prueba del Teorema 3.2. ■

Comentario: Es de especial interés el caso en el cual el compacto K es unitario en el teorema anterior; es decir, $K=\{z\}$ con $z\in\mathbb{D}$ fijo. En este caso, se define el *funcional evaluación* $T_z : A^p_\alpha \to \mathbb{C}$ mediante la expresión

$$T_z(f) = f(z), \quad f\in A^p_\alpha.$$

Entonces como una aplicación del Teorema 3.2, existe una constante $C(\alpha,p,z)>0$ tal que

$$|T_z(f)| = |f(z)| \leq C(\alpha,p,z)\|f\|_{p,\alpha};$$

es decir, cada funcional evaluación es lineal y acotado sobre A^p_α.

Otra consecuencia importante del Teorema 3.2 es el siguiente resultado, el cual establece que los espacios de Bergman son espacios métricos completos.

Teorema 3.3. *Para $p>0$ y $\alpha>-1$, A^p_α es un subespacio cerrado de $L^p(\mathbb{D},dA_\alpha)$.*

Prueba: Sea $f \in \overline{A^p_\alpha}$, entonces, por definición de clausura, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A^p_\alpha$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{p,\alpha} = 0.$$

Como $A^p_\alpha \subset L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ y éste es completo, entonces $f \in L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy sobre $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$. Además, si K es cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, entonces como una aplicación del Teorema 3.2, se puede encontrar una constante $C > 0$ (dependiendo sólo de α, p y el compacto K) tal que

$$|f_n(z) - f_m(z)| < C\|f_n - f_m\|_{\alpha,p}$$

para toda $z \in K$ y para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Así, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy sobre subconjuntos compactos del disco unitario $\mathbb{D}$, y como el espacio $H(\mathbb{D})$ es completo con la métrica de la convergencia uniforme sobre compactos (Teorema 1.11), se obtiene que $f \in H(\mathbb{D})$; esto es, $f \in A^p_\alpha$.
La prueba está completa. ■

Observación 3.1. El teorema anterior permite concluir que para $p \geq 1$, $(A^p_\alpha, \|.\|_{\alpha,p})$ es un espacio de Banach; mientras que para $0 < p < 1$, (A^p_α, d) es un espacio métrico completo, con la métrica dada por $d(f,g) = \|f-g\|^p_{p,\alpha}$; $f,\ g \in A^p_\alpha$.

Se finaliza esta sección estableciendo que las funciones en los espacios de Bergman con peso se pueden aproximar por sus dilataciones y por polinomios analíticos.

Teorema 3.4. *Sean $f \in H(\mathbb{D})$, $p > 0$ y $0 < r < 1$; sea f_r la función dilatada definida por $f_r(z) = f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$. Entonces*

(1) Para cada $f \in A^p_\alpha$, tenemos $\|f_r - f\|_{p,\alpha} \to 0$ siempre que $r \to 1^-$,

(2) Para cada $f \in A^p_\alpha$, existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|p_n - f\|_{p,\alpha} \to 0$ siempre que $n \to +\infty$.

Prueba: Se probará *(1)*; para esto observe que, para cada $r \in (0,1)$, las funciones f_r son analíticas en el disco euclídeo con centro en el origen y radio $\frac{1}{r} > 1$; en particular,

$f_r \in H(\overline{\mathbb{D}})$ y $f_r \in A^p_\alpha$, pues al ser f_r continua sobre el compacto $\overline{\mathbb{D}}$ es acotada. Así, para cada $r \in (0,1)$, se tiene

$$\int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) < \infty.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $R \in (0,1)$ tal que

$$\int_{A_R} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.6}$$

donde $A_R = \{z \in \mathbb{D} : |z| > R\}$.

Sea $D_R = \{z \in \mathbb{D} : |z| \leq R\}$. Se afirma que existe $r_0 \in (0,1)$ tal que

$$|f_r(z) - f(z)| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.7}$$

para todo $z \in D_R$ y para todo $r \in (r_0, 1)$.

En efecto, como f es continua en el compacto D_R, entonces es uniformemente continua en D_R, luego, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

siempre que $|z_1 - z_2| < \delta$. Así, seleccionando $r_0 \in (0,1)$ tal que $r_0 \geq 1 - \frac{\delta}{R}$, suponiendo $r \in (r_0, 1)$ y tomando $z \in D_R$ se tiene

$$|rz - z| = (1-r)|z| \leq (1-r)R < \delta,$$

y por tanto $|f_r(z) - f(z)| < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$, como se afirmó.

Integrando la desigualdad en (3.7) se obtiene

$$\int_{D_R} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) < \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $r \in (r_0, 1)$. Por tanto, de esta última desigualdad y de la acotación (3.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) &= \int_{A_R} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) + \int_{D_R} |f_r(z) - f(z)|^p \, dA_\alpha(z) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

siempre que $r \in (r_0, 1)$ y

$$\lim_{r \to 1^-} \|f_r - f\|_{p,\alpha} = 0.$$

Ahora, para probar *(2)*, considere $\varepsilon > 0$ y seleccione, en virtud de la parte *(1)*, $r \in (0,1)$ tal que

$$\|f_r - f\|_{p,\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Entonces, como la función f_r es analítica en el disco $D\left(0, \frac{1}{r}\right)$, el teorema de Taylor (Teorema 1.6) y el criterio M de Weierstrass implica que la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_r^{(m)}(0)}{m!} z^m$$

converge uniformemente a $f_r(z)$ en $\mathbb{D}$; es decir, la sucesión de polinomios $\{p_n\}$ dados por

$$p_n(z) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f_r^{(m)}(0)}{m!} z^m, \quad z \in \mathbb{D},$$

converge uniformemente a f_r en $\mathbb{D}$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |f_r(z) - p_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.9}$$

siempre que $n \geq n_0$ y por tanto

$$\begin{aligned} \|f_r - p_n\|_{p,\alpha} &= \left(\int_{\mathbb{D}} |f_r(z) - p_n(z)|^p \, dA_\alpha(z) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

siempre que $n \geq n_0$. Finalmente, usando la desigualdad triangular y (3.8) se obtiene

$$\|p_n - f\|_{p,\alpha} = \|(p_n - f_r) + (f_r - f)\|_{p,\alpha} \leq \|p_n - f_r\|_{p,\alpha} + \|f_r - f\|_{p,\alpha} < \varepsilon,$$

siempre que $n \geq n_0$.

La prueba del teorema está completa. ■

Observación : La parte *(2)* del teorema anterior dice que el conjunto de los polinomios (analíticos) es denso en los espacios de Bergman. Además, como cada número complejo se puede aproximar por otros complejos cuyas partes reales e imaginarias sean racionales, es claro que cada función analítica en los espacios de Bergman se puede aproximar por polinomios cuyos coeficientes tengan parte real e imaginaria racionales. Esto dice que para cada $p > 0$ y $\alpha > -1$, existe un conjunto numerable de funciones analíticas cuya clausura es todo A^p_α; es decir, se tiene la siguiente propiedad:

Corolario 3.1. *Para cada $p > 0$ y $\alpha > -1$, el espacio A^p_α es separable.*

3.2 La proyección de Bergman

Es conocido (Hedenmalm, Koremblum, Zhu (2000)) que el conjunto $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle_\alpha := \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA_\alpha(z).$$

En virtud del Teorema 3.3, para cada $\alpha > -1$, el espacio de Bergman A^2_α es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$; luego (ver Rudin (1974), Teorema 4.11), existe un único *operador proyección* $P_\alpha : L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \to A^2_\alpha$ lineal y continuo que satisface:

$$P_\alpha(f) = f \tag{3.10}$$

para toda $f \in A^2_\alpha$. Para estudiar más propiedades de las proyecciones véase los excelentes textos de Bachman y Narici (2000) y de Kubrusli (2001).

El objetivo en esta sección es hallar una fórmula explícita para el operador P_α. En este sentido, por el teorema de Taylor, cada función $f \in A^2_\alpha$ admite una representación de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

lo cual significa que el conjunto de funciones $\{p_n\}$ dados por $p_0(z) = 1$ y

$$p_n(z) = z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

forman una base para el espacio A^2_α. Además, para $n \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|p_n\|^2_{2,\alpha} &= \int_{\mathbb{D}} |z|^{2n}\, dA_\alpha(z) \\
&= \frac{\alpha+1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{2n+1}\left(1-r^2\right)^\alpha drd\theta \\
&= 2(\alpha+1)\int_0^1 r^{2n+1}\left(1-r^2\right)^\alpha dr \\
&= \frac{n!\ \Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)}.
\end{aligned}$$

(Véase Apostol (1982) para la definición y propiedades de la función Gamma Γ). Luego, el conjunto de funciones $\{e_n\}$ dados por $e_0(z) = 1$ y

$$e_n(z) = \frac{1}{\|p_n\|_{2,\alpha}} p_n(z) = \left(\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\ \Gamma(2+\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} z^n,\ \ z \in \mathbb{D}, \tag{3.11}$$

forman una base ortonormal para A^2_α. Así, se ha establecido el siguiente resultado:

Proposición 3.2. *El conjunto $\{e_n\}_{n=0}^\infty$, en donde los términos e_n han sido definidos como en (3.11), forman una base ortonormal para el espacio A^2_α.*

Usando las propiedades de los productos internos, se puede observar que si $f \in A^2_\alpha$, escrita en su serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_2 &= \langle f, f\rangle_\alpha \\
&= \langle \sum_{n=0}^\infty a_n z^n, \sum_{m=0}^\infty a_m z^m \rangle_\alpha \\
&= \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty a_n a_m \langle z^n, z^m\rangle_\alpha
\end{aligned}$$

pero, por (3.11) se puede escribir

$$z^n = \frac{1}{\left[\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}} e_n(z)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y para toda $n \in \mathbb{N}$; luego, sin más que sustituir se obtiene

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n\overline{a_m}\langle \frac{1}{\left[\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}} e_n(z), \frac{1}{\left[\frac{\Gamma(m+2+\alpha)}{m!\Gamma(2+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}} e_m(z)\rangle_\alpha \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_n\overline{a_m} \frac{1}{\left[\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left[\frac{\Gamma(m+2+\alpha)}{m!\Gamma(2+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}} \langle e_n(z), e_m(z)\rangle_\alpha
\end{aligned}$$

y como $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para A^2_α, entonces

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\overline{a_n} \frac{1}{\left[\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left[\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \frac{1}{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)}}
\end{aligned}$$

Así, se ha establecido que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} |a_n|^2$$

para toda $f \in A^2_\alpha$.

Finalmente, usando el hecho que la sucesión $\{e_n\}$ es una base ortonormal, se puede ver que si $f \in A^2_\alpha$ tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e_n(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

entonces para cada $n = 0, 1, 2, \cdots$, se tiene

$$b_n = \langle f, e_n\rangle_\alpha;$$

es decir, cada función $f \in A^2_\alpha$ tiene la forma

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n\rangle_\alpha e_n. \tag{3.12}$$

Ahora se enuncia y demuestra el resultado principal de esta sección, en la cual se da una fórmula explícita para la proyección P_α.

Teorema 3.5. *Para $\alpha > -1$, sea P_α la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sobre A^2_α. Entonces*

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w), z \in \mathbb{D}$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$.

