UNIVERSIDAD DE ORIENTE
NÚCLEO DE ANZOÁTEGUI
CONSEJO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
POSTGRADO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

DISEÑO DE CONTROLADORES DE ENERGÍA (HAMILTONIANOS) PARA SISTEMAS NO LINEALES CON UN GRADO DE SUBACTUACIÓN: UN ENFOQUE IDA-PBC

Por:
Jenry J. Balebona C

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al grado de Magíster Scientiarium en Automatización e Informática Industrial

Barcelona, julio de 2009

UNIVERSIDAD DE ORIENTE

CONSEJO DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

NÚCLEO DE ANZOÁTEGUI

POSTGRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

DISEÑO DE CONTROLADORES DE ENERGÍA (HAMILTONIANOS) PARA SISTEMAS NO LINEALES CON UN GRADO DE SUBACTUACIÓN: UN ENFOQUE IDA-PBC

JURADO CALIFICADOR

Dr. Miguel Ríos
ASESOR ACADÉMICO

Dr. Félix García
JURADO PRINCIPAL

Dr. José E Rengel
JURADO PRINCIPAL

Barcelona, julio de 2008.

ENUNCIADO DEL ARTÍCULO 44

Los trabajos especiales de grado son de exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente y sólo podrán ser utilizados para otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quién lo participará al Consejo Universitario.

DEDICATORIA

A mí hijo Sebastián y mí hija Jessica que me regalaron un poco de su tiempo, y a mí esposa Alba por su apoyo incondicional

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a todos aquellos profesores que compartieron sus conocimientos en la Maestría de Automatización e Informática Industrial del Dpto. de Postgrado en Ingeniería Eléctrica de la UDO, al: Dr. Félix García (UDO), al Dr. José Eduardo Rengel (UDO), al DEA. Argenis Rondón (IUT-Cumaná), al Ing. Jorge Tohme (UDO), y en especial al Dr. Miguel Ríos Bolívar (ULA) quien me propuso el tema y fue mi asesor, gracias a su paciencia y a la humildad para irradiar el conocimiento.

Balebona Jenry.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

GLOSARIO

θ	Ángulos en grados.
$\nabla_{\Diamond}(\bullet(\Diamond))$	Vector Gradiente, Operador Nabla $\nabla = \partial \bullet (\Diamond) / \partial \Diamond$.
$(\ )_d$	Subíndice del parámetro deseado.
e	Vector estándar euclidiano básico.
g	Aceleración de gravedad (9,8 m/s^2).
$G(q_r)$	Matriz de control.
H(p,q)	Hamiltoniano del sistema.
Hd(p,q)	Hamiltoniano deseado del sistema.
i	Parámetros libres con i = 1,…,n_o. Siendo n_0=n/2(n-1).
IWP	Inertia Wheel Pendulum (Péndulo con Rueda Inercial)
$J_2(q,p)$	Matriz antisimétrica de interconexión generalizada.
Kv	Matriz de Inyección de Amortiguamiento.
M(q)	Matriz de Masa Inercial en lazo abierto.
$M_d(q)$	Matriz de Masa Inercial deseada en lazo cerrado.
m	Número de variables que no se controlan (Subactuadas).
n	Número total de variables del sistema.
p	Coordenadas generalizadas del Momento.
ODE (EDO)	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
PCH	Sistema hamiltoniano controlado por puertos.
PDE (EDP)	Ecuaciones Diferenciales Parciales.
q	Coordenadas generalizadas de la Posición.
R(q)	Matriz de amortiguamiento físico o disipación.
r	Subíndice de la variable subactuada $\in \{1,\ldots,n\}$.
RTAC	Rotational Translational Actuator
TORA	Translational Oscillator with Rotational Actuator
u	Ecuación de control.

$u_{\mathbf{di}}$	Ecuación de control de Inyección de Amortiguamiento.
$u_{\mathbf{es}}$	Ecuación de control de Moldeo de la Energía.
v	Velocidad.
V(q)	Energía potencial en lazo abierto.
$\mathbf{V_d(q)}$	Energía potencial deseada en lazo cerrado.
VTOL	Vertical TakeOff and Landing
z(q)	Parte homogénea de las EDP (PDE).

RESUMEN

El objetivo central de este trabajo es diseñar y evaluar controladores de energía (Hamiltonianos) para sistemas mecánicos no lineales con un grado de subactuación, aplicando el método Interconexión y Asignación de Amortiguamiento basados en Pasividad (IDA-PBC). Para ello se analizan las estructuras hamiltonianas de cinco sistemas mecánicos con un grado de subactuación, para luego diseñar las leyes de Control respectiva a cada sistema.

Se simulan las cinco leyes de control de los cinco sistemas a partir del modelo matemático de su dinámica, y se verifican utilizando las técnicas de simulación el cual fueron desarrolladas con programación numérica (Matlab).

Este trabajo contempla la claridad de cálculos matemáticos además de presenta ciertas correcciones en los resultados que ofrecen algunos artículos escritos hasta ahora sobre el tema. Otro valor agregado es la presentación del diseño el software de simulación que de alguna forma es un trabajo ganado para el lector. Esta comprensión servirá de gran utilidad para seguir aplicando el método a otros sistemas, eléctrico e híbrido.

INTRODUCCIÓN

Las técnicas de control basadas en las estructuras Lagrangiana y Hamiltoniana de los sistemas electromecánicos es una línea de investigación que permite abordar de manera sistemática un conjunto de problemas abiertos como el control de sistemas subactuados y la obtención de funciones de Lyapunov para controladores no lineales.

En este trabajo se analizan las estructuras hamiltonianas de algunos sistemas mecánicos con un grado de subactuación, usando el método de Control por Interconexión y Asignación de Amortiguamiento Basados en Pasividad (IDA-PBC).

Los sistemas estudiados en el presente trabajo son los siguientes: el Péndulo con Rueda Inercial [1], el Control del Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA) [2], el Sistema Bola en la Viga [1], el del péndulo sobre un carro móvil [3], y el del despegue y aterrizaje vertical de una aeronave (*Vertical takeoff and landing (VTOL) aircraft*) [3]. La investigación se centrará en el interesante, y no trivial, problema de síntesis de controladores para sistemas con un grado de subactuación aplicando el método IDA-PBC.

Cabe destacar que a partir del modelo matemático de la dinámica de los cinco sistemas considerados, se les aplicará la metodología IDA-PBC para hallar la ecuación de control, la cual será verificada utilizando simulación con programación numérica (Matlab).

A través de resultados gráficos se ilustra la estabilización de los sistemas estudiados, que no es más que la verificación de la ecuación de control hallada con el método aplicado a los sistemas dados.

CAPITULO I: ACERCA DEL PROBLEMA

1.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN.

Una interesante y compacta definición de sistemas de Euler–Lagrange (EL) fue introducida en el año 1964 por Landau & Lifchitz, mediante el principio de *mínima acción (o de Hamilton).* En virtud de este principio, todo sistema mecánico está caracterizado por una función de las coordenadas generalizadas, sus derivadas, y el tiempo.

En 1998**,** Ortega, *et al.* [4], abordaron el tema de pasividad en sistemas Lagrangianos.

Luego en el año 2002, Ortega, *et al.* [1] introduce una metodología de diseño de controladores, llamada IDA-PBC aplicada a la estabilización de sistemas mecánicos subactuados basados físicamente en el principio de moldeo de energía (*energy shaping*) e inyección de amortiguamiento (*damping injection*).

Otras técnicas han sido reportadas después del 2002 como por ejemplo los sistemas hamiltonianos y lagrangianos analizados desde el punto de vista de puertos-controlados, más recientemente, por Ortega, *et al.* [1].

Mas reciente, Acosta, *et al*. [3] y Morillo, *et al*. [2] publican en el 2005 y 2008, respectivamente, el método de IDA-PBC aplicado a sistemas mecánicos no lineales con un grado de subactuación, estas dos publicaciones se analizan en el presente trabajo.

1.2-.PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Si bien, existen artículos que plantean la metodología IDA-PBC, en ellos no se desarrolla a cabalidad los modelos, ni la metodología, igualmente no presentan el software con la cual se realiza las simulaciones. Por otra parte, la gran mayoría de artículo presenta cierta incongruencia, presumiblemente por errores de imprenta.

El propósito de este trabajo es, realizar el análisis matemático de los modelos dinámicos de los sistemas y de la metodología IDA-PBC con la ayuda de un software simbólico (Mathematica® y/o Maple®), simularlos con un software numérico (MatLab®) y evaluarlos desde el punto de vista de su desempeño.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo General.

Diseñar controladores de energía (Hamiltonianos) para sistemas mecánicos no lineales con un grado de subactuación, aplicando el método IDA-PBC.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Analizar el método de interconexión y asignación de amortiguamiento basado en pasividad, desde el punto de vista físico y matemático, para diferentes sistemas mecánicos con un grado de subactuación.
- Diseñar la Ley de control para cada uno de los sistemas, en particular.
- Desarrollar los programas (software) de simulación, a través del Matlab, de los ejemplos expuestos en los artículos Acosta *et al* [3]. y Ortega, *et al*. [1].
- Evaluar los resultados gráficos obtenidos de la programación numérica.

1.4. DELIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN.

En esta investigación los análisis se realizan a sistemas mecánicos con un grado de subactuación, debido a lo complejo del diseño para más grados de subactuación. Se escogen los sistemas mecánicos para simplificar el análisis hamiltoniano de sus dinámicas asociadas.

También, es importante reseñar, las delimitaciones que presenta cada sistema a ser estudiado, en cuanto a la forma de los elementos de la matriz de inercia, es decir, pueden ser constantes, dependientes de la variable actuada o de la variable subactuada. En cada caso el método IDA-PBC, a utilizar, varía ligeramente.

Para futuras investigaciones, éste trabajo será un punto de referencia, que facilitará la comprensión del tema.

1.5. METODOLOGÍA.

Básicamente la metodología utilizada consta de un análisis del método IDA-PBC y expuestos en la bibliografía de este trabajo, lo cual conlleva a las aplicaciones del método IDA-PBC para diseñar las leyes de control, simular y evaluar resultados.

El procedimiento se puede resumir de la siguiente manera: Análisis de bibliografía haciendo consideraciones físicas y matemáticas, específicamente el método empleado por los autores mencionados. Este análisis abarca el método IDA-PBC de cinco modelos de sistemas dinámicos mecánicos no lineales con un grado de subactuación, los cuales se denominan como sigue: el Sistema del Péndulo con Rueda Inercial [1], el Control del Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA) [5], el Sistema Bola en la Viga [1], el del péndulo sobre un carro móvil [3], y el del despegue y aterrizaje vertical de una aeronave (*Vertical takeoff and landing*

(VTOL) aircraft) [3]. A cada uno de ellos se les aplica el método IDA-PBC de acuerdo a la forma en que está conformada la matriz de inercia, para finalmente obtener la ley de control específica para cada caso.

Una vez obtenidas las ecuaciones de control, se diseña un programa (software) numérico, en la plataforma Matlab® (MATrix LABoratory), que es un paquete interactivo basado en el calculo matricial para ciencia e ingeniería, el cual emplea las funciones **ODE** (Ordinary Differential Equations) que resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (**EDO**), con el objetivo de simular el comportamiento del sistema con el control diseñado.

Las simulaciones de las ecuaciones de control, aplicadas a las dinámicas de los sistemas mecánicos con un grado de subactuación, fueron realizadas con el software Matlab® versión 6.5. Los programas se componen de un programa principal y una función programa "function". El programa principal llama a través de una función ODE (Ordinary Diferencial Equation) al programa "function" el cual ejecuta la simulación correspondiente para resolver, con diferentes iteraciones, el modelo presentado. Un diagrama esquemático del software diseñado se presenta en la figura No. 01.

De la comparación de los resultados de la simulación con algunos artículos publicados al respecto se puede validar la metodología y el diseño del software obtenido, por ejemplo los resultados obtenidos en "El péndulo sobre el carro móvil", (Capitulo VI) y los resultados obtenidos por J. Acosta en su artículo [3], evidencian la misma respuesta.

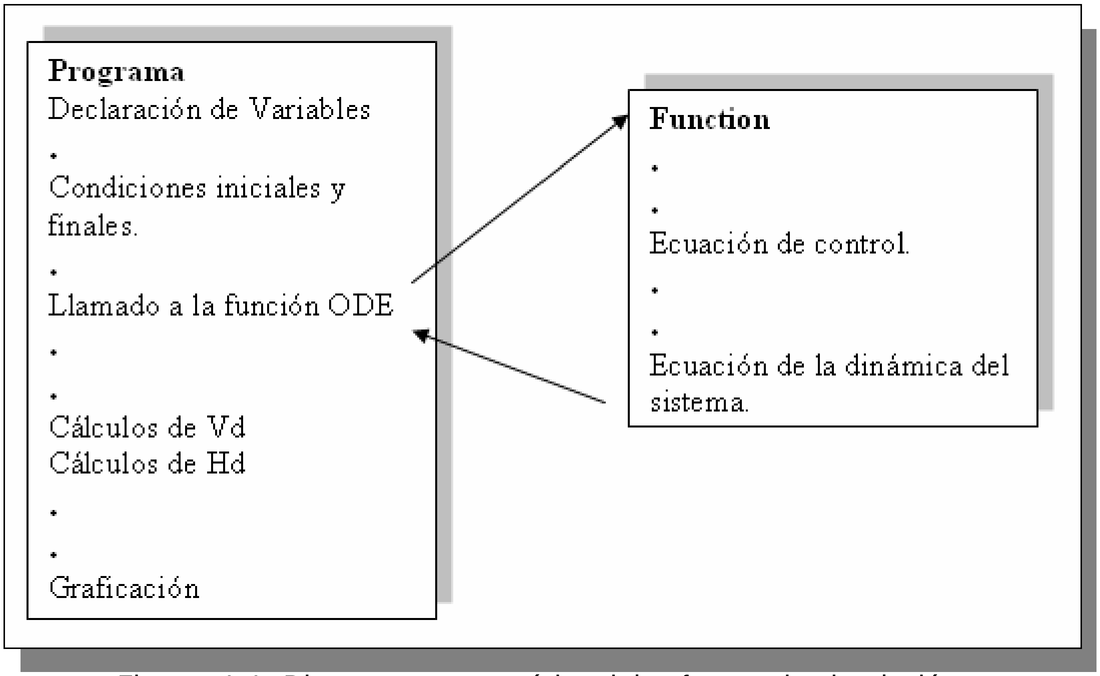

Figura. 1.1. Diagrama esquemático del software de simulación.

La función ODE utilizada del Matlab es ODE 23 la cual se basa en iteraciones de Runge-Kutta, y suele ser más eficiente que el ODE45.

Los cálculos teóricos para deducir las ecuaciones de control están especificados en la columna de “Capítulos” de la Tabla 1.1 y los diseños de los programas (Código Fuente), que generan las simulaciones, se encuentran en los anexos (Tabla 1.1).

Tabla 1.1. Sistemas

Sistemas	Capitulo	Anexo
Rueda Inercial	III	01
TORA	IV	02
Bola en la Viga	V	03
Péndulo sobre un carro móvil	VI	04
VTOL aircraft	VII	05

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO

El método de interconexión y asignación de amortiguamiento basado en pasividad de sistemas mecánicos con un grado de subactuación (IDA-PBC *Interconnection and damping assignment passivity–based control of mechanical systems with underactuation degree one*) es una variante de los controladores basados en pasividad.

El objetivo del IDA-PBC es conseguir que el sistema con estructura hamiltoniana se comporte, en lazo cerrado, como un sistema equivalente con un determinado hamiltoniano deseado, pudiéndose moldear su energía cinética y/o potencial.

Se seleccionaron, en este trabajo, sistemas con un grado de subactuación ya que ellos permiten que las ecuaciones en derivadas parciales (EDP), presentes en la energía cinética, se reduzcan a ecuaciones en derivadas ordinarias (EDO).

Entendiéndose por sistemas con un grado de subactuación a todos aquellos sistemas cuya diferencia entre el *número de grados de libertad* (n) y el *número de variables controladas* (m) es la unidad, es decir ($n - m = 1$).

Los sistemas dinámicos pueden venir expresados a través de su energía cinética y energía potencial (hamiltoniano o lagrangiana), por ecuaciones en derivadas ordinarias (Euler-Lagrange) o por su sistema hamiltoniano en lazo abierto. Ambas representaciones matemáticas aceptan métodos diferentes, en cuanto a cálculo, en la aplicación del método IDA-PBC.

2.1. ECUACIONES EULER-LAGRANGE.

Si se tiene la lagrangiana del sistema se puede hallar las ecuaciones de la dinámica del sistema a través de la siguiente ecuación, que en su modo simplificado, viene dada por:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}=\tau_i \qquad i=1,2,\ldots,n \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{L}$ = es la lagrangiana del sistema, $\tau_i=\begin{cases}0 & \text{si es variable subactuada}\\ \tau & \text{si es variable actuada}\end{cases}$ y q_i = coordenadas generalizadas de posición.

2.2. SISTEMA HAMILTONIANO EN LAZO ABIERTO.

Si se tiene el hamiltoniano del sistema se puede hallar las ecuaciones de la dinámica a través de la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_q H\\ \nabla_p H\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G\end{bmatrix}u \tag{2.2}$$

siendo q_i las coordenadas generalizadas de posición, p_i las coordenadas generalizadas de momentum, In es la matriz identidad de orden n×n y G es la matriz de control, que viene representada por el vector estándar euclidiano en la posición de las variables actuadas y

$$\dot{q}_1=\frac{\partial H(p,q)}{\partial p_1} \qquad \dot{q}_2=\frac{\partial H(p,q)}{\partial p_2} \qquad \dot{p}_1=-\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_1} \qquad \dot{p}_2=-\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_2}+u \tag{2.3}$$

Esta forma ayudará a evaluar, en el software (Matlab®), el modelo a simular y a la representación matemática de un modelo afín a convenir.

2.3. ACOPLE DE ECUACIONES

Para el acople de ecuaciones existen dos clases de representación del sistemas dinámicos mecánicos, de las cuales se seleccionará una de ellos, a los fines de moldear el sistema dinámico. La primera clase (Clase I) será del tipo sistema hamiltoniano en lazo abierto (2.2) como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u \qquad (2.4)$$

y la segunda clase (Clase II) tendrá la siguiente forma:

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1}(q_r) \cdot p \\ \dot{p} = s(q_r) + G(q_r) \cdot u \end{cases} \qquad (2.5)$$

El término $\left|M(q)\right| > 0$ se llama *matriz de masa inercial*, que en el caso de un sistema con un grado de libertad M(qr) se reduce a un escalar, la masa, siendo su inversa M^{-1}. La Matriz de control es $G(q_r) \in \Re^{n \times m}$, que en sistemas subactuados no es de rango completo, rango$\{G\}$ = $m < n$.

El subíndice r**,** de la expresión q_r**,** es un conjunto cuyo valor, para sistemas con un grado de subactuación es único, estando comprendido en el conjunto $\{1,\ldots,n_o\}$ y denota el elemento referencia o subactuado, es decir, si el elemento subactuado es q_3 entonces r=3. Por su parte, el parámetro $\mathbf{u} \in \Re^m$ representa las entradas de control.

Para este caso las matrices $M^{-1}(q_r)$, $G(q_r)$ y $s(q_r)$ dependen solamente de la coordenada q_r o coordenada subactuada.

En general, los sistemas mecánicos subactuados presentan un hamiltoniano o energía total, dado por:

$$H(p,q)=\frac{1}{2}\cdot p^{T}\cdot M^{-1}(q)\cdot p+V(q) \tag{2.6}$$

siendo $q \in \Re^{n}$ y $p \in \Re^{n}$ las coordenadas generalizadas de la *Posición* y el *Momento* respectivamente**,** V(q) la función de *energía potencial*, y el término $(1/2)p^{T}M^{-1}(q_{r})p$ su *energía cinética*.

El hamiltoniano de la ecuación (2.6), que presenta el sistema dinámico, deberá acoplarse a un *hamiltoniano deseado* de la forma:

$$H_{d}(p,q)=\frac{1}{2}p^{T}M_{d}^{-1}(q)p+V_{d}(q) \tag{2.7}$$

donde las variables con subíndice “d” indican el *parámetro deseado*.

Para el sistema afín deseado**,** el caso más general, viene dado por las siguientes características:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{bmatrix}=\left[J_{d}(q,p)-R_{d}(q)\right]\begin{bmatrix}\nabla qH_{d}\\ \nabla pH_{d}\end{bmatrix} \tag{2.8}$$

donde Jd es la matriz de interconexión deseada cumple con ser antisimétrica ($J_{d}=-J_{d}^{T}$) y la matriz de amortiguamiento físico o de disipación $R_{d}=R_{d}^{T}\geq 0$,

de tal forma que el gradiente del hamiltoniano estará definido por:

$$\nabla_{q}H_{d}(p,q)=\frac{\partial H_{d}(p,q)}{\partial q} \tag{2.9}$$

siendo la representación de los parámetros Jd y Rd las siguientes:

$$J_{d}(q_{r},p)=\begin{bmatrix}0 & M^{-1}(q)M_{d}(q_{r})\\ -M_{d}(q)\cdot M^{-1}(q) & J_{2}(q,p)\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

y

$$R_d(qr,p)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & G\cdot Kv\cdot G^T\end{bmatrix} \tag{2.11}$$

donde Kv es la Matriz de Inyección de Amortiguamiento (Damping Injection) y $J_2(qr,p) \in \Re^{n\times n}$ es la Matriz antisimétrica de interconexión generalizada, mientras que Rd(qr,p) es la Matriz de disipación.

Reemplazando (2.10) y (2.11) en (2.8) se obtiene el siguiente modelo deseado:

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & M^{-1}(q)M_d(q)\\ -M_d(q)M^{-1}(q) & J_2(q,p)-G(q)\cdot Kv\cdot G^T(q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_q H_d\\ \nabla_p H_d\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

2.3.1 Clase I.

Si el sistema presenta una dinámica de Clase I (2.4) se iguala ésta al modelo deseado ecuación (2.12), donde se tiene**:**

$$\begin{bmatrix}0 & +In\\ -In & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_q H\\ \nabla_p H\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & M^{-1}(q)M_d(q)\\ -M_d(q)M^{-1}(q) & J_2(q,p)-G(q)\cdot Kv\cdot G^T(q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_q H_d\\ \nabla_p H_d\end{bmatrix}$$

desarrollando

$$\begin{bmatrix}In\cdot\nabla_p H\\ -In\cdot\nabla_q H\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ G\cdot u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M^{-1}(q)M_d(q)\nabla_p H_d\\ -M_d(q)M^{-1}(q)\nabla_q H_d+J_2(q,p)\nabla_p H_d-G(q)\cdot Kv\cdot G^T(q)\nabla_p H_d\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\nabla_p H\\ -\nabla_q H+Gu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M^{-1}(q)M_d(q)\nabla_p H_d\\ -M_d(q)M^{-1}(q)\nabla_q H_d+J_2(q,p)\nabla_p H_d-G(q)KvG^T(q)\nabla_p H_d\end{bmatrix}$$

igualando la filas del primer miembro con la filas del segundo miembro

$$\nabla_p H = M^{-1}(q) M_d(q) \nabla_p H_d \tag{2.13}$$

$$G \cdot u = \nabla_q H - M_d(q) M^{-1}(q) \nabla_q H_d + J_2(q,p) \nabla_p H_d - G(q) K v G^T(q) \nabla_p H_d \tag{2.14}$$

Despejando **u** y considerando que **u = u** $\mathbf{u} = \mathbf{u_{es}} + \mathbf{u_{di}}$, donde u_{es} es el control debido al Moldeo de la Energía (*Energy Shaping*) y u_{di} el control debido a la Inyección de Amortiguamiento (*Damping Injection*). Es importante observar que para despejar "u" hay que hallar la inversa de G(qr), la cual es una matriz columna de rango completo y no una matriz cuadrada, por tanto su inversa vendrá expresada por $\left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T$ tal que $\left[\left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T\right] \cdot G = 1$, para lo cual se tiene entonces que:

$$u_{es} = \left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T \cdot \left(\nabla_q H - M_d(q) M^{-1}(q) \nabla_q H_d + J_2(q,p) \nabla_p H_d\right) \tag{2.15}$$

$$u_{di} = -Kv \cdot G^T \cdot \nabla_p H_d\ . \tag{2.16}$$

Sustituyendo (2.6) en (2.15) y sabiendo que $\nabla_p H_d(p,q) = M_d^{-1}(q) \cdot p$, las ecuaciones de control son equivalentes a:

$$u_{es} = \left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T \cdot \left(\frac{1}{2}\nabla_q\left(p^T M^{-1} p\right) - \frac{1}{2} M_d M^{-1} \nabla_q\left(p^T M_d^{-1} p\right) + J_2 M_d^{-1} p + \nabla_q V - M_d M^{-1} \nabla_q V_d\right) \tag{2.17}$$

$$u_{di} = -Kv G^T(q_r) \nabla_p H_d \tag{2.18}$$

Puesto que para la estabilización del sistema, la energía cinética y la energía potencial deben tender a cero, se puede encontrar dos ecuaciones de restricción a partir de la ecuación (2.17). Luego, igualando la energía cinética y la energía potencial a cero se obtiene:

$$G^{\perp}\left(\nabla_q \cdot \left(p^T M^{-1} p\right) - M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q\left(p^T \cdot M_d^{-1} \cdot p\right) + 2 \cdot J_2 \cdot M_d^{-1} \cdot p\right) = 0 \tag{2.19}$$

$$G^{\perp}\left(\nabla_q \cdot V - M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q \cdot V_d\right) = 0 \tag{2.20}$$

donde $\mathbf{G}^{\perp}$ es un anulador izquierdo de rango máximo de G, tal que, $G^{\perp}G = 0$, esto porque G no es invertible, sino a lo sumo de rango por columna máximo y por tanto el control u_{es} únicamente ejerce influencia sobre los términos en el espacio imagen del operador G.

Con las ecuaciones (2.19) y (2.20) se moldea la energía cinética y la energía potencial del sistema, respectivamente.

La ecuación (2.19) es un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) no lineales con incógnitas M_d y V_d, y con J_2 como parámetro libre, mientras que p es una coordenada independiente.

Existen diferentes formas en las que vienen expresados los elementos que constituyen la matriz de masa inercial del sistema, en donde se observa lo siguiente:

- En el caso de que la matriz de masa inercial dependa sólo de las coordenadas actuadas o sea una matriz constante, se puede escoger la matriz de masa inercial deseada (Md) como una matriz constante y la matriz de interconexión (J_2) como nula, luego los términos $G^{\perp}\left[\nabla q\left(p^T M^{-1} \cdot p\right)\right]$ y $G^{\perp}\left[\nabla q\left(p^T M_d^{-1} \cdot p\right)\right]$ son nulos, concentrando el moldeado, exclusivamente, de la energía potencial; de tal forma que la EDP a resolver será únicamente a través de la ecuación (2.20):

- Para aquellos sistemas que presentan en la matriz de masa inercial términos que dependan solamente de la variables subactuadas se puede deducir la siguiente hipótesis de moldeo reducido de energía:

$$G^T = e_{k,}^T \quad \Rightarrow \nabla q M_{ij} = e_k^T \frac{dM_{ij}}{d_{q_k}}, \quad \Rightarrow \nabla q\left(M_d\right)_{ij} = e_k^T \frac{d\left(M_d\right)_{ij}}{d_{q_k}}$$

Se denota con ***k*** el índice de la coordenada no actuada, donde e_k es el vector euclidiano de dimensione "n", y cuyos elementos son todos nulos excepto el que ocupa la posición *k*, que presenta el valor de la unidad. De esa hipótesis se comprueba la siguiente expresión.

$$\nabla_{q_k}\left(e_k^T M_d\right)=\frac{\left[M_d\left(\nabla_{q_k} M^{-1}\right)M_d\right]_k}{\left[M_d M^{-1}\right]_{kk}} \tag{2.21}$$

\

En el caso en el que la matriz de masa inercial (**M**) esté compuesta de elementos constantes o de variables actuadas, no se podrá aplicar la ecuación (2.21), ya que *k* es el subíndice que representa la coordenada no actuada y por tanto $\nabla_{q_k} M^{-1}$=0.

2.3.2 Clase II.

Para los sistemas que presenten ecuaciones de su dinámica clase II se estudian los sistemas dinámicos con estructura de sistema afín dados por el acople de la ecuación (2.5) y (2.12), como el siguiente:

$$\begin{cases}\dot{q}=M^{-1}(q_r)\cdot p\\ \dot{p}=s(q_r)+G(q_r)\cdot u\end{cases}$$

donde se puede observar que tanto M como S y G son funciones de qr la variable subactuada.

