UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE SUCRE
ESCUELA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

NÚMERO DE INDEPENDENCIA BALANCEADA Y DOMINACIÓN EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS

(Modalidad: Tesis de grado)

MARIELA DEL JESÚS GARCÍA MOYA

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO COMO
REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADA EN MATEMÁTICAS

CUMANÁ, 2011

NÚMERO DE INDEPENDENCIA BALANCEADA Y DOMINACIÓN EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS

APROBADO POR:

Prof. Daniel Brito

Asesor

Prof. Felicia Villaroel

Jurado

Prof. Lope Marín

Jurado

DEDICATORIA

A:

Dios por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos.

Mis padres, Jesús García y Luisa Moya, que siempre me han apoyado y siempre han estado conmigo en los buenos y malos momentos. Los amo y nunca en la vida los defraudaré.

Mi abuela (Felicia de Moya) Fallecida. Porque desde que tengo conciencia estuvo a mi lado hasta que se fue, dándome apoyo, amor y seguridad. Siempre te tengo presente.

AGRADECIMIENTOS

A Dios todopoderoso, por iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el período de estudio.

A mi madre, por haberme educado y soportar mis errores. Gracias a tus consejos y por el amor que siempre me has brindado. ¡Gracias por darme la vida!.

A mi padre, porque a pesar de la distancia le agradezco el cariño, la paciencia y el apoyo que me brindó para culminar mi carrera profesional. ¡Te quiero mucho!.

A mis hermanas, por su inmenso cariño y por el ánimo que me brindaron para alcanzar esta meta tan importante.

A mis tíos, tías, primos y cuñado, quienes desde el primer momento me brindaron y me brindan todo el apoyo, colaboración y cariño.

A Andrés García, por su apoyo, ánimo, por compartir conmigo muchos momentos, por escucharme, por darme cariño y amistad desde el día en que me conoció.

Un agradecimiento especial al profesor Daniel Brito, por la colaboración, paciencia, apoyo brindado, por escucharme y aconsejarme siempre, por los momentos en los que más que un profesor se comportó como un amigo. ¡Gracias profesor!.

Gracias a todos los que de alguna manera me brindaron su ayuda para alcanzar esta meta.

ÍNDICE

Pág.

LISTA DE FIGURAS VI
RESUMEN VII
INTRODUCCIÓN 1
1 DEFINICIONES Y NOTACIONES BÁSICAS 3
2 RESULTADOS PREVIOS 10
3 DISCUSIÓN Y RESULTADOS 18
CONCLUSIÓN 26
BIBLIOGRAFÍA 27

LISTA DE FIGURAS

Pág.

1.1 Grafo $G = (V, E)$. 3

1.2 Conjunto dominante de G: $\{v_5, v_3\}$. 4

1.3 Conjunto independiente de G: $\{v_1, v_4\}$. 4

1.4 Conjunto independiente maximal de G: $\{v_1, v_3\}$. 5

1.5 Ejemplo de un *Matching* M_1. 6

1.6 Grafo trivial. 7

1.7 Grafo conexo. 7

1.8 Ejemplo de un Grafo corona de un camino. 7

1.9 Grafo bipartito. 8

1.10 Grafo bipartito balanceado. 8

1.11 Grafo bipartito conexo. 9

2.1 Ejemplo de un grafo con $i(G) + \alpha_0(G) = n(G)$. 10

2.2 $C = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee x_4)$. 14

2.3 Ejemplo de un grafo corona para algún grafo conexo H. 17

2.4 Ejemplo de un ciclo C_4. 17

3.1 Mínima representación del Grafo G_1. 18

3.2 Grafo G_2. 18

3.3 Grafo G_3. 19

3.4 Grafo G_4. 19

3.5 Ejemplo de grafos con $\gamma(G) < n(G)$. 20

3.6 Ejemplo de grafos con $\gamma(G) = n(G)$. 21

3.7 Grafo corona de un grafo bipartito balanceado conexo. 21

3.8 Grafo corona de un grafo bipartito C_4. 21

RESUMEN

En este trabajo de investigación se analizan los resultados dados y demostrados por Rautenbach y Volkmann (2002), los cuales establecen condiciones para que un grafo tenga ciertas propiedades usando parámetros como el número de dominación, número *matching*, orden y número de dominación independiente. A través de una investigación teórica, usando un método analítico descriptivo y haciendo uso de un nuevo parámetro como el número de independencia balanceada, se logra la adaptación de algunos resultados a grafos bipartitos balanceados.

INTRODUCCIÓN

La teoría de grafos tiene su origen en el problema de los siete puentes de Königsber resuelto por Leonhard Euler. Más tarde otros problemas influyeron en el desarrollo de la teoría de grafos como el de Gustav Kirchoff, quien publicó sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos, el problema de los cuatros colores planteado por Francis Guthrie, entre otros. Este tema es bastante relevante porque todas sus aplicaciones se utilizan en la vida cotidiana, por ejemplo: el circuito eléctrico de las casas, las líneas telefónicas, las líneas de televisión por cable, una red de computadoras, entre otros, pueden representarse y estudiarse mediante un grafo.

Un grafo G es un par de conjuntos $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices, nodos o puntos y $E(G)$ es un conjunto formado por pares no ordenados de elementos de $V(G)$, llamados lados, aristas o líneas.

Un conjunto dominante de un grafo $G = (V, E)$, es un subconjunto S de V tal que cada vértice que pertenezca a $V - S$ está unido a (al menos) un miembro de S.

El número de dominación de un grafo $G = (V, E)$, denotado por $\gamma(G)$, es la mínima cardinalidad de un conjunto dominante.

Un conjunto independiente de un grafo G, es un conjunto S de vértices de G tal que no existen dos vértices adyacentes contenidos en S.

El número *matching* de un grafo G, denotado por $\alpha_0(G)$, es la máxima cardinalidad del conjunto de lados independientes de un grafo.

El número de dominación independiente, denotado por $i(G)$, es la mínima cardinalidad de un conjunto máximal independiente de G.

El número de independencia balanceada, denotado por $\alpha_{Bip}(G)$, es la máxima cardinalidad de un conjunto independiente balanceado.