Prueba: Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base ortonormal de A^2_α definida en (3.11), entonces para cada $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, se puede usar la escritura (3.12) para obtener

$$P_\alpha f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n\rangle_\alpha e_n.$$

En particular,

$$P_\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n\rangle_\alpha e_n(z) \tag{3.13}$$

para cada $z \in \mathbb{D}$ y la serie converge uniformemente sobre cada subconjunto compacto de $\mathbb{D}$, pues es una serie de potencias que converge en el disco unitario. Como P_α es un operador autoadjunto (ver propiedades de los operadores proyección, por ejemplo, Bachman y Narici (2000)), se puede escribir

$$\langle P_\alpha f, e_n\rangle_\alpha = \langle f, P_\alpha e_n\rangle_\alpha = \langle f, e_n\rangle_\alpha,$$

donde se usa que $P_\alpha(h) = h$ para toda función $h \in A^2_\alpha$. Sustituyendo esta última relación en (3.13), se obtiene

$$\begin{aligned}
P_\alpha f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_\alpha f, e_n\rangle_\alpha e_n(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n\rangle_\alpha e_n(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{e_n(w)} dA_\alpha(w) \right) e_n(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{e_n(w)} e_n(z) dA_\alpha(w);
\end{aligned}$$

pero, por (3.11) se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{e_n(w)} e_n(z) &= \left(\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} (\overline{w})^n \left(\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} \right)^{\frac{1}{2}} (z)^n \\
&= \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (\overline{w}z)^n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (\overline{w}z)^n \right) dA_\alpha(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} \int_{\mathbb{D}} f(w)(\overline{w}z)^n dA_\alpha(w); \end{aligned}$$

y como para cada $z \in \mathbb{D}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (\overline{w}z)^n$$

converge uniformemente con respecto a la variable $w \in \mathbb{D}$, a la función

$$h(w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}},$$

se puede introducir la suma en la integral y obtener

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} (\overline{w}z)^n \right) dA_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w), \end{aligned}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y para todo $f \in A^2_\alpha$.

Esto completa la prueba del teorema. ■

Comentario: Al operador P_α se le llama *Proyección de Bergman* sobre $\mathbb{D}$. Además, por la propiedad (3.10) que satisfacen las proyecciones ortogonales, se obtiene la siguiente fórmula reproductora

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.14}$$

válida para todas las funciones $f \in A^2_\alpha$. Por tal motivo, a la función de dos variables

$$K(z, w) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}}, \quad z,\ w \in \mathbb{D}$$

se le denomina *núcleo reproductor de Bergman* sobre $\mathbb{D}$ para cada $\alpha > -1$. La existencia de tal núcleo reproductor viene garantizado por el hecho que el funcional evaluación $T_z(f) = f(z)$, con $z \in \mathbb{D}$ fijo, es lineal y acotado en A^2_α (ver comentario después de la prueba del Teorema 3.2), junto con el Teorema de Representación de Riesz para espacios de Hilbert (Kubrusly (2001), Teorema 5.62) que establece la existencia de una función $K_z \in A^2_\alpha$ tal que

$$T_z(f) = \langle f, K_z \rangle$$

para toda función $f \in A^2_\alpha$.

Como A^2_α está contenido en A^1_α, es natural preguntarse si la fórmula reproductora (3.14) es válida para toda función $f \in A^1_\alpha$. En el siguiente teorema se da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Teorema 3.6. *Si f es una función en A^1_α, entonces*

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w), z \in \mathbb{D}$$

y la integral converge uniformemente para cada z en cada subconjunto compacto del disco unitario $\mathbb{D}$.

Prueba: Sea $f \in A^1_\alpha$, entonces por la propiedad del valor medio, se tiene

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta,$$

en consecuencia, multiplicando por $(\alpha + 1)(1 - r^2)^\alpha r$ e integrando con respecto a r desde $r = 0$ hasta $r = 1$ se obtiene

$$\int_0^1 f(0)(\alpha + 1)(1 - r^2)^\alpha r dr \quad = \quad \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \int_0^1 f(re^{i\theta})(\alpha + 1)(1 - r^2)^\alpha r dr d\theta,$$

es decir,

$$f(0) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} f(w)(1 - |w|^2)^\alpha dA(w) = \int_{\mathbb{D}} f(w) dA_\alpha(w).$$

Ahora, cambiando f por $f \circ \varphi_z$, resulta

$$f(z) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} f(w) \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - z\overline{w}|^4} \left(\frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\overline{w}|^2} \right)^\alpha dA(w),$$

donde se ha usado la identidad (*3.*) de la Proposición 3.2, que satisfacen los automorfismos del disco. Así,

$$\begin{aligned} f(z) &= (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}}(1-|w|^2)^{\alpha}dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{(1-w\overline{z})^{2+\alpha}(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}dA_{\alpha}(w), \end{aligned}$$

de donde, fijando $z \in \mathbb{D}$ y reemplazando f por la función $w \to (1-w\overline{z})^{2+\alpha}f(w)$, se obtiene la fórmula reproductora

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}dA_{\alpha}(w)$$

para toda función $f \in A^1_{\alpha}$.

La prueba está completa. ■

3.3 Los espacios duales de los espacios de Bergman

En esta sección se hallarán los espacios duales de los espacios de Bergman A^p_{α} para todo $\alpha > -1$ y para todo $p > 0$. Recuerde (ver Royden (1968)) que para $p > 1$ el espacio dual de $L^p(\mathbb{D}, dA_{\alpha})$ es $L^q(\mathbb{D}, dA_{\alpha})$, donde p y q son números conjugados; es decir, satisfacen la relación $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; además, es conocido que para cada $g \in L^q(\mathbb{D}, dA_{\alpha})$ la relación

$$T_g(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA_{\alpha}(z), \quad f \in L^p(\mathbb{D}, dA_{\alpha}),$$

define un funcional lineal y acotado en $L^p(\mathbb{D}, dA_{\alpha})$. Recíprocamente, por el teorema de representación de Riesz (ver Teorema 1.2), si T es un funcional lineal y acotado en $L^p(\mathbb{D}, dA_{\alpha})$, entonces existe $g \in L^q(\mathbb{D}, dA_{\alpha})$ tal que $T = T_g$.

En el siguiente resultado se establece que el espacio dual del espacio de Bergman A^p_{α} con $p > 1$ es justamente A^q_{α}, donde p y q son números conjugados.

Teorema 3.7. *Para $p > 1$ y $\alpha > -1$, se tiene $(A^p_{\alpha})^* = A^q_{\alpha}$, bajo el par integral*

$$< f, g >_{\alpha} = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA_{\alpha}(z)$$

para $f \in A^p_{\alpha}$, $g \in A^q_{\alpha}$, donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Prueba: En primer lugar, es claro que, en virtud de la desigualdad de Hölder, cada función $g \in A^q_\alpha$ define un funcional lineal acotado sobre A^p_α mediante el producto interno dado por

$$T_g(f) =< f, g >_\alpha= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA_\alpha(z), \quad f \in A^p_\alpha,$$

lo cual proporciona la contención $A^q_\alpha \subset (A^p_\alpha)^*$.

Ahora, si F es un funcional lineal acotado sobre A^p_α, entonces por el teorema de extensión de Hahn-Banach, F puede ser extendido a un funcional lineal acotado sobre $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sin incrementar la norma. Usando el teorema de representación de Riesz sobre el espacio $L^p(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, se tiene que existe una función φ en $L^q(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ tal que

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\varphi(z)}dA_\alpha(z), \quad f \in A^p_\alpha.$$

Usando ahora el Teorema 3.6, se tiene que $f = P_\alpha f$ y por tal motivo,

$$\begin{aligned} F(f) &= \langle f, \varphi \rangle_\alpha \\ &= \langle P_\alpha f, \varphi \rangle_\alpha \\ &= \langle f, P^*_\alpha \varphi \rangle_\alpha \\ &= \langle f, P_\alpha \varphi \rangle_\alpha, \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho que el operador P_α es autoadjunto. Así,

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{P_\alpha\varphi(z)}dA_\alpha(z), \quad f \in A^p_\alpha;$$

luego, haciendo $g = P_\alpha\varphi$ y como para $p > 1$, $1 + \alpha < (1 + \alpha)q$, entonces [usando el teorema 1.10 del Royden] se tiene que $g \in A^q_\alpha$. Por tanto,

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA_\alpha(z) = T_g(f); \quad f \in A^p_\alpha,$$

y $(A^p_\alpha)^* \subset A^q_\alpha$.

Esto completa la prueba del teorema. ■

Ahora se procederá a encontrar los espacios duales de A^p_α para el caso $p \in (0,1]$. Vale la pena destacar que en vista del teorema anterior y el hecho que el espacio dual de $L^1(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ es $L^\infty(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, es natural preguntarse si el dual del espacio de Bergman A^1_α es $H^\infty(\mathbb{D})$, el conjunto de las funciones analíticas y acotadas sobre $\mathbb{D}$. La respuesta a esta incertidumbre es falsa; pero para establecerlo se necesita primero de los siguientes lemas.

Lema 3.1. *Para cada $\alpha > -1$, existe un único operador lineal D^α sobre $H(\mathbb{D})$ con las siguientes propiedades:*

1. *D^α es continuo sobre $H(\mathbb{D})$,*
2. *$D^\alpha_z[(1-z\overline{w})^{-2}] = (1-z\overline{w})^{2+\alpha}$, para cada $w \in \mathbb{D}$, donde el subíndice z indica que se está aplicando el operador D^α con respecto a la variable z.*

Prueba: Para $n = 0, 1, 2, \cdots$, defínase

$$D^\alpha(z^n) = \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} z^n;$$

y en general, para $f \in H(\mathbb{D})$ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

considere

$$D^\alpha_z(f) = D^\alpha(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} a_n z^n. \tag{3.15}$$

Claramente el operador definido en (3.15) es lineal en $H(\mathbb{D})$. Se verá que satisface las propiedades (*1.*) y (*2.*).

Para probar (*1.*), suponga que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en $H(\mathbb{D})$ que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ a la función $f \in H(\mathbb{D})$. Por el Teorema de Taylor, cada función f_m admite una representación en serie de potencias de la forma

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

De manera que, si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

entonces se debe tener

$$\lim_{m\to\infty} a_n^{(m)} = a_n,$$

para cada $n = 0, 1, 2 \cdots$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} D^\alpha(f_m)(z) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} a_n^{(m)} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} \left(\lim_{m\to\infty} a_n^{(m)}\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} a_n z^n \\
&= D^\alpha(f)(z)
\end{aligned}$$

para cada $z \in \mathbb{D}$. Luego $\lim_{m\to\infty} D^\alpha(f_m) = D^\alpha(\lim_{m\to\infty} f_m) = D^\alpha(f)$ y el operador D^α es continuo en $H(\mathbb{D})$.

Ahora, para probar la parte (*2.*) recuerde que para cada $z, w \in \mathbb{D}$ se cumple

$$\frac{1}{(1 - z\overline{w})^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n \overline{w}^n;$$

mientras que para cada $z, w \in \mathbb{D}$ se tiene

$$\frac{1}{(1 - z\overline{w})^{2+\alpha}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{n!\Gamma(2+\alpha)} z^n \overline{w}^n,$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
D_z^\alpha\left((1 - z\overline{w})^{-2}\right) &= D_z^\alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \overline{w}^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \overline{w}^n D^\alpha\left(z^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \overline{w}^n \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)} z^n \\
&= (1 - z\overline{w})^{-(2+\alpha)}
\end{aligned}$$

y la prueba del lema está completa. ■

De igual forma se puede mostrar que para $-1 < \alpha < +\infty$, el operador D^α puede estar representado también por

$$D^\alpha f(z) = \lim_{r\to 1^{-1}} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(rw)dA(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}, \quad z \in \mathbb{D}$$

para $f \in H(\mathbb{D})$. En particular, el límite anterior siempre existe y así, si $f \in A^1$, entonces

$$D^\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)dA(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

En el próximo lema se demuestra otra propiedad importante del operador D^α.