Igualando la estructura afín (2.5) con la ecuación (2.12):

$$\begin{bmatrix} M^{-1}(q_r)\cdot p \\ s(q_r)+G(q_r)\cdot u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & M^{-1}(q_r)M_d(q_r) \\ -M_d(q_r)M^{-1}(q_r) & J_2(q_r,p)-G\cdot Kv\cdot G^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_q H_d\\ \nabla_p H_d\end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Igualando la primera fila, de ambos miembros, de la ecuación (2.22).

$$M^{-1}(q_r)\cdot p = M^{-1}(q_r)M_d(q_r)\nabla_p H_d\,, \quad \text{eliminando } M^{-1}, \Rightarrow \quad p = M_d(q_r)\nabla_p H_d$$

$$\text{despejando } \nabla_p H_d = M_d^{-1}(q_r)\cdot p\,. \tag{2.23}$$

Igualando la segunda fila, de ambos miembros de la ecuación (2.22),

$$\begin{aligned} & s(q_r)+G(q_r)\cdot u = \\ & -M_d(q_r)M^{-1}(q_r)\cdot\nabla_q H_d + \left(J_2(q_r,p)-G(q_r)\cdot Kv\cdot G^T(q_r)\right)\nabla_p H_d \end{aligned} \tag{2.24}$$

sustituyendo (2.23) en (2.24)

$$\begin{aligned} & s(q_r)+G(q_r)u = \\ & -M_d(q_r)M^{-1}(q_r)\cdot\nabla_q H_d + J_2(q_r,p)M_d^{-1}(q_r)p - G(q_r)KvG^T(q_r)M_d^{-1}(q_r)p \end{aligned}$$

despejando **u**, se obtiene la ecuación de control siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = & \left(G^T\cdot G\right)^{-1}\cdot G^T\cdot \\ & \left[M_d(q_r)\cdot M^{-1}(q_r)\cdot\nabla_q H_d + J_2(q_r,p)\cdot M_d^{-1}(q_r)\cdot p - s(q_r)\right] \\ & - Kv\cdot G^T(q_r)\cdot M_d^{-1}(q_r)\cdot p \end{aligned} \tag{2.25}$$

Observándose que la ecuación de control **u** presenta dos partes tal que: $u = u_{es} + u_{di}$, donde u_{es} es el control debido al Moldeo de la Energía (*Energy Shaping*) y u_{di} el control debido a la Inyección de Amortiguamiento (*Damping Injection*).

$$\begin{aligned} u_{es} = & \left(G^T\cdot G\right)^{-1}\cdot G^T\cdot \\ & \left[M_d(q_r)M^{-1}(q_r)\cdot\nabla_q H_d + J_2(q_r,p)M_d^{-1}(q_r)\cdot p - s(q_r)\right] \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$u_{di} = -Kv\cdot G^T(q_r)\cdot M_d^{-1}(q_r)\cdot p$$

Sustituyendo la ecuación (2.7), en la ecuación anterior:

$$u_{es} = \left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T \left\{ \begin{array}{l} -M_d(q_r) M^{-1}(q_r) \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla_q \left(p^T M_d^{-1} p \right) + \nabla_q V_d(q) \right) \\ +J_2(q_r, p) M_d^{-1}(q_r) \cdot p - s(q_r) \end{array} \right\}$$

$$u_{di} = -K_v \cdot G^T(q_r) M_d^{-1}(q_r) \cdot p$$

$$u_{es} = \left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{2} M_d(q_r) M^{-1}(q_r) \cdot \nabla_q \left(p^T M_d^{-1} p \right) \\ -M_d(q_r) M^{-1}(q_r) \cdot \nabla_q V_d(q) + J_2(q_r, p) M_d^{-1}(q_r) \cdot p - s(q_r) \end{array} \right) \right\} \quad (2.27)$$

$$u_{di} = -K_v \cdot G^T(q_r) \cdot M_d^{-1}(q_r) \cdot p$$

Por otra parte si se define, lo siguiente:

$$\frac{\partial M_d^{-1}(q_r)}{\partial q_1} = -M_d^{-1}(q_r) \frac{\partial M_d(q_r)}{\partial q_r} M_d^{-1}(q_r). \quad (2.28)$$

Se tiene entonces de la ecuación de control (2.27) y con la ecuación (2.28) el moldeo de energía potencial y cinética, es:

$$\begin{array}{l} G^{\perp}\left[s(q_r) + M_d(q_r) M^{-1}(q_r) \cdot \nabla_q V_d(q) \right] = 0 \\ G^{\perp}\left[\frac{1}{2} M_d(q_r) \cdot M^{-1}(q_r) \cdot e_r \cdot \tilde{p}^T \left[\frac{\partial M_d(q_r)}{\partial q_r} \cdot M_d^{-1}(q_r) \right] + J_2(q_r, p) \right] \cdot \tilde{p} = 0 \end{array} \quad (2.29)$$

donde $\tilde{p} = M_d^{-1}(q_r) \cdot p$ y $\tilde{p}^T = M_d^{-1}(q_r) \cdot p^T$

2.3.2.1. Gradiente del Hamiltoniano con respecto a q, ($\nabla q H_d$)

De la ecuación (2.7), $H_d(p,q)=\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p+V_d(q)$, se obtiene el gradiente del hamiltoniano siguiente:

$$\nabla q H_d(p,q)=\frac{1}{2}p^T\frac{\partial M_d^{-1}(q_1)}{\partial q_r}p+\nabla q Vd(q) \tag{2.30}$$

donde $\nabla q Vd(q)$ es el gradiente de la energía potencial deseada y el término $\frac{1}{2}p^T\frac{\partial M_d^{-1}(q_1)}{\partial q_r}p$, es el gradiente de la energía cinética deseada.

Para el caso particular de un sistema $\in \{1,\ldots, n\}$ con r = 1, de la (2.28) y (2.30) se tiene que:

$$\nabla_q H_d(p,q)=\begin{bmatrix}\nabla_{q_1}H_d(p,q)\\ \nabla_{q_2}H_d(p,q)\\ \vdots\\ \nabla_{q_n}H_d(p,q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q_r)\frac{\partial M_d(q_r)}{\partial q_1}M_d^{-1}(q_r)p\ +\ \nabla_{q_1}Vd(q)\\ 0\ +\ \nabla_{q_2}Vd(q)\\ \vdots\\ 0\ +\ \nabla_{q_n}Vd(q)\end{bmatrix}$$

$$\nabla_q H_d(p,q)=\begin{bmatrix}\nabla_{q_1}H_d(p,q)\\ \nabla_{q_2}H_d(p,q)\\ \vdots\\ \nabla_{q_n}H_d(p,q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q_r)\frac{\partial M_d(q_r)}{\partial q_1}M_d^{-1}(q_r)p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}\nabla_{q_1}Vd(q)\\ \nabla_{q_2}Vd(q)\\ \vdots\\ \nabla_{q_n}Vd(q)\end{bmatrix}}_{\nabla_q Vd(q)}$$

$$\nabla_q H_d(p,q)=-\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q_1)\frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1}M_d^{-1}(q_1)p\cdot\mathbf{e}_1+\nabla_q Vd(q) \tag{2.31}$$

donde e_1 el *vector estándar euclidiano básico* es:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Posición} \quad r=1 \\ \\ \\ \leftarrow \text{Posición} \quad n \end{matrix}$$

sustituyendo (2.31) en (2.27)

$$u = \left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T \cdot M_d(q_r) M^{-1}(q_r) \left(-\frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q_1) \frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1} M_d^{-1}(q_1) p \cdot e_1 + \begin{bmatrix} \nabla_{q1} Vd(q_r) \\ \nabla_{q2} Vd(q_r) \\ \vdots \\ \nabla_{qn} Vd(q_r) \end{bmatrix} \right)$$
$$+ G^{\perp}(q_r) J_2(q_r, p) M_d^{-1}(q_r) \cdot p$$

$$u_{es} = \left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T \cdot M_d(q_r) M^{-1}(q_r) \cdot e_1 \cdot \frac{1}{2} p^T M_d^{-1}(q_1) \frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1} M_d^{-1}(q_1) p$$
$$\left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T \left[M_d(q_r) M^{-1}(q_r) \begin{bmatrix} \nabla_{q1} Vd(q_r) \\ \nabla_{q2} Vd(q_r) \\ \vdots \\ \nabla_{qn} Vd(q_r) \end{bmatrix} + J_2(q_r, p) M_d^{-1}(q_r) \cdot p \right] \tag{2.32}$$
$$u_{di} = -Kv \cdot G^T(q_r) M_d^{-1}(q_r) \cdot p$$

donde la Matriz de Interconexión se define como:

$$J_2(q_r, p) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{p}^T \alpha_1 & -\tilde{p}^T \alpha_2 & \cdots & \tilde{p}^T \alpha_{n-1} \\ -\tilde{p}^T \alpha_1 & 0 & \tilde{p}^T \alpha_n & \cdots & \tilde{p}^T \alpha_{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -\tilde{p}^T \alpha_{n-1} & -\tilde{p}^T \alpha_{2n-3} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.33}$$

Por definición $\tilde{p} \overset{\Delta}{=} M_d^{-1} p$, siendo la funciones vectoriales $\alpha_i(q_r) \in \Re^n$ parámetros libres con i = 1,…,n_o., donde se define $\mathbf{no} \overset{\Delta}{=} \mathbf{(n/2)(n-1)}$.

2.3.2.2. Construcción del término $G^{\perp}(q_r)J_2(q_r,p)$

Se parte de que

$$G^{\perp}(q_r)\cdot J_2(q_r,p)=\tilde{p}^T\cdot\Im(q_r)\cdot A^T(q_r) \tag{2.34}$$

siendo $A^T(q_r)$ por definición:

$$A(q_r)\overset{\Delta}{=}-\left[W_1\left(G^{\perp}(q_r)\right)^T \,\vdots\, W_2\left(G^{\perp}(q_r)\right)^T \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, W_{no}\left(G^{\perp}(q_r)\right)^T\right] \tag{2.35}$$

donde $\mathbf{W_i} \in \Re^{nxn}$, i = 1,…,n. y $A(q_r)\in\Re^{n\times no}$, y por definición $W^{kl}\overset{\Delta}{=}F^{kl}-\left(F^{kl}\right)^T$, con la siguiente notación del conjunto de **W**:

$$\mathbf{W_1}= W^{12},\ \mathbf{W_2}= W^{13},\ldots,\ \mathbf{W_n}= W^{1n},\ \ldots,\ \mathbf{W_{no}}= W^{(n_o-1)n_o}$$

Primero se construye n^2 matrices de dimensión n × n, las cuales se denotan como: $F^{kl}=\left\{f_{ij}^{kl}\right\}, k,l\in\{1,2...,n\}$, con la siguiente regla:

$$\boldsymbol{f_{ij}^{kl}}=\begin{cases}\mathbf{1} & si\ \ (\boldsymbol{j>i}\ \wedge\ \boldsymbol{i=k}\ \wedge\ \boldsymbol{j=l})\\ \mathbf{0} & otros\ \ casos\end{cases} \tag{2.36}$$

Observándose que n_o matrices son diferentes de cero.

Como primer ejemplo se tiene para el caso de un sistema con dos grados de libertad n=2 ⇒ n_o=(n/2)(n - 1)= (2/2)(2 - 1) = 1, se tiene que:

$$W_1= W^{12} \text{ y } W^{12} = F^{12} - (F^{12})^T$$

$$F^{12}=\begin{bmatrix} f_{11}^{12} & f_{12}^{12}\\ f_{21}^{12} & f_{31}^{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \left(F^{12}\right)^T=\begin{bmatrix} f_{11}^{12} & f_{21}^{12}\\ f_{12}^{12} & f_{22}^{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W_1}=W^{12}=F^{12}-\left(F^{12}\right)^T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \tag{2.37}$$

Un segundo ejemplo es el caso para un sistema con tres grados de libertad n=3 $\Rightarrow$ n_o=(n/2)(n - 1)= (3/2)(3 - 1) = **3**, se tiene que:

$$W_1 = W^{12},\ W_2 = W^{13},\ W_3 = W^{23} \qquad y$$

$$W^{12}=F^{12} - (F^{12})^T,\quad W^{13}=F^{13} - (F^{13})^T,\quad W^{23}=F^{23} - (F^{23})^T$$

$$F^{12} = \begin{bmatrix} f_{11}^{12} & f_{12}^{12} & f_{13}^{12} \\ f_{21}^{12} & f_{22}^{12} & f_{23}^{12} \\ f_{31}^{12} & f_{32}^{12} & f_{33}^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(F^{12}\right)^T = \begin{bmatrix} f_{11}^{12} & f_{21}^{12} & f_{31}^{12} \\ f_{12}^{12} & f_{22}^{12} & f_{32}^{12} \\ f_{13}^{12} & f_{23}^{12} & f_{33}^{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W_1} = \mathrm{W}^{12} = \mathrm{F}^{12} - \left(\mathrm{F}^{12}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.38)$$

$$F^{13} = \begin{bmatrix} f_{11}^{13} & f_{12}^{13} & f_{13}^{13} \\ f_{21}^{13} & f_{22}^{13} & f_{23}^{13} \\ f_{31}^{13} & f_{32}^{13} & f_{33}^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(F^{13}\right)^T = \begin{bmatrix} f_{11}^{13} & f_{21}^{13} & f_{31}^{13} \\ f_{12}^{13} & f_{22}^{13} & f_{32}^{13} \\ f_{13}^{13} & f_{23}^{13} & f_{33}^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W_2} = \mathrm{W}^{13} = \mathrm{F}^{13} - \left(\mathrm{F}^{13}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.39)$$

$$F^{23}=\begin{bmatrix} f_{11}^{23} & f_{12}^{23} & f_{13}^{23} \\ f_{21}^{23} & f_{22}^{23} & f_{23}^{23} \\ f_{31}^{23} & f_{32}^{23} & f_{33}^{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(F^{23}\right)^{T}=\begin{bmatrix} f_{11}^{23} & f_{21}^{23} & f_{31}^{23} \\ f_{12}^{23} & f_{22}^{23} & f_{32}^{23} \\ f_{13}^{23} & f_{23}^{23} & f_{33}^{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W_3}=\mathrm{W}^{23}=\mathrm{F}^{23}-\left(\mathrm{F}^{23}\right)^{T}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

Luego $\left(\mathrm{G}^{\perp}\left(\mathrm{q_r}\right)\right)^{\mathsf{T}}$ viene definido por $\left(\mathrm{G}^{\perp}\left(\mathrm{q_r}\right)\right)^{\mathsf{T}}=\mathrm{col}\left(v_1,\ldots,v_n\right)\overset{\Delta}{=}v$, visto de otra forma $v\overset{\Delta}{=}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}=\left(\mathrm{G}^{\perp}\left(\mathrm{q_r}\right)\right)^{\mathsf{T}}$ con $v_1\neq 0$. Si se halla un vector w tal que $w^{\mathsf{T}}\mathrm{A}\left(\mathrm{q_r}\right)=0$, se pueden hallar los $\mathrm{a_i}$ a través de la fórmula $w=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{a_i}\cdot\mathrm{e_i}$. Siendo el vector w^{T}, uno que satisfaga $w^{\mathsf{T}}\mathrm{A}\left(\mathrm{q_r}\right)=0$.

Los valores de $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$ se ajustarán a: $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{a_i}\cdot\mathrm{e_i^{\mathsf{T}}}\mathrm{W}^{\mathrm{lj}}\cdot\upsilon=0$ considerando

$$\mathrm{e_r^{\mathsf{T}}}\mathrm{W}^{kl}\equiv\begin{cases} \mathrm{e}_l^{\mathsf{T}} & \text{si } \mathrm{r}=\mathrm{k} \\ -\mathrm{e_k^{\mathsf{T}}} & \text{si } \mathrm{r}=l \\ 0 & \text{si otras} \end{cases} \tag{2.41}$$

para lo cual, $$v\overset{\Delta}{=}\mathrm{col}\left(v_1,\ldots,v_n\right)=\left(\mathrm{G}^{\perp}\left(\mathrm{q_r}\right)\right)^{\mathsf{T}}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

hallando estos valores, entonces

$$A(q_r) \overset{\Delta}{=} -\left[W_1 \left(G^{\perp}(q_r) \right)^{\mathsf{T}}, W_2 \left(G^{\perp}(q_r) \right)^{\mathsf{T}}, \ldots, W_{no} \left(G^{\perp}(q_r) \right)^{\mathsf{T}} \right] \tag{2.43}$$

para luego construir $G^{\perp}(q_r) J_2(q_r, p) = \tilde{p}^{\mathsf{T}} \cdot \Im(q_r) \cdot A^{\mathsf{T}}(q_r)$, siendo

$$\Im(q_r) \overset{\Delta}{=} \left[\alpha_1(q_1) \mid \alpha_2(q_2) \mid \cdots \mid \alpha_{no}(q_r) \right] \in \Re^{n \times no} \tag{2.44}$$

$$\alpha_1(q_r) = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(q_r) \\ \alpha_{12}(q_r) \\ \vdots \\ \alpha_{1no}(q_r) \end{bmatrix} \qquad \alpha_2(q_r) = \begin{bmatrix} \alpha_{21}(q_r) \\ \alpha_{22}(q_r) \\ \vdots \\ \alpha_{2no}(q_r) \end{bmatrix} \qquad \alpha_{no}(q_r) = \begin{bmatrix} \alpha_{no1}(q_r) \\ \alpha_{no2}(q_r) \\ \vdots \\ \alpha_{nono}(q_r) \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

$$\frac{dMd(q_r)}{dq_r} = -\frac{2}{\rho} \cdot A(q_r) \cdot \Im^{\mathsf{T}}(q_r) \tag{2.46}$$

2.3.2.3. Gradiente de la energía potencial $\nabla_q Vd(q_r)$

La energía potencial viene dada por

$$Vd(q) = -\frac{1}{\rho} \int_0^{q_r} G^{\perp}(\mu) \cdot s(\mu) d\mu + \phi(z(q)), \tag{2.47}$$

en donde, por definición,

$$\phi(z(q)) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2} \left[z(q) - z(q^*) \right]^{\mathsf{T}} P \left[z(q) - z(q^*) \right], \tag{2.48}$$

siendo $z_i(q_i, q_r)$ definida por:

$$z_i(q_i, q_r) \overset{\Delta}{=} q_i - \frac{1}{\rho} \int_0^{q_r} G^{\perp}(\mu) \cdot M_d(\mu) \cdot M^{-1}(\mu) \cdot e_i \cdot d\mu \tag{2.49}$$

donde se propone como:

$$M_d(q) = \int_{q_r^*}^{q_r} G(\mu) \cdot \psi(\mu) \cdot G^{\perp}(\mu) d\mu + M_d^0 \tag{2.50}$$

Para lo cual una función arbitraria $\psi(q_r) = \psi^T(q_r) \in \Re^{(n-1)\times(n-1)}$ y M_d^0 satisface $\left| e_r^T \cdot M^{-1}(q_r^*) \cdot M_d^0 \cdot \omega \right| \geq \varepsilon$, siendo $\varepsilon > 0$ y el vector $\omega \in \Re^n$.

El gradiente de la energía potencial será la derivada parcial de la energía potencial con respecto a q.

$$\nabla_q Vd(q_r) = \frac{\partial Vd(q_r)}{\partial q} \tag{2.51}$$

2.3.2.4. Ecuación de Control Estándar

De la ecuación (2.32) y tomando en cuenta todas las consideraciones anteriores se reestructura la función de control del sistema dinámico con un grado de subactuación, de la forma siguiente:

$$u = A_1(q) P\, S(q - q^*) + \begin{bmatrix} p^T A_2(q_r) p \\ \vdots \\ p^T A_n(q_r) p \end{bmatrix} + A_{n+1}(q_r) + Kv.A_{n+2}(q_r)p \tag{2.52}$$

donde $A_1(q) \in \Re^{(n-1)\times(n-1)}$ $\quad A_2(q_r) \in \Re^{n\times n}$ $\quad A_n(q_r) \in \Re^{n\times n}$

$A_{n+1}(q_r) \in \Re^{(n-1)\times 1}$ $\quad A_{n+2}(q_r) \in \Re^{(n-1)\times n}$

2.4. ESTABILIDAD

A finales del siglo XIX, el matemático Aleksandr Mijailovich Lyapunov en su tesis doctoral “El Problema General de la Estabilidad del Movimiento” presentada en 1892, ofreció el primer intento de una teoría matemática completa de la estabilidad, donde lo primero que hace es dar una definición rigurosa de estabilidad de movimiento. A partir de ese momento no se podría dar malos entendidos al respecto.

En este tema le precede el gran matemático, físico y astrónomo, de origen italiano, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) quien dijo "*una posición donde la energía potencial es un mínimo aislado, es un equilibrio estable*".

En este caso la estabilidad se logra considerando que la *parte homogénea* de las *PDE* de la solución de la ecuación (2-20) y de la ecuación (2.47) deben cumplir con:

$$q^{*} = \arg\ \min V_{d}\left(q\right) \qquad (2.53)$$

$$\text{y} \qquad z\left(q^{*}\right) = \arg\ \min \phi\left(z\left(q\right)\right)$$

La ecuación (2.20), que a continuación se repite, para más comodidad del lector:

$$G^{\perp}\left\{\nabla_{q}V\left(q\right) - M_{d}\left(q_{r}\right)M^{-1}\left(q_{r}\right)\nabla_{q}V_{d}\left(q\right)\right\} = 0$$

representa el moldeo de energía potencial la cual presenta una solución o ecuación general (EDP), como la siguiente:

$$C_{1}\frac{\partial V_{d}\left(q\right)}{\partial q_{1}} + C_{2}\frac{\partial V_{d}\left(q\right)}{\partial q_{2}} = \psi \ \text{ siendo C1 C2 y } \Psi \text{ parámetros conocidos}$$

cuya solución es de la forma:

$$V_{d}\left(q\right) = \psi + K_{p}\cdot\phi\left(z\left(q_{1}, q_{2}\right)\right) \qquad (2.54)$$

donde Kp es una constante de proporcionalidad y $\phi\left(z\right)$ una función arbitraria diferenciable de ¨**z**¨, la cual es una función que debe ser seleccionada para asegurar la asignación del punto de equilibrio, es decir, para satisfacer que q*=arg min [Vd(q)] con q*=0.

Por otro lado si el hessiano de la energía potencial (V_d) esta definido de la siguiente forma:

$$\mathrm{Hess}\left(V_d\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1\cdot\partial q_2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1\cdot\partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_2{}^2} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

y siendo (Vd) un campo escalar con derivadas parciales segundas continuas en la región de qr, se evalúa el determinante de la matriz hessiana en un punto estacionario q_r^* (det[Hess(Vd(q_r^*))])., designados como

$$\Delta=\left(\det[\mathrm{Hess}\left(V_d\right)]\right)\Big|_{q=qr}=\left(\det\begin{bmatrix} A & B \\ B & C\end{bmatrix}\right)\Bigg|_{q=qr}=\left(A\cdot C-B^2\right)\Big|_{q=qr} \tag{2.56}$$

donde: $A=\dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1{}^2}$ $B=\dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1\cdot\partial q_2}$ $C=\dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_2{}^2}$

se tiene entonces que:

Si $\Delta < 0$, Vd(q) tiene un punto de ensilladura en qr.

Si $\Delta > 0$ y $A > 0$, Vd(q) tiene un mínimo relativo en qr.

Si $\Delta > 0$ y $A < 0$, Vd(q) tiene un máximo relativo en qr.

Si $\Delta = 0$, el criterio no decide nada.

En este orden de idea, para que el sistema sea estable debe satisfacerse la condición de que $\nabla_q V_d\left(q_r\right)=0$, condición que sirve para la estabilidad si y solo si se mantiene la segunda derivada de una forma cuadrática respecto de ϕ (Hess(V_d) Matriz hessiana), en el origen, positiva. Es decir, se cumpla con que el $\mathbf{\Delta > 0}$ y $\mathbf{A > 0}$.

El hecho de que $\Delta > 0$ y $A > 0$ asegura que la función de energía potencial presenta un mínimo.

En la figura 2.1 se muestra un típico moldeo de energía potencial, la trayectoria del sistema debe seguir la superficie de la figura, como se podrá observar en capítulos posteriores. Se observa a su vez que existe una posición donde la energía potencial es un mínimo aislado, por tanto existe un equilibrio estable, de acuerdo a lo establecido por Lagrange.

La idea es que la trayectoria se dirija de los puntos altos de la energía hacia el valor más bajo de la misma.

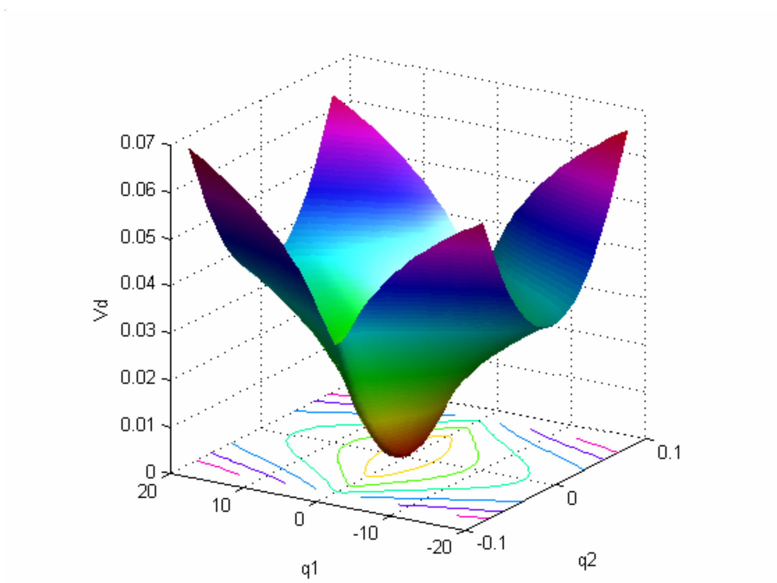

Fig. 2.1. Ejemplo grafico del moldeo de energía potencial

La figura 2.2 presenta un moldeo de energía potencial variando el parámetro Kp que es la constante de proporcionalidad que multiplica a la función $\phi(z)$ (2.54) de la ecuación de la energía potencial deseada. Se puede pensar que la energía, por analogía, sea asociada a la arcilla, y ciertos parámetros pudieran moldearla al igual que se hace al moldear una vasija de arcilla. Es decir el diseñador con la metodología IDA-PBC se convierte en alfarero (ceramista) en el proyecto, moldeando la vasija a convenir con las necesidades fluidicas del líquido que contendrá.

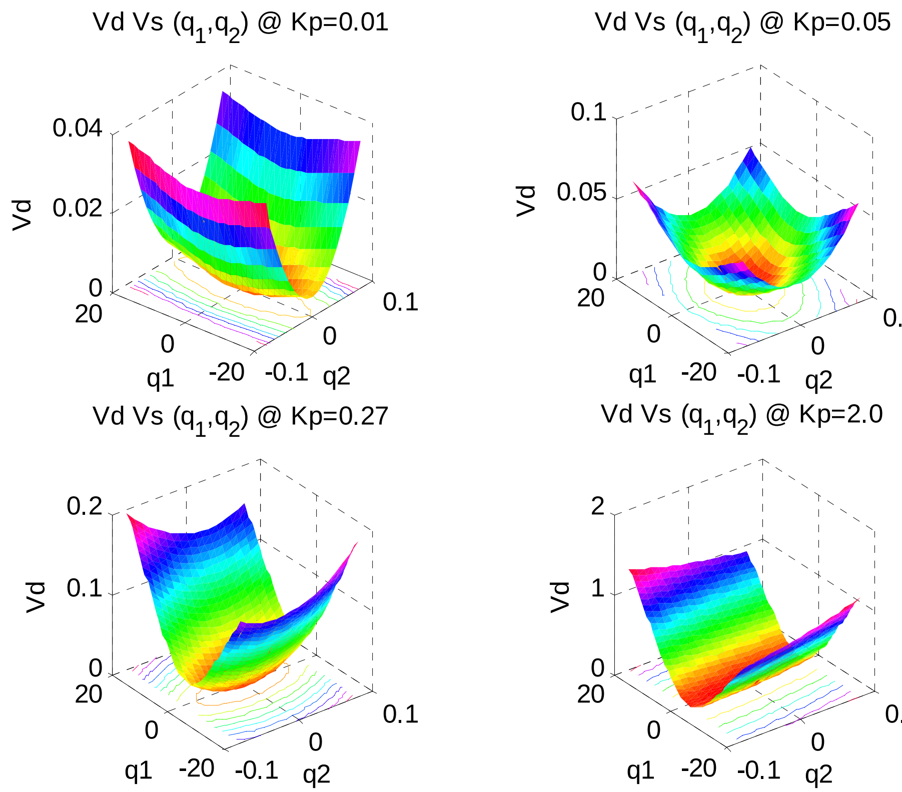

Fig. 2.2. Moldeo de energía potencial para diferentes valores de la constante de proporcionalidad Kp

La figura 2.3 presenta detalles útiles para el análisis de la estabilidad, en ella se verifica las curvas de nivel de la energía potencial y la trayectoria del sistema. Así se puede inferir si la ecuación de energía potencial, es una candidata a ser una función de Lyapunov. La misma muestra la trayectoria de las variables actuada y subactuada partiendo de q_1=2 y q_2=0 para finalizar en q_1=0 y q_2=0 su punto de equilibrio. Más adelante se observan estos tipos de figuras, como apoyo, para el análisis los diferentes modelos mecánicos con un grado de subactuación desarrollados en este trabajo.