El orden de un grafo G, denotado por $n(G)$, es el número de vértices del grafo.

Dado un grafo G, se define el grafo corona, como el grafo obtenido desde G por añadir a cada vértice de G un vértice de grado uno.

En el año 2002, Rauntenbach Dieter y Volkmann Lutz, dieron a conocer resultados sobre número de dominación independiente, número *matching* en grafos, entre los cuales se encuentra como resultado principal el siguiente teorema: Sea $G = (V, E)$ un grafo sin vértices aislados. Entonces $\gamma(G) + i(G) = n(G)$ si y sólo si toda componente de G es un ciclo C_4 o un grafo corona con $H \circ K_1$ para algún grafo conexo H.

Además del estudio de los grafos, es esencial resaltar el estudio de los grafos bipartitos balanceados.

Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito balanceado si hay una partición de V en dos conjuntos A y B, donde $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, y $|A| = |B| = n$, tal que cada lado del grafo tiene un vértice extremo en A y otro en B. Se denota por $G = (A, B, E)$.

El estudio de los grafos bipartitos balanceados es importante, pues estos permiten el estudio de ciertos fenómenos, en donde los grafos resultan insuficientes. Los grafos bipartitos al igual que los grafos, son de gran utilidad ya que cuentan con muchas propiedades, que han ayudado al estudio de problemas basados en la programación líneal, topología, computación, entre otros.

Este trabajo consta de tres capítulos, los cuales están estructurados de la siguiente manera:

En el capítulo I, se introducen aquellos conceptos básicos de teoría de grafos, que se utilizarán a lo largo de los siguientes capítulos.

En el capítulo II, se enuncian y demuestran los resultados expuestos por Rautenbach Dieter y Volkmann Lutz (2002), referidos a dominación independiente y *matching* en grafos.

Finalmente, en el capítulo III, se adaptan y demuestran dichos resultados en grafos bipartitos balanceados.

CAPÍTULO 1
DEFINICIONES Y NOTACIONES BÁSICAS

En este capítulo se describe, en forma general, algunas definiciones y notaciones básicas extraídas de Benzad et al. (1981), las cuales se ilustran con ejemplos sencillos, estrictamente necesarios para el desarrollo de este trabajo.

Definición 1.1. *Un grafo G es un par de conjuntos $(V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices, nodos o puntos y $E(G)$ es un conjunto formado por pares no ordenados de elementos de $V(G)$, llamados lados, aristas o líneas.*

Notación: Se denota $G = (V(G), E(G))$ o simplemente $G = (V, E)$.

Ejemplo 1.1. *En el grafo de la figura 1.1*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *y* $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

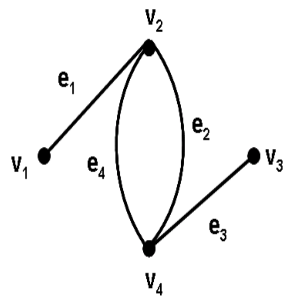


Figura 1.1: Grafo $G = (V, E)$.

Definición 1.2. *Un conjunto dominante de un grafo $G = (V, E)$, es un subconjunto S de V tal que cada vértice que pertenezca a $V - S$ está unido a (al menos) un miembro de S.*

Ejemplo 1.2. *Ver figura 1.2*

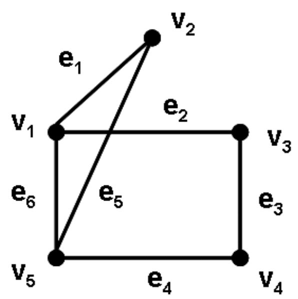


Figura 1.2: Conjunto dominante de G: $\{v_5, v_3\}$.

Definición 1.3. *El número de dominación de un grafo $G = (V, E)$, es la mínima cardinalidad de un conjunto dominante de G.*

Notación: Se denota $\gamma(G)$.

En el ejemplo 1.2, $\gamma(G)$= 2.

Definición 1.4. *Un vértice s es adyacente a otro vértice v, si el grafo contiene una arista (v, s) que los une.*

Definición 1.5. *Un conjunto independiente de un grafo G, es un conjunto S de vértices de G tal que no existen dos vértices adyacentes contenidos en S.*

Ejemplo 1.3. *Ver figura 1.3*

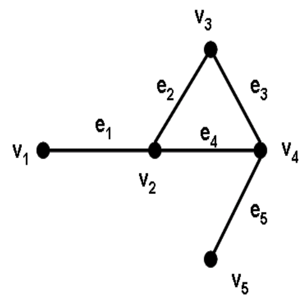


Figura 1.3: Conjunto independiente de G: $\{v_1, v_4\}$.

Definición 1.6. *Un conjunto independiente maximal, es un conjunto independiente tal que añadiendo cualquier otro vértice al conjunto, éste deja de ser independiente.*

Ejemplo 1.4. *Ver figura 1.4*

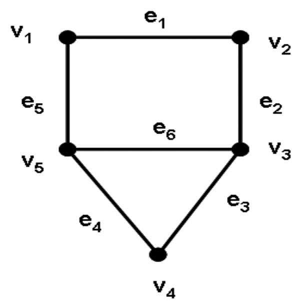


Figura 1.4: Conjunto independiente maximal de G: $\{v_1, v_3\}$.

Definición 1.7. *El número de dominación independiente de un grafo* $G = (V, E)$, *es la mínima cardinalidad de un conjunto maximal independiente de* G.

Notación: Se denota $i(G)$.

En el ejemplo 1.4, $i(G)$= 2.

Definición 1.8. *El orden de un grafo* G *es el número de vértices del grafo, es decir,* $n(G) = |V|$.

Notación: Ord(G) o $n(G)$, denota el orden de G.