Lema 3.2. *Para cada $\alpha > -1$, el operador D^α es invertible sobre $H(\mathbb{D})$.*

Prueba: En efecto, sea $\alpha > -1$ y defínase el operador lineal D_α sobre $H(\mathbb{D})$ por

$$D_\alpha(z^n) = \frac{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} z^n;$$

entonces para cada $f \in H(\mathbb{D})$ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

se tiene

$$D_\alpha(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} a_n z^n. \tag{3.16}$$

En particular, con un argumento como el esgrimido en la parte (*1.*) del lema anterior, se puede ver que el operador D_α es continuo sobre $H(\mathbb{D})$.

Finalmente, como

$$D^\alpha \left(D_\alpha \left(z^n\right)\right) = D^\alpha \left(\frac{(n+1)!\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(n+2+\alpha)} z^n \right) = z^n$$

para cada $n = 0, 1, 2, \cdots$, se concluye que $D^\alpha \left(D_\alpha(f)\right) = f$ para cada $f \in H(\mathbb{D})$ y así el operador D^α es invertible sobre $H(\mathbb{D})$. ■

El siguiente resultado establece que para $p \in (0,1]$ y $\alpha > -1$ el espacio de Bergman A^p_α está continuamente embebido en A^1_β, donde

$$\beta = -2 + \frac{2+\alpha}{p}.$$

Teorema 3.8. *Para $0 < p \leq 1$ y $\alpha > -1$, existe una constante $C > 0$, dependiendo sólo de α y p, tal que*

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{-2+\frac{2+\alpha}{p}} dA(z) \leq C\|f\|_{\alpha,p}$$

para toda $f \in A^p_\alpha$.

Prueba: Sea $z \in \mathbb{D}$, y $D(z)$ el disco euclídeo centrado en z y de radio $\frac{1}{2}(1-|z|)$. Por el Teorema 3.1, se tiene

$$|f(z)|^p \leq \frac{4}{(1-|z|)^2} \int_{D(z)} |f(w)|^p dA(w). \tag{3.17}$$

Por otra parte, para cualquier $w \in D(z)$, se puede usar la desigualdad triangular para obtener

$$|w| - |z| \leq |w-z| < \frac{1}{2}(1-|z|);$$

lo cual implica que

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2) < \frac{1}{2}(1-|z|) < 1-|w| < 1-|w|^2$$

para todo $w \in D(z)$. Mientras que de la relación

$$|z| - |w| \leq |w-z| < \frac{1}{2}(1-|z|),$$

se obtiene

$$1-|w|^2 < 2(1-|w|) < 3(1-|z|) < 3(1-|z|^2)$$

para todo $w \in D(z)$.

Por tanto, considerando los casos $\alpha \geq 0$ y $\alpha < 0$, se deduce que existen constantes positivas $K_1(\alpha)$ y $K_2(\alpha)$ tales que

$$K_1(\alpha)(1-|z|^2)^\alpha \leq (1-|w|^2)^\alpha \leq K_2(\alpha)(1-|z|^2)^\alpha \tag{3.18}$$

para todo $w \in D(z)$.

Sustituyendo (3.18) en (3.17) y usando el hecho que $1-|z| > \frac{1}{2}(1-|z|^2)$ para cada $z \in \mathbb{D}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
|f(z)|^p &\leq \frac{4}{(1-|z|)^2}\int_{D(z)} |f(w)|^p \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{(1-|w|^2)^\alpha} dA(w) \\
&\leq \frac{16}{K_1(\alpha)(1-|z|^2)^{2+\alpha}}\int_{D(z)} |f(w)|^p (1-|w|^2)^\alpha dA(w) \\
&= \frac{16}{(\alpha+1)K_1(\alpha)(1-|z|^2)^{2+\alpha}}\int_{D(z)} |f(w)|^p dA_\alpha(w) \\
&\leq \frac{16}{(\alpha+1)K_1(\alpha)(1-|z|^2)^{2+\alpha}}\|f\|^p_{\alpha,p},
\end{aligned}$$

lo que nos permite escribir

$$|f(z)| \leq \left(\frac{16}{(\alpha+1)K_1(\alpha)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1-|z|^2\right)^{-\frac{2+\alpha}{p}} \|f\|_{\alpha,p},$$

luego para $0 < p < 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
|f(z)|^{1-p} &\leq \left(\frac{16}{(\alpha+1)K_1(\alpha)}\right)^{\frac{1-p}{p}} (1-|z|^2)^{-\frac{(2+\alpha)(1-p)}{p}} \|f\|^{1-p}_{\alpha,p} \\
&= K_3(\alpha,p)(1-|z|^2)^{-\frac{(2+\alpha)}{p}+2+\alpha}\|f\|^{1-p}_{\alpha,p},
\end{aligned}$$

donde

$$K_3(\alpha,p) = \left(\frac{16}{(\alpha+1)K_1(\alpha)}\right)^{\frac{1-p}{p}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(z)|(1-|z|^2)^{-2+\frac{2+\alpha}{p}} dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p |f(z)|^{1-p}(1-|z|^2)^{-2+\frac{2+\alpha}{p}} dA(z) \\
&\leq K_3(\alpha,p)\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \|f\|^{1-p}_{\alpha,p}(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&= \frac{K_3(\alpha,p)}{\alpha+1}\|f\|^{1-p}_{\alpha,p}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \\
&= \frac{K_3(\alpha,p)}{\alpha+1}\|f\|_{\alpha,p}.
\end{aligned}$$

La prueba está lista. ■

Lema 3.3. *Para $\alpha > -1$, fijo, defínase, para $z \in \mathbb{D}$, la relación*

$$I_c(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{dA_\alpha(w)}{|1 - z\overline{w}|^{2+\alpha+c}},$$

donde c es un número real. Entonces se tiene

1. *Si $c < 0$, $I_c(z)$ es una función acotada en la variable z.*

2. *Si $c > 0$, entonces*

$$I_c(z) \sim \frac{1}{(1 - |z|^2)^c} \qquad \left(|z| \to 1^-\right).$$

3. *Si $c = 0$, entonces*

$$I_0(z) \sim log \frac{1}{1 - |z|^2} \qquad \left(|z| \to 1^-\right).$$

Prueba. Dado que $\alpha > -1$, la integral I_c está definida para todo $z \in \mathbb{D}$. Sea

$$\lambda = \frac{1}{2}(2 + \alpha + c).$$

Si λ es cero o negativo, entonces $c < 0$ y

$$I_c(z) = \int_{\mathbb{D}} |1 - z\overline{w}|^{-2\lambda} \, dA_\alpha(w) \le 2^{-2\lambda} < +\infty$$

y por tanto, I_c es acotada en este caso.

Si λ es positivo, se puede escribir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{dA_\alpha(w)}{|1 - z\overline{w}|^{2\lambda}} &= \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{(1 - z\overline{w})^\lambda} \frac{1}{(1 - \overline{z}w)^\lambda} dA_\alpha(w) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\lambda)\Gamma(m+\lambda)}{n!m!\Gamma^2(\lambda)} z^n \overline{z}^m \int_{\mathbb{D}} \overline{w}^n w^m dA_\alpha(w) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+\lambda)}{(n!)^2\Gamma^2(\lambda)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)} |z|^{2n} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+\lambda)}{n!\Gamma(n+\alpha+2)} |z|^{2n}.
\end{aligned}$$

Pero por la fórmula de Stirling (ver Apostol (1982)), se tiene que

$$\frac{\Gamma^2(n+\lambda)}{n!\Gamma(n+\alpha+2)} \sim (n+1)^{c-1} \qquad n \to +\infty;$$

luego

$$I_c(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{c-1} |z|^{2n}.$$

Por tanto, si $c < 0$, entonces $I_c(z)$ define una función acotada sobre $\mathbb{D}$. Si $c = 0$, entonces

$$I_0(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{n+1} \sim \log \frac{1}{1-|z|^2}$$

cuando $|z| \to 1^-$.

Si $c > 0$, entonces de la relación

$$\frac{1}{(1-|z|^2)^c} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+c)}{n!\Gamma(c)} |z|^{2n}$$

y la fórmula de Stirling,

$$\frac{\Gamma(n+c)}{n!\Gamma(c)} \sim (n+1)^{c-1},$$

se encuentra que

$$\frac{1}{(1-|z|^2)^c} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{c-1} |z|^{2n} \sim I_c(z)$$

cuando $|z| \to 1^-$.

La prueba está completa. ■

También se necesitará el siguiente lema para poder establecer el espacio dual de A^p_α con $p \in (0, 1]$.

Lema 3.4. *Sea $\alpha > -1$ y supongase que f es una función analítica sobre $\mathbb{D}$. Si la función $(1-|z|^2)^{-\alpha} f(z)$ es acotada, entonces la función $(1-|z|^2)^{\alpha} D^{\alpha} f(z)$ es área-integrable y*

$$\int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)} dA(z) = (\alpha+1) \int_{\mathbb{D}} D^{\alpha} f(z) \overline{g(z)} (1-|z|^2)^{\alpha} dA(z),$$

para toda $g \in H^{\infty}$.

Prueba: El caso $\alpha = 0$ está listo. Si $0 < \alpha < +\infty$, entonces por la representación integral de D^{α} y el Lema 3.3, la función $(1-|z|^2)^{\alpha} D^{\alpha} f(z)$ es acotada.

Si $-1 < \alpha < 0$ y f es acotada, entonces el Lema 3.3 y la representación integral de D^α implica que $D^\alpha f(z)$ es acotada, y así la función $(1-|z|^2)^\alpha D^\alpha f(z)$ es área-integrable.

Si $-1 < \alpha < 0$ y $|f(z)| \leq C_1(1-|z|^2)^\alpha$, entonces por el Lema 3.3 y la representación integral de D^α, se tiene

$$(1-|z|^2)^\alpha |D^\alpha f(z)| \leq C_2(1-|z|^2)^\alpha \log \frac{1}{1-|z|^2}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 1,$$

y así $(1-|z|^2)^\alpha D^\alpha f(z)$ es área integrable. ■

Teorema 3.9. *Supongase* $0 < p \leq 1$, $-1 < \alpha < +\infty$ *y* $\beta = \frac{2+\alpha}{p} - 2$. *Entonces* $(A^p_\alpha)^* = \mathcal{B}$ *dotado de el producto interno*

$$< f, g >= \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} f(rz)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta dA(z),$$

donde $f \in A^p_\alpha$ *y* $g \in \mathcal{B}$.

Prueba: Primero suponga que $F \in (A^p_\alpha)^*$ y $f \in A^p_\alpha$. Como $\|f - f_r\|_{\alpha,p} \to 0$ cuando $r \to 1^-$, se tiene

$$F(f) = \lim_{r\to 1^-} F(f_r), \qquad f \in A^p_\alpha.$$

Escribiendo

$$f_r(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f_r(w)dA(w)}{(1-z\overline{(w)})^2}, \qquad z \in \mathbb{D}$$

vease que la convergencia de la integral en A^p_α y la continuidad de F implica que

$$F(f_r) = \int_{\mathbb{D}} f_r(w) F\left[\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\right] dA(w),$$

donde en el lado derecho de la igualdad, se piensa a F dependiente de la variable z. Sea

$$\overline{h(w)} = F\left[\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}\right], \qquad w \in \mathbb{D}.$$

Entonces h es analítica en $\mathbb{D}$ y

$$F(f_r) = \int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{h(w)}dA(w).$$

Haciendo

$$\beta = \frac{2+\alpha}{p} - 2$$

y aplicando el lema anterior, resulta

$$F(f_r) = (\beta+1)\int_{\mathbb{D}} f_r(w)\overline{D^\beta h(w)}(1-|w|^2)^\beta dA(w).$$

Sea $g = (\beta+1)D^\beta h$. Aplicando la segunda propiedad del Lema.3.3.1, se tiene

$$\overline{g(w)} = (\beta+1)F\left[\frac{1}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p}}\right]$$

y

$$\overline{g'(w)} = \frac{(\beta+1)(2+\alpha)}{p}F\left[\frac{z}{(1-z\overline{w})^{(2+\alpha)/p+1}}\right], \quad w \in \mathbb{D}.$$

De acá, usando el Lema 3.3 y la acotación de F, se puede verificar que g está en el espacio de Bloch y que

$$F(f) = \lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}} f(rw)\overline{g(w)}(1-|z|^2)^\beta dA(w)$$

para cada $f \in A^p_\alpha$.