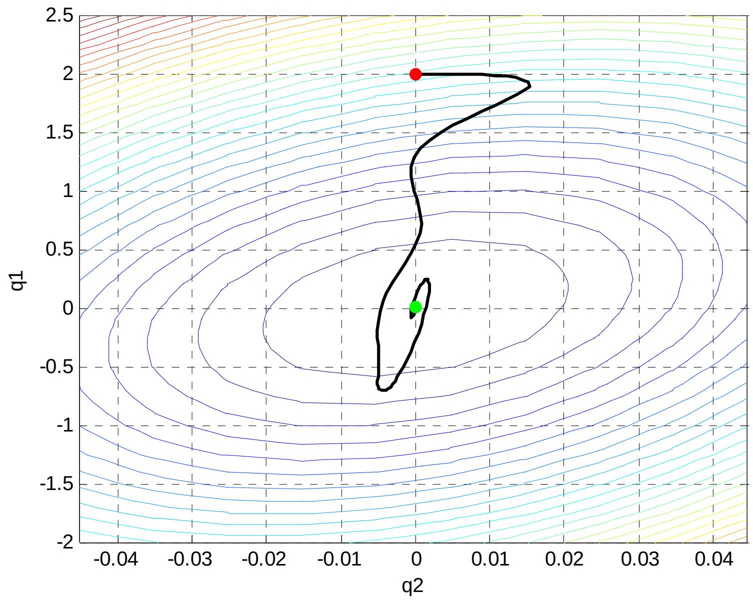

Fig. 2.3. Curvas de nivel de la energía potencial

CAPITULO III: SISTEMA DEL PÉNDULO CON RUEDA INERCIAL

El sistema del Péndulo con Rueda Inercial ("Inertia Wheel Pendulum–IWP") [1]., representado en la figura 3.1, es un sistema formado por un péndulo basculante y un disco inercial, que rota, ubicado en el extremo superior del péndulo. El mencionado disco tiene un motor actuador en el centro del mismo, por lo que la variable actuada es θ_2 y el ángulo formado por el péndulo y la vertical central será la variable subactuada θ_1.

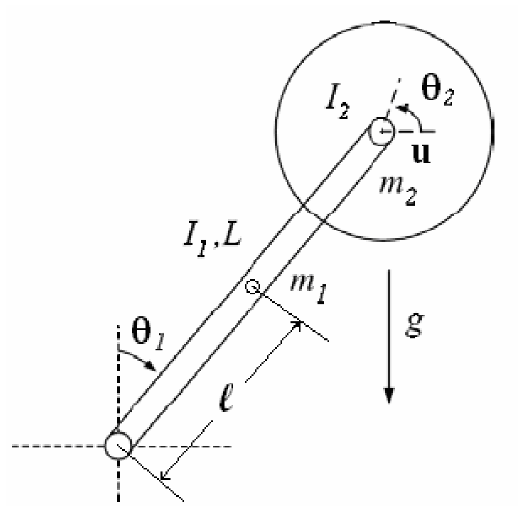

Fig. 3.1. Sistema Péndulo con rueda inercial.

donde

θ_1, θ_2 son el ángulo del péndulo y el disco respectivamente (rad).

I_1, I_2 y el momento de inercia del péndulo y el disco respectivamente ($Kg.m^2$).

ℓ es la longitud desde el centro de gravedad del péndulo hasta el extremo inferior (m.).

L es la longitud del péndulo (m)

m_1, m_2 son la masa del péndulo y el disco respectivamente. (Kg)

g es la gravedad. (m/s^2)

u es la acción de torque de control de entrada en el disco (N.m).

3.1. DINÁMICA DEL SISTEMA

La energía cinética del sistema viene representada por la ecuación (3.1), su energía potencial por la ecuación (3.2), mientras su lagrangiana y hamiltoniana por las ecuaciones (3.3) y (3.4) respectivamente.

$$T = \frac{1}{2}\left(m_1\ell^2 + m_2L^2 + I_1\right)\cdot\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \qquad (3.1)$$

$$V(\theta_1) = \left(m_1\ell + m_2L\right)\cdot g\cdot\cos(\theta_1) \qquad (3.2)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(m_1\ell^2 + m_2L^2 + I_1\right)\cdot\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 - \left(m_1\ell + m_2L\right)\cdot g\cdot\cos(\theta_1) \qquad (3.3)$$

$$H = \frac{1}{2}\left(m_1\ell^2 + m_2L^2 + I_1\right)\cdot\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot I_2\cdot\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + \left(m_1\ell + m_2L\right)\cdot g\cdot\cos(\theta_1) \qquad (3.4)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.1), y sabiendo que la variable actuada es θ_2, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} = \tau$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = \left(m_1\ell + m_2L\right)\cdot g\cdot\mathrm{sen}(\theta_1) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} = \left(m_1\ell^2 + m_2L^2 + I_1\right)\cdot\dot{\theta}_1 + I_2\cdot\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right] = \left(m_1\ell^2 + m_2L^2 + I_1\right)\cdot\ddot{\theta}_1 + I_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = \left(m_1\ell^2 + m_2L^2 + I_1\right)\cdot\ddot{\theta}_1 + I_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) - \left(m_1\ell + m_2L\right)\cdot g\cdot\mathrm{sen}(\theta_1) = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} = I_2\cdot\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\right] = I_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} = I_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2\right) = \tau$$

Finalmente se obtiene las ecuaciones dinámicas del sistema péndulo con rueda inercial

$$\begin{cases} \left(m_1\ell^2 + m_2L^2 + I_1\right)\cdot\ddot{\theta}_1 + I_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right) - \left(m_1\ell + m_2L\right)\cdot g\cdot \mathrm{sen}\left(\theta_1\right) = 0 \\ I_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right) = \tau \end{cases}$$

si se define

$$I = \left(m_1\ell^2 + m_2L^2 + I_1\right) \tag{3.5}$$

$$m_0 = \left(m_1\ell + m_2L\right)\cdot g \tag{3.6}$$

entonces

$$\begin{cases} I\cdot\ddot{\theta}_1 + I_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right) - m_0\cdot \mathrm{sen}\left(\theta_1\right) = 0 \\ I_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right) = \tau \end{cases} \tag{3.7}$$

La ecuación (3.7) en forma matricial se representa como:

$$\begin{bmatrix} I+I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_0\cdot\cos\left(\theta_1\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

haciendo el siguiente cambio de variables

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1+\theta_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{q}_1+\ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2-\ddot{q}_1 \end{bmatrix}$$

se obtiene de (3.8)

$$\begin{bmatrix} I+I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2-\ddot{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_0\cdot \mathrm{sen}\left(q_1\right) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} I\cdot\ddot{q}_1 + I_2\cdot\ddot{q}_1 + I_2\cdot\ddot{q}_2 - I_2\cdot\ddot{q}_1 - m_0\cdot\operatorname{sen}(q_1) = 0 \\ I_2\cdot\ddot{q}_1 + I_2\cdot\ddot{q}_2 - I_2\cdot\ddot{q}_1 = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I\cdot\ddot{q}_1 + I_2\cdot\ddot{q}_2 - m_0\cdot\operatorname{sen}(q_1) = 0 \\ I_2\cdot\ddot{q}_2 = u \end{cases}$$

Si $I_2\cdot\ddot{q}_2 = u \Rightarrow$ la primera ecuación del sistema toma la siguiente forma

$$\begin{cases} I\cdot\ddot{q}_1 + u - m_0\cdot\operatorname{sen}(q_1) = 0 \\ I_2\cdot\ddot{q}_2 = u \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} I\cdot\ddot{q}_1 - m_0\cdot\operatorname{sen}(q_1) = -u \\ I_2\cdot\ddot{q}_2 = u \end{cases}$$

Nuevamente se obtiene las ecuaciones dinámicas del sistema péndulo con rueda inercial para el cambio de variables propuesto, donde su representación matricial es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}}_{M}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_0\cdot\operatorname{sen}(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{G} u \tag{3.9}$$

por observación directa de (3.9), la matriz de masa inercial (**M**) y el vector de control **G** vienen dado por:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (3.10) \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Puesto que $G(q_r) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $G^{\perp}$ (anulador izquierdo de rango máximo de G, tal que, $G^{\perp}G = 0$ luego se propone

$$G^{\perp} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

tal que $G^{\perp}G = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

3.2. MOLDEO DE LA ENERGÍA

Dado que la matriz de inercia M posee términos constantes entonces Md es independiente de la coordenada "q" y J_2=0 con Md la siguiente matriz con elementos constantes:

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Como se tiene la energía potencial ($V(q_1) = m_0 \cdot g \cdot \cos(q_1)$) y la matriz de masa inercial (M) del sistema, además se ha propuesto la matriz de masa inercial deseada (Md), se tiene de la ecuación (2.20):

$$G^{\perp}\left\{\nabla_q V(q) - M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q V_d(q)\right\} = 0 \quad \text{donde} \quad G^{\perp} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}\left\{\begin{bmatrix} -m_0 \cdot \mathrm{sen}(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{I} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} \end{bmatrix}\right\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -m_0 \cdot \mathrm{sen}(q_1) - \frac{a_1}{I}\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} - \frac{a_2}{I_2}\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} \\ -\frac{a_2}{I}\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} - \frac{a_3}{I_2}\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} \end{bmatrix}\right\} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[m_0 \cdot \mathrm{sen}(q_1) + \left(\frac{a_1 + a_2}{I}\right)\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} + \left(\frac{a_2 + a_3}{I_2}\right)\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1}\right] = 0$$

Para así obtener una EDP, cuya solución evidencia la energía potencial deseada Vd:

$$\left(\frac{a_1+a_2}{I}\right)\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1}+\left(\frac{a_2+a_3}{I_2}\right)\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_2}=-m_0\cdot \operatorname{sen}(q_1)$$

utilizando un lenguaje simbólico, específicamente Maple® (Versión.10), se obtiene:

$$V_d(q)=\frac{m_0\cdot I}{a_1+a_2}\cos(q_1)+\phi(z) \qquad (3.14)$$

$$\text{donde } \phi(z)=\phi(q_2+\gamma_2\cdot q_1) \qquad \text{y} \qquad \gamma_2=-\frac{I(a_2+a_3)}{I_2(a_1+a_2)} \qquad (3.15)$$

Siendo $\phi(z)$ una función arbitraria diferenciable de **z,** esta función debe ser escogida para asegurar la asignación del punto de equilibrio, es decir, para satisfacer que q*=arg min Vd(q) con q*=0. Por otra parte, para que el sistema sea estable debe satisfacerse la condición de que $\nabla_q V_d(q_r)=0$, esto se satisface si y solo si se mantiene la segunda derivada de la forma cuadrática respecto de ϕ, (Hess(V_d) Matriz Hessiana) positiva en el origen ($\text{Hess(Vd)}>0$).

Se observa que si se emplea como la función ϕ la misma **z**, se tiene que su $\nabla_q V_d(q_r)\neq 0$ y que su hessiana Hess(V_d)=0**,** por tanto se propone que sea $\phi(z)=K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)^2$ donde K_1 es un parámetro constante. Para así contar con la nueva Vd propuesta:

$$V_d(q)=\frac{m_0\cdot I}{a_1+a_2}\cos(q_1)+K_1(q_2+\gamma_2\cdot q_1)^2 \qquad (3.16)$$

A manera de comprobar la propuesta, se halla el gradiente de la energía potencial deseada $\nabla_q V_d(q)$ para la nueva V_d propuesta, para ello se calcula la derivada de V_d, con respecto a q_1 y q_2:

$$\nabla_q\left(V_d(q_1,q_2)\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial V_d}{\partial q_1} & \frac{\partial V_d}{\partial q_2}\end{bmatrix}^T \tag{3.17}$$

$$\nabla_q\left(V_d(q)\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial V_d}{\partial q_1}\\ \frac{\partial V_d}{\partial q_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{m_0\cdot I}{a_1+a_2}\operatorname{sen}(q_1)+2\cdot K_1\cdot\gamma_2\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\\ 2\cdot K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

para lo cual (3.18) evaluada en q_1=0 y q_2=0 es $\nabla_q\left(V_d(q)\right)\Big|_{q=0}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$

Seguidamente se calcula los elementos de la matriz hessiana,

$$\frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1^{\,2}}=-\frac{m_0\cdot I}{a_1+a_2}\cos(q_1)+2\cdot K_1\cdot\gamma_2^{\,2} \qquad \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1\partial q_2}=2\cdot K_1\cdot\gamma_2 \qquad \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_2^{\,2}}=2\cdot K_1$$

de (2.55) la matriz hessiana es:

$$\operatorname{Hess}(V_d)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1^{\,2}} & \frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1\cdot\partial q_2}\\ \frac{\partial^2 q\cdot\phi(z)q^T}{\partial q_2\cdot\partial q_1} & \frac{\partial^2 q\cdot\phi(z)q^T}{\partial q_2^{\,2}}\end{bmatrix}=$$

$$\operatorname{Hess}(V_d)=\begin{bmatrix}-\frac{m_0\cdot I}{a_1+a_2}\cos(q_1)+2\cdot K_1\cdot\gamma_2^{\,2} & 2\cdot K_1\cdot\gamma_2\\ 2\cdot K_1\cdot\gamma_2 & 2\cdot K_1\end{bmatrix}$$

evaluando el determinante, de la matriz hessiana (2.56) en q_1=0 y q_2=0 se tiene:

$$\operatorname{Det}\left[\operatorname{Hess}(V_d)\right]\Big|_{q=0} = \operatorname{Det}\left[\begin{matrix} -\frac{m_0 \cdot I}{a_1 + a_2}\cos(q_1) + 2\cdot K_1 \cdot \gamma_2{}^2 & 2\cdot K_1 \cdot \gamma_2 \\ 2\cdot K_1 \cdot \gamma_2 & 2\cdot K_1 \end{matrix}\right]\Bigg|_{q=0}$$

$$\operatorname{Det}\left[\operatorname{Hess}(V_d)\right]\Big|_{q=0} = -\frac{2\cdot K_1 \cdot m_0 \cdot I}{(a_1 + a_2)} > 0$$

en donde se puede observar las siguientes restricciones

$$-\frac{2\cdot K_1 \cdot m_0 \cdot I}{a_1 + a_2} > 0 \qquad \frac{2\cdot K_1 \cdot m_0 \cdot I}{a_1 + a_2} < 0 \qquad a_1 > 0$$

$$\frac{1}{a_1 + a_2} < 0 \Rightarrow -a_2 > a_1 \Rightarrow a_2 < -a_1$$

con estas condiciones y con (3.15), se asevera que:

$$\gamma_2 > \frac{I}{I_2}\frac{\gamma_1}{(\gamma_1 - m_0)} \qquad \Rightarrow \gamma_1 > m_0 \tag{3.19}$$

Luego, una vez justificada, con este análisis, se puede asegurar que la energía potencial deseada, V_d, es la siguiente:

$$V_d(q) = \frac{I \cdot m_0}{a_1 + a_2}\cos(q_1) + \frac{K_1}{2}(q_2 + \gamma_2 \cdot q_1)^2 \tag{3.20}$$

para lo cual satisface la suposición de que $\phi(z) = \frac{K_1}{2}(q_2 + \gamma_2 \cdot q_1)^2$

En la figura 3.2 se puede observar la región permitida para γ_1 y γ_2 cuando se considera m_3=1 e $\frac{I}{I_2}=1$.

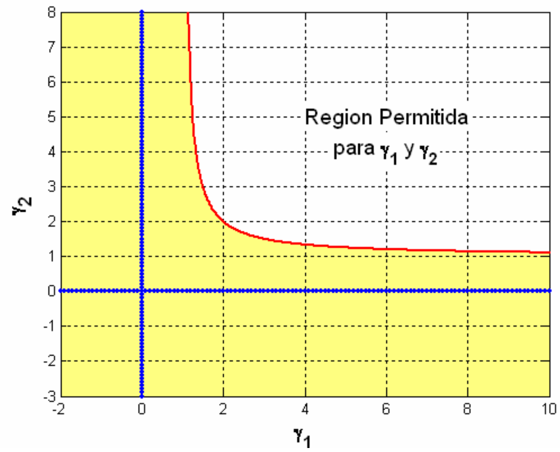

Fig. 3.2. Región permitida para γ_1 y γ_2, con m_0 =1 y I/I_2=1

En la figura 3.3 puede observarse la gráfica de Vd versus q_1 y q_2 para un mo=1.00, a_1=1.00 , a_2= -2.00, γ_2=3.50, I=0.15 y K_1=0.15, la cual presenta un mínimo aislado por lo tanto se garantiza la estabilidad.

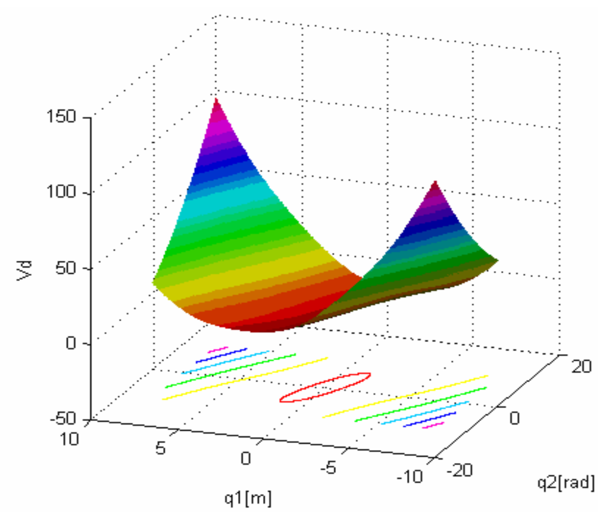

Fig. 3.3. Moldeo de energía potencial Vd para
mo=1.00, a_1=1.00, a_2= -2.00, γ_2=3.50, I=0.15 y K_1=0.15

3.3. CONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTROL (U):

Para hallar la ecuación que rige el control se recurre a las ecuaciones (2.15) y (2.16)

$$u_{es} = \left(G^T G\right)^{-1} \cdot G^T \cdot \left(\nabla_q H - M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q H_d + J_2 \cdot M_d^{-1} \cdot p\right)$$

$u_{di} = -Kv \cdot G^T \cdot \nabla p H_d$, donde se sabe que $u = u_{es} + u_{di}$.

(a) Cálculos de u_{es}

Se halla uno a uno los términos de la ecuación (2.15), para luego sumarlos algebraicamente.

$$\begin{aligned} u_{es} = & \\ & \underbrace{\left(G^T G\right)^{-1} G^T \left(\nabla_q H\right)}_{\text{TERMINO 01}} \\ & -\underbrace{\left(G^T G\right)^{-1} G^T \left(M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q H_d\right)}_{\text{TERMINO 02}} \\ & +\underbrace{\left(G^T G\right)^{-1} G^T \left(J_2 \cdot M_d^{-1} \cdot p\right)}_{\text{TERMINO 03}} \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde si $G = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow G^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ siendo entonces

$$\left(G^T \cdot G\right)^{-1} \cdot G^T = \left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- ✓ **Término 01**:

Partiendo de la ecuación de Hamilton del sistema (2.6), (3.2), (3.6) y (3.11):

$$H=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}\cdot M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}+m_0\cdot\cos(q_1)=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{I} & 0\\ 0 & \frac{1}{I_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}+m_0\cdot\cos(q_1)$$

se obtiene el hamiltoniano del sistema de rueda inercial, para el cambio de variable propuesto:

$$H=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1{}^2}{I}+\frac{p_2{}^2}{I_2}\right)+m_0\cdot\cos(q_1) \tag{3.22}$$

Se halla su gradiente $(\nabla_q H)$

$$\nabla_q H=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H(q_1,q_2)}{\partial q_1}\\[2ex] \dfrac{\partial H(q_1,q_2)}{\partial q_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-m_0\cdot\mathrm{sen}(q_1)\\ 0\end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Finalmente el término 01 es hallado y presenta la siguiente forma:

$$\underbrace{\left(G^{\mathsf{T}}G\right)^{-1}G^{\mathsf{T}}\left(\nabla_q H\right)}_{\text{TERMINO 01}}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H(q_1,q_2)}{\partial q_1}\\[2ex] \dfrac{\partial H(q_1,q_2)}{\partial q_2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}m_0\cdot\mathrm{sen}(q_1) \tag{3.24}$$

- ✓ **Término 02**:

De la ecuación (2.7) y (3.20) se observa que es necesario el cálculo del hamiltoniano deseado, para ello se tiene que:

$$H_d(p,q)=\frac{1}{2}p^{\mathsf{T}}\cdot M_d{}^{-1}\cdot p+V_d(q_1,q_2)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}\cdot M_d{}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}p+V_d(q_1,q_2) \tag{3.25}$$

de (3.13) la inversa de la matriz de inercia deseada es:

$$M_d^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} & -\dfrac{a_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \\ -\dfrac{a_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} & \dfrac{a_1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

sustituyendo (3.26) en (3.25):

$$H_d(p,q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} & -\dfrac{a_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \\ -\dfrac{a_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} & \dfrac{a_1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + V_d(q_1, q_2)$$

$$H_d(p,q) = \frac{1}{2}\left[\frac{a_3 \cdot p_1^2 - 2 \cdot a_2 \cdot p_1 \cdot p_2 + a_1 \cdot p_2^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] + V_d(q_1, q_2) \tag{3.27}$$

Sustituyendo la ecuación (3.20), de la energía potencial deseada (Vd), en la ecuación (3.27) finalmente se obtiene el hamiltoniano deseado:

$$H_d(p,q) = \frac{1}{2}\left[\frac{a_3 p_1^2 - 2a_2 p_1 p_2 + a_1 p_2^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] + \frac{I \cdot m_0}{a_1 + a_2}\cos(q_1) + \frac{k_1}{2}(q_2 + \gamma_2 \cdot q_1)^2 \tag{3.28}$$

Como se observa de la ecuación (3.28) el hamiltoniano deseado sólo depende de q_1 y q_2 en el término de su energía potencial deseada, por tanto se puede aseverar que:

$$\underbrace{-\left(G^T G\right)^{-1} G^T \left(M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q H_d\right)}_{\text{TERMINO 02}} = -\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{I} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{I_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{I} & 0\\ 0 & \frac{1}{I_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_1}\\ \frac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1-a_2}{I}\right)\frac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_1}+\left(\frac{a_2-a_3}{I_2}\right)\frac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_2}\right]$$

.

Sustituyendo las $\frac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_1}$ y $\frac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_2}$ se tiene:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{I}\right)\left(-\frac{I\cdot m_0}{a_1+a_2}\operatorname{sen}(q_1)+\gamma_2\cdot k_1(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a_2-a_3}{I_2}\right)\left(K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)=$$

$$\left(-\frac{m_0}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\operatorname{sen}(q_1)+\frac{\gamma_2}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{I}\right)\cdot K_1(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a_2-a_3}{I_2}\right)\left(K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)=$$

$$\left(-\frac{m_0}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\operatorname{sen}(q_1)+\frac{1}{2}\left(K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)\left[\left(\frac{a_2-a_3}{I_2}\right)+\gamma_2\left(\frac{a_1-a_2}{I}\right)\right]\right)$$

sustituyendo $\gamma_2=-\frac{I(a_2+a_3)}{I_2(a_1+a_2)}$ de la ecuación (3.15) , en la ecuación anterior

$$\left(-\frac{m_0}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\operatorname{sen}(q_1)+\frac{1}{2}\left(K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)\left[\left(\frac{a_2-a_3}{I_2}\right)-\frac{I(a_2+a_3)}{I_2(a_1+a_2)}\left(\frac{a_1-a_2}{I}\right)\right]\right)=$$

$$\left(-\frac{m_0}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\operatorname{sen}(q_1)+\frac{1}{2I_2}\left(K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)\left[\frac{(a_2-a_3)}{1}-\frac{(a_2+a_3)(a_1-a_2)}{(a_1+a_2)}\right]\right)=$$

$$\left(-\frac{m_0}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\operatorname{sen}(q_1)+\frac{1}{2\cdot I_2}\left(K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)\left[\frac{(a_2-a_3)(a_1+a_2)-(a_2+a_3)(a_1-a_2)}{(a_1+a_2)}\right]\right)=$$

$$\left(-\frac{m_0}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\operatorname{sen}(q_1)+\frac{1}{2\cdot I_2}\left(K_1\cdot(q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)\left[\frac{a_1a_2+a_2^2-a_1a_3-a_2a_3-a_1a_2+a_2^2-a_1a_3+a_2a_3}{(a_1+a_2)}\right]\right)$$

$$-\frac{m_0}{2}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)\operatorname{sen}(q_1)+\left((q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)\frac{K_1}{I_2}\cdot\left[\frac{a_2^2-a_1a_3}{(a_1+a_2)}\right]=$$

$$\frac{m_0}{2}\left(\frac{2\cdot a_2}{a_1+a_2}-1\right)\operatorname{sen}(q_1)\underbrace{-K_1\cdot\left[\frac{a_1.a_3-a_2^2}{I_2(a_1+a_2)}\right]}_{K_p}\left((q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)$$

Luego el término 02 viene dado por:

$$-\underbrace{\left(G^TG\right)^{-1}G^T\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q H_d\right)}_{\text{TERMINO 02}}=\frac{m_0}{2}\left(\frac{2\cdot a_2}{a_1+a_2}-1\right)\operatorname{sen}(q_1)+K_p\left((q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)$$

(3.29)

✓ **Término 03**:

Se tiene que si la matriz de masa inercial está compuesta por elementos constantes, al igual que la matriz de masa inercial deseada la matriz de interconexión la se considera nula (J_2=0), para lo cual el tercer término $\left(G^TG\right)^{-1}G^T\cdot J_2\cdot M_d^{-1}\cdot p$ será nulo.

$$\left(G^TG\right)^{-1}G^T\cdot J_2\cdot M_d^{-1}\cdot p=0 \tag{3.30}$$

Para obtener la ecuación de control debido al moldeo de energía u_{es}, se suman algebraicamente los términos 01, 02 y 03 de la ecuación (3.24), (3.29) y (3.30) respectivamente**,** la cual presenta la siguiente forma:

$$u_{es}=\underbrace{\frac{1}{2}m_0\cdot\operatorname{sen}(q_1)}_{\text{TERMINO 01}}+\underbrace{\frac{m_0}{2}\left(\frac{2\cdot a_2}{a_1+a_2}-1\right)\operatorname{sen}(q_1)+K_p\left((q_2+\gamma_2\cdot q_1)\right)}_{\text{TERMINO 02}}$$

$$u_{es} = \underbrace{\left(\frac{a_2}{a_1 + a_2}\right) m_0}_{\gamma_1} \cdot \operatorname{sen}(q_1) + K_p\left(\left(q_2 + \gamma_2 \cdot q_1\right)\right) =$$

$$u_{es} = \gamma_1 \cdot \operatorname{sen}(q_1) + K_p\left(q_2 + \gamma_2 \cdot q_1\right) \tag{3.31}$$

(b) Cálculos de u_{di}

La ecuación de control debida a la inyección de amortiguamiento viene dada por la ecuación (2.18)

$$u_{di} = -Kv \cdot G^{T} \cdot \nabla_p H_d = -Kv \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H_d}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H_d}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

donde de la (3.28) viene dada por

$$H_d(p,q) = \frac{1}{2}\left[\frac{a_3 p_1^2 - 2a_2 p_1 p_2 + a_1 p_2^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] + \frac{I \cdot m_0}{a_1 + a_2}\cos(q_1) + \frac{k_1}{2}\left(q_1 + \gamma_2 q_2\right)^2$$

siendo sus derivadas $\dfrac{\partial H_d}{\partial p_1}$ y $\dfrac{\partial H_d}{\partial p_2}$

$$= -Kv\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left[\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a_3 \cdot p_1^2 - 2 \cdot a_2 \cdot p_1 \cdot p_2 + a_1 \cdot p_2^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right]\right]}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial\left[\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a_3 \cdot p_1^2 - 2 \cdot a_2 \cdot p_1 \cdot p_2 + a_1 \cdot p_2^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right]\right]}{\partial p_2} \end{bmatrix} = -Kv\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\dfrac{a_3 \cdot p_1 - a_2 \cdot p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] \\ \left[\dfrac{-a_2 \cdot p_1 + a_1 \cdot p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] \end{bmatrix}$$

$$u_{di} == -Kv\left\{-\left[\frac{a_3 \cdot p_1 - a_2 \cdot p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] + \left[\frac{-a_2 \cdot p_1 + a_1 \cdot p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right]\right\}$$

$$u_{di} = -Kv\left\{-\frac{(a_2+a_3)}{a_1\cdot a_3-a_2^2}p_1+\frac{(a_1+a_2)}{a_1\cdot a_3-a_2^2}p_2\right\} = -Kv\left[\frac{(a_1+a_2)}{a_1\cdot a_3-a_2^2}\dot{q}_2-\frac{(a_2+a_3)}{a_1\cdot a_3-a_2^2}\dot{q}_1\right]$$

Si se define $\quad K_2 = \dfrac{(a_1+a_2)}{a_1\cdot a_3-a_2^2} \qquad \gamma_3 = -\dfrac{(a_2+a_3)}{(a_1+a_2)} \quad \Rightarrow$

$$u_{di} = -Kv\cdot K_2\cdot\left[\left(\dot{q}_2+\gamma_3\cdot\dot{q}_1\right)\right]. \tag{3.32}$$

Finalmente, la ecuación de control para el sistema péndulo con rueda inercial de (3.31) y (3.32) es:

$$u = u_{es}+u_{di} = \gamma_1\cdot\mathrm{sen}(q_1)+K_p\left(q_1+\gamma_2\cdot q_2\right)-Kv\cdot K_2\cdot\left[\left(\dot{q}_2+\gamma_3\cdot\dot{q}_1\right)\right] \tag{3.33}$$

Por otro lado, la forma hamiltoniana del sistema Péndulo con Rueda Inercial, con $G = [-1\ \ 1]^T \in \Re^{2\times 1}$ y $u \in \Re$, viene dado por las ecuaciones (2.2) y (2.3):

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \\ \dot{p}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & I\\ \\ -I & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_q H\\ \\ \nabla_p H\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \\ G\end{bmatrix}u \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{p}_1\\ \dot{p}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\nabla_{p_1}H\\ \nabla_{p_2}H\\ -\nabla_{q_1}H\\ -\nabla_{q_2}H\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}u$$

donde $\dot{q}_1 = \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial p_1} \qquad \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial p_2} \qquad \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H(p,q)}{\partial q_1}-u \qquad \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H(p,q)}{\partial q_2}+u$

claro está, el hamiltoniano del sistema con el cambio de variable propuesto es el que representa la dinámica del sistema para la ecuación de control hallada, por tanto de la ecuación (3.22)

$$H = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1{}^2}{I}+\frac{p_2{}^2}{I_2}\right)+m_0\cdot\cos(q_1) \tag{3.34}$$

la forma hamiltoniana del sistema Péndulo con Rueda Inercial es:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dfrac{p_1}{\left(m_1\ell^2 + m_2 L^2 + I_1\right)} = \dfrac{p_1}{I} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \dfrac{p_2}{I_2} \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} - u = m_0 \cdot \mathrm{sen}\left(q_1\right) - u \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} + u = u \end{cases} \tag{3.35}$$

3.4. RESULTADOS DEL SISTEMA DEL PÉNDULO CON RUEDA INERCIAL.

En la figura (3.4) se presentan los resultados de la simulación del sistema mecánico con rueda inercial. A fin de ilustrar la naturaleza global de la ley de control obtenida en la ecuación (3.33), se presenta una simulación donde la variable $q_1=\theta_1=3.00$ rad y $\theta_2=0.00$ rad hasta la posición $\theta_1=0.00$ rad y $\theta_2=0.00$.