Definición 1.9. *Un matching en un grafo G, es un conjunto de lados independientes.*

Ejemplo 1.5. $M_1 = \{e_2, e_4, e_6\}$ *es un matching en la figura 1.5.*

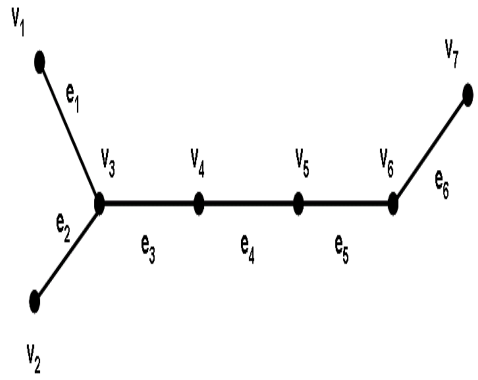


Figura 1.5: Ejemplo de un $Matching$ M_1.

Definición 1.10. *Se entiende por número matching de un grafo G, a la máxima cardinalidad del conjunto de lados independientes de un grafo.*

Notación: se denota por $\alpha_0(G)$.

En el ejemplo 1.5, $\alpha_0(G)$=3.

Definición 1.11. *El grado de un vértice v, es el número de lados de G incidentes a v.*

Notación: se denota por $d(v)$ o $d_G(v)$.

Definición 1.12. *Un grafo G es trivial o aislado si posee un único vértice.*

Ejemplo 1.6. *Ver figura 1.6*

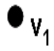


Figura 1.6: Grafo trivial.

Definición 1.13. *Un grafo G es conexo, si es el grafo trivial, o si entre cada par de vértices de G existe un camino que los conecte.*

Ejemplo 1.7. *Ver figura 1.7*

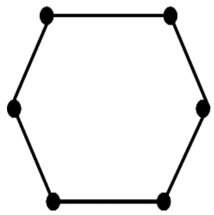


Figura 1.7: Grafo conexo.

Definición 1.14. *Un ciclo es un camino simple cerrado. La longitud de un ciclo es el número de vértices (o lados) que lo conforman.*

Definición 1.15. *Dado un grafo G, se define el grafo corona, como el grafo obtenido desde G por añadir a cada vértice de G un vértice de grado uno.*

Ejemplo 1.8. *Ver figura1.8*

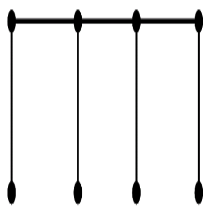


Figura 1.8: Ejemplo de un Grafo corona de un camino.

Definición 1.16. *Un grafo bipartito es un grafo $G = (V, E)$ en el cual hay una partición de V de la forma $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, tal que cada lado del grafo tiene un vértice extremo en A y otro en B.*

Ejemplo 1.9. *Ver figura1.9*

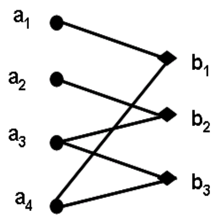


Figura 1.9: Grafo bipartito.

Definición 1.17. *Un grafo bipartito balanceado* $G = (A, B, E)$*, es un grafo bipartito en el cual* $|A|$=$|B|$.

Ejemplo 1.10. *Ver figura1.10*

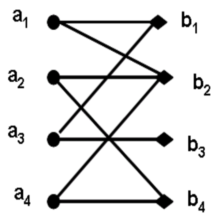


Figura 1.10: Grafo bipartito balanceado.

Definición 1.18. *El orden de un grafo bipartito* $G = (A, B, E)$ *es* $p + q$*, donde* $p = |A|$ *y* $q = |B|$.

Definición 1.19. *Un grafo bipartito* G *es conexo, si para toda pareja de vértices* $u, v \in X \cup Y$*, existe un camino de* u *a* v.

Ejemplo 1.11. *Ver figura1.11*

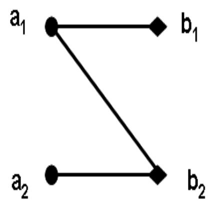


Figura 1.11: Grafo bipartito conexo.

Nota 1.1. *Las definiciones en grafos bipartitos de conjunto dominante, número de dominación y grafo corona, son análogas a las existentes en grafo.*

Definición 1.20. *El número de independencia balanceada de un grafo bipartito balanceado G, es la máxima cardinalidad de un conjunto independiente balanceado de G.*

Notación: se denota por $\alpha_B ip(G)$.

En el ejemplo 1.10, $\alpha_B ip(G)$= 2.

CAPÍTULO 2
RESULTADOS PREVIOS

En este capítulo se introducen los resultados dados por Dieter Rautenbach y Lutz Volkmann (2002), las cuales sirven como herramientas fundamentales para la realización del siguiente capítulo.

Teorema 2.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y M un matching máximo de G, es decir, $M = \alpha_0(G)$. Demostrar la siguiente equivalencia:*

(a) $i(G) + \alpha_0(G) = n(G)$.

(b) Hay una partición $V = A \cup B \cup C$ de los vértices de G tal que:

(i) $A = \{a_1, a_2, ..., a_r\}$,$B = \{b_1, b_2, ..., b_r\}$ *donde* $r = \alpha_0(G)$

(ii) $M = \{a_i b_i : 1 \leq i \leq r\}$

(iii) A es un conjunto independiente

(iv) Los vértices en C son aislados

(v) No hay dos índices diferentes $1 \leq i, j \leq r$ tal que $a_i b_j \in E$ y

(vi) No hay tres índices diferentes $1 \leq i, j, k \leq r$ tal que $a_i b_j, b_i b_k \in E$ y $b_j b_k \notin E$ o $a_i b_j, b_i a_k \in E$ y $b_j a_k \notin E$.

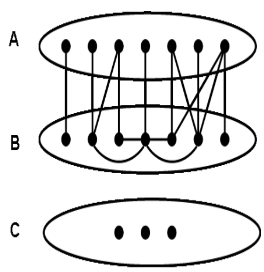


Figura 2.1: Ejemplo de un grafo con $i(G) + \alpha_0(G) = n(G)$.

Prueba:

Sea $M = \{a_1b_1, a_2b_2, ...a_rb_r\}$, $A = \{a_i | i = 1, 2, ..., r\}$, $B = \{b_i | i = 1, 2, ..., r\}$ y $C = V - (A \cup B)$.

Se supone que I es un conjunto mínimo de dominación independiente, $|I| = i(G)$. El conjunto I contiene a lo más a_i o b_i para cada $1 \leq i \leq r$, ya que I es de dominación independiente. (Ver figura 12).