Ahora, suponga que $g \in \mathcal{B}$. Se mostrará que la expresión

$$F(f) = \lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}} f_r(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta dA(z), \qquad f \in A^p_\alpha,$$

define un funcional lineal acotado sobre A^p_α. Por la proyección de Bergman existe un funcional $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ tal que

$$g(z) = P_\beta\varphi(z) = (\beta+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\beta}{(1-z\overline{w})^{2+\beta}}\varphi(w)dA(w), \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Usando el teorema de Fubini y la propiedad reproductora de P_β, se obtiene

$$\int_{\mathbb{D}} f_r(z)\overline{g(z)}(1-|z|^2)^\beta dA(z) = \int_{\mathbb{D}} f_r(w)\bar{(}\varphi(w))(1-|w|^2)^\beta dA(w).$$

Por el Lema 3.3.2, se obtiene

$$F(f) = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\varphi(z)}(1-|z|^2)^\beta dA(z), \qquad f \in A^p_\alpha,$$

y esto define un funcional lineal acotado sobre A^p_α. ■

CAPÍTULO 4
OBTENCIÓN DE LA NORMA EN ESPACIOS DE BERGMAN

El objetivo principal de este capítulo es analizar la distribución angular de masa por funciones en los espacios de Bergman con peso. En vista que se está trabajando con funciones analíticas f definidas en el disco unitario $\mathbb{D}$ sobre un dominio $\Omega = f(\mathbb{D})$, es necesario trabajar con métricas distintas a la euclídea. Esto se hace para garantizar que las bolas abiertas queden totalmente contenidas en el dominio $\mathbb{D}$ o Ω, según sea el caso. Así, en la primera sección de este capítulo se define y estudian las propiedades de la métrica hiperbólica o de Bergman, mientras que en la segunda sección se hace lo mismo con la métrica cuasi-hiperbólica y se establece la relación entre estas dos distancias. La tercera sección de este capítulo establece un resultado similar al teorema de Bloch para funciones en la bola unidad del espacio de Bergman A^p_α con $p \geq 1$ y $\alpha > -1$. El capítulo finaliza exhibiendo que en ciertas clases de funciones en los espacios de Bergman la norma se obtiene esencialmente por integración sobre las imágenes inversas de ciertos sectores.

4.1 La métrica hiperbólica o de Bergman

Para $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}$, se define la relación

$$\beta(z_1, z_2) := \inf \left\{ \int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las curvas γ contenidas en el disco $\mathbb{D}$ que conectan a z_1 con z_2. Claramente, dado que el ínfimo se toma sobre números no negativos, se cumple que:

(1) $\beta(z_1, z_2) \geq 0$, para cualquiera que sean $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}$.

También, se puede ver de la definición, que para cada $z \in \mathbb{D}$, se cumple $\beta(z, z) = 0$; mientras que si $\beta(z_1, z_2) = 0$, entonces, por propiedad del ínfimo, para $\varepsilon > 0$ existe un camino γ_ε en $\mathbb{D}$, que conecta z_1 con z_2, tal que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} < \varepsilon;$$

pero como para cada $z \in \mathbb{D}$ se cumple $\frac{2}{1-|z|^2} > 2 > 1$, entonces se obtiene

$$long(\gamma_\varepsilon) = \int_{\gamma_\varepsilon} |dz| \leq \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} < \varepsilon,$$

donde $long(\gamma_\varepsilon)$ denota la longitud Euclídea de la curva γ_ε, que conecta a z_1 con z_2. Luego, como la curva de longitud Euclídea mínima que une los puntos z_1 y z_2 se obtiene a través del segmento de recta $[z_1, z_2]$, se concluye

$$|z_1 - z_2| = long\left([z_1, z_2]\right) \leq long(\gamma_\varepsilon) < \varepsilon$$

y de esta manera, por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, se obtiene $z_1 = z_2$. Así,

(2) $\beta(z_1, z_2) = 0$ si y sólo si $z_1 = z_2$.

Para ver que esta relación es simétrica, note que si γ es una curva en $\mathbb{D}$ que une los puntos z_1 y z_2, entonces la curva opuesta $\Gamma = -\gamma$ está contenida en $\mathbb{D}$ y une los puntos z_2 y z_1; además, si la curva γ está parametrizada por

$$z = \gamma(t), \quad a \leq t \leq b,$$

entonces Γ tiene la parametrización

$$z = \Gamma(t) = \gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b;$$

y se cumple

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} &= \int_a^b \frac{2|\Gamma'(t)|}{1-|\Gamma(t)|^2} dt \\
&= \int_a^b \frac{2|-\gamma'(a+b-t)|}{1-|\gamma(a+b-t)|^2} dt \\
&= -\int_b^a \frac{2|\gamma'(\tau)|}{1-|\gamma(\tau)|^2} d\tau = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2},
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

(3) $\beta(z_1, z_2) = \beta(z_2, z_1)$.

Finalmente, para ver que la relación β satisface la desigualdad triangular, considérese z_1, z_2 y $z_3 \in \mathbb{D}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar curvas γ_1 y γ_2 que conectan a z_1 con z_2 y z_2 con z_3, respectivamente, tales que

$$\beta(z_1, z_2) + \frac{\varepsilon}{2} > \int_{\gamma_1} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} \quad \text{y} \quad \beta(z_2, z_3) + \frac{\varepsilon}{2} > \int_{\gamma_2} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Considerese el arco $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Se puede notar que éste es un arco en $\mathbb{D}$ que conecta a z_1 con z_3 y que por definición resulta

$$\begin{aligned} \beta(z_1, z_3) &\leq \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} + \int_{\gamma_2} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} \\ &< \beta(z_1, z_2) + \beta(z_2, z_3) + \varepsilon; \end{aligned}$$

luego, dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que

(4) $\beta(z_1, z_3) \leq \beta(z_1, z_2) + \beta(z_2, z_3)$.

Las propiedades $(1), (2), (3)$ y (4) establecidas previamente, dicen que efectivamente la relación β es una distancia definida sobre el disco $\mathbb{D}$, la cual es conocida como *la métrica hiperbólica o de Bergman.* Además, se cumple la siguiente propiedad:

Proposición 4.1 (Invarianza conforme)**.** *La métrica hiperbólica es invariante por automorfismo del disco; es decir, si φ es un automorfismos del disco, entonces para cada $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ se cumple*

$$\beta(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) = \beta(z_1, z_2). \tag{4.1}$$

Prueba: Sea Γ la colección de todas las curvas en $\mathbb{D}$ que conectan a z_1 con z_2 y considérese un automorfismo del disco φ. La imagen por φ de una curva $\gamma \in \Gamma$ es una curva, $\widetilde{\gamma} = \varphi(\gamma) \in \widetilde{\Gamma} = \varphi(\Gamma)$, que va de $\varphi(z_1)$ a $\varphi(z_2)$ y viceversa: la imagen inversa de una curva $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma}$ por el automorfismo φ es una curva $\gamma \in \Gamma$. Por tanto, al hacer el cambio de variable $z = \varphi(s)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\beta(z_1, z_2) &= \inf_{\gamma\in\Gamma}\left\{\int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2}\right\} \\
&= \inf_{\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}}\left\{\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{2|\varphi'(s)||ds|}{1-|s|^2}\right\} \\
&= \inf_{\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}}\left\{\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{2|ds|}{1-|s|^2}\right\} \\
&= \beta(\varphi(z_1), \varphi(z_2)),
\end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad se ha usado la conocida identidad

$$1 - |\varphi(s)|^2 = |\varphi'(s)|(1 - |s|^2)$$

que satisface cualquier automorfismo del disco (Proposición 1.1). ■

Ahora se da una fórmula explícita para la métrica hiperbólica.

Teorema 4.1. *Para cada* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ *se tiene*

$$\beta\left(z_1, z_2\right) = \log\left(\frac{1 + |\varphi_{z_1}\left(z_2\right)|}{1 - |\varphi_{z_1}\left(z_2\right)|}\right). \tag{4.2}$$

Prueba. Considerese primero $z_2 = 0$, entonces dado que la distancia más corta del 0 a cualquier otro punto es a lo largo de un radio, se tiene

$$\begin{aligned}
\beta(z_1, 0) &= \int_{[0,z_1]} \frac{|dz|}{1-|z|^2} \\
&= |z_1| \int_0^1 \frac{dt}{1-|z_1|^2 t^2} \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|z_1|}{1-|z_1|}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|\varphi_{z_1}(0)|}{1-|\varphi_{z_1}(0)|}\right).
\end{aligned}$$

Para el caso general, se usa el hecho que la distancia hiperbólica es invariante por los automorfismos del disco; luego, si se considera

$$\varphi_{z_1}(z) = \frac{z_1 - z}{1 - \overline{z_1}z},$$

se tiene $\varphi_{z_1}\left(z_1\right) = 0$ y por el caso anterior,

$$\begin{aligned}
\beta\left(z_1, z_2\right) &= \beta\left(\varphi_{z_1}\left(z_1\right), \varphi_{z_1}\left(z_2\right)\right) = \beta\left(0, \varphi_{z_1}\left(z_2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|\varphi_{z_1}\left(z_2\right)|}{1-|\varphi_{z_1}\left(z_2\right)|}\right).
\end{aligned}$$

La prueba está completa. ■

En vista que la relación β define una métrica sobre $\mathbb{D}$, es natural definir el *disco hiperbólico*, $D_\beta(a,r)$, con centro hiperbólico $a \in \mathbb{D}$ y radio hiperbólico $r > 0$. Este se define por

$$D_\beta(a,r) = \{z \in \mathbb{D} : \beta(z,a) < r\}.$$

En el siguiente teorema se establece la relación entre la métrica hiperbólica y la distancia euclídea.

Teorema 4.2. *Para cada $a \in \mathbb{D}$ y $r > 0$, el disco hiperbólico $D_\beta(a,r)$ es un disco euclídeo con centro y radio*

$$C = \frac{1-s^2}{1-s^2|a|^2}a, \quad y \quad R = \frac{1-|a|^2}{1-s^2|a|^2}s,$$

respectivamente, donde $s = \tanh(r)$.

Prueba. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \beta(z,a) < r \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+|\varphi_a(z)|}{1-|\varphi_a(z)|}\right)) < r \\ &\Leftrightarrow \quad |\varphi_a(z)| < \frac{e^{2r}-1}{e^{2r}+1} = \tanh(r) = s, \end{aligned}$$

de aquí que $|z-a|^2 < s^2|1-\overline{a}z|^2$; es decir, $(z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = s^2(1-\overline{a}z)(1-a\overline{z})$; de donde se obtiene, sin más que agrupar adecuadamente que $|z-C| < R$, con

$$C = \frac{1-s^2}{1-s^2|a|^2}a, \quad \text{y} \quad R = \frac{1-|a|^2}{1-s^2|a|^2}s.$$

La prueba está completa. ■

Finalmente, en virtud de la invarianza por automorfismos del disco de la métrica hiperbólica y del teorema de la aplicación abierta de Riemann (ver Rudin (1974), Teorema 14.8), que establece que todo dominio simplemente conexo propiamente contenido en el plano es conformemente equivalente al disco unitario, es natural definir esta métrica para dominios simplemente conexos de la siguiente manera:

Definición 4.1 (Distancia hiperbólica para dominios simplemente conexos)**.** Si Ω, subconjunto de $\mathbb{C}$, es un dominio simplemente conexo y φ es una transformación conforme de $\mathbb{D}$ sobre Ω, para $w_1,\ w_2 \in \Omega$, se define la distancia hiperbólica de w_1 a w_2 por

$$\beta_\Omega(w_1, w_2) := \beta(z_1, z_2)$$

donde, $w_1 = \varphi(z_1)$ y $w_2 = \varphi(z_2)$.