Tabla 3.1. Condiciones Iniciales Para el IWP			
$I_2=0.2$ Kg.m^2	$I=0.1$ Kg.m^2	$m_3=10$ Kg.	$a_1=1$
$a_2=-2$	$a_3=9$	Kv=10	Kp=2.00
$\theta_1=3.00$ rad.	$\theta_2=0.0$ rad.	$p_1=0$ Kg.m/s.	$p_2=0$ Kg.m/s.
$q_1=\theta_1=3.00$ rad	$q_2=\theta_1+\theta_2=3.00$ rad.		

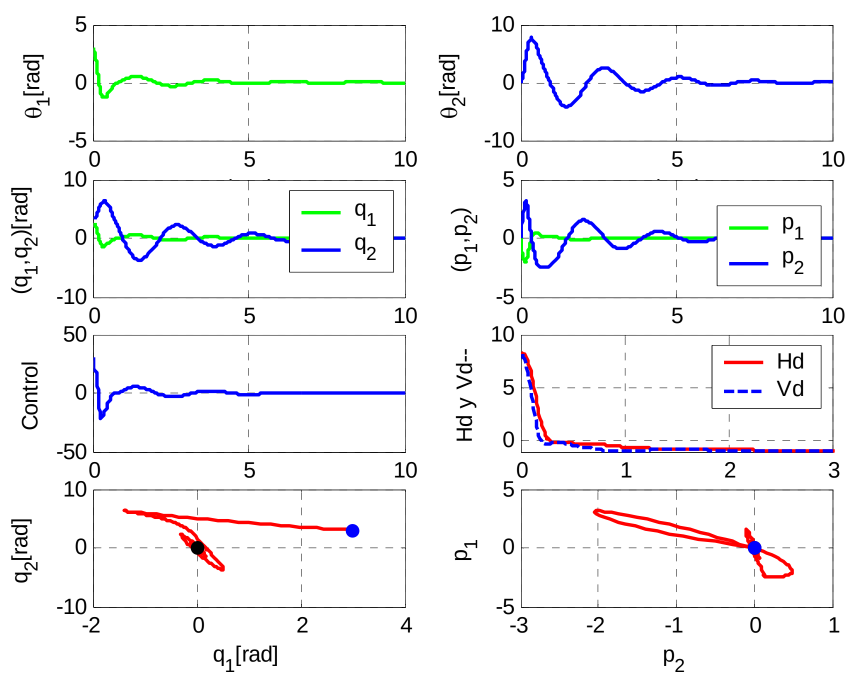

Figura 3.4. Trayectoria con los siguientes parámetros, con las condiciones iniciales de la Tabla 3.1.

De las figuras (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7) se observa que la convergencia se preserva tal como predice la teoría.

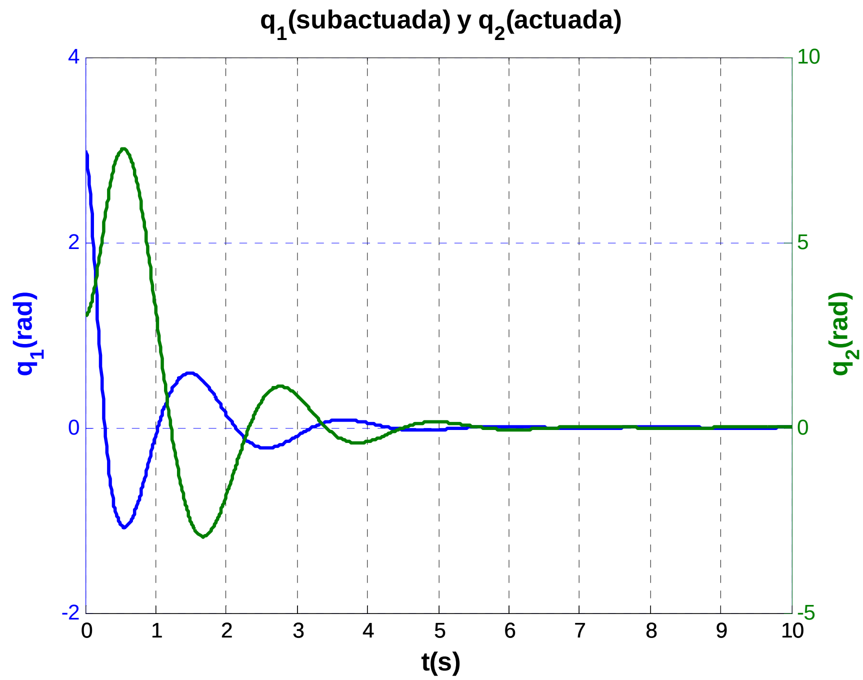

Figura 3.5. Trayectoria de q_1 y q_2 con las condiciones iniciales de la Tabla 3.1.

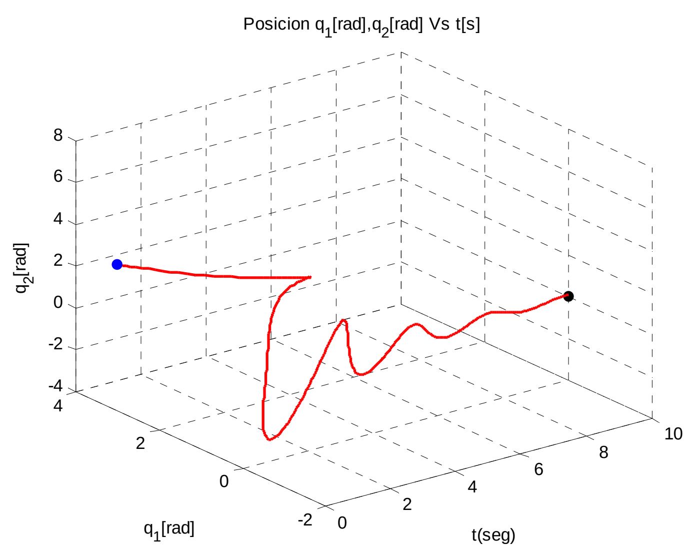

Figura 3.6. Trayectoria de q_1 y q_2 con las condiciones iniciales de la Tabla 3.1.

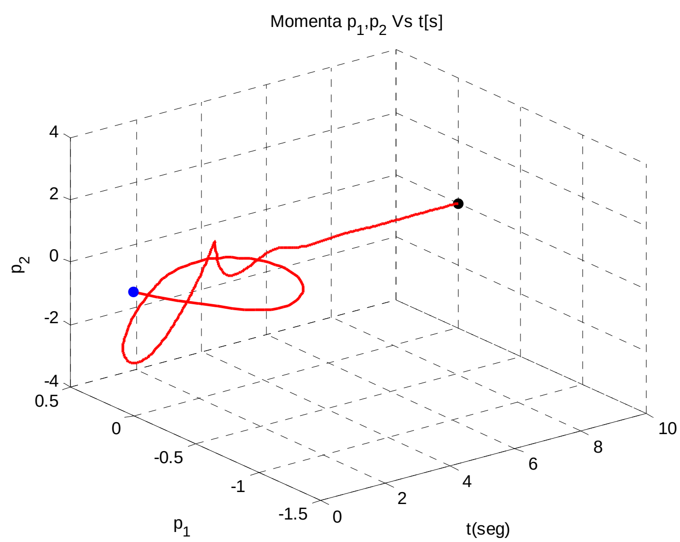

Figura 3.7. Trayectoria de p_1 y p_2, con las condiciones iniciales de la Tabla 3.1.

En la figura (3.8) se observa como converge la trayectoria de q_1 y q_2, de una energía potencial deseada Vd alta a Vd = 0

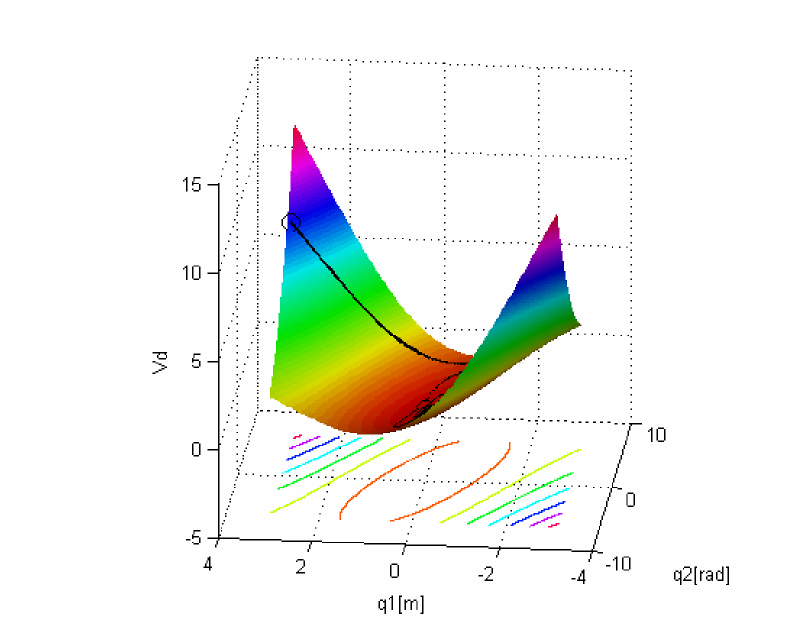

Figura 3.8. Energía potencial deseada,
con las condiciones iniciales de la Tabla 3.1.

En la figura (3.6) se representa la convergencia de la trayectoria de q_1 y q_2, en los diferentes niveles de energía potencial Vd.

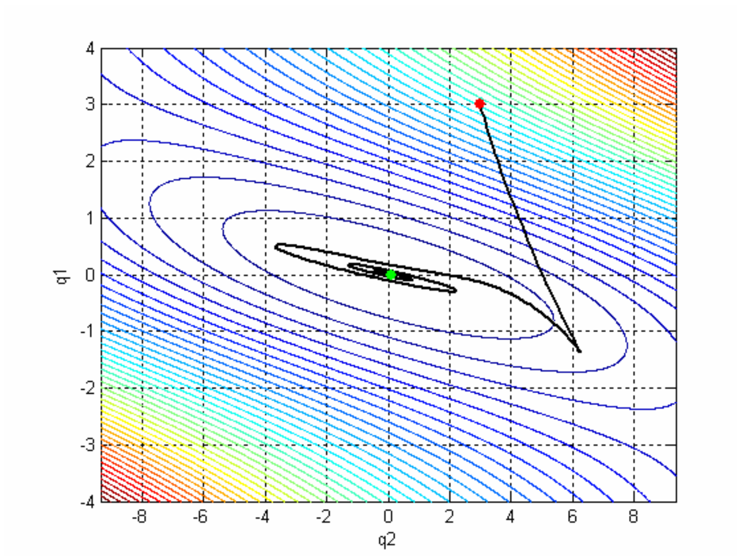

Figura 3.9. Curvas de nivel con las, condiciones iniciales de la Tabla 3.1.

En la figura 3.10 se observa que manteniendo Kv=10 y variando Kp a los valores de 2, 5 y 10 las oscilaciones son más pronunciadas a medida que Kp aumenta.

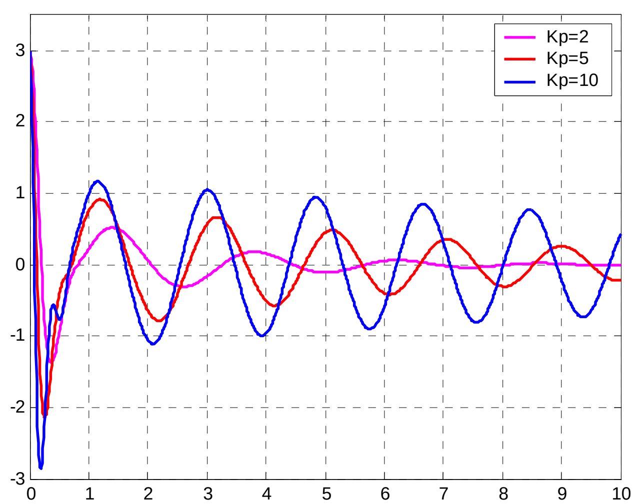

Figura No.3.10. Trayectoria de q_1 con los siguientes parámetros I1=0.1, I2=0.2, I=0.15, m3=10, a1=1, a2=-2, a3=9, Kv=10, Kp=2,5 y 10; $\theta_1=3$, $\theta_2=0.0$, $q_1=\theta_1$, $q_2=\theta_1+\theta_2$

En la figura 3.11 se observa que manteniendo Kp=3 y variando Kv a los valores de 5, 10 y 20 las oscilaciones son menos pronunciadas a medida que Kv aumenta. Se observa también oscilaciones al comienzo cuando Kv = 5.

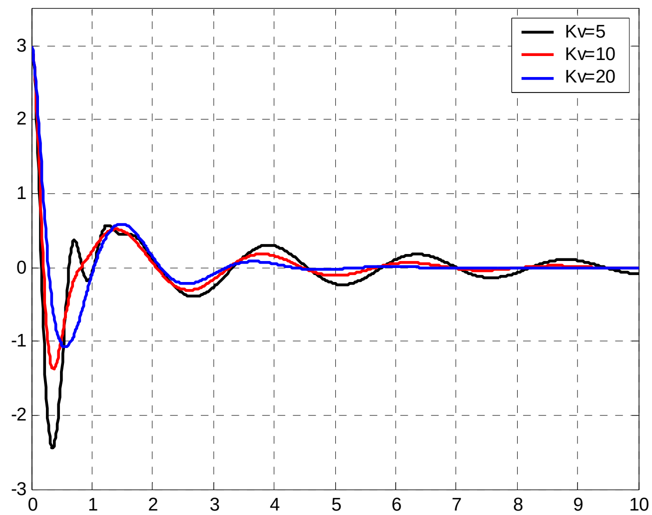

Figura No.3.11 Trayectoria de q_1 con los siguientes parámetros I1=0.1, I2=0.2, I=0.15, m3=10, a1=1, a2=-2, a3=9, Kv=5,10 15 Kp=3; $\theta_1=3$, $\theta_2=0.0$, $q_1=\theta_1$, $q_2=\theta_1+\theta_2$

Con respecto a la energía se puede observar de la figura 3.12 que manteniendo Kv=20 y variando Kp a los valores de 0,5, y 2,0 la energia que presenta el sistema, a través de Hd, aumenta a medida que el Kp aumenta.

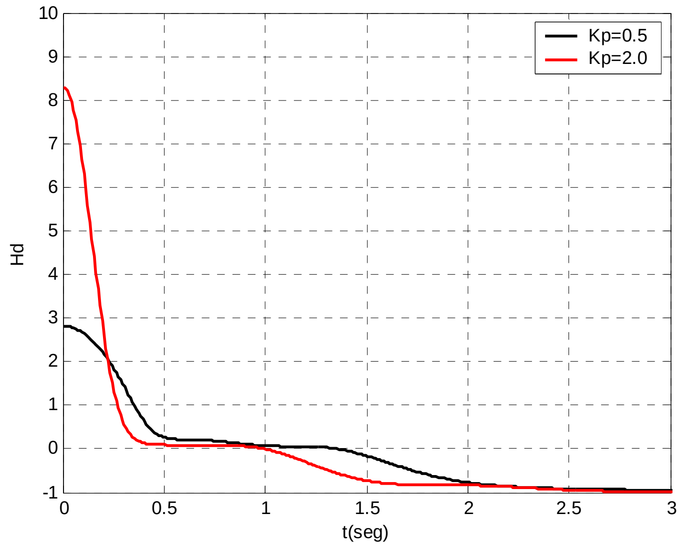

Figura No.3.12. Hd con los siguientes parámetros
I1=0.1, I2=0.2, I=0.15, m3=10, a1=1, a2=-2, a3=9,
Kv=20, Kp=0,5 y 2,0; θ_1=3, θ_2=0.0, $q_1=\theta_1$, $q_2=\theta_1+\theta_2$

CAPITULO IV: CONTROL DEL OSCILADOR TRASLACIONAL CON ACTUADOR ROTACIONAL (TORA) [5]

El sistema TORA (Translational Oscillator with Rotational Actuator), también conocido como RTAC (Rotational Translational Actuator), es un prototipo de sistema mecánico subactuado, que ha merecido gran atención de la comunidad que estudia el tema de control no lineal, y en este capitulo, partiendo de la representación hamiltoniana con puertos controlados basada en la energía total (energía cinética más energía potencial) del sistema, se diseña una ley de control que logra estabilizar en forma global y asintótica el punto de equilibrio, alcanzando un excelente desempeño.

Las simulaciones numéricas mostradas al final del trabajo confirma esta afirmación.

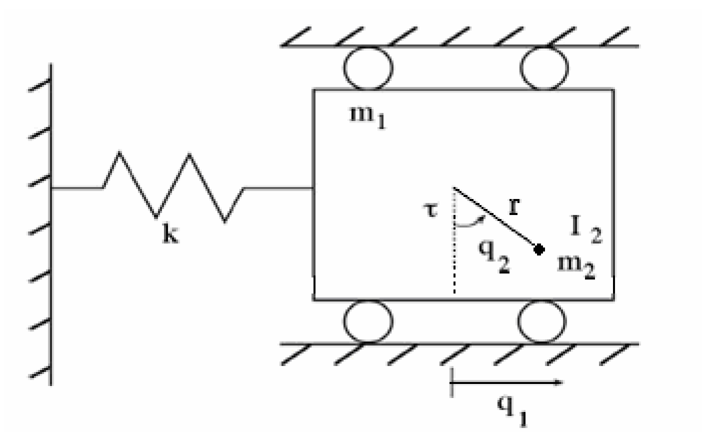

Fig.4.1. Sistema TORA (RTAC)

El oscilador, representado en la figura 4.1, consiste de un carro de masa m_1 conectada a una pared a través de un resorte lineal con una constante “K”. El carro está restringido a una sola dimensión de movimiento horizontal. La masa m_2 de prueba del actuador, con momento de inercia “I”, está acoplado al carro a través de una barra de longitud “r”. El torque τ es el aplicado a la masa de prueba m_2 y se desprecia el deslizamiento que puedan tener las ruedas.

Es decir $\mathbf{q_1}$ **será la variable subactuada** y $\mathbf{q_2}$ **la variable actuada**. La aceleración de gravedad se representa con la letra ¨g¨.

4.1. DINÁMICA DEL SISTEMA TORA

La dinámica del sistema **TORA** se calcula a través de su lagrangiana y las ecuaciones de Euler-Lagrange, tal como sigue:

Dadas la energía cinética y la energía potencial del sistema

$$T(\dot{q}_1,\dot{q}_2)=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{q}_1^2+m_2\cdot r\cdot\dot{q}_1\cdot\dot{q}_2\cdot\cos(q_2)+\frac{1}{2}(m_2\cdot r^2\cdot I)\dot{q}_2^2 \quad (4.1)$$

$$V(q_1,q_2)=\frac{1}{2}\cdot k\cdot q_1^2+m_2\cdot r\cdot g\cdot(1-\cos(q_2)) \quad (4.2)$$

la lagrangiana vendrá dada por:

$$\mathcal{L}(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2)=T(\dot{q}_1,\dot{q}_2)-V(q_1,q_2).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se expresan, tomando en cuenta que el actuador está asociado a la variable q_2, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1}\right]}{\partial t}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1}=0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_2}\right]}{\partial t}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2}=\tau$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1}=-k\cdot q_1 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1}=(m_1+m_2)\dot{q}_1+m_2\cdot r\cdot\dot{q}_2\cdot\cos(q_2) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_1}\right]}{\partial t}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_1}=(m_1+m_2)\ddot{q}_1+m_2\cdot r\cdot\ddot{q}_2\cdot\cos(q_2)-m_2\cdot r\cdot\dot{q}_2^2\cdot\mathrm{sen}(q_2)+K\cdot q_1$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_2}=-m_2\cdot r\cdot\dot{q}_1\cdot\dot{q}_2\cdot\mathrm{sen}(q_2)-m_2\cdot r\cdot g\cdot\mathrm{sen}(q_2) \qquad \wedge$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \cdot r \cdot \dot{q}_1 \cdot \cos(q_2) + \left(m_2 \cdot r^2 \cdot I\right)\dot{q}_2 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial\left[\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right]}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = m_2 \cdot r \cdot \ddot{q}_1 \cdot \cos(q_2) + \left(m_2 \cdot r^2 \cdot I\right)\ddot{q}_2 + m_2 \cdot r \cdot g \cdot sen(q_2)$$

Lo cual describe las ecuaciones de la dinámica del sistema:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\cdot \ddot{q}_1 + m_2 \cdot r \cdot \cos(q_2)\cdot \ddot{q}_2 - m_2 \cdot r \cdot sen(q_2)\cdot \dot{q}_2^{\,2} + K \cdot q_1 = 0 \\ m_2 \cdot r \cdot \cos(q_2)\cdot \ddot{q}_1 + \left(m_2 \cdot r^2 + I\right)\cdot \ddot{q}_2 + m_2 \cdot g \cdot r \cdot sen(q_2) = \tau \end{cases} \tag{4.3}$$

de la observación de (4.3) la matriz de masa inercial viene expresada como:

$$M = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) & m_2 \cdot r \cdot \cos(q_2) \\ m_2 \cdot r \cdot \cos(q_2) & \left(m_2 \cdot r^2 + I\right) \end{bmatrix}$$

realizando el siguiente cambio de variables

$$c_1 = m_1 + m_2 \qquad c_2 = m_2 \cdot r \qquad c_2 = m_2 \cdot r^2 + I$$

se tiene

$$M = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \cdot \cos(q_2) \\ c_2 \cdot \cos(q_2) & c_3 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

cuyo determinante viene dado por:

$$\delta = c_1 \cdot c_3 - c_2^{\,2} \cdot \cos^2(q_2) > 0 \tag{4.5}$$

que para el punto de equilibrio en q_2 se tiene $\cos\left(\overset{*}{q_2}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad c_1 \cdot c_3 - c_2^{\,2} > 0$

Como se puede observar, la matriz de masa inercial (M) depende de la variable actuada (q_2), para simplificar los cálculos se asume que $\mathbf{J_2=0}$ no se podrá aplicar la ecuación (2.21).

La inversa de la matriz de masa inercial (M) vendrá expresada como:

$$M^{-1}\left(q_2\right)=\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} c_3 & -c_2\cdot\cos\left(q_2\right) \\ -c_2\cdot\cos\left(q_2\right) & c_1 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Luego, de (2.6) el hamiltoniano del sistema TORA será:

$$H\left(p,q\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} c_3 & -c_2\cdot\cos\left(q_2\right) \\ -c_2\cdot\cos\left(q_2\right) & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\cdot k\cdot q_1^{\,2}+m_2\cdot g\cdot r\cdot\left(1-\cos\left(q_2\right)\right)$$

desarrollando y utilizando (4.2)

$$V\left(q_1,q_2\right)=\frac{1}{2}\cdot k\cdot q_1^{\,2}+m_2\cdot g\cdot r\cdot\left(1-\cos\left(q_2\right)\right)$$

$$H\left(p,q\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{p_1^{\,2}\cdot c_3}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2\left(q_2\right)}-\frac{p_1\cdot p_2\cdot c_2\cdot\cos\left(q_2\right)}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2\left(q_2\right)}-\frac{p_1\cdot p_2\cdot c_2\cdot\cos\left(q_2\right)}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2\left(q_2\right)}+\frac{p_2^{\,2}\cdot c_1}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2\left(q_2\right)}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\cdot k\cdot q_1^{\,2}+m_2\cdot g\cdot r\cdot\left(1-\cos\left(q_2\right)\right)$$

$$H\left(p,q\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{p_1^{\,2}\cdot c_3-2\cdot p_1\cdot p_2\cdot c_2\cdot\cos\left(q_2\right)+p_2^{\,2}\cdot c_1}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2\left(q_2\right)}\right]+\frac{1}{2}\cdot k\cdot q_1^{\,2}+m_2\cdot g\cdot r\cdot\left(1-\cos\left(q_2\right)\right) \tag{4.7}$$

Por lo tanto, la forma hamiltoniana, ecuaciones (2.2) y (2.3) del sistema TORA, con $G=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^{T}\in\Re^{2\times1}$ y $u\in\Re$, es:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial H(p,q)}{\partial p_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

donde

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H(p,q)}{\partial p_1} \qquad \dot{q}_2 = \frac{\partial H(p,q)}{\partial p_2} \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_1} \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H(p,q)}{\partial q_2} + u$$

Así, la dinámica del TORA en lazo abierto viene dada por:

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{1}{\delta}\left[c_3 \cdot p_1 - c_2 \cdot p_2 \cdot \cos(q_2)\right] \\ \dot{q}_2 = \dfrac{1}{\delta}\left[c_1 \cdot p_2 - c_2 \cdot p_1 \cdot \cos(q_2)\right] \\ \dot{p}_1 = -K \cdot q_1 \\ \dot{p}_2 = -g \cdot r \cdot m_2 \cdot \mathrm{sen}(q_2) \\ \qquad + \dfrac{c_2^2 \cdot \mathrm{sen}(q_2) \cdot \cos(q_2)}{\delta^2} \cdot \left[c_3 \cdot p_1^2 - 2 \cdot c_2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cos(q_2) + c_1 \cdot p_2^2\right] \\ \qquad - \dfrac{c_2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \mathrm{sen}(q_2)}{\delta} + u \end{cases} \tag{4.8}$$

4.2. MOLDEO DE LA ENERGÍA.

El sistema TORA presenta una matriz de masa inercial (M) que sólo depende de la variable actuada, por tal motivo no se puede aplicar el moldeo reducido de la energía (2.21).