$a \Rightarrow b$

Se supone que $i(G) + \alpha_0(G) = n(G)$ entonces se obtiene que $|I \cap \{a_i, b_i\}| = 1$ para cada $1 \leq i \leq r$ y $C \subseteq I$, es decir, C es independiente. Por lo tanto se puede decir, sin pérdida de generalidad, que $I = A \cup C$ y $A \cup C$ es independiente, pues no existen lados entre ellos.

Ahora se asume que hay vértices $b \in B$ y $c \in C$ tal que $bc \in E$. Sea $I' \subseteq B$, I' es independiente, y $|I'|$ es máximo.

El conjunto I'' es un conjunto de dominación independiente, donde:

$I'' = I' \cup [A - N(I')] \cup [C - N(I')]$ (1).

Ahora se sabe que:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Utilizando esta propiedad en la ecuación (1) se obtiene lo siguiente:

$|I''| \leq |I'| + |A - N(I')| + |C - N(I')| - |I' \cap [A - N(I')]| - |I' \cap [C - N(I')]| - |[A - N(I')] \cap [C - N(I')]| + |I' \cap [A - N(I')] \cap [C - N(I')]|$. (2)

Por la figura 12 se puede observar que:

a) $I' \cap [A - N(I')] = \emptyset$

b) $I' \cap [C - N(I')] = \emptyset$

c) $[A - N(I')] \cap [C - N(I')] = \emptyset$

d) $I' \cap [A - N(I')] \cap [C - N(I')] = \emptyset$

Pues, no tienen elementos en común, por lo tanto, la cardinalidad de a), b), c), d), es cero. Entonces, la desigualdad (2), queda de la siguiente manera:

$|I''| \leq |I'| + |A - N(I')| + |C - N(I')|$ (3)

Por otro lado, se tiene que: $I' \subseteq B$ y que $N(I') \subseteq A \cup B \cup C$, por lo tanto,

$|I'| < |N(I')|$. Luego, $|I'| \leq |A|$, y $|A| \leq |N(I')|$. Ver figura 12.

Entonces, se puede concluir que: $|A - N(I')| \leq |A - I'| = |A| - |I'|$ (4)

Aplicando (4) en (3), se tiene:

$|I''| \leq |I'| + (|A| - |I'|) + (|C| - 1) = |A| + |C| - 1 < |I|$

Se concluye que: $|I''| < |I|$

Esto es una contradicción ya que $|I|$ es el conjunto mínimo de dominación independiente.

Por lo que, no existe tal lado bc.

Por lo tanto, los vértices en C son aislados.

Ahora se asume, que hay dos índices diferentes $1 \leq i, j \leq r$ tal que $a_i b_j, b_i b_j \in E$.

Sea $I' \subseteq B$ un conjunto independiente máximo conteniendo b_j. El conjunto $I'' = I' \cup [A - N(I')] \cup C$.

Utilizando un razonamiento análogo al anterior se tiene que:

$|I''| \leq |I'| + (|A| - |I'| - 1) + |C| = |A| + |C| - 1 < |I|$

Se observa que I'' es un conjunto de dominación independiente. Luego, $|I''| < |I|$. Pero esto es una contradicccción, ya que $|I|$ es el conjunto mínimo de dominación independiente.

Por lo tanto, no existe tal índice.

Ahora se asume que hay tres índices diferentes $1 \leq i, j, k \leq r$ tal que $a_i b_j, b_i b_k \in E$ y $b_j b_k \notin E$. Seleccionando $I' \subseteq B$, un conjunto independiente máximo conteniendo b_j y b_k.

Utilizando un razonamiento análogo al anterior se tiene que:

$|I''| \leq |I'| + (|A| - |I'| - 2) + |C| = |A| + |C| - 2 < |I|$

Se observa que I'' es un conjunto de dominación independiente, entonces: $|I''| < |I|$. Pero esto es una contradicccción, ya que $|I|$ es el conjunto mínimo de dominación independiente.

Por lo tanto no existe tal índice.

Finalmente, se supone que hay tres índices diferentes $1 \leq i, j, k \leq r$ tal que

$a_ib_j, b_ia_k \in E$ y $b_ja_k \notin E$. Selecccionando $I' \subseteq B - N(a_k)$ un conjunto independiente máximo conteniendo b_j.

Luego, por un razonamiento similar a los anteriores, se obtiene una contradicción.

Por lo tanto, no existe tal índice.

b) $\Rightarrow$ *a)*

Se sabe por *a)* que: $i(G) + \alpha_0(G) = n(G)$.

Entonces al despejar $i(G)$ se tiene: $i(G) = n(G) - \alpha_0(G)$ (1)

Se sabe que: $|I| = i(G)$ (2)

Se tiene que: $I = A \cup C$, ahora aplicando cardinalidad se tiene:

$|I| \leq |A| + |C|$ (3)

Luego, se obtiene que: $|I| = n(G) - \alpha_0(G)$ (4)

Ahora por contradicción, se asume lo siguiente:

$i(G) = |I| < n(G) - \alpha_0(G) = |A| + |C|$, (Por (3) y (4))

Luego, como $C \subseteq I$, se encuentra que hay algunos $1 \leq i \leq r$ tal que $a_i, b_i \notin I$. como I es independiente y dominante, esto implica que: hay algunos $1 \leq j \leq r$ tal que $a_i, b_i \in N(b_j)$ y $b_i \in I$, o hay dos indices diferentes $1 \leq j, k \leq r$ tal que $a_i \in N(b_j), b_i \in N(b_k), b_jb_k \notin E$ con $b_j, b_k \in I$, o $a_i \in N(b_j), b_i \in N(a_k), b_i \in N(a_k), b_ja_k \notin E$ con $b_j, a_k \in I$.

Se puede observar que todas estas posibilidades contradicen a *v)* y *vi)*.

Por lo tanto, $i(G) + \alpha_0(G) = n(G)$. $\square$

Proposición 2.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo con un matching perfecto M. Esto puede ser claro en tiempo polinomial, si hay una partición $V = A \cup B$ tal que:*

(i) A es independiente.