Comentario. Obsérvese que esta definición no depende de la transformación conforme φ. En efecto, si φ_1 es otra transformación conforme del disco unitario $\mathbb{D}$ en Ω, entonces $\varphi_1^{-1} \circ \varphi$ es un automorfismo del disco y por la invarianza conforme de la distancia hiperbólica, tenemos

$$\beta\left(z_1, z_2\right) = \beta\left(\varphi_1^{-1} \circ \varphi\left(z_1\right), \varphi_1^{-1} \circ \varphi\left(z_1\right)\right) = \beta\left(\varphi_1^{-1}\left(w_1\right), \varphi_1^{-1}\left(w_1\right)\right),$$

lo cual da la definición en caso de haberse considerado la transformación φ_1.

4.2 La métrica cuasi-hiperbólica

En vista que se trabajará con transformaciones conformes en el espacio de Bergman que aplican el disco unitario $\mathbb{D}$ en un dominio simplemente conexo Ω, es conveniente estudiar otra métrica, definida sobre Ω. Con este fin, considérese $w_1,\ w_2\ \in\ \Omega$ y denótese por Γ la colección de arcos en Ω que conectan w_1 con w_2. Entonces se puede definir la relación k_Ω por

$$k_\Omega(w_1, w_2) := \inf_{\gamma\ \in\ \Gamma} \left\{ \int_\gamma \frac{|ds|}{\delta_\Omega(s)} \right\}. \tag{4.3}$$

Observe que cuando $\Omega = \mathbb{D}$, entonces $\delta_\Omega(s) = 1 - |s|$ y por tal motivo, en este caso, $k_\mathbb{D}(w_1, w_2) = \beta(w_1, w_2)$; todavía más, $k_\Omega(w_1, w_2)$ es comparable con $\beta_\Omega(w_1, w_2)$ tal como se establece en el siguiente resultado debido a Gehring y Palka (1976).

Teorema 4.3. *Si w_1 y w_2 son dos puntos de un dominio simplemente conexo Ω, entonces*

$$\frac{1}{2}\beta_\Omega(w_1, w_2) \leq k_\Omega(w_1, w2) \leq 2\beta_\Omega(w_1, w_2). \tag{4.4}$$

Prueba: Dado que Ω es un dominio simplemente conexo, entonces por el teorema de la transformación de Riemann, existe una transformación conforme φ del disco $\mathbb{D}$ en Ω. Sean $w_1 = \varphi(z_1)$, $w_2 = \varphi(z_2)$ dos elementos de Ω, entonces por el Teorema de distorsión (Teorema 2.8) se tiene que

$$\frac{|f'(z)|}{\delta_\Omega(f(z))} \leq \frac{4}{(1-|z|^2)} \leq \frac{4|f'(z)|}{\delta_\Omega(f(z))}.$$

De aquí se desprende claramente que

$$\frac{1}{1-|z|^2} \leq \frac{|f'(z)|}{\delta_\Omega(f(z))} \leq \frac{4}{1-|z|^2};$$

luego, integrando en los tres lados de la desigualdad, sobre una curva que une a z_1 con z_2, se obtiene

$$\int_\gamma \frac{1}{1-|z|^2} \leq \int_\gamma \frac{|f'(z)|}{\delta_\Omega(f(z))} \leq \int_\gamma \frac{4}{1-|z|^2};$$

así, haciendo el cambio de variables $z = \varphi(s)$, se encuentra

$$\frac{1}{2}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{2|\varphi'(s)|}{1-|\varphi(s)|^2}|ds| \leq \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{|dw|}{\delta_\Omega(w)} \leq 2\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{2|\varphi'(s)|}{1-|\varphi(s)|^2}|ds|,$$

donde $\widetilde{\gamma} = \varphi(\gamma)$ y es una curva que une a $w_1 = \varphi(z_1)$ con $w_2 = \varphi(z_2)$. Por tanto, tomando el ínfimo sobre todas las curvas que unen a w_1 con w_2, en la desigualdad anterior, se obtiene

$$\frac{1}{2}\beta(\varphi(z_1), \varphi(z_2)) \leq k_\Omega(w_1, w_2) \leq 2\beta(\varphi(z_1), \varphi(z_2))$$

y por la definición de la métrica de hiperbólica para conjuntos simplemente conexos, resulta

$$\frac{1}{2}\beta_\Omega(w_1, w_2) \leq k_\Omega(w_1, w_2) \leq 2\beta_\Omega(w_1, w_2).$$

La prueba está completa. ∎

Ahora se probará que la relación k_Ω definida en (4.3) efectivamente es una distancia la cual se conoce como *la métrica cuasi-hiperbólica.*

Proposición 4.2. *Sea Ω un conjunto simplemente conexo. La relación k_Ω definida en (4.3) satisface las siguientes propiedades:*

1. Para todo $w_1, w_2 \in \Omega$, *se cumple* $k_\Omega(w_1, w_2) \geq 0$.

2. $k_\Omega(w_1, w_2) = 0$ *si y sólo si* $w_1 = w_2$.

3. Para todo $w_1, w_2 \in \Omega$, *se tiene* $k_\Omega(w_1, w_2) = k_\Omega(w_2, w_1)$.

4. Para todo $w_1, w_2, w_3 \in \Omega$

$$k_\Omega(w_1, w_3) \leq k_\Omega(w_1, w_2) + k_\Omega(w_2, w_3).$$

Prueba: *1.* Como $\delta_\Omega(s) \geq 0$, para todo $s \in \gamma$, $\gamma \in \Gamma$, entonces

$$\int_\gamma \frac{|ds|}{\delta_\Omega(s)} \geq 0$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. En particular

$$k_\Omega(w_1, w_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \int_\gamma \frac{|ds|}{\delta_\Omega(s)} \right\} \geq 0.$$

2. Supongase que $k_\Omega(w_1, w_2) = 0$, entonces por el Teorema 4.3 se obtiene

$$0 \leq \beta_\Omega(w_1, w_2) \leq 2k_\Omega(w_1, w_2) = 0,$$

de donde se deduce que $\beta_\Omega(w_1, w_2) = 0$ y como β_Ω describe una métrica sobre Ω, entonces $w_1 = w_2$. Recíprocamente, si $w_1 = w_2$, entonces como β_Ω es una métrica, se tiene $\beta_\Omega(w_1, w_2) = 0$ y por tanto, el Teorema 4.3 implica que

$$0 \leq k_\Omega(w_1, w_2) \leq 2\beta_\Omega(w_1, w_2) = 0.$$

3. Para demostrar la simetría, se ve que si $z = \gamma_1(t)$, $a \leq t \leq b$, es una curva parametrizada en Ω que une los puntos w_1 con w_2, entonces la curva opuesta

$$z = \gamma_2(t) = \gamma_1(a + b - t), \quad a \leq t \leq b,$$

es una curva parametrizada en Ω que une los puntos w_2 con w_1. Además, procediendo como en la prueba de la simetría de la métrica hiperbólica, es claro que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \frac{2|dw|}{\delta_\Omega(w)} &= \int_a^b \frac{2|\gamma_2'(t)|}{\delta_\Omega(\gamma_2(t))}dt \\ &= -\int_b^a \frac{2|\gamma_1'(a+b-u)|}{\delta_\Omega(\gamma_1(a+b-u))}du \\ &= \int_a^b \frac{2|\gamma_1'(u)|}{\delta_\Omega(\gamma_1(u))}du \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{2|du|}{\delta_\Omega(u)}, \end{aligned}$$

de donde se concluye que $k_\Omega(w_1, w_2) = k_\Omega(w_2, w_1)$.

4. Para probar la desigualdad triangular, se procede de manera similar a lo hecho para la métrica hiperbólica. Esto es, dados w_1, w_2, $w_3 \in \Omega$, entonces por definición de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, existen curvas γ_1 y γ_2 en Ω que conectan a w_1 con w_2 y w_2 con w_3, respectivamente, tales que

$$k_\Omega(w_1, w_2) + \frac{\varepsilon}{2} > \int_{\gamma_1} \frac{2|dw|}{\delta_\Omega(w)} \quad \text{y} \quad k_\Omega(w_2, w_3) + \frac{\varepsilon}{2} > \int_{\gamma_2} \frac{2|dw|}{\delta_\Omega(w)}.$$

Luego, considerando la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, se observa que ésta es una curva en Ω que conecta a w_1 con w_3 y que

$$\begin{aligned} k_\Omega(w_1, w_3) &\leq \int_\gamma \frac{2|dw|}{\delta_\Omega(w)} \\ &\leq \int_{\gamma_1} \frac{2|dw|}{\delta_\Omega(w)} + \int_{\gamma_2} \frac{2|dw|}{\delta_\Omega(w)} \\ &< k_\Omega(w_1, w_2) + k_\Omega(w_2, w_3) + \varepsilon \end{aligned}$$

y por tanto,

$$k_\Omega(w_1, w_3) \leq k_\Omega(w_1, w_2) + k_\Omega(w_2, w_3).$$

La prueba de la proposición está completa. ■

Comentario. En virtud del Teorema 4.3 que establece que la métrica hiperbólica y la cuasi-hiperbólica, definidas sobre un dominio Ω, son equivalentes, es necesario un comentario que justifique el estudio de la métrica cuasi-hiperbólica.

La justificación yace en el hecho que para hallar la distancia hiperbólica entre dos elementos de un dominio Ω, hay que encontrar primero una transformación de Riemann que aplique el disco unitario $\mathbb{D}$ en Ω (lo cual, en general no es trivial), para luego hallar la distancia hiperbólica en el disco de sus preimágenes; mientras que en la distancia cuasi-hiperbólica se trabaja directamente con la geometría del dominio Ω.

4.3 Teorema de Bloch para funciones en los espacios de Bergman con peso

Esta sección está dedicada a establecer un resultado similar al teorema de Bloch (Teorema 1.14); pero para funciones en la circunferencia unitaria del espacio de Bergman. Obsérvese que las constantes que se encuentran en el siguiente teorema dependen de los parámetros α y p involucrados en la definición de los espacios de Bergman.

Teorema 4.4. *Sean $\alpha > -1$, $p \geq 1$ y $f \in A^p_\alpha$, tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ y $\|f\|_{\alpha,p} = 1$. Entonces, existen constantes ϱ y R, tales que f es univalente en el disco $D(0, R)$ y se verifica que*

$$D(0, \frac{R}{6\varrho}) \subset f(D(0, R)) \subset D(0, \varrho R).$$

Además, las constantes se pueden tomar como

$$\varrho = \frac{2^{\frac{2}{p}(2p+2\alpha+2)}}{7^{\frac{\alpha+1}{p}}} \quad y \quad R = \frac{1}{4\varrho}|f'(0)|.$$

Prueba: Dado que f es analítica en $D(0, \frac{1}{2})$, entonces para cada $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, se puede usar la fórmula integral de Cauchy para la derivada y escribir

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,r)} \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds,$$

donde $|z| < \frac{1}{2}$. Luego, parametrizando, multiplicando por $(1-r^2)^\alpha r$ y tomando módulos resulta que, para cada $|z| < \frac{1}{2}$

$$(1-r^2)^\alpha r|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta} - z|^2} (1-r^2)^\alpha r^2 d\theta.$$

Integrando con respecto a r desde $r = R_1 > \frac{1}{2}$ hasta $r = R_2 > R_1$ y usando el hecho que $r < 1$, se obtiene

$$\int_{R_1}^{R_2} (1-r^2)^\alpha r|f'(z)|dr \leq \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta}-z|^2}(1-r^2)^\alpha r d\theta dr.$$

Calculando la integral del lado izquierdo se puede escribir

$$\left((1-R_1^2)^{\alpha+1} - (1-R_2^2)^{\alpha+1}\right)|f'(z)| \leq \frac{\alpha+1}{(R_1-\frac{1}{2})^2}\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\frac{(1-r^2)^\alpha r}{\pi} d\theta dr,$$

es decir,

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{\left((1-R_1^2)^{\alpha+1} - (1-R_2^2)^{\alpha+1}\right)(R_1-\frac{1}{2})^2}\int_{\{R_1<|s|<R_2\}} |f(w)|dA_\alpha(w), \quad (4.5)$$

donde $|z| < \frac{1}{2} < R_1 < R_2 < 1$.