Si se define la matriz de masa inercial deseada como una matriz cuyos elementos son constantes, tal como:

$$Md = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad a_1 > 0 \tag{4.9}$$

su inversa será:

$$Md^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} & -\dfrac{a_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \\ -\dfrac{a_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} & \dfrac{a_1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

donde $a_1 \cdot a_3 - a_2{}^2 > 0$,

Como se tiene la energía potencial (**V**), la matriz de masa inercial deseada propuesta (**M$_d$**) y la matriz de masa inercial (**M**) del sistema, se tiene de la ecuación (2.20)

$$G^{\perp}\left\{\nabla_q V(q) - M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q V_d(q)\right\} = 0 \quad \text{donde} \quad G^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sustituyendo (4.6), (4.9), en (2.20)

$$G^{\perp}\left\{\nabla_q V(q) - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\delta}\begin{bmatrix} c_3 & -c_2 \cdot \cos(q_2) \\ -c_2 \cdot \cos(q_2) & c_1 \end{bmatrix} \cdot \nabla_q V_d(q)\right\} = 0$$

$$[1\ \ 0]\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial q_2}\end{bmatrix}-\frac{1}{\delta}\begin{bmatrix}a_1\cdot c_3-a_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2) & a_2\cdot c_1-a_1\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\\ a_2\cdot c_3-a_3\cdot c_2\cdot\cos(q_2) & a_3\cdot c_1-a_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V_d}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial V_d}{\partial q_2}\end{bmatrix}\right\}=0$$

$$[1\ \ 0]\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial V}{\partial q_2}\end{bmatrix}-\frac{1}{\delta}\cdot\begin{bmatrix}\left(a_1c_3-a_2c_2\cdot\cos(q_2)\right)\dfrac{\partial V_d}{\partial q_1}+\left(a_2c_1-a_1c_2\cdot\cos(q_2)\right)\dfrac{\partial V_d}{\partial q_2}\\ \left(a_2c_3-a_3c_2\cdot\cos(q_2)\right)\dfrac{\partial V_d}{\partial q_1}+\left(a_3c_1-a_2c_2\cdot\cos(q_2)\right)\dfrac{\partial V_d}{\partial q_2}\end{bmatrix}\right\}=0$$

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial q_1}-\frac{1}{\delta}\cdot\left[\left(a_1\cdot c_3-a_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\left(a_2\cdot c_1-a_1\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_2}\right]\right\}=0$$

Sustituyendo la ecuación (4.2) de la energía potencial (V) del sistema en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial\left[\frac{1}{2}Kq_1{}^2+m_2gr\cos(q_2)\right]}{\partial q_1}-\frac{1}{\delta}\cdot\left[\left(a_1c_3-a_2c_2\cdot\cos(q_2)\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\left(a_2c_1-a_1c_2\cdot\cos(q_2)\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_2}\right]=0$$

derivando V con respecto a q_1

$$\delta\cdot K\cdot q_1-\left(a_1\cdot c_3-a_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_1}-\left(a_2\cdot c_1-a_1\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=0$$

$$\left(a_1\cdot c_3-a_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\left(a_2\cdot c_1-a_1\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=K\cdot\delta\cdot q_1$$

$$\frac{\left(a_1\cdot c_3-a_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)}{\left(a_2\cdot c_1-a_1\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)}\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=\left[\frac{\delta}{\left(a_2\cdot c_1-a_1\cdot c_2\cdot\cos(q_2)\right)}\right]K\cdot q_1 \qquad (4.11)$$

simplificando la ecuación diferencial parcial, en régimen estacionario, definiendo:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\left(a_1 \cdot c_3 - a_2 \cdot c_2 \cdot \cos\left(q_2\right)\right)}{\left(a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2 \cdot \cos\left(q_2\right)\right)} = \frac{\left(b_3 + b_4 \cdot \cos\left(q_2\right)\right)}{\left(b_1 + b_2 \cdot \cos\left(q_2\right)\right)}$$

donde $\qquad b_1 = a_2 \cdot c_1 \qquad b_2 = -a_1 \cdot c_2 \qquad b_3 = a_1 \cdot c_3 \qquad b_4 = -a_2 \cdot c_2 \qquad$ (4.12)

evaluando en cero y tratando de simplificar el resultado

$$\left.\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right|_{q=0} = \frac{\left(a_1 \cdot c_3 - a_2 \cdot c_2\right)}{\left(a_2 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2\right)} = \frac{\left(b_3 + b_4\right)}{\left(b_1 + b_2\right)} = \frac{b_4}{b_2} \Leftrightarrow b_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot b_4 = 0 \qquad (4.13)$$

Sustituyendo (4.12) en (4.13)

$$b_2 b_3 - b_1 b_4 = \; a_1 \cdot c_2 \cdot a_1 \cdot c_3 + a_2 \cdot c_1 \cdot a_2 \cdot c_2 = \; a_1^{\,2} \cdot c_3 + a_2^{\,2} \cdot c_1 = 0$$

despejando a_2, se tiene entonces, que el elemento a_2 de la matriz de masa inercial deseada es:

$$a_2 = \pm\, a_1 \cdot \sqrt{\frac{c_3}{c_1}} = \pm \alpha \cdot a_1 \qquad (4.14)$$

Sustituyendo la ecuación (4.14) en la (4.11)

$$\frac{\left(a_1 \cdot c_3 - \sqrt{\frac{c_3}{c_1}} \cdot a_1 \cdot c_2 \cdot \cos\left(q_2\right)\right)}{\left(\sqrt{\frac{c_3}{c_1}} a_1 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2 \cdot \cos\left(q_2\right)\right)} \frac{\partial V_d}{\partial q_1} + \frac{\partial V_d}{\partial q_2} = \left[\frac{\delta}{\left(\sqrt{\frac{c_3}{c_1}} a_1 \cdot c_1 - a_1 \cdot c_2 \cdot \cos\left(q_2\right)\right)}\right] K \cdot q_1$$

Eliminando las a_1 del primer miembro y hallando el factor común del segundo

$$\frac{\left(c_3-\sqrt{\frac{c_3}{c_1}}c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}{\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=\left[\frac{\delta}{a_1\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}\right]K\cdot q_1$$

Si se toma como factor común $\sqrt{c_3/c_1}$, se tendrá que:

$$\sqrt{\frac{c_3}{c_1}}\frac{\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}{\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=\left[\frac{\delta}{a_1\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}\right]K\cdot q_1$$

$$\sqrt{\frac{c_3}{c_1}}\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=\left[\frac{c_3\cdot c_1-c_2^2\cdot\cos^2\left(q_2\right)}{a_1\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}\right]Kq_1$$

Puesto que

$$c_3\cdot c_1-c_2^2\cdot\cos^2\left(q_2\right)=\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}+c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{c_3}{c_1}}\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=\left[\frac{\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)\cancel{\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}+c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}}{a_1\cancel{\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}-c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)}}\right]\cdot K\cdot q_1$$

$$\sqrt{\frac{c_3}{c_1}}\frac{\partial V_d}{\partial q_1}+\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=\frac{K}{a_1}\left(\sqrt{c_3\cdot c_1}+c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)\cdot q_1$$

Finalmente se obtiene la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{q_1}\right)\cdot\frac{\partial V_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_1}+\left(\frac{1}{q_1}\right)\cdot\frac{\partial V_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2}=\frac{K}{a_1}\left(\sqrt{c_1\cdot c_3}+c_2\cdot\cos\left(q_2\right)\right)} \qquad (4.15)$$

El cual resolviendo con el lenguaje simbólico, Maple® (Versión 10), se tiene

$$V_d = \left(\frac{K}{a_1}\cdot\sqrt{c_1\cdot c_3}\cdot q_2 + \frac{K}{a_1}c_2\cdot \operatorname{sen}(q_2)\right)q_1 - \frac{1}{2}\frac{K}{a_1}\cdot\sqrt{c_3 c_1}\cdot q_2^2\cdot\alpha + \frac{K}{a_1}\cdot\alpha\cdot c_2\cdot\cos(q_2) + \phi(z)$$

donde $\phi(z)$ es una función arbitraria de variable $z = \left(\frac{\alpha\cdot q_2 - q_1}{\alpha}\right)$

$$V_d = \frac{K}{2a_1}\cdot\sqrt{c_1\cdot c_3}\cdot\left(2\cdot q_1\cdot q_2 - \alpha\cdot q_2^2\right) + \frac{K}{a_1}c_2\left(\alpha\cdot\cos(q_2) + q_1\cdot \operatorname{sen}(q_2)\right) + \phi\left(\frac{\alpha\cdot q_2 - q_1}{\alpha}\right)$$

Puesto que:

$$\left(2\cdot q_1\cdot q_2 - \alpha\cdot q_2^2\right) = \frac{1}{\alpha}\left[q_1^2 - \left(q_1 - \alpha q_2\right)^2\right]$$

$$V_d = \frac{K}{2\cdot\alpha\cdot a_1}\cdot\sqrt{c_1\cdot c_3}\cdot\left[q_1^2 - \left(q_1 - \alpha q_2\right)^2\right] + \frac{K}{a_1}c_2\left(\alpha\cdot\cos(q_2) + q_1\cdot \operatorname{sen}(q_2)\right) + \phi\left(\frac{\alpha\cdot q_2 - q_1}{\alpha}\right)$$

Siendo $\phi(z)$ una función arbitraria diferenciable de **z,** esta función debe ser escogida para asegurar la asignación del punto de equilibrio, es decir, para satisfacer que q*=arg min Vd(q) con q*=0. Por otra parte, para que el sistema sea estable debe satisfacerse la condición de que $\nabla_q V_d(q_r) = 0$, esto se satisface si y solo si se mantiene la segunda derivada de la forma cuadrática respecto de ϕ (Hess(V_d) Matriz Hessiana) positiva el origen ($\mathrm{Hess(Vd)} > 0$).

Observándose que si se emplea como la función $\phi(z)$ la misma **z**, se tiene que su $\nabla_q V_d(q_r) \neq 0$ y que su hessiana Hess(V_d)=0**,** por tanto se propone sea

$$\phi(z) = \beta\left(\frac{\alpha\cdot q_2 - q_1}{\alpha}\right)^2 = \frac{\beta}{\alpha^2}\left(\alpha\cdot q_2 - q_1\right)^2 = \frac{K_p}{2}\left(q_1 - \alpha\cdot q_2\right)^2$$

donde K_p es un parámetro constante.

El gradiente de la energía potencial deseada $\nabla_q V_d(q)$, para la nueva V_d propuesta es:

$$\nabla_q\left(V_d(q_1,q_2)\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V_d}{\partial q_1} & \dfrac{\partial V_d}{\partial q_2}\end{bmatrix}^T \tag{4.16}$$

siendo la derivada de V_d, con respecto a q_1 y q_2, las expresadas en (4.17) y (4.18) respectivamente.

$$\frac{\partial V_d}{\partial q_1}=\frac{K}{a_1}\operatorname{sen}(q_2)c_2+\frac{K}{a_1}\sqrt{c_1c_3}\,q_2+K_p\cdot\left(q_1-\alpha q_2\right) \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial V_d}{\partial q_2}=\frac{K}{a_1}\cdot\sqrt{c_3\cdot c_1}\left[\left(q_1-\alpha\cdot q_2\right)\right]+\frac{K}{a_1}\cdot c_2\cdot\left[q_1\cdot\cos\left(q_2\right)-\alpha\cdot\operatorname{sen}\left(q_2\right)\right]-K_p\cdot\alpha\cdot\left(q_1-\alpha q_2\right) \tag{4.18}$$

así la ecuación (4.16) será:

$$\nabla_q\left(V_d(q)\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V_d}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial V_d}{\partial q_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{K}{a_1}\operatorname{sen}(q_2)\cdot c_2+\dfrac{K}{a_1}\sqrt{c_1\cdot c_3}\cdot q_2+K_p\cdot\left(q_1-\alpha\cdot q_2\right)\\ \dfrac{K}{a_1}\sqrt{c_3\cdot c_1}\left[\left(q_1-\alpha\cdot q_2\right)\right]+\dfrac{K}{a_1}c_2\left[q_1\cdot\cos\left(q_2\right)-\alpha\cdot\operatorname{sen}\left(q_2\right)\right]-K_p\cdot\alpha\cdot\left(q_1-\alpha\cdot q_2\right)\end{bmatrix}$$

Para lo cual, evaluada en q_1=0 q_2=0 se tiene que $\nabla_q\left(V_d(q)\right)\Big|_{q=0}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

Seguidamente se calcula el determinante de la hessiana $\operatorname{Det}\left[\operatorname{Hess}\left(V_d\right)\right]$

$$\frac{\partial^2 V_d}{\partial {q_1}^2}=K_p \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial^2 V_d}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{K}{a_1}\cos(q_2)c_2+\frac{K}{a_1}\sqrt{c_3c_1}-\alpha\cdot K_p \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial^2 V_d}{\partial q_2{}^2} = -\frac{\alpha K}{a_1}\sqrt{c_3 c_1} + \frac{K}{a_1} c_2 \left[-\alpha \cdot \cos(q_2) - q_1 \cdot \operatorname{sen}(q_2) \right] + K_p \cdot \alpha^2 \qquad (4.21)$$

Siendo el determinante de la matriz hessiana (2.56)

$$\operatorname{Det}\left[\operatorname{Hess}(V_d)\right] = \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_2{}^2} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\frac{K\left(K_p a_1\left(\sqrt{c_1 c_3}\cdot\alpha + c_2\left(\alpha\cos(q_2) - \operatorname{sen}(q_2) q_1\right)\right) - K\left(c_1 c_3 + \cos(q_2) c_2\left(\cos(q_2) c_2 + 2\sqrt{c_1 c_3}\right)\right)\right)}{a_1{}^2}$$

Evaluando el determinante para $q_1=0$ y $q_2=0$ se tiene:

$$\operatorname{Det}\left[\operatorname{Hess}(V_d)\right]\Big|_{q=0} =$$

$$\frac{K}{a_1{}^2}\left(K_p \cdot a_1\sqrt{c_1 \cdot c_3}\cdot\alpha + K_p \cdot a_1 \cdot c_2 \cdot \alpha - K \cdot c_2{}^2 - 2 \cdot K \cdot c_2 \cdot \sqrt{c_1 \cdot c_3} - K \cdot c_1 \cdot c_3\right)$$

$$\frac{K}{a_1{}^2}\left(K_p \cdot a_1 \cdot \sqrt{c_1 \cdot c_3}\cdot\alpha + K_p \cdot a_1 \cdot c_2 \cdot \alpha - K \cdot c_1 \cdot c_3 - 2 \cdot K \cdot \sqrt{c_1 \cdot c_3}\cdot c_2 - K \cdot c_2{}^2\right) > 0$$

$$K_p \cdot a_1 \cdot \alpha \cdot \left(\sqrt{c_1 \cdot c_3} + c_2\right) - K\left(c_2{}^2 + 2\sqrt{c_1 \cdot c_3}\cdot c_2 + c_1 \cdot c_3\right) > 0$$

$$K_p \cdot > \frac{K}{a_1 \cdot \alpha}\frac{\left(c_2{}^2 + 2\sqrt{c_1 \cdot c_3}\cdot c_2 + c_1 \cdot c_3\right)}{\left(\sqrt{c_1 \cdot c_3} + c_2\right)} = \frac{K}{a_1 \cdot \alpha}\frac{\left(\sqrt{c_1 \cdot c_3} + c_2\right)\left(\sqrt{c_1 \cdot c_3} + c_2\right)}{\left(\sqrt{c_1 \cdot c_3} + c_2\right)}$$

$$K_p > \frac{K}{a_1 \cdot \alpha}\left(\sqrt{c_1 \cdot c_3} + c_2\right) \qquad (4.22)$$

Nótese que el elemento $\operatorname{Det}\left[\operatorname{Hess}(V_d)\right]\Big|_{(1,1)} = R > 0$ para lo cual se puede concluir que:

(i) $K_p > 0$ $\quad$ (ii) $K_p > \dfrac{K}{a_1 \cdot \alpha}\left(\sqrt{c_1 \cdot c_3} + c_2\right)$ $\quad$ (iii) $K > 0$

luego, una vez justificada con este análisis, se puede asegurar que la energía potencial deseada, Vd, es la siguiente:

$$V_d = \frac{K}{a_1}\left[\frac{\sqrt{c_3 \cdot c_1}}{2 \cdot \alpha}\left[q_1^2 - \left(q_1 - \alpha q_2\right)^2\right] + c_2\left[\alpha \cdot \cos\left(q_2\right) + q_1 \cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right)\right]\right] + \frac{Kp}{2}\left(q_1 - \alpha q_2\right)^2 \tag{4.23}$$

En la figura 3.2.2 puede observarse la gráfica de Vd versus q_1 y q_2 para un a_1=1.0, α=0,58, K=0.2, Kv=12.64 y I=8.84, la cual presenta un mínimo aislado, por lo tanto se garantiza la estabilidad.

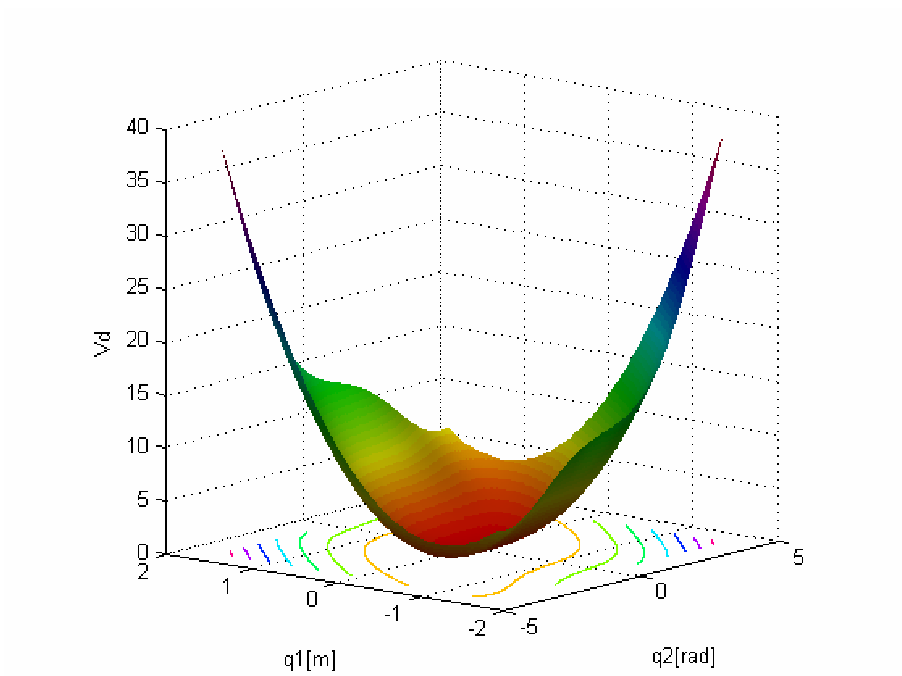

Fig. 4.2. Moldeo de energía potencial Vd para a_1=1.0, α=0,58, K=0.2, Kv=12.64 y I=8.84

4.3. CONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTROL (u):

Para hallar la ecuación que rige el control se utiliza las ecuaciones (2.15) y (2.16), dadas a continuación:

$$u_{es} = \left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(\nabla_q H - M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q H_d + J_2 \cdot M_d^{-1} \cdot p\right)$$
$$u_{di} = -Kv \cdot G^{T} \cdot \nabla_p H_d \text{ donde } u = u_{es} + u_{di}$$

(a) Cálculos de u_{es}

Se halla uno a uno los términos de la ecuación (2.15), para luego sumarlos algebraicamente.

$$u_{es} = \underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(\nabla_q H\right)}_{\text{TERMINO 01}} - \underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q H_d\right)}_{\text{TERMINO 02}} + \underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(J_2 \cdot M_d^{-1} \cdot p\right)}_{\text{TERMINO 03}}$$

donde si $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow G^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ siendo $\left(G^{T} \cdot G\right)^{-1} \cdot G^{T} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

- ✓ **Término 01.**

Partiendo de la ecuación de Hamilton del sistema (4.7) dada a continuación:

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\left[\frac{p_1^{2} \cdot c_3 - 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot c_2 \cdot \cos(q_2) + p_2^{2} \cdot c_1}{c_1 \cdot c_3 - c_2^{2} \cdot \cos^{2}(q_2)}\right] + \frac{1}{2} \cdot K \cdot q_1^{2} + m_2 \cdot g \cdot r \cdot \left(1 - \cos(q_2)\right)$$

se tiene que:

$$\underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(\nabla_q H\right)}_{\text{TERMINO 01}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial H(q_1,q_2)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial H(q_1,q_2)}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial H(q_1,q_2)}{\partial q_2}$$

Finalmente el término 01 es hallado y presenta la siguiente forma:

$$\underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(\nabla_{q}H\right)}_{\text{TERMINO 01}}=$$

$$-\frac{c_2{}^2\operatorname{sen}(q_2)\cos(q_2)}{\left(c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)\right)^2}\left[c_3\cdot p_1{}^2-2\cdot p_1\cdot p_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2)+c_1\cdot p_2{}^2\right] \tag{4.24}$$

$$+m_2\cdot g\cdot r\cdot\operatorname{sen}(q_2)+\frac{c_3\cdot p_1\cdot p_2\cdot\operatorname{sen}(q_2)}{\left(c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)\right)}$$

- ✓ **Término 02**

Del segundo término de la ecuación (2.15) se observa que es necesario el cálculo del hamiltoniano deseado, luego de (2.7) se tiene que:

$$H_d(p,q)=\frac{1}{2}p^{T}\cdot M_d{}^{-1}\cdot p+V_d(q_1,q_2)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}\cdot M_d{}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}p+V_d(q_1,q_2)$$

Sustituyendo (4.10) en (2.7)

$$H_d(p,q)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{a_3}{a_1\cdot a_3-a_2^2} & -\dfrac{a_2}{a_1\cdot a_3-a_2^2}\\[2ex] -\dfrac{a_2}{a_1\cdot a_3-a_2^2} & \dfrac{a_1}{a_1\cdot a_3-a_2^2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}+V_d(q_1,q_2)$$

$$H_d(p,q)=\frac{1}{2}\left[\frac{a_3\cdot p_1{}^2-2\cdot a_2\cdot p_1\cdot p_2+a_1\cdot p_2{}^2}{a_1\cdot a_3-a_2^2}\right]+V_d(q_1,q_2) \tag{4.25}$$

Sustituyendo la ecuación (4.23) de la energía potencial deseada (Vd), en la ecuación (4.25) se obtiene el hamiltoniano deseado:

$$H_d(p,q)=\frac{1}{2}\left[\frac{a_3\cdot p_1^2-2\cdot a_2\cdot p_1\cdot p_2+a_1\cdot p_2^2}{a_1\cdot a_3-a_2^2}\right]+\frac{K}{2\alpha a_1}\sqrt{c_3\cdot c_1}\left[q_1^2-\left(q_1-\alpha q_2\right)^2\right]$$
$$+\frac{K}{a_1}c_2\left[\alpha\cdot\cos(q_2)+q_1\cdot\operatorname{sen}(q_2)-\alpha\right]+\frac{K_p}{2}\left(q_1-\alpha q_2\right)^2 \tag{4.26}$$

Como se observa de la ecuación (4.26), el hamiltoniano deseado sólo depende de q_1 y q_2 en el término que corresponde a su energía potencial deseada, por tanto se puede aseverar que:

$$\underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q H_d\right)}_{\text{TERMINO 02}}=\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q \mathbf{V}_d\right)$$

$$\underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q H_d\right)}_{\text{TERMINO 02}}=$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{c_3}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)} & -\dfrac{c_2\cdot\cos(q_2)}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)}\\ -\dfrac{c_2\cdot\cos(q_2)}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)} & \dfrac{c_1}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_1}\\ \dfrac{\partial V_d(p,q)}{\partial q_2}\end{bmatrix}=$$

$$\underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q H_d\right)}_{\text{TERMINO 02}}=$$
$$-\left[\frac{a_3\cdot c_1-a_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2)}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)}\right]$$
$$\times\left[\frac{K\cdot c_2\cdot\left(q_1\cos(q_2)-\alpha\operatorname{sen}(q_2)\right)}{a_1}-K_p\cdot\alpha\left(q_1-\alpha q_2\right)+\frac{K\sqrt{c_1\cdot c_3}}{a_1}\left(q_1-\alpha q_2\right)\right] \tag{4.27}$$
$$-\left[\frac{a_2\cdot c_3-a_3\cdot c_2\cos(q_2)}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)}\right]\left[\frac{K\cdot c_2\cdot\operatorname{sen}(q_2)}{a_1}+K_p\cdot\left(q_1-\alpha q_2\right)+\frac{K\cdot q_2\cdot\sqrt{c_1\cdot c_3}}{a_1}\right]$$

- **Término 03.**

Se tiene que la matriz de masa inercial está compuesta por elementos constantes al igual que la matriz de masa inercial deseada entonces la matriz de interconexión se considera nula ($J_2=0$), para lo cual el tercer término $\left(G^{\top}G\right)^{-1}G^{\top}\cdot J_2\cdot M_d^{-1}\cdot p$ será nulo.

$$\left(G^{\top}G\right)^{-1}G^{\top}\cdot J_2\cdot M_d^{-1}\cdot p=0 \tag{4.28}$$

Para obtener la ecuación de control debido al moldeo de energía u_{es}, se suman algebraicamente los términos 01, 02 y 03 de la ecuación (4.24), (4.27) y (4.28) tal como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{es} ={}& \\
&-\frac{c_2{}^2 sen(q_2)\cos(q_2)}{\left(c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)\right)^2}\left[c_3\cdot p_1{}^2-2\cdot p_1\cdot p_2\cdot c_2\cdot\cos(q_2)+c_1\cdot p_2{}^2\right]\\
&+m_2\cdot g\cdot r\cdot sen(q_2)+\frac{c_3\cdot p_1\cdot p_2\cdot sen(q_2)}{\left(c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)\right)}\\
&-\left[\frac{a_3c_1-a_2c_2\cos(q_2)}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)}\right]\left[\frac{K\cdot c_2\left(q_1\cos(q_2)-\alpha sen(q_2)\right)}{a_1}-K_p\cdot\alpha\left(q_1-\alpha q_2\right)+\frac{K\sqrt{c_1\cdot c_3}}{a_1}\left(q_1-\alpha q_2\right)\right]\\
&-\left[\frac{a_2c_3-a_3c_2\cos(q_2)}{c_1\cdot c_3-c_2^2\cdot\cos^2(q_2)}\right]\left[\frac{K\cdot c_2\cdot sen(q_2)}{a_1}+K_p\cdot\left(q_1-\alpha q_2\right)+\frac{K\cdot q_2\cdot\sqrt{c_1\cdot c_3}}{a_1}\right]
\end{aligned} \tag{4.29}$$

(b) Cálculos de u_{di}

La ecuación de control debida a la inyección de amortiguamiento viene dada por la ecuación (2.16)

$$u_{di}=-Kv\cdot G^{\top}\cdot\nabla_p H_d=-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}Kv\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H_d}{\partial p_1}\\ \dfrac{\partial H_d}{\partial p_2}\end{bmatrix}=$$

donde el hamiltoniano deseado se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$H_d(p,q) = \frac{1}{2}\left[\frac{a_3 \cdot p_1^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} - \frac{2 \cdot a_2 \cdot p_1 \cdot p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} + \frac{a_1 \cdot p_2^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] + V_d(q_1, q_2)$$

luego $\nabla_p H_d$ vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_d}{\partial p_1} \\ \frac{\partial H_d}{\partial p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\left[\frac{1}{2}\left[\frac{a_3 p_1^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} - \frac{2a_2 p_1 p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} + \frac{a_1 p_2^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] + V_d(q_1, q_2)\right]}{\partial p_1} \\ \frac{\partial\left[\frac{1}{2}\left[\frac{a_3 p_1^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} - \frac{2a_2 p_1 p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} + \frac{a_1 p_2^2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\right] + V_d(q_1, q_2)\right]}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{a_3 p_1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} - \frac{a_2 p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \\ -\frac{a_2 p_1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} + \frac{a_1 p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \end{bmatrix}$$

siendo la ecuación de control por inyección de amortiguamiento la siguiente:

$$u_{di} = -Kv \cdot G^T \cdot \nabla_p H_d = -Kv\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_3 p_1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} - \frac{a_2 p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \\ -\frac{a_2 p_1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} + \frac{a_1 p_2}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2} \end{bmatrix}$$

$$u_{di} = -Kv \frac{1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\left[a_1 \cdot p_2 - a_2 \cdot p_1\right] \qquad (4.30)$$

Finalmente se puede obtener de (4.29) y (4.30) la ecuación de control total:

$$u = u_{es} + u_{di}$$

$$\mathbf{u} =$$

$$-\frac{c_2{}^2 \operatorname{sen}(q_2)\cos(q_2)}{\left(c_1 \cdot c_3 - c_2^2 \cdot \cos^2(q_2)\right)^2}\left[c_3 \cdot p_1{}^2 - 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot c_3 \cdot \cos(q_2) + c_1 \cdot p_2{}^2\right] \tag{4.31}$$

$$+\frac{1}{2} g \cdot K \cdot r \cdot \operatorname{sen}(q_2) + \frac{c_3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \operatorname{sen}(q_2)}{\left(c_1 \cdot c_3 - c_2^2 \cdot \cos^2(q_2)\right)}$$

$$-\left[\frac{a_3 c_1 - a_2 c_2 \cos(q_2)}{c_1 \cdot c_3 - c_2^2 \cdot \cos^2(q_2)}\right]$$

$$\times\left[\frac{k \cdot c_2\left(q_1 \cos(q_2) - \alpha \operatorname{sen}(q_2)\right)}{a_1} - Kp \cdot \alpha\left(q_1 - \alpha q_2\right) + \frac{K\sqrt{c_1 \cdot c_3}}{a_1}\left(q_1 - \alpha q_2\right)\right]$$

$$-\left[\frac{a_2 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2)}{c_1 \cdot c_3 - c_2^2 \cdot \cos^2(q_2)}\right]\left[\frac{k \cdot c_2 \cdot \operatorname{sen}(q_2)}{a_1} + Kp \cdot \left(q_1 - \alpha q_2\right) + \frac{k \cdot q_2 \cdot \sqrt{c_1 \cdot c_3}}{a_1}\right]$$

$$-Kv \frac{1}{a_1 \cdot a_3 - a_2^2}\left[a_1 \cdot p_2 - a_2 \cdot p_1\right]$$

4.4. RESULTADOS DEL SISTEMA DEL TORA.

En la figura (4.3) se presentan los resultados de la simulación del sistema mecánico con rueda inercial. A fin de ilustrar la naturaleza global de la Ley de control obtenida en la ecuación (4.31), se presenta una simulación donde la variable q_1=3.00 m. y q_2=0.00 rad hasta la posición q_1=0.00 m. y q_2=0.00 rad.

Tabla 4.1. Condiciones Iniciales para el Sistema TORA		
r =0.3 m	m_1=2.0 Kg	m_2=0.5 Kg
g =9.8 m/s^2	I =0.05 Kg.m^2	K =0.2
Kv= 10.0	a_1=1	$a_2=\alpha^2\times a1$
$a_3=\alpha^2\times$ a1+0.1	c1= m_1+m_2	c_2= m_2*r
c_3= $m_2\times r^2$+I	α=sqrt(c_3/c_1)	q_1=0.3 m.
q_2=0.0 rad.	p_1=0.0	p_2=0.0

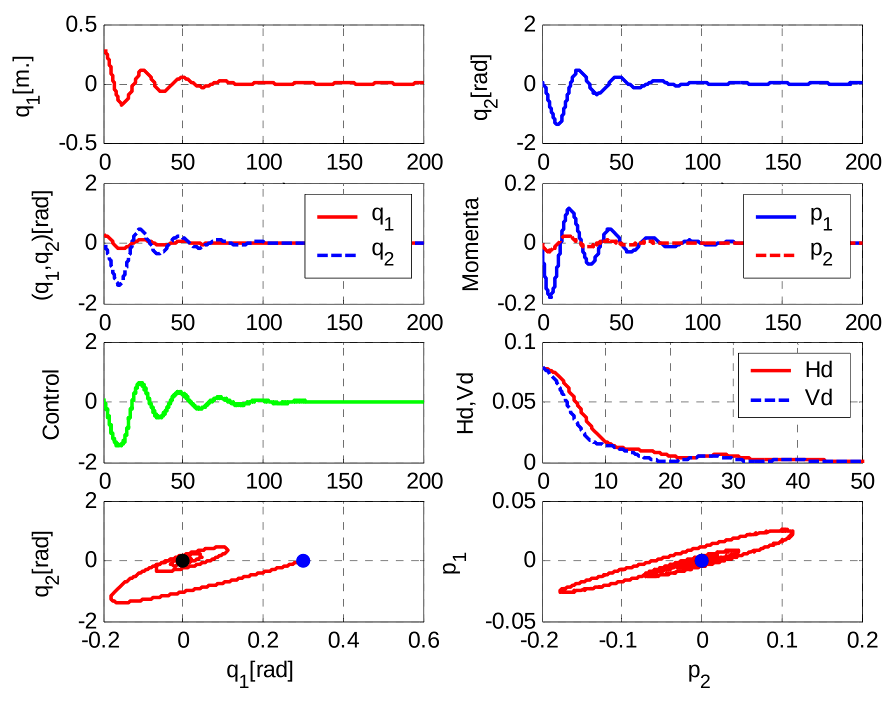

Figura 4.3. Trayectoria para el TORA, con las condiciones iniciales de la Tabla 4.1.