(ii) A contiene exactamente un punto final y cada lado en M.

Si este tipo de partición existe, entonces una de esta partición puede ser fundamentada en tiempo polinomial.

Prueba:

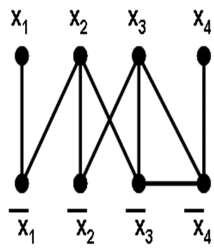


Figura 2.2: $C = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee x_4)$.

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $M = \{x_i\bar{x}_i | 1 \leq i \leq r\}$. Se considera los x_i como variables de Booleana con $\bar{\bar{x}}_i = x_i$ para $1 \leq i \leq r$.

La fórmula para el instance de $2 - Sat$ es:

$C = \bigwedge_{uv \in E \backslash M} (\bar{u} \vee \bar{v})$ (1)

En la figura 13, Dado $G = (V, E)$ y $M = \{(x_1\bar{x}_1), (x_2\bar{x}_2), (x_3\bar{x}_3), (x_4\bar{x}_4)\}$

Aplicando (1) se tiene:

$C = (\bar{\bar{x}}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{\bar{x}}_3) \wedge (\bar{\bar{x}}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_3 \vee \bar{\bar{x}}_4) \wedge (\bar{\bar{x}}_3 \vee \bar{\bar{x}}_4)$

Luego, $C = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_3 \vee x_4)$

Si se da una asignación verdadera que satisfaga a los x_i, entonces se tiene los siguientes casos:

Si $x_i \in A, \bar{x}_i \in B$ entonces x_i es el conjunto verdadero, y si $\bar{x}_i \in A, x_i \in B$ entonces x_i es el conjunto falso.

Si $uv \in E$ para algunos $u, v \in A$ entonces $uv \in E \backslash M$ y C contiene la clausura $\bar{u} \vee \bar{v}$, la cual no es satisfactoria, entonces A es un conjunto independiente.

Por otro lado, si se da una partición $V = A \cup B$, entonces cada variable en A es "verdadera", y cada variable en B es "falsa", definiendo una asignación verdadera para los x_i. Ya que A es independiente, para cada clausura $\bar{u} \vee \bar{v}$ ya que $uv \in E \backslash M$ uno de u o v debe estar en B lo cual implica que $\bar{u}$ o $\bar{v}$ es "verdadero" y la clausura es satisfactoria.

Observe que el número de variables en C es $\frac{|V|}{2}$ y el número de clausuras en C es $|E| - \frac{|V|}{2}$.

Por lo tanto, este tipo de partición existe, y una de esta partición puede ser fundamentada en tiempo polinomial. $\square$

Teorema 2.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Puede ser resuelto en tiempo polinomial si $i(G) + \alpha_0(G) = n(G)$.*

Prueba: Dado que los tres parámetros son aditivos con respecto a los componentes de G. Se supone que G es conexo entonces:

En caso de que $n(G) = 1$ se dice que G es un grafo trivial, por lo tanto no tiene *matching*, por lo que :

$i(G) + \alpha_0(G) = 1 + 0 = n(G)$.

De aquí se asume que $n(G) \geq 2$. Se determina un *matching* máximo M de G, esto puede ser en tiempo polinomial.

Si $|M| \leq \frac{n(G)}{2}$ entonces G no tiene *matching* perfecto y por Teorema 2.1 se concluye que:

$i(G) + \alpha_0(G) < n(G)$.

Por lo tanto se asume que M es *matching* perfecto de G.

Se comprueba si hay una partición $V = A \cup B$ tal que A es independiente y contiene exactamente un punto final de cada lado en M.

Si una de las particiones existe, entonces se determina una tal partición. Por proposición 2.1, esto puede ser en tiempo polinomial.

Ahora, si no existe partición, entonces $i(G) + \alpha_0(G) < n(G)$ por teorema 2.1. De aquí se asume que $V = A \cup B$ es tal partición.

Se comprueba si la propiedad (v) y (vi) dadas en el teorema 2.1(b) son satisfactorias. Dado que estos involucran a lo sumo tres índices diferentes, esto puede hacerse en tiempo polinomial.

Si (v) y (vi) son satisfactorias, entonces $i(G) = n(G) - \alpha_0(G)$, por teorema 2.1

Si (v) o (vi) no satisfacen, entonces se puede encontrar un conjunto de dominación independiente I de G, mediante $|I| < |M| = n(G) - \alpha_0(G)$, exactamente como en la primera parte de la prueba del teorema 2.1

Entonces, $i(G) < n(G) - \alpha_0(G)$ y la prueba se completa.

□

Teorema 2.3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo sin vértices aislados. Entonces $\gamma(G) \leq \alpha_0(G)$.*

Teorema 2.4. *(Payan et al. 1982) Sea $G = (V, E)$ un grafo sin vértices aislados. Entonces $\gamma(G) = \frac{n(G)}{2}$ si y sólo si toda componente de G es un ciclo C_4 o un grafo corona con $H \circ K_1$ para algún grafo conexo H.*

Corolario 2.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo sin vértices aislados. Entonces $\gamma(G) + i(G) = n(G)$ si y sólo si toda componente de G es un ciclo C_4 o un grafo corona con $H \circ K_1$ para algún grafo conexo H.*

Proof. $(\Rightarrow)$

Por hipótesis $\gamma(G) + i(G) = n(G)$

Por teorema 2.3 se tiene que: $\gamma(G) \leq \alpha_0(G)$ (1)

Luego sumando $i(G)$ en ambos lados de la desigualdad (1), queda que:

$\gamma(G) + i(G) \leq \alpha_0(G) + i(G) = n(G)$ y por hipótesis,

$n(G) = \gamma(G) + i(G) \leq \alpha_0(G) + i(G) = n(G)$

Por lo tanto, $\alpha_0(G) + i(G) = n(G)$. Entonces G no tiene vértices aislados, y por teorema 2.1: $i(G) = \frac{n(G)}{2}$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
\gamma(G) + i(G) &= n(G) \\
\gamma(G) + \frac{n(G)}{2} &= n(G) \\
\gamma(G) &= n(G) - \frac{n(G)}{2} \\
\gamma(G) &= \frac{n(G)}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\gamma(G) = \frac{n(G)}{2}$. Ahora por teorema 2.4 se tiene que todas las componentes de G es un ciclo C_4 o un grafo corona $H \circ K_1$ para algún grafo conexo H.