Ahora bien, si $p > 1$, usando la desigualdad de Hölder y el hecho de que f es de norma igual a 1, resulta

$$\begin{aligned}
\int_{\{R_1<|s|<R_2\}} |f(s)|dA_\alpha(s) &\leq \left(\int_{\{R_1<|s|<R_2\}} |f(s)|^p dA_\alpha(s)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\{R_1<|s|<R_2\}} 1^q dA_\alpha(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{D}} |f(s)|^p dA_\alpha(s)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\{R_1<|s|<R_2\}} dA_\alpha(s)\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{2\pi} \frac{(\alpha+1)}{\pi} r(1-r^2)^\alpha d\theta dr\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left((1-R_1^2)^{\alpha+1} - (1-R_2^2)^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}};
\end{aligned}$$

así, sustituyendo en (4.5) se obtiene

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &\leq \frac{1}{\left((1-R_1^2)^{\alpha+1} - (1-R_2^2)^{\alpha+1}\right)(R_1-\frac{1}{2})^2}\left((1-R_1^2)^{\alpha+1} - (1-R_2^2)^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{\left((1-R_1^2)^{\alpha+1} - (1-R_2^2)^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}(R_1-\frac{1}{2})^2} \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

para todo $|z| < \frac{1}{2} < R_1 < R_2 < 1$.

Obsérvese que la desigualdad (4.6) también es valida para $p = 1$ en virtud de la estimación en (4.5). Ahora, fijando $R_1 = \frac{3}{4}$ y haciendo $R_2 \to 1$ en (4.6) se obtiene

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{\left((1-\frac{9}{16})^{\alpha+1}\right)^{\frac{1}{p}}(\frac{3}{4}-\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{(\frac{7}{16})^{\frac{1}{p}(\alpha+1)}(\frac{1}{4})^2} = \frac{2^{\frac{2}{p}(2p+2\alpha+2)}}{7^{\frac{\alpha+1}{p}}} := \varrho, \qquad (4.7)$$

para cada $z \in D(0, \frac{1}{2})$.

En particular, la estimación en (4.7) junto con la desigualdad triangular implica que

$$|f'(z) - f'(0)| \leq 2\varrho, \tag{4.8}$$

para todo $|z| < \frac{1}{2}$. Luego, si definimos la función

$$g(z) = \frac{f'\left(\frac{z}{2}\right) - f'(0)}{4\varrho}, \quad z \in \mathbb{D},$$

claramente g es una función analítica sobre el disco que satisface:

1. $g(0) = 0$, y

2. $|g(z)| = \frac{1}{4\varrho}\left|f'\left(\frac{z}{2}\right) - f'(0)\right| \leq \frac{1}{2}$ para todo $z \in \mathbb{D}$, en virtud de (4.8).

Así, invocando el Lema de Schwarz (Teorema 1.9), se concluye que

$$|g(z)| \leq |z|$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego, sustituyendo la función g se obtiene

$$|f'(z) - f'(0)| \leq 4\varrho|z| \tag{4.9}$$

para todo $z \in D(0, \frac{1}{2})$. Definiendo

$$R = \frac{1}{4\varrho}|f'(0)|,$$

se puede observar de (4.7) que $R < \frac{1}{4}$ y que en virtud de la desigualdad (4.9)

$$|f'(z) - f'(0)| \leq |f'(0)|$$

para todo $z \in D(0, R)$.

En virtud del Lema 1.5, se concluye que f es univalente en el disco $D(0, R)$. Por otra parte, tomando $z \in D(0, R)$ y considerando el segmento radial Γ de 0 a z, se puede escribir

$$|f(z)| = |\int_\Gamma |f'(s)|ds \leq \int_\Gamma |f'(s)|ds \leq \varrho|z| < \varrho R,$$

de lo cual se sigue que $f(D(0,R)) \subset D(0,\varrho R)$, luego, aplicando el Lema 1.4 resulta que $f(D(0,R)) \supset D(0,\sigma)$, donde

$$\sigma = \frac{(R)^2}{6\varrho R} = \frac{R}{6\varrho}. \tag{4.10}$$

La prueba está completa. ■

4.4 Imágenes inversas de sectores por funciones en los espacios de Bergman

El objetivo de esta sección es establecer que para ciertas clases de funciones analíticas en los espacios de Bergman con peso, la norma de estas funciones esencialmente se obtiene por integración sobre las imágenes inversas de ciertos sectores Σ_ε, dados por

$$\Sigma_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} : |arg(w)| < \varepsilon\},$$

donde $\varepsilon > 0$. Más precisamente, se darán los detalles de los resultados que aparecen en el artículo de Pérez-González y Ramos-Fernández (2004), titulado *Imágenes inversas de sectores de funciones en el espacio de Bergman con peso* y que aparece en la *Revista Colombiana de Matemática.* La clave de los resultados que se presentan en esta sección reposa en el siguiente lema:

Lema 4.1. *Sean $\alpha > -1$, $p \geq 1$ y fíjese $\varepsilon > 0$. Existen constantes $r > 0$ y $\delta(\alpha,p) > 0$ tal que*

$$\int_{f^{-1}(D(0,r)\bigcap \sum_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \geq \delta(\alpha,p)\varepsilon |f'(0)|^{p+2},$$

para toda función $f \in A^p_\alpha$ tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ y $\|f\|_{\alpha,p} = 1$.

Prueba: Tómese $r = \frac{1}{7\varrho}R$, donde ϱ y R son las constantes encontradas en el Teorema 4.4. Entonces, es claro que $D_r = D(0,r) \subset D(0,\sigma) \subset \Omega = f(\mathbb{D})$, donde

$$\sigma = \frac{R}{6\rho}$$

y que la función f es univalente en el disco $D(0,R)$.

Considérese ahora el anillo $A = \{w \in \mathbb{C} : \frac{r}{2} < |w| < r\}$ y sea $w = f(z) \in A$, entonces como el disco D_r está contenido en la imagen Ω, usando la desigualdad triangular se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_\Omega(w) = dist(w, \partial\Omega) &\geq dist(0, \partial\Omega) - dist(0, \partial D_r) \\ &= \delta_\Omega(0) - r. \end{aligned}$$

Lo mismo es cierto para cada s en el segmento radial $[0, w]$; es decir,

$$\delta_\Omega(s) \geq \delta_\Omega(0) - r \tag{4.11}$$

para todo s en el segmento radial $[0, w]$. Así, por el Teorema de Gehring y Palka (Teorema 4.3) se puede escribir

$$\beta_\Omega(0, w) \leq 2k_\Omega(0, w) \leq 2\int_{[0,w]} \frac{|ds|}{\delta_\Omega(s)} \leq \frac{2r}{\delta_\Omega(0) - r}; \tag{4.12}$$

pero como f es univalente en el disco $D(0, R)$, se usa el Teorema de distorsión (Teorema 2.8), para obtener la acotación

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{7\varrho}R \\ &< \frac{1}{20}R = \frac{1}{80\varrho}|f'(0)| < \frac{1}{5}\delta_\Omega(0); \end{aligned}$$

luego, sustituyendo en (4.12) se obtiene

$$\beta_\Omega(0, w) \leq \frac{2r}{\delta_\Omega(0) - r} \leq \frac{2r}{5r - r} = \frac{1}{2};$$

y en vista de la definición de la distancia hiperbólica (Teorema 4.1) se encuentra

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|}\right) = \beta(0, z) = \beta_\Omega(0, w) \leq \frac{1}{2}$$

para todo $z \in f^{-1}(A) \cap D(0, R)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} 1 - |z|^2 &\geq 1 - |z| \\ &\geq \frac{1}{e}(1 + |z|) \geq \frac{1}{e} \end{aligned}$$

para todo $z \in f^{-1}(A) \cap D(0,R)$. Así, para $\alpha \geq 0$ y $z \in f^{-1}(A) \cap D(0,R)$ se obtiene la acotación

$$(1-|z|^2)^\alpha \geq e^{-\alpha};$$

mientras que para cada $-1 < \alpha < 0$ y $z \in \mathbb{D}$ se tiene

$$(1-|z|^2)^\alpha \geq 1.$$

Por tanto, se concluye que para cada $\alpha > -1$, existe una constante $C_2(\alpha) > 0$ tal que

$$(1-|z|^2)^\alpha \geq C_2(\alpha) \tag{4.13}$$

para todo $z \in f^{-1}(A) \cap D(0,R)$.

Por otra parte, aplicando nuevamente los Teoremas de distorsión (Corolario 2.2 y Teorema 2.8) y la definición de la métrica hiperbólica (Teorema 4.1), también se tiene

$$|f'(z)| \leq \frac{4}{R}\delta_\Omega(0)e^{3\beta_\Omega(0,f(z))} \leq 4e^{\frac{3}{2}},$$

para cada $z \in f^{-1}(A) \cap D(0,R)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{f^{-1}(D_r\cap\Sigma_\varepsilon)\cap D(0,R)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) &\geq \int_{f^{-1}(A\cap\Sigma_\varepsilon)\cap D(0,R)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \\
&\geq \left(\frac{r}{2}\right)^p C_2(\alpha) \int_{f^{-1}(A\cap\Sigma_\varepsilon)\cap D(0,R)} dA(z) \\
&\geq \left(\frac{r}{2}\right)^p \frac{C_2(\alpha)}{16e^3} \int_{f^{-1}(A\cap\Sigma_\varepsilon)\cap D(0,R)} |f'(z)|^2 dA(z) \\
&= \left(\frac{r}{2}\right)^p \frac{C_2(\alpha)}{16e^3} area(A\cap\Sigma_\varepsilon) \\
&= \left(\frac{r}{2}\right)^p \frac{C_2(\alpha)}{16e^3} \frac{\varepsilon}{\pi} r^2,
\end{aligned}$$

donde en la tercera desigualdad se ha usado que si f es univalente en el conjunto E, entonces

$$\int_E |f'(z)|\, dA(z) = Area\left(f(E)\right).$$

Finalmente, de la desigualdad

$$\int_{f^{-1}(D_r\cap\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \geq \int_{f^{-1}(D_r\cap\Sigma_\varepsilon)\cap D(0,R)} |f(z)|^p dA_\alpha(z),$$

y del hecho que

$$r = \frac{1}{7\varrho} R = \frac{1}{28\varrho^2} |f'(0)|,$$

se obtiene el resultado deseado. ■

Ahora se enuncia y demuestra el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.5. *Sean $\alpha > -1$ y $p \geq 1$ tales que $\alpha > 2p - 1$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe una constante $\delta > 0$, que depende solamente de p, α y ε, tal que*

$$\int_{f^{-1}(\sum_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) > \delta \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z)$$

para toda función univalente $f \in A^p_\alpha$ que satisface $f(0) = 0$.