De las figuras (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6) se observa que la convergencia se preserva tal como predice la teoría.

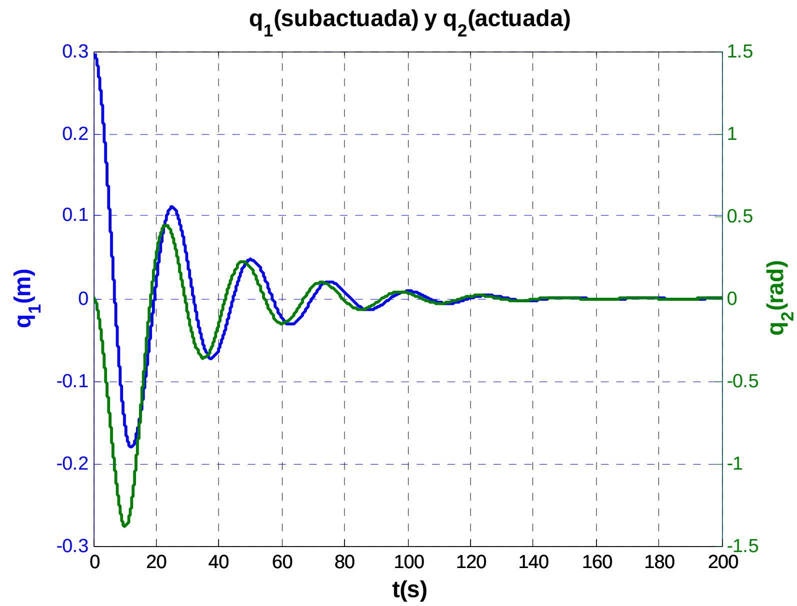

Figura 4.4. Detalle de la Trayectoria q_1 y q_2 de la figura 4.3.

En la figura (4.5) se observa como converge la trayectoria de q_1 y q_2, de una energía potencial deseada Vd alta a Vd mínima.

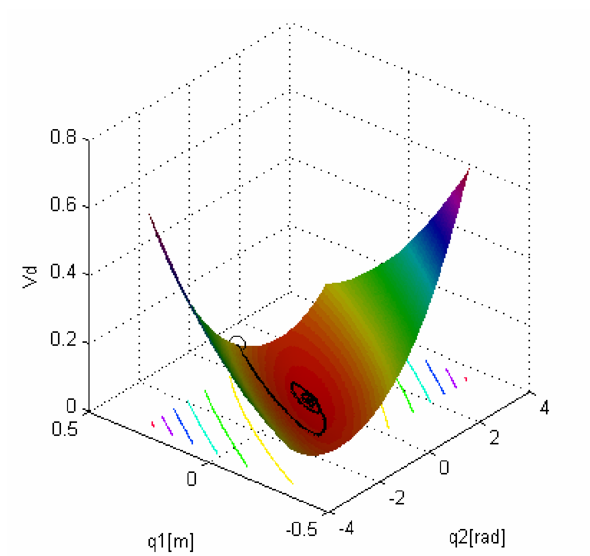

Figura 4.5. Energía H_d con Trayectoria q_1 y q_2 para el TORA, con las condiciones iniciales de la Tabla 4.1.

En la figura (4.6) se representa la convergencia de la trayectoria de q_1 y q_2, en los diferentes niveles de energía potencial Vd.

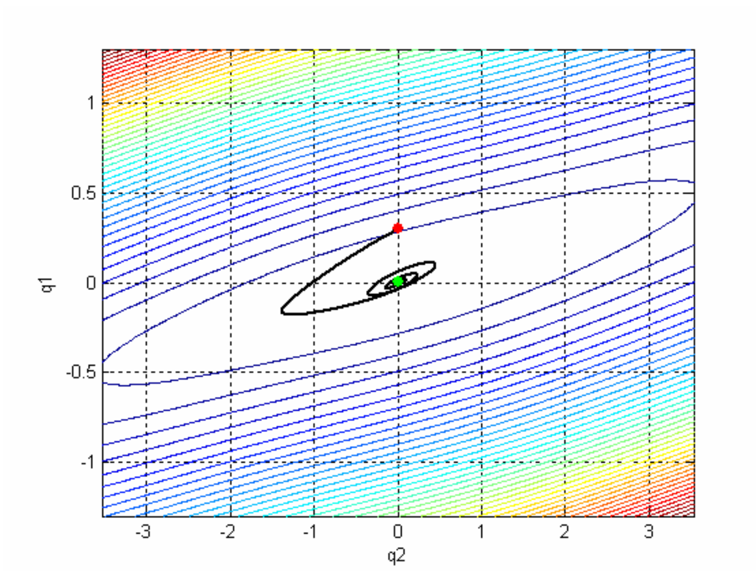

Figura 4.6. Curvas de Nivel para el TORA, con las condiciones iniciales de la Tabla 4.1.

CAPITULO V: SISTEMA BOLA EN LA VIGA [1].

El sistema Bola en la Viga ("Ball and Beam System"), representado en la figura 5.1., es un sistema formado por una viga basculante y una bola que corre libremente en su parte superior, la viga tiene un motor actuador en el centro de la misma, por lo que la *variable actuada* (ángulo de la viga) es q_2 y la posición de la bola (distancia del centro de la bola al centro de la viga) será la *variable subactuada* q_1.

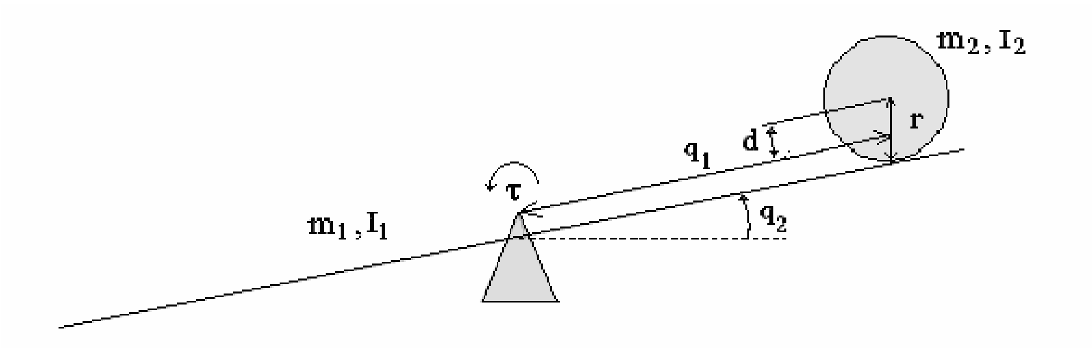

Fig. 5.1 Sistema Bola en la Viga

5.1. DINÁMICA DEL SISTEMA "BOLA EN LA VIGA"

De la figura 5.1, donde **I₁** e **I₂** representan el momento de inercia de la viga y la bola respectivamente, siendo **m₁** la masa de la viga y **m₂** la masa de la bola. Se tiene, entonces, que la posición y velocidad del centro de masa de la bola es:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_{cm} \\ y_{cm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cdot\cos(\theta) - d\cdot\operatorname{sen}(\theta) \\ x\cdot\operatorname{sen}(\theta) + d\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix} \upsilon_c \\ \begin{bmatrix} \upsilon_{cmx} \\ \upsilon_{cmy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon\cdot\cos(\theta) - x\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\omega - d\cdot\cos(\theta)\omega \\ \upsilon\cdot\operatorname{sen}(\theta) + x\cdot\cos(\theta)\cdot\omega - d\cdot\operatorname{sen}(\theta)\omega \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{matrix} \dot{x} = \upsilon \\ \dot{\theta} = \omega \\ \upsilon_{cm} = \omega\cdot R \end{matrix}$$

Si υ es la velocidad lineal de la esfera sobre el plano y ω la velocidad angular la energía cinética translacional viene expresada por:

$$K_{trans} = \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\upsilon_c^2 = \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot\left(\upsilon_{cmx}^2 + \upsilon_{cmy}^2\right) \text{ sustituyendo}$$

$$K_{trans} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot$$

$$\left[\left(\upsilon \cdot \cos(\theta) - x \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \omega - d \cdot \cos(\theta)\omega\right)^2 + \left(\upsilon \cdot \operatorname{sen}(\theta) + x \cdot \cos(\theta) \cdot \omega - d \cdot \operatorname{sen}(\theta)\omega\right)^2\right]$$

desarrollando:

$$K_{trans} = x^2 \cdot \omega^2 + (\upsilon - d \cdot \omega)^2 = x^2 \cdot \omega^2 + \upsilon^2 - 2\upsilon \cdot d \cdot \omega + d^2 \cdot \omega^2 = \upsilon^2 + \left(x^2 + d^2\right) \cdot \omega^2 - 2 \cdot d \cdot \omega \cdot \upsilon$$

$$K_{trans} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \upsilon_c^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\upsilon^2 + \left(x^2 + d^2\right)\omega^2 - 2 \cdot d \cdot \omega \cdot \upsilon\right)$$

$$\text{Si} \quad \upsilon = \dot{x} \quad \omega = \dot{\theta} \quad \Rightarrow$$

$$K_{trans} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \upsilon_c^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\dot{x}^2 + \left(x^2 + d^2\right)\dot{\theta}^2 - 2 \cdot d \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x}\right)$$

La **energía cinética rotacional** viene dada por:

$K_{rot} = \frac{1}{2} \cdot (I_1 + I_2) \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot I_2 \cdot \omega^2$ puesto que $\omega = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega = \frac{\dot{x}}{R}$ se tiene que

$$K_{rot} = \frac{1}{2} \cdot (I_1 + I_2) \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot I_2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

Luego la **energía cinética total** será:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\dot{x}^2 + \left(x^2 + d^2\right)\dot{\theta}^2 - 2 \cdot d \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x}\right) + \frac{1}{2} \cdot (I_1 + I_2) \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot I_2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(x^2 + d^2\right)\dot{\theta}^2 - m_2 \cdot d \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x} + \frac{1}{2} \cdot (I_1 + I_2) \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot I_2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(x^2 + d^2\right)\dot{\theta}^2 - m_2 \cdot d \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x} + \frac{1}{2} \cdot (I_1 + I_2) \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{x}^2 \cdot \left(\frac{I_2}{m_2 \cdot R^2} + 1\right)$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \left((I_1 + I_2) + m_2 \cdot \left(x^2 + d^2\right)\right) \cdot \dot{\theta}^2 - m_2 \cdot d \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x} + \frac{1}{2} m_1 \cdot \dot{x}^2 \cdot \left(\frac{I_2}{m_2 \cdot R^2} + 1\right)$$

Por otro lado, si la energía potencial es

$$V(x,\theta) = m_2 \cdot g \cdot \left(x \cdot sen(\theta) + d \cdot cos(\theta)\right) \tag{5.1}$$

su lagrangiana, en este caso, queda expresado como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \frac{1}{2} \cdot \left(I_1 + I_2 + m_2 \cdot \left(x^2 + d^2\right)\right) \cdot \dot{\theta}^2 \\ & - m_2 \cdot d \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x} + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{x}^2 \cdot \left(\frac{I_2}{m_2 \cdot R^2} + 1\right) - m_2 \cdot g \cdot \left(x \cdot sen(\theta) + d \cdot cos(\theta)\right)\end{aligned}$$

Para hallar la dinámica del sistema se utiliza las ecuaciones de ***Euler-Lagrange***, que en su modo simplificado viene dada por:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ \text{ y en este caso particular}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \tau \qquad \text{entonces}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \cdot \left(I_1 + I_2 + m_2 \cdot \left(x^2 + d^2\right)\right) \cdot \dot{\theta}^2 - m_2 \cdot d \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x} + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{x}^2 \cdot \left(\frac{I_2}{m_2 \cdot R^2} + 1\right) - m_2 \cdot g \cdot \left(x \cdot sen(\theta) + d \cdot cos(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m_2 \cdot x \cdot \dot{\theta}^2 - m_2 \cdot g \cdot sen(\theta) \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -m_2 \cdot d \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot \dot{x} \cdot \left(\frac{I_2}{m_2 \cdot R^2} + 1\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] = -m_2 \cdot d \cdot \ddot{\theta} + m_2 \cdot \ddot{x} \cdot \left(\frac{I_2}{m_2 \cdot R^2} + 1\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -m_2 \cdot d \cdot \ddot{\theta} + m_2 \cdot \ddot{x} \cdot \left(\frac{I_2}{m_2 \cdot R^2} + 1\right) - m_2 \cdot x \cdot \dot{\theta}^2 + m_2 \cdot g \cdot sen(\theta) =$$

$$-m_2 \cdot d \cdot \ddot{\theta} + m_2 \cdot \ddot{x} \cdot \left(\frac{I_2}{m_2 \cdot R^2} + 1\right) - m_2 \cdot x \cdot \dot{\theta}^2 + m_2 \cdot g \cdot sen(\theta) = 0$$

$$\text{Si } d=0 \Rightarrow \qquad \left(\frac{I_2}{R^2} + m_2\right) \cdot \ddot{x} - m_2 \cdot x \cdot \dot{\theta}^2 + m_2 \cdot g \cdot sen(\theta) = 0 \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m_2 \cdot g \cdot x \cdot \cos(\theta) + m_2 \cdot g \cdot d \cdot \mathrm{sen}(\theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \left(I_1 + I_2 + m_2 \cdot \left(x^2 + d^2\right)\right) \cdot \dot{\theta} - m_2 \cdot d \cdot \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] = \left(I_1 + I_2 + m_1 \cdot \left(x^2 + d^2\right)\right) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot m_1 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} - m_1 \cdot d \cdot \ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \tau$$

$$\left(I_1 + I_2 + m_2 \cdot \left(x^2 + d^2\right)\right) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot m_2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} - m_2 \cdot d \cdot \ddot{x} + m_2 \cdot g \cdot x \cdot \cos(\theta) - m_2 \cdot g \cdot d \cdot \mathrm{sen}(\theta) = \tau$$

Si d = 0 $\Rightarrow$

$$\left(\left(I_1 + I_2\right) + m_2 \cdot x^2\right) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot m_2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot g \cdot x \cdot \cos(\theta) = \tau \qquad (5.3)$$

Luego, la dinámica del sistema de (5.2) y (5.3), obtenida a través de *Euler-Lagrange*, es la misma utilizada por **Hauser** *et al.* (1992) [6]:

$$\begin{cases} \left(\frac{I_2}{R^2} + m_2\right) \cdot \ddot{x} - m_2 \cdot x \cdot \dot{\theta}^2 + m_2 \cdot g \cdot \mathrm{sen}(\theta) = 0 \\ \left(\left(I_1 + I_2\right) + m_2 \cdot x^2\right) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot m_2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot g \cdot x \cdot \cos(\theta) = \tau \end{cases} \qquad (5.4)$$

Sabiendo que el momento de inercia de una viga es $I_1 = m_1.L^2/12$, definiendo $\tau/m_2 = u$ y despreciando el momento de inercia rotacional de la bola, se puede dividir ambas ecuaciones por la masa de la bola (m_2). Además, para la mejor comprensión de la metodología, el sistema se construye tal que la masa de la barra sea exactamente 12 veces la de la bola, la constante L aparecerá de forma aislada en las ecuaciones de Euler.

$$\begin{cases} \ddot{x} - x \cdot \dot{\theta}^2 + g \cdot \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\ \left(\dfrac{m_1 \cdot L^2}{12} + m_2 \cdot x^2 \right) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot m_2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot g \cdot x \cdot \cos(\theta) = \tau \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - x \cdot \dot{\theta}^2 + g \cdot \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\ \left(\dfrac{12 \cdot m_2 \cdot L^2}{12} + m_2 \cdot x^2 \right) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot m_2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} + m_2 \cdot g \cdot x \cdot \cos(\theta) = \tau \end{cases} \tag{5.5}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - x \cdot \dot{\theta}^2 + g \cdot \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\ \left(L^2 + x^2 \right) \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot x \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} + g \cdot x \cdot \cos(\theta) = \tau \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\text{Si} \quad \begin{matrix} q_1 = x & q_2 = \theta \\ \dot{q}_1 = \dot{x} & \dot{q}_2 = \dot{\theta} \\ \ddot{q}_1 = \ddot{x} & \ddot{q}_2 = \ddot{\theta} \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

Se obtiene la dinámica de la bola en la viga utilizada por Ortega e*t al*. [1]

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - q_1 \cdot \dot{q}_2{}^2 + g \cdot \operatorname{sen}(q_2) = 0 \\ \left(L^2 + q_1{}^2 \right) \cdot \ddot{q}_2 + 2 \cdot q_1 \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + g \cdot q_1 \cdot \cos(q_2) = \tau \end{cases} \tag{5.7}$$

de la observación de (5.6), la matriz de masa inercial viene expresada como:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(L^2 + q_1^2\right) \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

siendo la inversa de la matriz de inercia

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\left(L^2 + q_1^2\right) \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

De la ecuación (2.6) (5.1) y (5.9) se tiene el hamiltoniano del sistema para d=0

$$V\left(q_1, q_2\right) = m_2 \cdot g \cdot q_1 \cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right) \tag{5.10}$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \left[p_1 \quad p_2\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\left(L^2 + q_1^2\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + m_2 \cdot g \cdot q_1 \cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right)$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot p_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{p_2^2}{\left(L^2 + q_1^2\right)} + m_2 \cdot g \cdot q_1 \cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right) \tag{5.11}$$

Luego el sistema hamiltoniano del sistema bola en la viga es, según la ecuación (2.2)

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{p_1} H \\ \nabla_{p_2} H \\ -\nabla_{q_1} H \\ -\nabla_{q_2} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

y de (2.3)

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = p_1 \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \dfrac{p_2}{\left(L^2 + q_1^2\right)} \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = \dfrac{p_2^2 \cdot q_1}{\left(L^2 + q_1^2\right)^2} - m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right) \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} + u = -m_2 \cdot g \cdot q_1 \cdot \cos\left(q_2\right) + u \end{cases} \tag{5.12}$$

por su parte la matriz de control (G) por observación directa de la ecuación (5.12), es: $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ y su anulador izquierdo de rango máximo, $G^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ tal que $G^{\perp} \cdot G = 0$.

Puesto que la matriz de inercia, del sistema Bola en la viga, depende de la variable subactuada se propone la siguiente matriz de inercia deseada, donde sus elementos son desconocidos hasta ahora, de la forma siguiente:

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

su inversa viene siendo a su vez:

$$M_d^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_3}{a_1 a_3 - a_2^2} & -\dfrac{a_2}{a_1 a_3 - a_2^2} \\ -\dfrac{a_2}{a_1 a_3 - a_2^2} & \dfrac{a_1}{a_1 a_3 - a_2^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_3 & -a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

donde $\Delta = a_1 a_3 - a_2^2 > 0$

Para hallar los elementos de la matriz de inercia deseada es necesario moldear la energía cinética. A continuación el procedimiento.

5.2. MOLDEO DE LA ENERGÍA CINÉTICA.

De la ecuación (2.21) con *k* el índice de la coordenada no actuada, y e_k es el vector euclidiano cuyas columna son de dimensión "*n*", y sus elementos son todos nulos excepto el que ocupa la posición *k* cuyo valor es "1" (uno).

$$\nabla_{q_k}\left(e_k^T M_d\right) = \frac{\left[M_d\left(\nabla_{q_k} M^{-1}\right)M_d\right]_k}{\left[M_d M^{-1}\right]_{kk}}$$

$$\nabla_{q_k}\left(e_k^T M_d\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\frac{\partial a_1}{\partial q_1} & \frac{\partial a_2}{\partial q_1}\end{bmatrix}$$

$$\left[M_d\left(\nabla_{q_k} M^{-1}\right)M_d\right]_k = \left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial q_1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\left(L^2+q_1^2\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\right\}_{kk}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\right\}_{k\cdot} = \left\{\begin{bmatrix}0 & 2\cdot a_2\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2\\ 0 & 2\cdot a_3\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\right\}_{k\cdot}$$

$$= \begin{bmatrix}2\cdot a_2^2\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2 & 2\cdot a_2\cdot a_3\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2\\ 2\cdot a_2\cdot a_3\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2 & 2\cdot a_3\cdot a_3\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2\end{bmatrix}_{k\bullet} = \begin{bmatrix}2a_2^2 q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2 & 2\cdot a_2\cdot a_3\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2\end{bmatrix}$$

$$= 2\cdot a_2\cdot q_1/\left(L^2+q_1^2\right)^2\begin{bmatrix}a_2 & a_3\end{bmatrix}$$

$$\left[M_d\cdot M^{-1}\right]_{kk} = \left\{\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\left(L^2+q_1^2\right)\end{bmatrix}\right\}_{kk} = \begin{bmatrix}a_1 & a_2/\left(L^2+q_1^2\right)\\ a_2 & a_3/\left(L^2+q_1^2\right)\end{bmatrix}_{kk} = a_1$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial q_1} \end{bmatrix} = \frac{2a_2q_1 \Big/ \left(L^2+q_1^2\right)^2 \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2\cdot a_2^2 \cdot q_1}{a_1\cdot\left(L^2+q_1^2\right)^2} & \dfrac{2\cdot a_2\cdot a_3\cdot q_1}{a_1\cdot\left(L^2+q_1^2\right)^2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2q_1}{\left(L^2+q_1^2\right)^2}\dfrac{a_2^2}{a_1} & \dfrac{2q_1}{\left(L^2+q_1^2\right)^2}\dfrac{a_2a_3}{a_1} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_1} = \frac{2q_1}{\left(L^2+q_1^2\right)^2}\frac{a_2^2}{a_1} \qquad\qquad \frac{\partial a_2}{\partial q_1} = \frac{2q_1}{\left(L^2+q_1^2\right)^2}\frac{a_2\cdot a_3}{a_1}\cdot$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales parciales con Maple®, y considerando que $a_3 = a_1 \cdot a_2$ se obtiene

$$a_1 = \sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} \qquad a_2 = \left(L^2+q_1^2\right) \qquad a_3 = a_1\cdot a_2 = \left(L^2+q_1^2\right)\sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} \tag{5.15}$$

sustituyendo (5.15) en (5.13) se obtiene la matriz de masa inercial deseada siguiente:

$$M_d = \begin{bmatrix} \sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} & \left(L^2+q_1^2\right) \\ \left(L^2+q_1^2\right) & \left(L^2+q_1^2\right)\sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

$$M_d = \left(L^2 + q_1^2\right)\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2 + q_1^2\right)}} & 1 \\ 1 & \sqrt{2\left(L^2 + q_1^2\right)} \end{bmatrix}$$ siendo su inversa

$$M_d^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1^2\right)}} & -\dfrac{1}{\left(L^2+q_1^2\right)} \\ -\dfrac{1}{\left(L^2+q_1^2\right)} & \dfrac{\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^2\right)^{3/2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\left(L^2+q_1^2\right)}\begin{bmatrix} \sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} & -1 \\ -1 & \dfrac{\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^2\right)^{1/2}} \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Se calcula, seguidamente, el hamiltoniano deseado a través de (2.7)

$$H_d = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} & \left(L^2+q_1^2\right) \\ \left(L^2+q_1^2\right) & \left(L^2+q_1^2\right)\sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + V_d\left(q_1, q_2\right)$$

$$H_d = \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^2\right)} & -\dfrac{1}{\left(L^2+q_1^2\right)} \\ -\dfrac{1}{\left(L^2+q_1^2\right)} & \dfrac{\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^2\right)^{3/2}} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} + V_d\left(q_1, q_2\right)$$

$$H_d = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1^2\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^2\right)} - \frac{2p_1p_2}{\left(L^2+q_1^2\right)} + \frac{p_2^2\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^2\right)^{3/2}}\right) + V_d\left(q_1, q_2\right) \tag{5.18}$$

con los valores de M_d y resolviendo la ecuación (2.19), con el software Mathematica®, se obtiene $\mathbf{J_2}$

$$G^{\perp}\left\{\nabla q\left(p^{T}\cdot M^{-1}\cdot p\right)-M_{d}\cdot M^{-1}\cdot\nabla q\left(p^{T}\cdot M_{d}^{-1}\cdot p\right)+2\cdot J_{2}\cdot M_{d}^{-1}\cdot p\right\}=0$$

$$\left[-\frac{2\cdot q_1\cdot p_2^{2}}{\left(L^{2}+q_1^{2}\right)^{2}}+\frac{2\cdot j(q,p)\cdot\left(p_2\cdot a_1-p_1\cdot a_2\right)}{a_1a_3-a_2^{2}}\right.$$

$$\left.-a_1\left(\frac{\left(p_1^{2}\frac{da_3}{dq_1}-2p_1p_2\frac{da_2}{dq_1}+p_2^{2}\frac{da_1}{dq_1}\right)}{a_1a_3-a_2^{2}}-\frac{\left(a_3p_1^{2}+2a_2p_1p_2-a_1p_2^{2}\right)\left(a_3\frac{da_1}{dq_1}+a_1\frac{da_3}{dq_1}-2a_2\frac{da_2}{dq_1}\right)}{\left(a_1a_3-a_2^{2}\right)^{2}}\right)\right]=0$$

despejando j(p,q)

$$j(q,p)=$$

$$\frac{a_1\left(\left(p_1^{2}\frac{da_3}{dq_1}-2p_1p_2\frac{da_2}{dq_1}+p_2^{2}\frac{da_1}{dq_1}\right)-\left(a_3\frac{da_1}{dq_1}+a_1\frac{da_3}{dq_1}-2a_2\frac{da_2}{dq_1}\right)\frac{a_3p_1^{2}+2a_2p_1p_2-a_1p_2^{2}}{\Delta}\right)+\frac{2\Delta q_1p_2^{2}}{\left(L^{2}+q_1^{2}\right)^{2}}}{2\cdot\left(p_2\cdot a_1-p_1\cdot a_2\right)}$$

Obteniéndose así j(p,q) de la forma siguiente:

$$j(q,p)=q_1\left[p_1-\frac{p_2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^{2}+q_1^{2}\right)}}\right] \tag{5.19}$$

Para lo cual $\mathbf{J_2(p,q)}$ es:

$$J_2(p,q)=\begin{bmatrix}0 & j(q,p)\\ -j(q,p) & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & q_1\left[p_1-\frac{p_2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^{2}+q_1^{2}\right)}}\right]\\ -q_1\left[p_1-\frac{p_2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^{2}+q_1^{2}\right)}}\right] & 0\end{bmatrix} \tag{5.20}$$

5.3. MOLDEO DE LA ENERGÍA POTENCIAL.

A través de la ecuación (2.20) se moldea la energía potencial, de tal forma que:

$$G^{\perp}\left\{\nabla_q V(q) - M_d(q_r)M^{-1}(q_r)\nabla_q V_d(q)\right\} = 0$$

$$G^{\perp}\left\{\nabla_q V(q) - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\left(L^2+q_1^2\right) \end{bmatrix}\nabla_q V_d(q)\right\} = 0$$

$$G^{\perp}\left\{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial V(q)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial V(q)}{\partial q_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\left(L^2+q_1^2\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} \end{bmatrix}\right\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} m_1 \cdot g \cdot \operatorname{sen}(q_2) \\ m_1 \cdot g \cdot q_1 \cdot \cos(q_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{a_1 \partial V_d(q)}{\partial q_1} + \dfrac{a_2}{\left(L^2+q_1^2\right)}\dfrac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} \\ \dfrac{a_2 \partial V_d(q)}{\partial q_1} + \dfrac{a_3}{\left(L^2+q_1^2\right)}\dfrac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} \end{bmatrix}\right\} = 0$$

$$a_1 \cdot \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} + \frac{a_2}{\left(L^2+q_1^2\right)}\frac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} = m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}(q_2) \tag{5.21}$$

Sustituyendo a_1 y a_2 en la ecuación (5.21), se tiene:

$$\sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} \cdot \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} + \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} = m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}(q_2)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(1+\left(\frac{q_1}{L}\right)^2\right)} \cdot \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} + \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} = m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}(q_2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{m_2 \cdot g} \cdot \sqrt{\left(1+\left(\frac{q_1}{L}\right)^2\right)} \cdot \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_1} + \frac{1}{m_2 \cdot g} \cdot \frac{\partial V_d(q)}{\partial q_2} = \mathrm{sen}(q_2)$$

Para ayudar a simplificar el cálculo al software Maple® se propone el siguiente cambio de variables:

$a = \dfrac{\sqrt{2}}{m_2 \cdot g}$, $b = \dfrac{1}{m_2 \cdot g}$ para lo cual se tiene la ecuación siguiente:

$$a \cdot \sqrt{\left(1+\left(\frac{q_1}{L}\right)^2\right)} \cdot \frac{\partial V_d(q_1, q_2)}{\partial q_1} + b \cdot \frac{\partial V_d(q_1, q_2)}{\partial q_2} = \mathrm{sen}(q_2)$$

resolviendo esta ecuación en derivadas parciales, a través de Maple®, se obtiene:

$$V_d(q) = -m_2 \cdot g \cdot \cos(q_2) + \phi(z(q_1, q_2)) \tag{5.22}$$

$$\text{con} \quad z(q_1, q_2) = q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_1}{L}\right), \tag{5.23}$$

donde $\phi(z)$ es una función arbitraria diferenciable de **z.** Esta función debe ser escogida para asegurar la asignación del punto de equilibrio, es decir, para satisfacer que q*=arg min Vd(q) con q*=0. Por otra parte, para que el sistema sea estable debe satisfacerse la condición de que $\nabla_q V_d(q_r) = 0$, esto se satisface si y solo si $\nabla_q{}^2 V_d(0) > 0$ manteniéndose la segunda derivada de una forma cuadrática respecto de ϕ (Hess(V_d) Matriz Hessiana) en el origen positiva.