($\Leftarrow$) Si G es un grafo corona entonces:

por teorema 2.4 se tiene que, $\gamma(G) = \frac{n(G)}{2}$. Ahora por definición de iG) y por la figura 14 , se puede observar que $i(G) = \frac{n(G)}{2}$

Entonces, $\gamma(G) + i(G) = \frac{n(G)}{2} + \frac{n(G)}{2}$

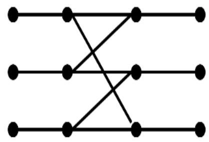


Figura 2.3: Ejemplo de un grafo corona para algún grafo conexo H.

Por lo tanto, $\gamma(G) + i(G) = n(G)$.

O si es un C_4, por la figura 15, se observa que:

$n(G) = 4$

$\gamma(G) = 2$

$i(G) = 2$

Entonces, $\gamma(G) + i(G) = 2 + 2 = 4$

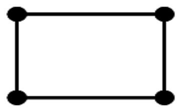


Figura 2.4: Ejemplo de un ciclo C_4.

Por lo tanto, $\gamma(G) + i(G) = n(G)$.

$\square$

CAPÍTULO 3
DISCUSIÓN Y RESULTADOS

En este capítulo se introducen conceptos de nuevos grafos que surjieron al agregar el α_{Bip} como un nuevo parámetro, para el desarrollo de los teoremas adaptados a grafos bipartitos balanceados.

Definición 3.1. *Se define el grafo J como la unión disjuntas de grafos G_1, G_2,G_3,G_4, tal que $\alpha_{Bip}(G) > \gamma(G)$ y $\gamma(G) + \alpha_{Bip}(G) = 2n(G)$.*

se denota: $J = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, donde:

Se define el grafo G_1, como el grafo obtenido al agregarle $n-1$ hojas a cada vértices del grafo $K_{1,1}$, con $n \geq 3$.

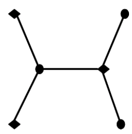


Figura 3.1: Mínima representación del Grafo G_1.

Se define el grafo G_2, como el grafo obtenido por escoger del grafo G_1 un par de vértices de grado uno de clases distintas, y conectar a cada uno de ellos un camino de longitud uno.

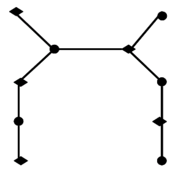


Figura 3.2: Grafo G_2.

Se define el grafo G_3, como el grafo obtenido por escoger del grafo G_1 un par de vértices de grado uno de clases distintas, y conectar a cada uno de ellos un camino de longitud tres.

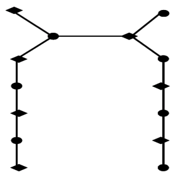


Figura 3.3: Grafo G_3.

Se define el grafo G_4, como el grafo obtenido por escoger del grafo G_1 un par de vértices de grado uno de clases distintas, y conectar a cada uno de ellos un camino de una determinada longitud, agregando una hoja en cada uno de los vértices de dicho camino.

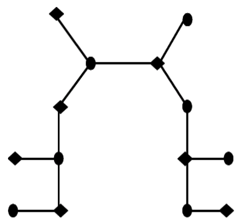


Figura 3.4: Grafo G_4.

Teorema 3.1. *(Payan et al. 1982) Sea $G = (A, B, E)$ un grafo bipartito balanceado sin vértices aislados de orden 2n. Entonces $\gamma(G) = n(G)$ si y sólo si toda componente de G es un ciclo C_4 o un grafo corona para algún grafo bipartito balanceado conexo H.*

Prueba: $(\Rightarrow)$

Se considera cualquier conjunto mínimo $T(G) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_r\}$ la cual cubre todos los vértices de G. Como $|T| \leq n(G)$ se tiene que $\gamma(G) \leq n(G)$. Por lo tanto, $\gamma(G) = n(G)$ si y sólo si el número de dominación de cualquier componente conexa de G es igual a $n_i(G)$, donde $n_i(G)$ denota su número de vértices.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad se puede decir que G es conexo. Como $\gamma(G) = n(G)$, T puede ser un *matching* máximo de $r = n(G)$ lados. Para cada $e_i \in T(G)$ y $e_i = a_ib_i$ con $a_i \in A, b_i \in B$.

Se prueba primero que si $r \geq 3$ entonces, para cada i, a_i o b_i tiene grado uno. Si no existe i tal que a_i y b_i tiene al menos grado 2. Entonces G puede contener uno de los subgrafos bipartitos generadores mostrado en la figura 20. Por lo que se puede encontrar fácilmente un conjunto dominante de cardinalidad $r - 1 < n(G)$, la cual es una contradicción porque por hipótesis se tiene que $\gamma(G) = n(G)$.

Por lo tanto, G es un grafo corona para algún grafo bipartito balanceado conexo H.

Ahora si $r \leq 2$ entonces G es isomorfo a uno de los grafos en la figura 21. Por lo que se puede encontrar fácilmente un conjunto dominante de cardinalidad $r = n(G)$.

Por lo tanto, G es un ciclo C_4 o un grafo corona para algún grafo bipartito balanceado conexo H.

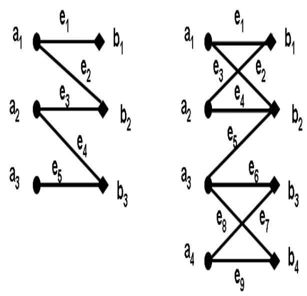


Figura 3.5: Ejemplo de grafos con $\gamma(G) < n(G)$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis si G es el grafo corona entonces dicho grafo puede tener la siguiente forma:

Luego, se toma un subconjunto de vértices de G, es decir, $S \subseteq V(G)$, tal que cada vértice que pertenece a $V - S$ esta unido a (al menos) un vértice de S, por lo que $|S| = n(G)$. Ver figura 22.