Prueba: Sean $p \geq 1$, $\alpha > -1$, con $\alpha > 2p - 1$ y definase $\beta = \alpha - 2p$. Entonces claramente se tiene $\beta > -1$; además, si $f \in A^p_\alpha$ es univalente con $f(0) = 0$, entonces por el Teorema de distorsión (Corolario 2.3) se puede escribir

$$|f'(0)| \geq \frac{(1 - |z|)^2}{|z|} |f(z)| \geq \frac{1}{4}(1 - |z|^2)^2 |f(z)|,$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego, elevando a la p-ésima potencia e integrando sobre el disco $\mathbb{D}$ con respecto a la medida dA_β, se obtiene

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(0)|^p dA_\beta(z) \geq \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{4^p}(1 - |z|^2)^{2p} |f(z)|^p dA_\beta(z). \tag{4.14}$$

Por otra parte, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{4^p}(1 - |z|^2)^{2p} |f(z)|^p dA_\beta(z) &= \frac{1}{4^p} \int_{\mathbb{D}} (1 - |z|^2)^{2p+\alpha-2p} |f(z)|^p (1 + \alpha - 2p) dA(z) \\
&= \frac{1}{4^p} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha (1 + \alpha - 2p) dA(z) \\
&= \frac{1}{4^p} \left(\frac{\alpha + 1 - 2p}{\alpha + 1} \right) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha (1 + \alpha) dA(z) \\
&= \frac{1}{4^p} \left(\frac{\alpha + 1 - 2p}{\alpha + 1} \right) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z)
\end{aligned}$$

así, sustituyendo en (4.14), resulta

$$|f'(0)| \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha - 2p + 1}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{\alpha,p}, \tag{4.15}$$

donde se ha usado que dA_β es una medida de probabilidad.

Por otra parte, para $z \in \mathbb{D}$, se define la función

$$g(z) = \frac{1}{\|f\|_{\alpha,p}} f(z),$$

entonces g es una función analítica sobre $\mathbb{D}$ que satisface:

1. $g(0) = \frac{1}{\|f\|_{\alpha,p}} f(0) = 0$,
2. $g'(0) = \frac{1}{\|f\|_{\alpha,p}} f'(0) \neq 0$ pues la función f es univalente en $z = 0$; y
3. $\|g\|_{\alpha,p} = \left\| \frac{1}{\|f\|_{\alpha,p}} f \right\|_{\alpha,p} = 1$.

Así, por el Lema 4.1, se tiene que existen constantes $r > 0$ y $K_1(\alpha, p) > 0$ tales que

$$\int_{g^{-1}(D(0,r)\cap\sum_\varepsilon)} |g(z)|^p dA_\alpha(z) \geq K_1(\alpha, p)\varepsilon |g'(0)|^{p+2}; \tag{4.16}$$

pero, por definición de la función g, es claro que $z \in g^{-1}(D(0, r) \cap \Sigma_\varepsilon)$ si y sólo si $z \in f^{-1}(D(0, r\|f\|_{\alpha,p}) \cap \Sigma_\varepsilon)$, ya que f es univalente y $\arg(f(z)) = \arg(\frac{|f(z)|}{\|f\|_{\alpha,p}})$. Luego, sustituyendo esta información en (4.16) se obtiene

$$\int_{f^{-1}(D(0,r\|f\|_{\alpha,p}\bigcap \Sigma_\varepsilon)} \frac{|f(z)|^p}{\|f\|^p_{\alpha,p}} dA_\alpha(z) \quad \geq \quad K_1(\alpha, p)\varepsilon \frac{|f'(0)|^{p+2}}{\|f\|^{p+2}_{\alpha,p}}.$$

Por tanto, usando esta última relación y la desigualdad (4.15) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \quad &\geq \quad \int_{f^{-1}(D(0,r\|f\|_{\alpha,p})\bigcap \Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \\ &\geq \quad K_1(\alpha, p)\varepsilon \frac{|f'(0)|^{p+2}}{\|f\|^2_{\alpha,p}} \\ &\geq \quad K_1(\alpha, p)\varepsilon \frac{1}{4^{p+2}} \left(\frac{\alpha - 2p + 1}{\alpha + 1} \right)^{\frac{p+2}{p}} \|f\|^p_{\alpha,p}. \end{aligned}$$

Esto completa la prueba del teorema. ■

En vista de las hipótesis que se imponen en el Teorema 4.5, es natural preguntarse si un resultado similar es también valido para todo $\varepsilon > 0$ y para toda función $f \in A^p_\alpha$ con $p > 0$ y $\alpha > -1$. El siguiente resultado da una respuesta parcial positiva a esta pregunta.

Corolario 4.1. *Considérese $p > 0$ y $\alpha > -1$ fijos. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $\delta = \delta(\alpha, p, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$\int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) > \delta \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \tag{4.17}$$

para cualquier función $f \in A^p_\alpha$ univalente con $f(0) = 0 = f'(0) - 1$ y $\|f\|_{\alpha,p} \leq 1$.

Prueba: Sea $\Omega = f(\mathbb{D})$, $r = \frac{1}{5}\delta_\Omega(0)$ y $D_r \subset \Omega$ el disco euclídeo con centro en el origen y radio r. Por el teoremas de distorsión (Teorema 2.8) y el hecho que $f'(0) = 1$, se puede observar que $r \in \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{5}\right)$.

Luego, usando un argumento similar al de la prueba del Lema 4.1 se encuentra que existen constantes positivas K_2 y K_3 dependiendo sólo de α y p tal que

1. $\int_{f^{-1}(D_r \bigcap \Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \leq K_2(\alpha, p)\varepsilon \int_{f^{-1}(D_r)} |f(z)|^p dA_\alpha(z)$.

2. $\int_{f^{-1}(D_r \bigcap S_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \geq K_3(\alpha, p)(\pi - \varepsilon)$;

donde $S_\varepsilon = \{w \in \mathbb{C} : |\arg(w)| \geq \varepsilon\}$.

También, como los sectores Σ_ε crecen con ε, se puede suponer, sin perder generalidad, que $\varepsilon < \varepsilon_0$, donde

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\alpha, p) = \min\left\{\frac{1}{K_2(1 + \pi K_3)}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Entonces por la desigualdad 1. arriba se puede escribir

$$\int_{f^{-1}(D_r)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) > \delta_1 \int_{f^{-1}(D_r \bigcap S_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z),$$

donde $\delta_1 = \frac{1}{1 - K_2\varepsilon} > 1$. Esta última observación junto con la desigualdad 2. arriba y la hipótesis $\|f\|_{\alpha,p} \leq 1$ implica

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) &= \int_{f^{-1}(D_r)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) + \int_{f^{-1}(\mathbb{C} \setminus D_r)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \\
&> (\delta_1 - 1) \int_{f^{-1}(D_r \bigcap S_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \\
&\geq (\delta_1 - 1) K_3(\pi - \varepsilon) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) + \int_{f^{-1}(S_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z);
\end{aligned}$$

luego existe una constante $\delta_2 \in (0,1)$ tal que

$$\int_{f^{-1}(S_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \leq \delta_2 \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z)$$

de donde se seguiría que

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA_\alpha(z) \leq \frac{1}{1-\delta_2} \int_{f^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f(z)|^p dA_\alpha(z)$$

y la prueba está lista haciendo $\delta = 1 - \delta_2$. ■

4.5 Un contra-ejemplo

A continuación se indica que para algunos valores de los parámetros α y p, la desigualdad (4.17) no es cierta, en general, para *todo* $\varepsilon > 0$ y para toda función $f \in A^p_\alpha$. El ejemplo que se presenta en esta sección ha sido tomado del artículo de F. Pérez-González y J. C. Ramos Fernández (2006): *On dominating sets for Bergman spaces* que aparece en la revista *Contemporay Mathematics AMS*.

Ahora se puede construir el contra-ejemplo. Considerese un par (α, p) con $\alpha > -1$ y $p \geq 1$ tal que $\alpha < 2p - 2$. Se demostrará que existe un ángulo $\widehat{\varepsilon} > 0$ tal que la imagen inversa de los sectores Σ_ε con $0 < \varepsilon \leq \widehat{\varepsilon}$ por funciones $f \in A^p_\alpha$, con $f(0) = 0$ *no domina* a la norma $\|f\|_{\alpha,p}$. Para ello, definase

$$\varepsilon_n = \frac{p-1}{p}\pi - \frac{\alpha}{2p}\pi + \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \cdots .$$

Se asume que n es lo suficientemente grande para que $\varepsilon_n < \pi$. Obsérvese que, por la selección de α y p, $\varepsilon_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerese ahora la aplicación de Riemann $f_n : \mathbb{D} \to \Omega_n := \mathbb{C} \setminus (1 + \Sigma_{\varepsilon_n})$ tal que $f_n(0) = 0$ y $f_n'(0) > 0$. Por composición de transformaciones elementales (ver Figura 4.1), estas funciones están dadas explícitamente por

$$f_n(z) = 1 - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2\left(1-\frac{\varepsilon_n}{\pi}\right)}.$$

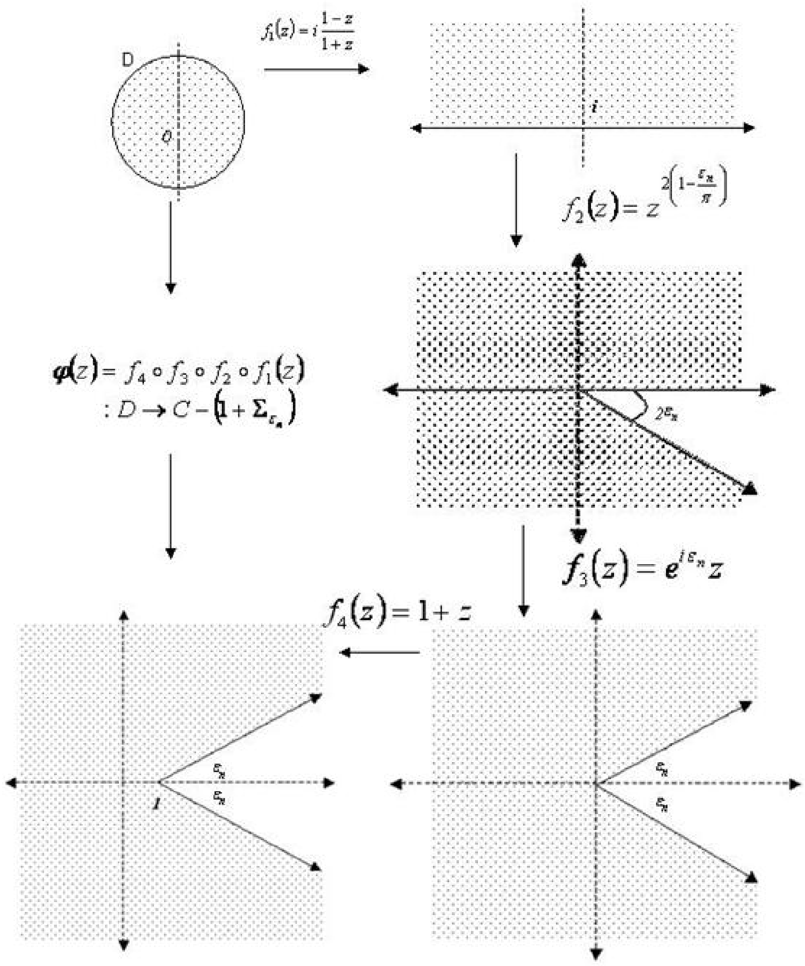

Figura 4.1: Transformación de los contraejemplos

Se afirma que $f_n \in A^p_\alpha$. Para ello, es suficiente verificar que $(1+z)^{-2\left(1-\frac{\varepsilon_n}{\pi}\right)} \in A^p_\alpha$, y, en efecto, usando el Lema 3.3, con $c = -\dfrac{2p}{n\pi} < 0$, se obtiene que

$$\|(1+z)^{-2\left(1-\frac{\varepsilon_n}{\pi}\right)}\|^p_{\alpha,p} = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1+z|^{2+\alpha+c}} dA(z) = \lim_{z\to -1} I_c(z) < \infty,$$

y puesto que para $c < 0$, $I_c(z)$ es una función acotada. Luego, se puede concluir que $\|f_n\|_{\alpha,p} < \infty$ para todo $n = 1, 2, \cdots$. Nótese que

$$f_n(z) \to f(z) = 1 - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\frac{1}{p}(2+\alpha)},$$

cuando $n \to \infty$, para cualquier $z \in \mathbb{D}$, y $f \notin A^p_\alpha$ (esto es debido al caso $c = 0$ en el