Si se emplea como la función $\phi(z)$ la misma **z**, se tiene que su $\nabla_q V_d(q_r) \neq 0$ y que su hessiana Hess(V_d)=0, por tanto se propone que Vd sea**:**

$$V_d(q) = -m_2 \cdot g \cdot \cos(q_2) + \left(q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_1}{L}\right)\right)^2 \tag{5.24}$$

Siendo en este caso ϕ propuesta $\Rightarrow \phi(q_1, q_2) = \left(q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_1}{L}\right)\right)^2$

Para lo cual:

$$\nabla_q \left(V_d(q)\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V_d}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial V_d}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{2\left(L^2 + q_1^2\right)}} \nabla q_1 \left(\phi(z(q))\right) \\ m_2 \cdot g \cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right) + \nabla q_2 \left(\phi(z(q))\right) \end{bmatrix} \qquad \nabla_q \left(V_d(q)\right)\Big|_{q=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde su hessiano (2.55), será:

$$\operatorname{Hess}\left(V_d\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V_d}{\partial q_2{}^2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\left(L^2 + q_1^2\right)} \dfrac{\partial^2 \phi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_1{}^2} & -\dfrac{1}{\sqrt{2\left(L^2 + q_1^2\right)}} \dfrac{\partial^2 \phi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2\left(L^2 + q_1^2\right)}} \dfrac{\partial^2 \phi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} & m_2 \cdot g \cdot \cos\left(q_2\right) + \dfrac{\partial^2 \phi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_2{}^2} \end{bmatrix}$$

el determinante del hessiano (2.56), evaluado en cero

$$\operatorname{Det}\left(\operatorname{Hess}\left(V_d\right)\right)\Big|_{\substack{q_1=0 \\ q_2=0}} = \frac{m_2 \cdot Kp}{2L^2}$$ Observándose que **Kp>0**

por tanto se demuestra que

$$V_d\left(q\right) = -m_2 \cdot g \cdot \cos\left(q_2\right) + \left(q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_1}{L}\right)\right)^2$$

es una buena elección para Kp>0**.** Por otro lado, introduciendo una constante para que la ecuación vaya a cero cuando q1 y q2 sean cero se tiene:

$$V_d(q) = m_2 \cdot g \cdot \left[1 - \cos(q_2)\right] + \left(q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_1}{L}\right)\right)^2 \tag{5.25}$$

En la figura 5.2 puede observarse la gráfica de Vd versus q_1 y q_2 para un m_2=1, g=9.8, L= 6.0; la cual presenta un mínimo aislado por lo tanto se garantiza la estabilidad.

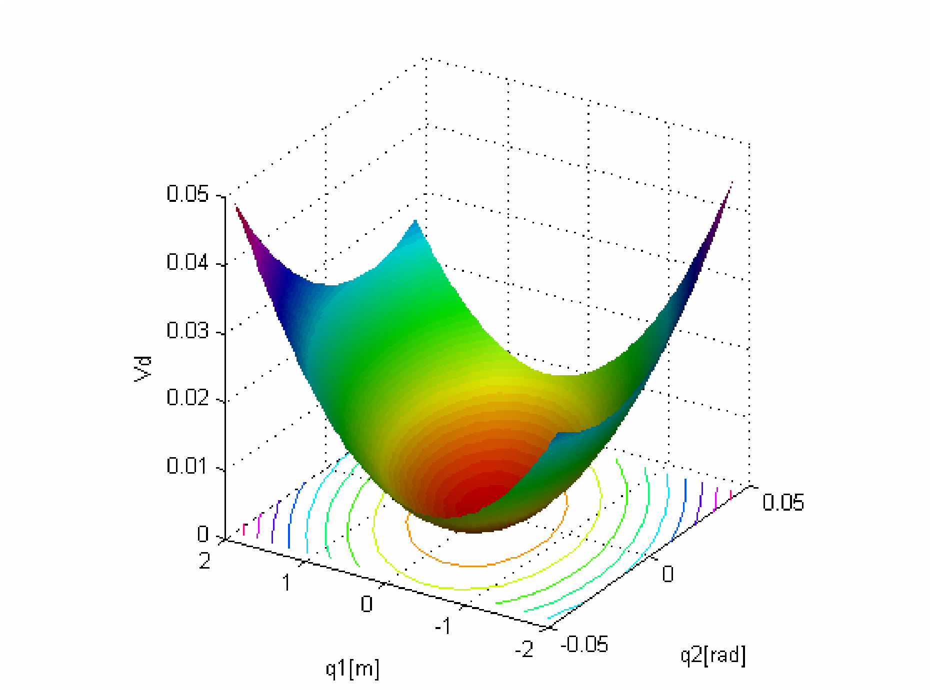

Fig. 5.2. Moldeo de energía potencial Vd
para m_1=1, g=9.8, L= 6.0

5.4. CONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTROL

Para hallar la ecuación que rige las ecuaciones de control se utilizan las ecuaciones (2.15) y (2.16), las cuales se repiten a continuación para comodidad del lector.

$$u_{es} = \left(G^T G\right)^{-1} G^T \left(\nabla_q H - M_d \cdot M^{-1} \cdot \nabla_q H_d + J_2 \cdot M_d^{-1} \cdot p\right) \tag{5.26}$$

$$u_{di} = -Kv \cdot G^T \cdot \nabla_p H_d \tag{5.27}$$

(a) Cálculos de $\mathbf{u}_{es}$

Se halla uno a uno los términos de la ecuación (5.26), para luego sumarlos algebraicamente.

$$u_{es} = \underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(\nabla_{q}H\right)}_{\text{TERMINO 01}} - \underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(M_{d}\cdot M^{-1}\cdot\nabla_{q}H_{d}\right)}_{\text{TERMINO 02}} + \underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(J_{2}\cdot M_{d}^{-1}\cdot p\right)}_{\text{TERMINO 03}}$$

- ✓ **Término 01.**

De la ecuación (5.11), se tiene:

$$H = \frac{1}{2}\cdot p_1^{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{p_2^{2}}{\left(L^{2}+q_1^{2}\right)} + m_2\cdot g\cdot q_1\cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad G^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left(G^{T}\cdot G\right)^{-1}\cdot G^{T} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(G^{T}\cdot G\right)^{-1}\cdot G^{T}\nabla_{q}H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial H\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial H\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial H\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial V\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial V\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2}$$

$$\frac{\partial V\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2} = \frac{\partial\left(m_2\cdot g\cdot q_1\cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right)\right)}{\partial q_2} = m_2\cdot g\cdot q_1\cdot\cos\left(q_2\right)$$

$$\underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1} G^{T}\left(\nabla_{q}H\left(p,q\right)\right)}_{\text{TERMINO 01}} = m_2\cdot g\cdot q_1\cdot\cos\left(q_2\right) \qquad (5.28)$$

- ✓ **Término 02.**

Para el siguiente término de (2.15)

$$-\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q H_d\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q H_d\right)=$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_1}\\[2ex] \dfrac{\partial H_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2}\end{bmatrix}\right)=\left(M_d\cdot M^{-1}\right)_{(2,3)}\nabla_{q2}H_d=\left(M_d\cdot M^{-1}\right)_{(2,3)}\frac{\partial V_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2}$$

de (5.18), que a continuación se repite,

$$H_d=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{p_1^{2}\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^{2}\right)}-\frac{2p_1p_2}{\left(L^2+q_1^{2}\right)}+\frac{p_2^{2}\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^{2}\right)^{3/2}}\right)+V_d\left(q_1,q_2\right)$$

se puede observar que:

$$\frac{\partial H_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2}=\frac{\partial V_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2}$$

luego el término 02 viene dado por:

$$\underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q H_d\right)}_{\text{TERMINO 02}}=\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q V_d\right)$$

$$\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q V_d\right)=$$

$$\left(L^2+q_1^{2}\right)\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1^{2}\right)}} & 1\\[2ex] 1 & \sqrt{2\left(L^2+q_1^{2}\right)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\left(L^2+q_1^{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial V_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_1}\\[2ex] \dfrac{\partial V_d\left(q_1,q_2\right)}{\partial q_2}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\left(L^2+q_1^2\right)\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1^2\right)}} & 1 \\ \left(L^2+q_1^2\right) & \sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left(m_2\cdot g\cdot\left[1-\cos\left(q_2\right)\right]+\left(q_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{q_1}{L}\right)\right)^2\right)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial\left(m_2\cdot g\cdot\left[1-\cos\left(q_2\right)\right]+\left(q_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{q_1}{L}\right)\right)^2\right)}{\partial q_2} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\left(L^2+q_1^2\right)\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1^2\right)}} & 1 \\ \left(L^2+q_1^2\right) & \sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\left(q_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{q_1}{L}\right)\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{q_1}{L}\right)^2}}\right) \\ m_2\cdot g\cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right)+2\left(q_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{q_1}{L}\right)\right) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\dfrac{\left(L^2+q_1^2\right)\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1^2\right)}}\left(q_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{q_1}{L}\right)\right)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{q_1}{L}\right)^2}}\right)+m_2\cdot g\cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right)+2\left(q_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{q_1}{L}\right)\right) \\ \left(\left(\mathbf{2L+8}\right)\dfrac{\sqrt{L^2+q_1^2}}{\sqrt{2}}\right)\left(q_2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\dfrac{q_1}{L}\right)\right)+\sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)}\cdot m_2\cdot g\cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right) \end{bmatrix}$$

Multiplicando por $G^{\perp}$, nos queda el elemento (2,1) de la matriz anterior:

$$-\left(G^{\top}G\right)^{-1}G^{\top}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q H_d\right)=$$

$$\left(\left(\mathbf{2L+8}\right)\frac{\sqrt{L^2+q_1^2}}{\sqrt{2}}\right)\left(q_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_1}{L}\right)\right)+\sqrt{2\left(L^2+q_1^2\right)}\cdot m_2\cdot g\cdot \operatorname{sen}\left(q_2\right)$$

definiendo la constante de proporcionalidad como Kp=(2L+8)**,** se tiene

$$\underbrace{\left(G^{T}G\right)^{-1}G^{T}\left(M_d\cdot M^{-1}\cdot\nabla_q V_d\right)}_{\text{TERMINO 02}}=$$

$$m_2\cdot g\cdot\sqrt{2\left(L^2+q_1{}^2\right)}\cdot\operatorname{sen}\left(q_2\right)+\left(K_p\,\frac{\sqrt{L^2+q_1{}^2}}{\sqrt{2}}\right)\left(q_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_1}{L}\right)\right) \tag{5.29}$$

- ✓ **Término 03,** se tiene:

  Para el tercer término de (2.15)

$$J_2\cdot M_d^{-1}\cdot p=\begin{bmatrix}0 & q_1\left[p_1-\frac{p_2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1{}^2\right)}}\right]\\ -q_1\left[p_1-\frac{p_2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1{}^2\right)}}\right] & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1{}^2\right)}} & -\frac{1}{\left(L^2+q_1{}^2\right)}\\ -\frac{1}{\left(L^2+q_1{}^2\right)} & \frac{\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1{}^2\right)^{3/2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & q_1\left[p_1-\frac{p_2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1{}^2\right)}}\right]\\ -q_1\left[p_1-\frac{p_2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{\left(L^2+q_1{}^2\right)}}\right] & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}\cdot p_1}{\sqrt{\left(L^2+q_1{}^2\right)}}-\frac{p_2}{\left(L^2+q_1{}^2\right)}\\ -\frac{p_1}{\left(L^2+q_1{}^2\right)}+\frac{\sqrt{2}\cdot p_2}{\left(L^2+q_1{}^2\right)^{3/2}}\end{bmatrix}=$$

multiplicando este término por $\left(G^{T}\cdot G\right)^{-1}G^{T}$ se obtiene

$$\underbrace{\left(G^{T}\cdot G\right)^{-1}G^{T}\left(J_2\cdot M_d^{-1}\cdot p\right)}_{\text{TERMINO 03}}=$$

$$\frac{q_1}{\sqrt{2}\cdot\left(L^2+q_1^{\,2}\right)}\left[-\sqrt{\left(L^2+q_1^{\,2}\right)}\cdot p_1^{\,2}+\sqrt{2}\cdot p_1\cdot p_2+\frac{p_2^{\,2}}{\left(L^2+q_1^{\,2}\right)^{1/2}}\right] \tag{5.30}$$

De la suma algebraica de los términos 01, 02 y 03 (ecuaciones (5.28), (5.29) y (5.30) respectivamente) se obtiene la ecuación de control debida al moldeo de la energía u_{es}, la cual viene expresada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{u_{es}}=&\frac{q_1}{\sqrt{2}\left(L^2+q_1^{\,2}\right)}\left[-\sqrt{\left(L^2+q_1^{\,2}\right)}p_1^{\,2}+\sqrt{2}p_1p_2+\frac{p_2^{\,2}}{\left(L^2+q_1^{\,2}\right)^{1/2}}\right]\\&+m_2\cdot g\cdot q_1\cdot\cos\left(q_2\right)-m_2\cdot g\cdot\sqrt{2\left(L^2+q_1^{\,2}\right)}\cdot\operatorname{sen}\left(q_2\right)\\&-\left(K_p\frac{\sqrt{L^2+q_1^{\,2}}}{\sqrt{2}}\right)\left(q_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_1}{L}\right)\right)\end{aligned} \tag{5.31}$$

(b) Cálculos de $\mathbf{u_{di}}$

De (2.16), la ecuación de control del sistema, debido a la inyección de amortiguamiento, viene expresado como:

$$u_{di}=-Kv\cdot G^{T}\cdot\nabla_p H_d=-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\cdot Kv\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\cdot\nabla_p H_d$$

donde $\nabla_p H_d$ vendrá dada por:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H_d}{\partial p_1}\\[2ex]\dfrac{\partial H_d}{\partial p_2}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{2p_1\sqrt{2}}{\left(L^2+q_1^{\,2}\right)}-\dfrac{2p_2}{\left(L^2+q_1^{\,2}\right)}\\[2ex]-\dfrac{2p_1}{\left(L^2+q_1^{\,2}\right)}+\dfrac{2\sqrt{2}p_2}{\left(L^2+q_1^{\,2}\right)^{3/2}}\end{bmatrix}$$

Siendo la ecuación de control por inyección de amortiguamiento la siguiente:

$$u_{di} = -Kv \cdot G^{T} \cdot \nabla_{p} H_{d} = -Kv\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial H_{d}}{\partial p_{1}} \\ \dfrac{\partial H_{d}}{\partial p_{2}} \end{bmatrix} = -Kv\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{p_{1}\sqrt{2}}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)} - \dfrac{p_{2}}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)} \\ -\dfrac{p_{1}}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)} + \dfrac{\sqrt{2}p_{2}}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)^{3/2}} \end{bmatrix}$$

$$= Kv\left(\frac{p_{1}}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)} - \frac{\sqrt{2}p_{2}}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)^{3/2}} \right) = \frac{Kv}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}\left(p_{1} - \sqrt{\frac{2}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}}p_{2} \right)$$

$$u_{di} = \frac{Kv}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}\left(p_{1} - \sqrt{\frac{2}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}}p_{2} \right) \tag{5.32}$$

Sumando (5.31) y (5.32) se obtiene la ecuación de control total “u”siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = {} & \frac{q_{1}}{\sqrt{2}\cdot\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}\left[-\sqrt{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}\cdot p_{1}^{2} + \sqrt{2}\cdot p_{1}\cdot p_{2} + \frac{p_{2}^{2}}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)^{1/2}} \right] \\ & + m_{2}\cdot g\cdot q_{1}\cdot\cos\left(q_{2}\right) - m_{2}\cdot g\cdot\sqrt{2\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}\cdot \operatorname{sen}\left(q_{2}\right) \\ & - \left(Kp\,\frac{\sqrt{L^{2}+q_{1}^{2}}}{\sqrt{2}} \right)\left(q_{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{q_{1}}{L}\right) \right) \\ & + \frac{Kv}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}\cdot\left(p_{1} - \sqrt{\frac{2}{\left(L^{2}+q_{1}^{2}\right)}}p_{2} \right) \end{aligned} \tag{5.33}$$

5.5. RESULTADOS DEL SISTEMA BOLA EN LA VIGA.

En la figura (5.3) se presentan los resultados de la simulación del sistema mecánico de la Bola en la Viga. A fin de ilustrar la naturaleza global de la ley de control obtenida en (5.33), se presenta una simulación donde la variable q_1=2.00 m. y q_1=0.00 rad hasta la posición q_1=0.00 m. y q_2=0.00 rad.

Tabla 5.1. Condiciones iniciales (Bola en la Viga)		
m1=1 Kg.	g=9.8 m/s^2.	L= 6.0 m.
Kv=50.0	Kp=1.0	q1= 2.0 m.
q2= 0.0 rad.	p1= 0.0 Kg.m/s.	p2= 0.0 Kg.m/s.

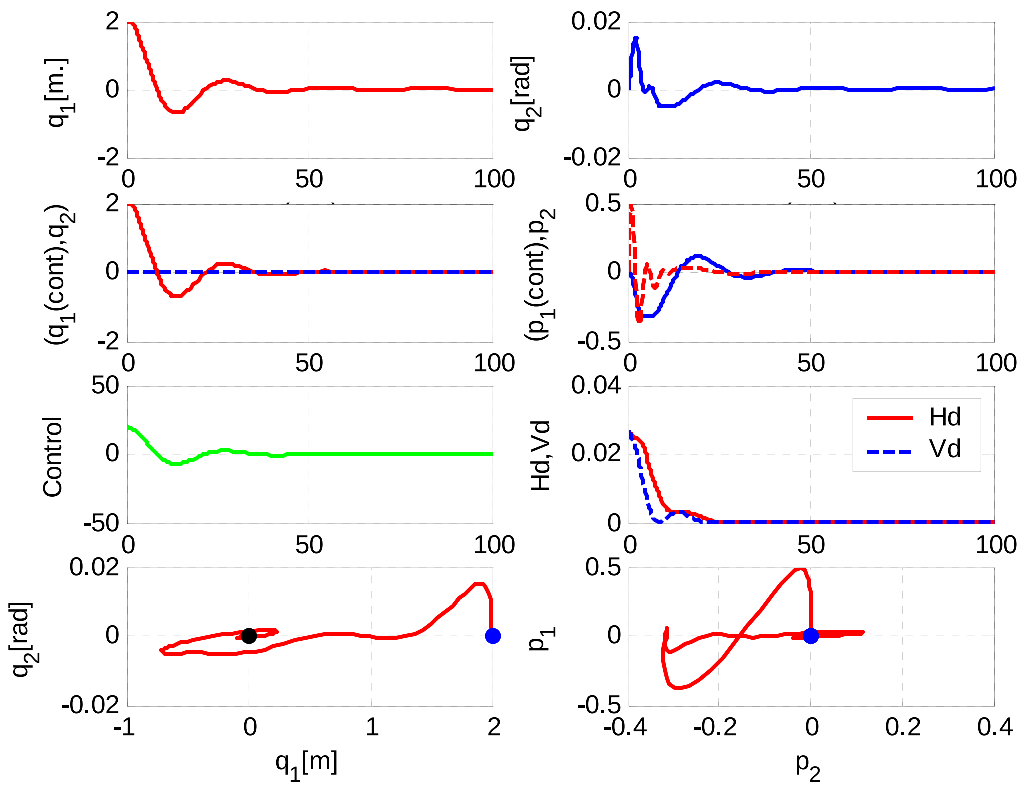

Figura 5.3. Trayectoria para el sistema Bola en la viga, con los parámetros de la Tabla 5.1.

De las figuras (5.3) y (5.4) se observa que la convergencia se preserva tal como predice la teoría.

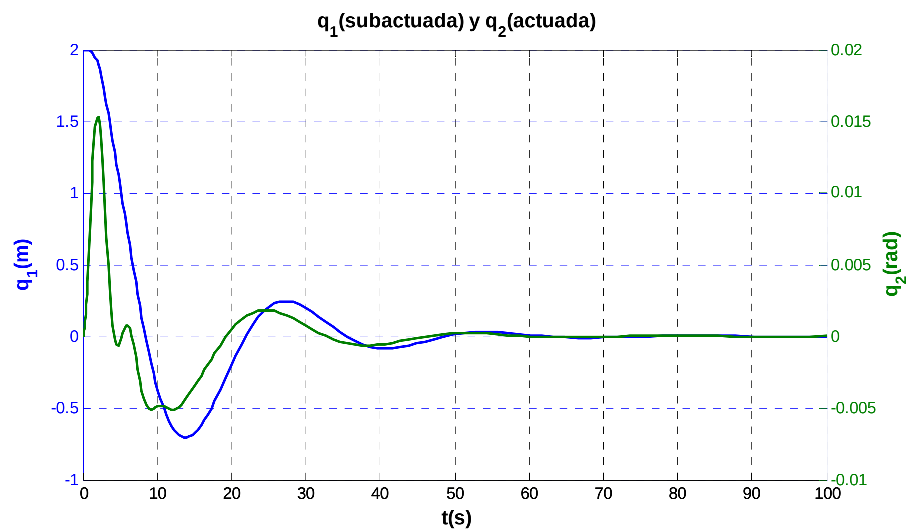

Figura 5.4. Trayectoria de q_1 y q_2 para el sistema Bola en la viga, con los parámetros de la Tabla 5.1.

En la figura (5.5) se observa como converge la trayectoria de q_1 y q_2, de una energía potencial deseada Vd alta a Vd mínima.

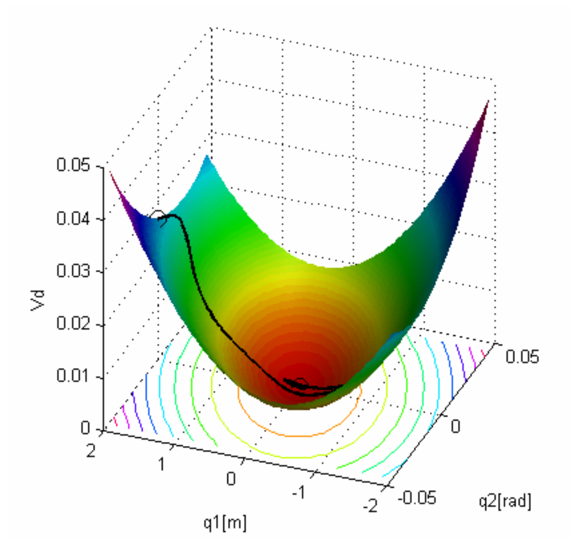

Figura 5.5. Moldeo de energia potencial del sistema Bola en la viga, con los parámetros de la Tabla 5.1

En la figura (5.6) se representa la convergencia de la trayectoria de q_1 y q_2, en los diferentes niveles de energía potencial Vd.

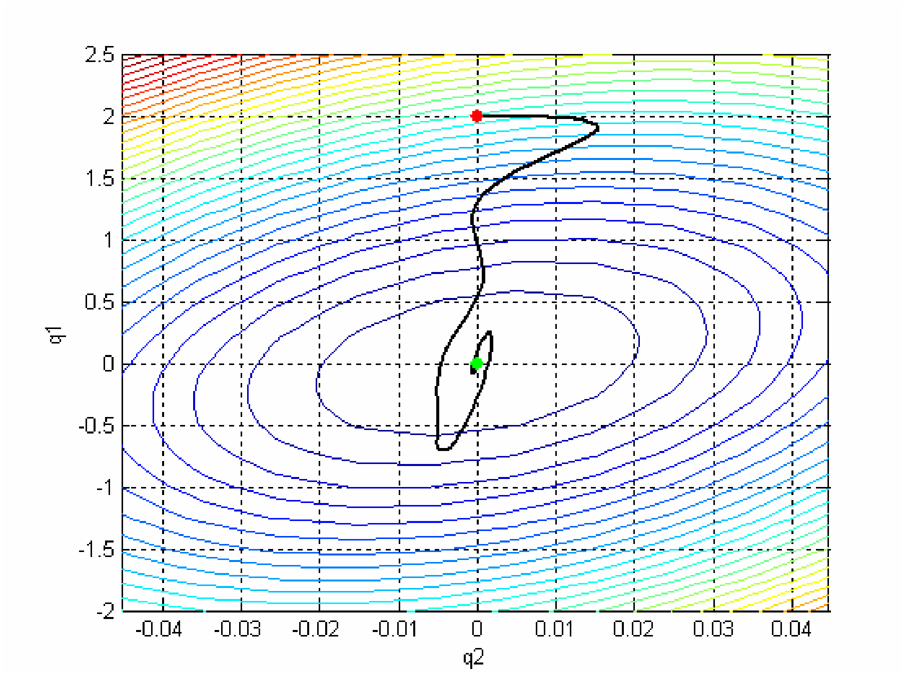

Figura 5.6. Curvas de Nivel de energía potencial V_d y Trayectoria q_1 y q_2 para el sistema Bola en la viga, con los parámetros de la Tabla 5.1.

.

A continuación se presentan resultados obtenidos por Ortega *et al.* (2002) [1], donde demuestra, para el caso estudiado de la Bola en la Viga, que la energía total $\mathbf{H_d}$ máxima del sistema es de **0,1038** y se observan dos ejemplos, presentados en [1], en donde la bola sale de la viga por exceder esta energía (Hd > 0,1038) y otro donde se mantiene en la viga por no exceder la energía máxima (Hd < 0,1038). Para el primer caso, figura (5.7) y (5.8) la energía alcanza el valor de Hd=0,1837 y para el segundo caso, figura (5.9) y (5.10), Hd=0,0928.

En la figura (5.8) se puede observar como la bola sale fuera de la viga que tiene una longitud de L=10 m. ya que su energía, debido a las condiciones iniciales del problema, es de Hd=0,1837. Estos ejemplos se analizan para cotejar resultados en cuanto a la forma de obtención de los mismos, más adelante, en esta sección, se discutirá el desacuerdo al respecto.

Tabla 5.2. Condiciones iniciales (Hd=0,1837) (1)		
m1=1 Kg.	g=9.8 m/s^2.	L= 10.0 m.
Kv=50.0	Kp=1.0	q1=8.0 m.
q2= 0.0 rad.	p1=1.0 Kg.m/s.	p2=1.0 Kg.m/s.