Entonces por definición de $\gamma(G)$ se puede concluir que $\gamma(G) = |S| = n(G)$.

Por lo tanto, si G es un grafo corona entonces $\gamma(G) = n(G)$

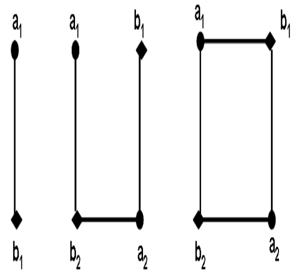


Figura 3.6: Ejemplo de grafos con $\gamma(G) = n(G)$.

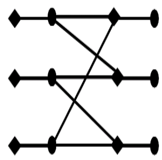


Figura 3.7: Grafo corona de un grafo bipartito balanceado conexo.

Por lo que, $\gamma(G) = n(G)$ si y sólo si G es el grafo corona de algún grafo bipartito conexo H.

O si es un C_4, por la figura 23, se puede observar lo siguiente:

Los vértices x_i, y_j, con $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ son dominantes, entonces $\gamma(G) = 2 = n(G)$

Por lo tanto, $\gamma(G) = n(G)$

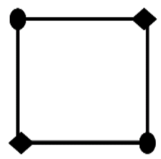


Figura 3.8: Grafo corona de un grafo bipartito C_4.

$\square$

Como inmediato corolario de este último teorema, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.1. *Sea* $G = (A, B, E)$ *un grafo bipartito balanceado sin vértices aislados de orden 2n. Si* $\alpha_{Bip}(G) = \gamma(G) = n(G)$ *entonces* G *es el grafo corona para algún grafo bipartito balanceado conexo* H.

Prueba: (Por reducción al absurdo):

Se supone que no es el grafo corona, entonces por teorema 3.1, se tiene que $\gamma(G) \neq n(G)$, entonces esto contradice la hipótesis que $\alpha_{Bip}(G) = \gamma(G) = n(G)$. Por lo que, G es el grafo corona.

Por lo tanto queda demostrado que: Si $\alpha_{Bip}(G) = \gamma(G) = n(G)$ entonces G es el grafo corona para algún grafo bipartito balanceado conexo H.

□

Teorema 3.2. *Sea* $G = (A, B, E)$ *un grafo bipartito balanceado sin vértices aislados de orden 2n. Entonces* $\gamma(G) + \alpha_{Bip}(G) = 2n(G)$ *si y sólo si* G *es el grafo corona para algún grafo bipartito balanceado conexo* H *o el grafo* J.

Prueba: $(\Rightarrow)$

(i) Si $\alpha_{Bip}(G) = \gamma(G)$, Y por hipótesis $\gamma(G) + \alpha_{Bip}(G) = 2n(G)$ entonces esto quiere decir que $\alpha_{Bip}(G) = \gamma(G) = n(G)$, en consecuencia por corolario 3.1 se puede afirmar que G es un grafo corona para algún grafo bipartito conexo H.

(ii) Si $\alpha_{Bip}(G) \neq \gamma(G)$. Existen las siguientes posibilidades:

  (a) $\alpha_{Bip}(G) < \gamma(G)$. Esta posibilidad no puede ocurrir, pues siempre en todo grafo $\gamma(G) \leq n(G)$, en cambio existen grafos en donde $\alpha_{Bip}(G) > n(G)$.

  (b) $\alpha_{Bip}(G) > \gamma(G)$ y por hipótesis $\gamma(G) + \alpha_{Bip}(G) = 2n(G)$, entonces se puede afirmar que es el grafo J.

Por lo tanto, si $\gamma(G) + \alpha_{Bip}(G) = 2n(G)$ entonces G es el grafo corona para algún grafo bipartito balanceado conexo H o el grafo J.

$(\Leftarrow)$ Si G es el grafo corona de algún grafo bipartito balanceado conexo H.

Se define $T(G)$ como el cobertor de G, es decir, $T(G) = \{h_i : h_i v_i \in E(G), v_i \in G - H, h_i \in H, 1 \leq i \leq n\}$. Se puede observar que $|T(G)| = \gamma(G)$, por definición de $\gamma(G)$.

Por lo que, $|T(G)| = \gamma(G) = n(G)$.

De aquí se obtiene que $\gamma(G) = n(G)$. Ver figura 22.

Ahora, sea $M = \{v_i h_i : v_i \in G - H, h_i \in H, 1 \leq i \leq n\}$. Entonces:

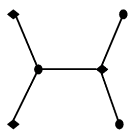
$|M| = \alpha_{Bip}(G) = n(G)$. Ver figura 22.

Por lo tanto,

$$\alpha_{Bip}(G) + \gamma(G) = n(G) + n(G)$$
$$\alpha_{Bip}(G) + \gamma(G) = 2n(G).$$

O si es el grafo J, se tiene que:

(i) Si es el grafo G_1, se puede observar lo siguiente:



$n(G_1) = 3$

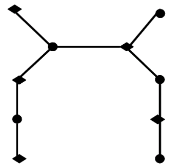
$\gamma(G_1) = 2$

$\alpha_{Bip}(G_1) = 4$

Entonces, $\gamma(G_1) + \alpha_{Bip}(G_1) = 2 + 4 = 6$

Por lo tanto, $\gamma(G_1) + \alpha_{Bip}(G_1) = 2n(G)$.

(ii) Si es el grafo G_2, se puede observar lo siguiente:



$n(G_2) = 5$

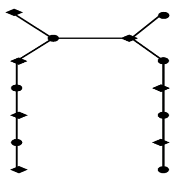
$\gamma(G_2) = 4$

$\alpha_{Bip}(G_2) = 6$

Entonces, $\gamma(G_2) + \alpha_{Bip}(G_2) = 4 + 6 = 10$

Por lo tanto, $\gamma(G_2) + \alpha_{Bip}(G_2) = 2n(G_2)$.