Lema 3.3). Aplicando el lema de Fatou se obtiene que

$$\|f_n\|_{\alpha,p} \to \infty, \qquad \text{cuando } n \to \infty. \tag{4.18}$$

Por otra parte, tomando, por ejemplo, $\widehat{\varepsilon} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n$, no es difícil ver que

$$\Sigma_{\widehat{\varepsilon}} \cap \Omega_n \subset \Sigma_{\widehat{\varepsilon}} \cap (\mathbb{C} \setminus (1 + \Sigma_{\varepsilon_\infty})) \subset D\,(0,2)\,.$$

En efecto, si $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Sigma_{\widehat{\varepsilon}} \cap (\mathbb{C} \setminus (1 + \Sigma_{\varepsilon_\infty}))$ entonces de las relaciones $\tan(\widehat{\varepsilon}) = \dfrac{y_0}{x_0}$ y $\tan(2\widehat{\varepsilon}) = \dfrac{y_0}{x_0 - 1}$, se tiene

$$x_0 = \frac{\tan(2\widehat{\varepsilon})}{\tan(2\widehat{\varepsilon}) - \tan(\widehat{\varepsilon})} \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{\tan(\widehat{\varepsilon})\tan(2\widehat{\varepsilon})}{\tan(2\widehat{\varepsilon}) - \tan(\widehat{\varepsilon})},$$

con lo que $|z_0|^2 = x_0^2 + y_0^2 = 4\cos^2(\widehat{\varepsilon}) \leq 4$. Esto implica que $|z_0| \leq 2$ y

$$\Sigma_{\widehat{\varepsilon}} \cap (\mathbb{C} \setminus (1 + \Sigma_{\varepsilon_\infty})) \subset D\,(0,2)\,.$$

Por tanto, para todo ε, $0 < \varepsilon \leq \widehat{\varepsilon}$, se tiene que

$$\int_{f_n^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f_n(z)|^p dA_\alpha(z) \leq \int_{f_n^{-1}(\Sigma_{\widehat{\varepsilon}})} |f_n(z)|^p dA_\alpha(z) \leq 2^p \int_{\mathbb{D}} dA_\alpha(z) = 2^p \tag{4.19}$$

para todo n. Pero si δ es una constante tal que

$$\|g\|_{\alpha,p} < \delta \int_{g^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |g(z)|^p dA_\alpha(z)$$

para *cualquier* función univalente $g \in A^p_\alpha$ que fije al origen, en particular se debería tener que

$$\|f_n\|_{\alpha,p} < \delta \int_{f_n^{-1}(\Sigma_\varepsilon)} |f_n(z)|^p dA_\alpha(z)$$

lo que da una contradicción entre (4.18) y (4.19). ■

CONCLUSIONES

En el transcurso de esta investigación se ha podido establecer lo siguiente:

1. Las transformaciones conformes o funciones univalentes, definidas sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, tienen crecimientos controlados tal como lo establecen los teoremas de distorsión (Capítulo 2).

2. Los espacios de Bergman con peso son subespacios métricos completos de los espacios clásicos L^p, con $p > 0$. También, se pudo ver que estos son separables y que el crecimiento de una función y la de su derivada sobre subconjuntos compactos del disco está controlado por su norma (o la distancia al origen, según sea el caso).

3. La norma de transformaciones conformes que fijan el origen que están en los espacios de Bergman A^p_α, con $\alpha > 2p - 1$, se puede acotar superiormente restringiendo la integral, que aparece en la definición de la norma, por la imagen inversa de ciertos sectores Σ_ε para cada $\varepsilon > 0$ (Teorema 4.5); mientras que un resultado similar no es cierto, para todo $\varepsilon > 0$, si los parámetros α y p involucrados en la definición del espacio de Bergman, satisfacen la relación $\alpha < 2p - 2$. Quedando pendiente para investigaciones futuras, los siguientes problemas:

   (a) ¿Es cierto el Teorema 4.5, para $\alpha \in [2p-2, 2p-1]$? Una respuesta parcial a esta incertidumbre, para el caso $p = 1$, se encuentra en el artículo de Pérez-González y Ramos (2004).

   (b) ¿Es valido el Teorema 4.5 si se omite la condición que la función f es univalente? Para $p = 1$, Marshall y Smith (1999) demostraron que este problema es equivalente a resolver una conjetura hecha por Ortel y Smith en 1988. A este problema todavía no se le conoce solución.

(c) En vista del contra-ejemplo en la sección 4.5, es natural preguntarse: ¿Existe un ángulo $\varepsilon_0 < \pi$ tal que el Teorema 4.5 sea cierto para todo $\varepsilon > \varepsilon_0$ y para toda función $f \in A^p_\alpha$ con $\alpha > -1$ y $p \geq 1$? Una respuesta positiva a este problema, para el caso $p = 1$, se encuentra en Pérez-González y Ramos (2006).

BIBLIOGRAFÍA

Ahlfors, L. y Grunsky, H. 1937. Über die Blochsche konstante. *Math. Zeit.* *42*: 671-673.

Apostol, T. M. 1982. *Análisis matemático.* Reverté, Barcelona.

Arzolay, W. y Ramos Fernández, J. 2004. Conjuntos donde se alcanza la norma de Besov. *Bol. Asoc. Mat. Venez.* *11*: 5-15.

Bachman, G. y Narici, L. 2000. *Functional analisys.* Dover Publications, INC, New-York.

Bergman, S. 1950. *The kernel function and conformal mapping.* American Mathematical Society, New York. (Segunda edicion publicada por American Mathematical Society, Providence, R.I. 1970).

Bieberbach, L. 1916. Über die koeffizienten derjenigen potenzreihen, welche eine schlichte abbildung des einheitskreises vermitteln. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*: 940-955.

De Branges, L. 1985. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math.* *154*: 137-152.

Conway, J. 1978. *Functions of one complex variable.* Springer Verlag, New York.

Duren, P. L. 1970. *Theory of H^p spaces.* Academic Press, New York.

Duren, P. L. 1980. *Univalent functions.* Springer-Verlag, New York.

Duren, P. y Schuder, A. 2004. *Bergman spaces.* American Mathemathical Society, Math. Surveys and Monog., vol 100, New York.

Finch, S. R. 2003. *Bloch-Landau constants.* 7.1 en Mathematic constants. Cambridge, England. Cambridge University Press: 456-459.

Gehring, F. W. y Palka, B. P. 1976. Quasiconformally homogeneous domains. *J. Analyse, Math.* *30*: 172-199.

Greene, R. y Krantz, S. 2006. *Function theory of one complex variable: Third edition (Graduate Studies in Mathematics).* American Mathematical Society, Providence.

Hedenmalm, H.; Korenblum, B. y Zhu, K. 2000. *Theory of Bergman space.* Springer-Verlag, New York.

Howie, J. 2003. *Complex análisis.* Springer-Verlag, London.

Kubrusly, C. 2001. *Elements of operator theory.* Birkhäuse, Boston.

Lang, S. 1993. *Real and functional analysis. Third edition (Graduate Texts in Mathematics).* Springer-Verlag, New-York.

López-Gómez, J. 2001. *Ecuaciones diferenciales y variable compleja.* Prentice Hall, Madrid.

Luecking, D. H. 1981. Inequalities on Bergman spaces. *Illinois J. Math. 25*: 1-11.

Luecking, D. H. 1985. Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives. *Amer. J. Math. 107*: 85-111.

Marshall, D. y Smith, W. 1999. The angular distribution of mass by Bergman function. *Rev. Mat. Iberoamericana. 15*: 93-116.

Ortel, M. y Smith, W. 1988. The argument of an extremal dilatation. *Proc. Amer. Math. Soc. 104*: 498-502.

Pérez-González, F. y Ramos Fernández, J. 2004. The angular distribution of mass by weighted Bergman functions. *Div. Mat. 12*: 65-86.

Pérez-González, F. y Ramos Fernández, J. 2004. Imágenes inversas de sectores de funciones en el espacio de Bergman con peso. *Rev. Col. Mat. 38*: 17-25.

Pérez-González, F. y Ramos Fernández, J. 2006. On dominating sets for Bergman spaces. *Contemp. Math. 404*: 175-186.

Pommerenke, C. 1975. *Univalent functions.* Vandenhoeck & Ruprecht in Gottingen.

Pommerenke, C. 1992. *Boundary behavior of conformal maps.* Springel - Verlag, New York.

Ransford, T. 1995. *Potential theory in the complex plane.* Cambridge Univ. Press, London.

Royden, H. L. 1968. *Real analysis, second edition.* Macmillan Publishing Co. INC. New-York.

Rudin, W. 1974. *Real and complex analysis, second edition.* McGraw-Hill, New-York.

Seip, K. 2004. *Interpolation and sampling in spaces of analytic functions.* American

Mathematical Society, Providence, R.I.

Zhu, K. 1990. *Operator theory in function spaces.* Marcel Dekker, New York.

Hoja de Metadatos

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/5

Título	OBTENCIÓN DE LA NORMA EN ESPACIOS DE BERGMAN
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	**Código CVLAC / e-mail**	
Antón Marval, Rafael J.	**CVLAC**	**V-15.936.786**
	e-mail	**antonmrafael@gmail.com**
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Espacios de funciones analíticas.
Espacio de Bergman.
Transformaciones conforme.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/5

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias	Matemáticas

Resumen (abstract):

En este trabajo se establecen condiciones para que la norma de transformaciones conformes en los espacios de Bergman con peso, se pueda acotar superiormente por la expresión que se obtiene cuando se restringe la integral, que aparece en la definición de la norma, por la imagen inversa de ciertos sectores.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/5

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Ramos Fernández, Julio C.	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [x] JU [ ]
	CVLAC	V-10.949.733
	e-mail	jramos@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
Carpintero, Carlos	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [X]
	CVLAC	V-8.443.180
	e-mail	ccarpi@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
Arzolay, Wilmer	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [X]
	CVLAC	V-09.859.622
	e-mail	awilmer@sucre.udo.edu.ve
	e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [ ]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2008	07	31

Lenguaje: Spa

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/5

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
Tesis-Rafael.pdf	Aplication / PDF

Alcance:

Espacial : **Universal** (Opcional)

Temporal: **Intemporal** (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciatura en Matemática

Nivel Asociado con el Trabajo: **Licenciatura**

Área de Estudio: Matemáticas

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

Universidad de Oriente

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 5/5

Derechos:

Yo, Rafael José Antón Marval, autor de la tesis de grado titulada: Obtención de la norma en espacios de Bergman, autorizo la publicación del título y resumen de este trabajo.

Br. Rafael Antón
AUTOR 1

AUTOR 2

AUTOR 3

AUTOR 4

Carlos R. Carpintero F

Prof. Julio Ramos
TUTOR

Prof. Carlos Carpintero
JURADO 1

Prof. Wilmer Arzolay
JURADO 2

POR LA SUBCOMISÓN DE TESIS:

Prof. Juan González