(iii) Si es el grafo G_3, se puede observar lo siguiente:



$n(G_3) = 7$

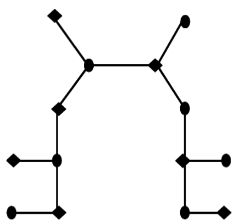
$\gamma(G_3) = 6$

$\alpha_{Bip}(G_3) = 8$

Entonces, $\gamma(G_3) + \alpha_{Bip}(G_3) = 6 + 8 = 14$

Por lo tanto, $\gamma(G_3) + \alpha_{Bip}(G_3) = 2n(G_3)$.

(iv) Si es el grafo G_4, se puede observar lo siguiente:



$n(G_4) = 7$

$\gamma(G_4) = 6$

$\alpha_{Bip}(G_4) = 8$

Entonces, $\gamma(G_4) + \alpha_{Bip}(G_4) = 6 + 8 = 14$

Por lo tanto, $\gamma(G_4) + \alpha_{Bip}(G_4) = 2n(G_4)$.

$\square$

CONCLUSIÓN

Se resume a continuación las conclusiones obtenidas en este trabajo:

Se logró la adaptación de algunos resultados dados por Rautenbach y Volkmann a grafos bipartitos balanceados, usando α_{Bip} como un nuevo parámetro.

Se consiguieron nuevos grafos que cumplen con las condiciones de los resultados adaptados a grafos bipartitos.

BIBLIOGRAFÍA

Benzad M., Chartrand G. and Lesniak-Foster L. 1981. *Graphs and Digraphs.* Wadsworth International Group. USA.

Payan C. y Xuong N.H. 1982. *Domination-balanced graphs.* Graph Theory. 23-32.

Rautenbach Dieter y Volkmann Lutz. 2002. *Independent domination and matchings in graphs.* Discrete Mathematics. 325-330.

Hoja de Metadatos

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 1/6

Título	NÚMERO DE INDEPENDENCIA BALANCEADA Y DOMINACIÓN EN GRAFOS BIPARTITOS BALANCEADOS
Subtítulo	

Autor(es)

Apellidos y Nombres	Código CVLAC / e-mail	
GARCÍA, MARIELA DEL JESÚS	**CVLAC**	**16.397.155**
	e-mail	**mariela-844@hotmail.com**
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Palabras o frases claves:

Grafos
Grafos bipartitos
Teoremas
Corolarios
Pruebas

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 2/6

Líneas y sublíneas de investigación:

Área	Subárea
Ciencias	**Matemáticas**

Resumen (abstract):

En este trabajo de investigación se analizan los resultados dados y demostrados por Rautenbach y Volkmann (2002), los cuales establecen condiciones para que un grafo tenga ciertas propiedades usando parámetros como el número de dominación, número *matching*, orden y número de dominación independiente. A través de una investigación teórica, usando un método analítico descriptivo y haciendo uso de un nuevo parámetro como el número de independencia balanceada, se logra la adaptación de algunos resultados a grafos bipartitos balanceados.

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 3/6

Contribuidores:

Apellidos y Nombres	ROL / Código CVLAC / e-mail	
Brito, Daniel	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [x] JU [ ]
	CVLAC	3.823.342
	e-mail	danieljosb@gmail.com
	e-mail	
Villarroel, Felicia	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	10.203.708
	e-mail	feliciavillarroel@gmail.com
	e-mail	
Marín, Lope	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [x]
	CVLAC	13.923.997
	e-mail	lmata73@gmail.com
	e-mail	
	ROL	CA [ ] AS [ ] TU [ ] JU [ ]
	CVLAC	
	e-mail	
	e-mail	

Fecha de discusión y aprobación:

Año	Mes	Día
2011	08	05

Lenguaje: SPA

Hoja de Metadatos para Tesis y Trabajos de Ascenso – 4/6

Archivo(s):

Nombre de archivo	Tipo MIME
TESIS-Garcíam.DOC	Aplication/PDF

Alcance:

Espacial: **UNIVERSAL** (Opcional)

Temporal: **INTEMPORAL** (Opcional)

Título o Grado asociado con el trabajo: Licenciada en Matemáticas

Nivel Asociado con el Trabajo: LICENCIADA

Área de Estudio: MATEMÁTICAS

Institución(es) que garantiza(n) el Título o grado:

UNIVERSIDAD DE ORIENTE

UNIVERSIDAD DE ORIENTE
CONSEJO UNIVERSITARIO
RECTORADO

CU N° 0975

Cumaná, 04 AGO 2009

Ciudadano
Prof. JESÚS MARTÍNEZ YÉPEZ
Vicerrector Académico
Universidad de Oriente
Su Despacho

Estimado Profesor Martínez:

Cumplo en notificarle que el Consejo Universitario, en Reunión Ordinaria celebrada en Centro de Convenciones de Cantaura, los días 28 y 29 de julio de 2009, conoció el punto de agenda ***"SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN PARA PUBLICAR TODA LA PRODUCCIÓN INTELECTUAL DE LA UNIVERSIDAD DE ORIENTE EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL DE LA UDO, SEGÚN VRAC N° 696/2009".***

Leído el oficio SIBI – 139/2009 de fecha 09-07-2009, suscrita por el Dr. Abul K. Bashirullah, Director de Bibliotecas, este Cuerpo Colegiado decidió, por unanimidad, autorizar la publicación de toda la producción intelectual de la Universidad de Oriente en el Repositorio en cuestión.

Comunicación que hago a usted a los fines consiguientes.

Cordialmente,

JUAN A. BOLAÑOS CURVELO
Secretario

C.C: *Rectora, Vicerrectora Administrativa, Decanos de los Núcleos, Coordinador General de Administración, Director de Personal, Dirección de Finanzas, Dirección de Presupuesto, Contraloría Interna, Consultoría Jurídica, Director de Bibliotecas, Dirección de Publicaciones, Dirección de Computación, Coordinación de Teleinformática, Coordinación General de Postgrado.*

JABC/YGC/maruja

Artículo 41 del REGLAMENTO DE TRABAJO DE PREGRADO (vigente a partir del II Semestre 2009, según comunicación CU-034-2009) : "los Trabajos de Grado son de la exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente, y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quien deberá participarlo previamente al Consejo Universitario para su autorización".

AUTOR 1

TUTOR