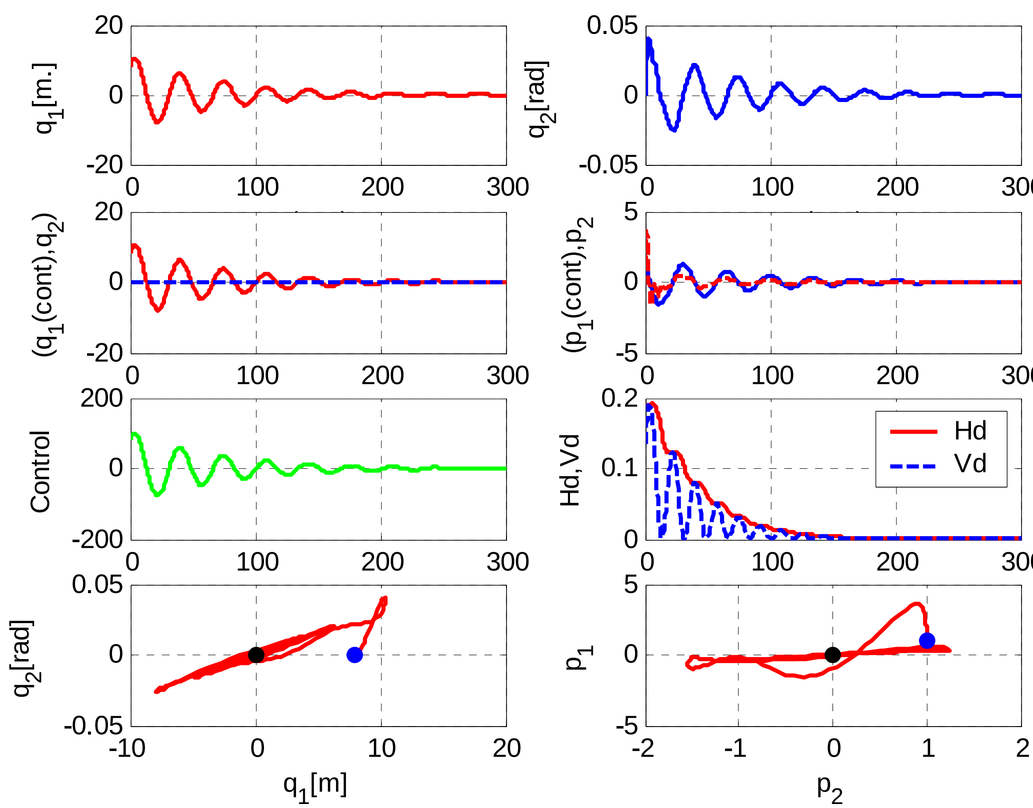

Figura 5.7. Trayectorias del para el sistema Bola en la viga, con los parámetros de la Tabla 5.2. Hd=0,1837 > 0,1038

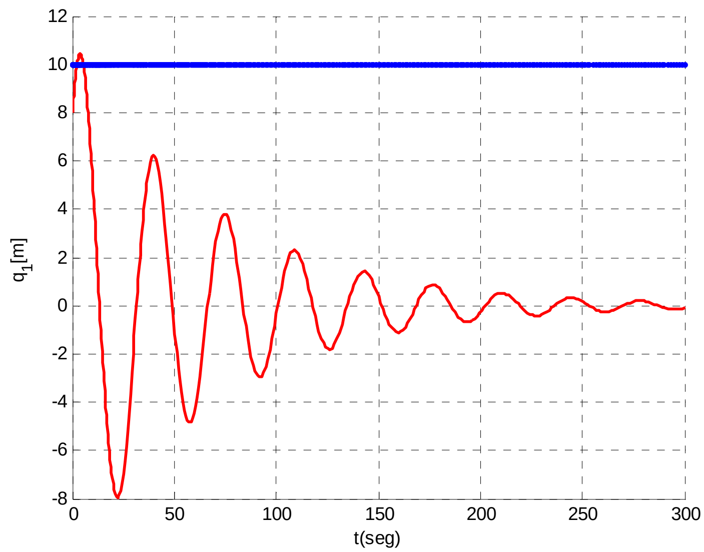

Figura 5.8. Trayectorias del para el sistema Bola en la viga, con los parámetros de la Tabla 5.2. Hd=0,1837 > 0,1038

Tabla 5.3. Condiciones iniciales (Hd=0,1837) (2)		
m1=1 Kg.	g=9.8 m/s^2.	L= 10.0 m.
Kv=50.0	Kp=1.0	q1=6.0 m.
q2= 0.0 rad.	p1=0.5 Kg.m/s.	p2=1.0 Kg.m/s.

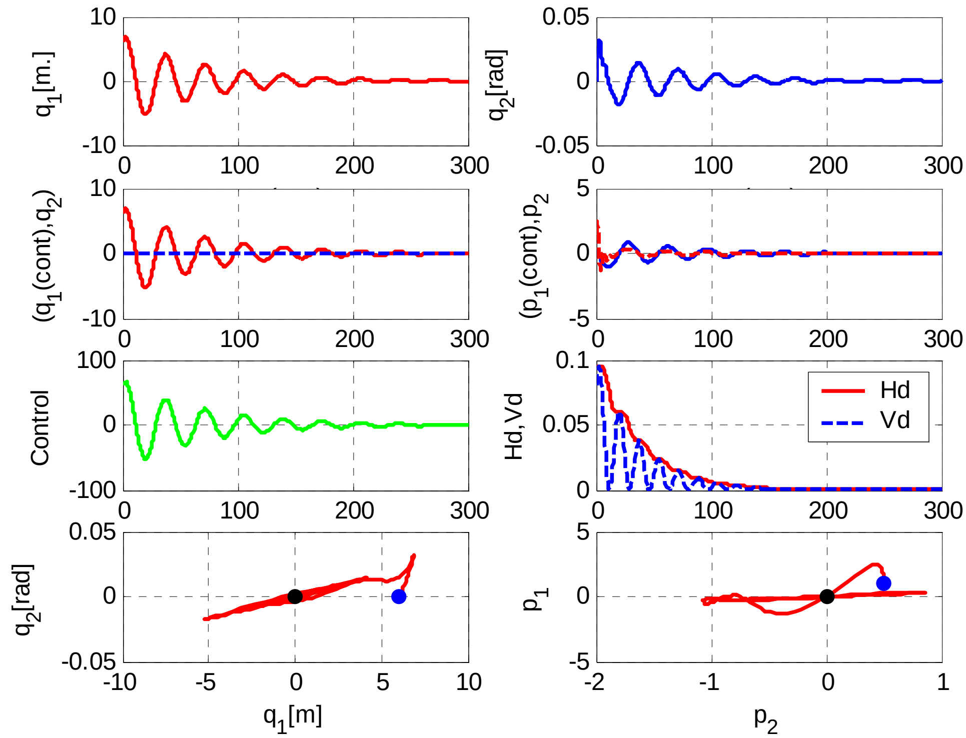

Figura 5.9. Trayectorias del para el sistema Bola en la viga, con los parámetros de la Tabla 5.3, Hd=0.0928 < 0,1038

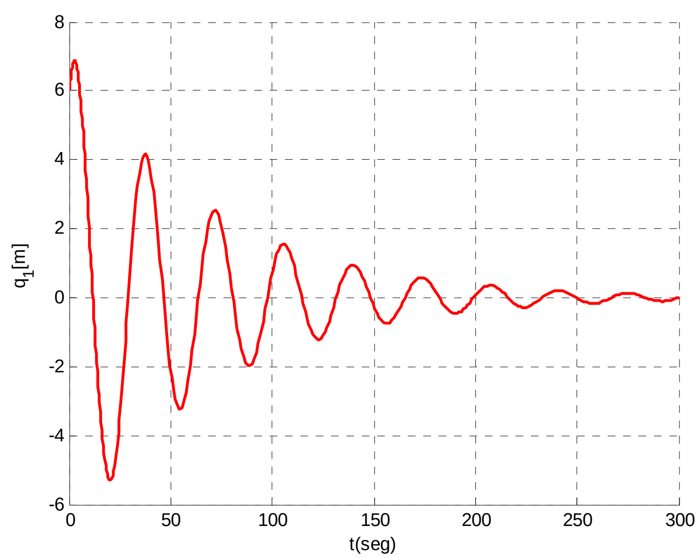

Figura 5.10. Trayectorias del para el sistema Bola en la viga, con los parámetros de la Tabla 5.3., Hd=0.0928 < 0,1038

Estos resultados obtenidos por Ortega *et al*. (2002) [1], con sus dos ejemplos expuestos traen confusión, en el sentido de que si L=10 m las condiciones iniciales de los dos ejemplos están sobredimensionados. q_1 = 8 y q_1 = 6 m., respectivamente, ya que es de suponer que la barra total es 10 m., 5 m. para cada lado de su centro.

De tal manera que *en este trabajo se propone* como energía total máxima $\mathbf{H_d}$ = **0,1038/2** = **0.0519**. Observándose dos ejemplos, en donde la bola sale de la viga por exceder esta energía máxima (Hd > 0.0519) y otro donde se mantiene en la viga por no exceder la energía máxima (Hd < 0.0519). Para el primer caso, figura (5.11) la energía alcanza el valor de Hd=0,0679 y para el segundo caso, figura (5.12), Hd=0,0518.

En la figura (5.11) se puede observar como la bola sale fuera de la viga, por uno de sus extremos, recordando que la longitud de la barra es L=10 m. de extremo a extremo. Esto se debe a que su energía, debido a las condiciones iniciales del problema $[q_1,q_2,p_1,p_2]$=[4.7,0.0,0.5,0.0], es de Hd = 0,0679 > 0.0519.

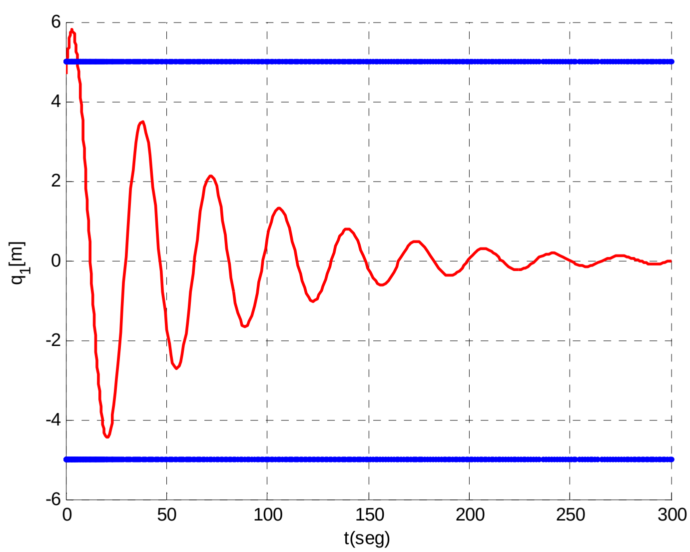

Figura 5.11. Trayectorias del para el sistema Bola en la viga, con los siguientes parámetros: m1=1, g=9.8, L=10.0, Kv=50.0, Kp=1.0, q1=4.7, q2= 0.0, p1=0.5, p2=0.0. Hd= 0.0676 > 0.0519

La figura (5.12) muestra como la bola se mantiene dentro de la viga. Esto debido a que las condiciones iniciales del problema $[q_1,q_2,p_1,p_2]$=[4.7,0.0,0.5,0.0] y su energía es Hd = 0.0518 > 0.0519.

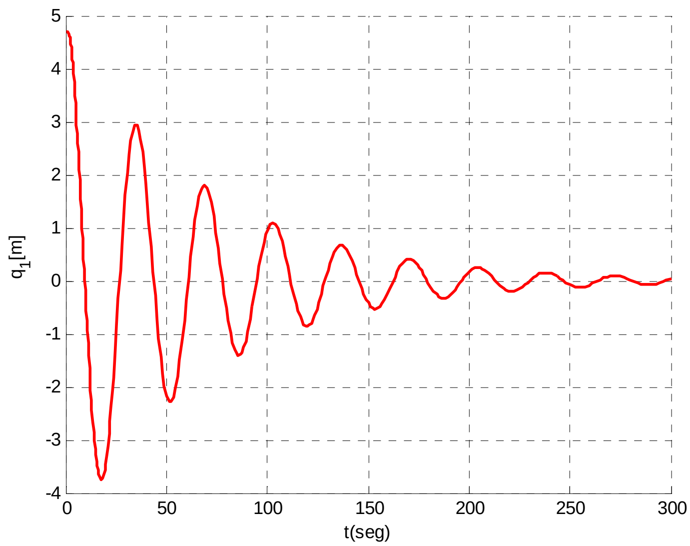

Figura 5.12. Trayectorias del para el sistema Bola en la viga, con los siguientes parámetros: m1=1, g=9.8, L=10.0, Kv=50.0, Kp=1.0, q1=4.7, q2= 0.0, p1=0.0, p2=0.0, Hd= 0.0518 < 0.0519

CAPITULO VI: PÉNDULO SOBRE CARRO MÓVIL.

El sistema de *péndulo sobre el carro móvil* consta de un péndulo libre sobre un carro móvil tal y como se ilustra en la Fig. 6.1.

La dinámica de este sistema presenta un grado de subactuación (n=2, m=1), donde q_1 es la variable subactuada y q_2 es la variable controlada o actuada, y viene dada por:

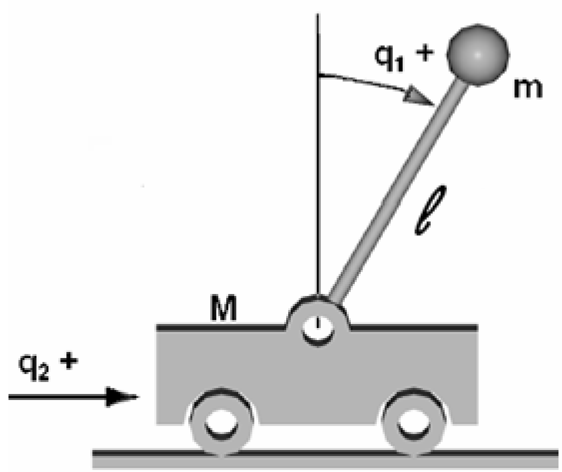

Fig. 6.1 Péndulo sobre el Carro Móvil

$$m\ell^2\ddot{q}_1 + m\ell\cos(q_1)\ddot{q}_2 - mg\ell\,\mathrm{sen}(q_1) = 0 \qquad (6.1)$$

$$(M+m)\ddot{q}_2 + m\ell\cos(q_1)\ddot{q}_1 - m\ell\,\mathrm{sen}(q_1)q_1^2 = \nu \qquad (6.2)$$

Donde q_1 es el ángulo de la barra del péndulo con respecto a la vertical y q_2 la posición del carro, m y ℓ son la masa del péndulo y la longitud del péndulo respectivamente, siendo M la masa del carro móvil del péndulo, g la constante de aceleración de gravedad y υ es la acción de control.

Despejando $\ddot{q}_1$ y $\ddot{q}_2$, se tiene:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{g}{\ell}\cdot\mathrm{sen}(q_1) - \dfrac{1}{\ell}\cdot\cos(q_1)\cdot\ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{\nu + \ddot{q}_1\cdot m\cdot\ell\cdot\mathrm{sen}(q_1)\cdot q_1^2 - m\cdot\ell\cdot\cos(q_1)}{(M+m)} = u \end{cases}$$

Donde se sabe que $\ddot{q}_1$ es la aceleración angular del péndulo y $\ddot{q}_2$ es la aceleración traslacional del carro.

Tomando $\ddot{q}_2$ como señal de control, es decir $\ddot{q}_2$ = u y a = g/ℓ, b = 1/ℓ las ecuaciones anteriores adoptan la siguiente forma:

$$\ddot{q}_1 = a \cdot \operatorname{sen}(q_1) - b \cdot \cos(q_1) \cdot u \tag{6.3}$$

$$\ddot{q}_2 = u \tag{6.4}$$

a su vez, las ecuaciones. 6.3 y 6.4 se pueden representar de la forma matricial siguiente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = a \cdot \operatorname{sen}(q_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \cdot \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Sabiendo que:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boxed{e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

donde e_1 que es el vector estándar euclidiano básico,

se tiene lo siguiente:

$$\ddot{q} = a \cdot \operatorname{sen}(q_1) e_1 + \begin{bmatrix} -b \cdot \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Definiendo $p = \dot{q} \Rightarrow \ddot{q} = \dot{p}$, de tal forma que el sistema de ecuaciones (6.3) y (6.4) queda representado por la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= a \cdot \operatorname{sen}(q_1) e_1 + \begin{bmatrix} -b \cdot \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{6.5}$$

Notando que:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= a \cdot \operatorname{sen}(q_1) e_1 + \begin{bmatrix} -b \cdot \cos(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \equiv \begin{cases} \dot{q} = M^{-1}(q_r) \cdot p \\ \dot{p} = s(q_r) + G(q_r) \cdot u \end{cases}$$

donde se observa que $G(q_r)=\begin{bmatrix}-b\cdot\cos(q_1)\\ 1\end{bmatrix}$ y $G^{\perp}(q_r)=\eta(q_1)\begin{pmatrix}1 & b\cdot\cos(q_1)\end{pmatrix}$, siendo $\eta(q_r)$ una función libre que será definida más adelante, siendo:

$$M^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.6}$$

$$s(q_1)=a\cdot\mathrm{sen}(q_1)\cdot e_1 \tag{6.7}$$

El equilibrio del sistema corresponderá a una posición hacia arriba del péndulo con $q_1^{*}=0$ **y** q_2 un valor arbitrario.

`

6.1 DEMOSTRACIÓN DE QUE $\eta(q_1)$ NO ES UNA CONSTANTE.

Para ello se tiene que suponer una matriz de masa inercial de la forma siguiente**:**

$$M_d(q_1)=\begin{bmatrix}m_{11}^{d}(q_1) & m_{12}^{d}(q_1)\\ m_{12}^{d}(q_1) & m_{22}^{d}(q_1)\end{bmatrix}$$

Partiendo de que $G^{\perp}(q_r)\cdot M_d(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1=\rho$ (6.8)

se tiene que:

$$G^{\perp}(q_r)\cdot M_d(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1=\eta\begin{bmatrix}1 & b\cdot\cos(q_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_{11}^{d}(q_1) & m_{12}^{d}(q_1)\\ m_{12}^{d}(q_1) & m_{22}^{d}(q_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\rho$$

$$G^{\perp}(q_r)\cdot M_d(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1=\eta\begin{bmatrix}1 & b\cdot\cos(q_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_{11}^{d}(q_1)\\ m_{12}^{d}(q_1)\end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_r)\cdot M_d(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1=\eta\cdot\left(m_{11}^{d}(q_1)+m_{12}^{d}(q_1)\cdot b\cdot\cos(q_1)\right)=\rho\,. \tag{6.9}$$

Partiendo de que:

$$G^{\perp}(q_r)\cdot\frac{dM_d(q_1)}{dq_1}=0$$

$$G^{\perp}(q_r)\cdot\frac{dM_d(q_1)}{dq_1}=\eta\begin{bmatrix}1 & b\cdot\cos(q_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{dm_{11}^d(q_1)}{dq_1} & \frac{dm_{12}^d(q_1)}{dq_1}\\ \frac{dm_{12}^d(q_1)}{dq_1} & \frac{dm_{22}^d(q_1)}{dq_1}\end{bmatrix}=0$$

$$G^{\perp}(q_r)\cdot\frac{dM_d(q_1)}{dq_1}=\eta\begin{bmatrix}1 & b\cdot\cos(q_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{dm_{11}^d(q_1)}{dq_1} & \frac{dm_{12}^d(q_1)}{dq_1}\\ \frac{dm_{12}^d(q_1)}{dq_1} & \frac{dm_{22}^d(q_1)}{dq_1}\end{bmatrix}=0$$

$$\frac{dm_{12}^d(q_1)}{dq_1}+\frac{dm_{22}^d(q_1)}{dq_1}\cdot b\cdot\cos(q_1)=0 \qquad (6.10)$$

$$\frac{dm_{11}^d(q_1)}{dq_1}+\frac{dm_{12}^d(q_1)}{dq_1}\cdot b\cdot\cos(q_1)=0 \qquad (6.11)$$

diferenciando (6.9)

$$\eta\cdot\left(\frac{dm_{11}^d(q_1)}{dq_1}+\frac{dm_{12}^d(q_1)}{dq_1}\cdot b\cdot\cos(q_1)-m_{12}^d(q_1)\cdot b\cdot\operatorname{sen}(q_1)\right)=0$$

de (6.11)

$$m_{12}^d(q_1)\cdot b\cdot\operatorname{sen}(q_1)=0$$

puesto que **b>0** entonces implica que: $\boxed{m_{12}^d(q_1)=0}$ y remplazando $m_{12}^d(q_1)=0$ en la (6.9), se tiene:

$$G^{\perp}(q_r)\cdot M_d(q_1)\cdot e_1=\eta\cdot\left(m_{11}^d(q_1)+0\cdot b\cdot\cos(q_1)\right)=\rho,$$

$\eta\cdot\left(m_{11}^d(q_1)+0\right)=\rho$ donde $\boxed{m_{11}^d(q_1)=\frac{\rho}{\eta}}$, lo cual "sugiere" que $m_{11}^d(q_1)$ es una constante, que además debe ser positiva para asegurar que $\mathbf{M_d(q_1)}$ sea positiva.

Ahora, como $G^{\perp}(q_r)\cdot s(q_1)=\eta\begin{bmatrix}1 & b\cdot\cos(q_1)\end{bmatrix}\cdot a\cdot \text{sen}(q_1)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=a\cdot\eta\cdot\text{sen}(q_1)$ y para el punto de equilibrio (q_{1*} =0) se tiene que $G^{\perp}(q_1^*)\cdot s(q_1^*)=0 \Rightarrow a\cdot\eta=0$, luego dividiendo por ρ se obtiene $\boxed{\frac{a\cdot\eta}{\rho}<0}$ donde a>0; por otra parte, $m_{11}^d(q_1)=\frac{\rho}{\eta}$ establece que $\frac{\rho}{\eta}>0$, implica que su inversa $\frac{\eta}{\rho}$ también es positiva $\frac{\eta}{\rho}>0$ lo cual se contradice con lo anterior ya que ahora $\boxed{\frac{a\cdot\eta}{\rho}>0}$, entonces se debe suponer que η no es una constante.

Regresando a la construcción de $\mathbf{M_d(q_1)}$ sugerida en la *Proposición 1* **[3]**. Por simplicidad, se toma $\boldsymbol{\psi(q_1)}$ como una función escalar y calculada de la siguiente ecuación:

$$M_d(q_1)=\int_{q_{1*}}^{q_1} G(\mu)\psi(\mu)G^T(\mu)d\mu+M_d^0 \tag{6.12}$$

$$G(\mu)G^T(\mu)=\begin{bmatrix}-b\cdot\cos(\mu)\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b\cdot\cos(\mu) & 1\end{bmatrix}$$

$$G(\mu)G^T(\mu)=\begin{bmatrix}b^2\cdot\cos^2(\mu) & -b\cdot\cos(\mu)\\ -b\cdot\cos(\mu) & 1\end{bmatrix}$$

$$M_d(q_1)=\int_{q_{1*}}^{q_1}\psi(\mu)\begin{bmatrix}b^2\cdot\cos^2(\mu) & -b\cdot\cos(\mu)\\ -b\cdot\cos(\mu) & 1\end{bmatrix}d\mu+M_d^0,$$

Sabiendo que $M^{-1}(q_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y comparando (6.5) , se tiene:

$$M^{-1}(q_1)\cdot e_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=e_1$$

para lo cual (6.9) queda como:

$$G^{\perp}(q_1^*)\cdot Md(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1 = G^{\perp}(q_1^*)\cdot Md(q_1)\cdot e_1 = \rho$$

$$G^{\perp}(q_1^*)\cdot Md(q_1)\cdot e_1 =$$
$$\eta(q_1)\begin{bmatrix}1 & b\cdot\cos(q_1)\end{bmatrix}\cdot\left[\int_{q_1^*}^{q_1}\psi(\mu)\begin{bmatrix}b^2\cdot\cos^2(\mu) & -b\cdot\cos(\mu)\\ -b\cdot\cos(\mu) & 1\end{bmatrix}d\mu + M_d^0\right]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_{1*})\cdot Md(q_1)\cdot e_1 = \eta(q_1)\begin{bmatrix}1 & b\cdot\cos(q_1)\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}b^2\int_{q_{1*}}^{q_1}\psi(\mu)\cdot\cos^2(\mu)d\mu\\ -b\int_{q_{1*}}^{q_1}\psi(\mu)\cdot\cos(\mu)d\mu\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m_{11}^0\\ m_{12}^0\end{bmatrix}\right)$$

$$G^{\perp}(q_{1*})\cdot Md(q_1)\cdot e_1 =$$
$$\eta(q_1)\cdot\left[b^2\left(\int_{q_{1*}}^{q_1}\psi(\mu)\cdot\cos^2(\mu)d\mu-\cos(q_1)\int_{q_{1*}}^{q_1}\psi(\mu)\cdot\cos(\mu)d\mu\right)+m_{11}^0+m_{12}^0 b\cdot\cos(q_1)\right]$$

Comparando con la ecuación (6.9), que a continuación se repite:

$$G^{\perp}(q_1)\cdot M_d(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1 = \eta\cdot\left(m_{11}^d(q_1)+m_{12}^d(q_1)\cdot b\cdot\cos(q_1)\right)=\rho$$

se selecciona una función $\psi(q_1)$ tal que los términos encerrados en los corchetes (evaluados en cero) están delimitada siempre a cero

$$m_{11}^d = \eta\left[b^2\cdot\psi\cdot\left(\int_{q_{1*}}^{q_1}\cdot\cos^2(\mu)d\mu-\cos(q_1)\int_{q_{1*}}^{q_1}\cdot\cos(\mu)d\mu\right)+m_{11}^0\right]$$

$$m_{11}^{d}=\left[\psi\cdot b^{2}\cdot\left(\left(\frac{q_1}{2}+\frac{sen\left(2q_1\right)}{4}\right)-\left(\frac{q_1^{*}}{2}+\frac{sen\left(2q_1^{*}\right)}{4}\right)-\cos\left(q_1\right)\cdot\left(sen\left(q_1\right)-sen\left(q_1^{*}\right)\right)\right)+m_{11}^{0}\right]$$

$$m_{11}^{d}=\left[\psi\cdot b^{2}\cdot\left(\begin{array}{l}\left(\frac{q_1}{2}+\frac{sen\left(q_1\right)\cos\left(q_1\right)}{2}\right)-\left(\frac{q_{1^*}}{2}+\frac{sen\left(q_{1^*}\right)\cos\left(q_{1^*}\right)}{2}\right)\\-\cos\left(q_1\right)\cdot\left(sen\left(q_1\right)-sen\left(q_{1^*}\right)\right)\end{array}\right)+m_{11}^{0}\right]$$

$$m_{11}^{d}=\left[\psi\cdot b^{2}\cdot\left(\left(\frac{q_1}{2}-\frac{sen\left(q_1\right)\cos\left(q_1\right)}{2}\right)-\left(\frac{q_1^{*}}{2}+\frac{sen\left(q_1^{*}\right)\cos\left(q_1^{*}\right)}{2}\right)+\cos\left(q_1\right)sen\left(q_1^{*}\right)\right)+m_{11}^{0}\right]$$

$$m_{11}^{d}=\left[\psi\cdot b^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(q_1-sen\left(q_1\right)\cos\left(q_1\right)\right)-\frac{1}{2}\left(q_1^{*}+sen\left(q_1^{*}\right)\cos\left(q_1^{*}\right)\right)+\cos\left(q_1\right)sen\left(q_1^{*}\right)\right)+m_{11}^{0}\right]$$

Por identidad trigonométrica, se tiene que:

$$sen\left(q_1^{*}\right)\cdot\cos\left(q_1\right)=\frac{1}{2}\left[sen\left(q_1^{*}-q_1\right)+sen\left(q_1^{*}+q_1\right)\right]\text{ y }\quad q_1>>q_1^{*}\text{ entonces}$$

$$sen\left(q_1^{*}\right)\cdot\cos\left(q_1\right)=\frac{1}{2}\left[-sen\left(q_1\right)+sen\left(q_1\right)\right]=0\text{ por lo que:}$$

$$m_{11}^{d}=\left[\psi\cdot b^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\left(q_1-sen\left(q_1\right)\cos\left(q_1\right)\right)-\frac{1}{2}\left(q_1^{*}+sen\left(q_1^{*}\right)\cos\left(q_1^{*}\right)\right)\right)+m_{11}^{0}\right]$$

$$m_{11}^{d}=\left[\psi\cdot b^{2}\left(\frac{1}{2}\left(-\cos\left(q_1\right)sen\left(q_1\right)+q_1\right)\right)-\psi\cdot b^{2}\left(\frac{1}{2}\left(\cos\left(q_1^{*}\right)sen\left(q_1^{*}\right)+q_1^{*}\right)\right)+m_{11}^{0}\right]$$

Como es de observar, esta ecuación surge de la suposición de que si **$\psi(q_1) = \psi$** es una constante, (notándose que la misma no presenta una forma adecuada debido a su complejidad), luego **no se debe considerar que ψ sea constante** ya que al realizar los cálculos la **Ley de control** serán muy complejos.

6.2. CÁLCULOS DE $M_d(q_1)$:

Para **q_{1*}** = **0** se tiene que

$$m_{11}^{d} = \left[\psi \cdot b^{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \left(-\operatorname{sen}(q_1) \cos(q_1) + q_1 \right) \right) + m_{11}^{0} \right]$$

y cuando **q_1** se aproxime a cero la ecuación se presenta como:

$$m_{11}^{d} = \left[\psi \cdot b^{2} \cdot \left(\frac{q_1}{2} \right) + m_{11}^{0} \right]$$

Observando la ecuación $G(\mu)G^{T}(\mu)$ se propone una función de distribución, algo simple, que sirva para fácil integración y que se preste para que se acerque a cero por la derecha y por la izquierda **$\psi(q_1) = -k.\operatorname{sen}(q_1)$,** donde **k>0**, entonces:

$$M_d(q_1) = \int_{q_{1*}}^{q_1} \left(-k \cdot \operatorname{sen}(\mu) \right) \begin{bmatrix} b^{2} \cdot \cos^{2}(\mu) & -b \cdot \cos(\mu) \\ -b \cdot \cos(\mu) & 1 \end{bmatrix} d\mu + M_d^{0}$$

$$M_d(q_1) = \int_{0}^{q_1} \begin{bmatrix} -kb^{2}\operatorname{sen}(\mu)\cos^{2}(\mu) & kb\operatorname{sen}(\mu)\cos(\mu) \\ kb\operatorname{sen}(\mu)\cos(\mu) & -k \cdot \operatorname{sen}(\mu) \end{bmatrix} d\mu + M_d^{0}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{d} & m_{12}^{d} \\ m_{12}^{d} & m_{22}^{d} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -kb^2\int_0^{q1} sen(\mu)\cos^2(\mu)d\mu & kb\int_0^{q1} sen(\mu)\cos(\mu)d\mu \\ kb\int_0^{q1} sen(\mu)\cos(\mu)d\mu & -k\int_0^{q1} sen(\mu)d\mu \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} m_{11}^{0} & m_{12}^{0} \\ m_{12}^{0} & m_{22}^{0} \end{pmatrix}$$

$$m_{11}^{d} = -kb^2\int_0^{q_1} sen(\mu)\cos^2(\mu)d\mu + m_{11}^{0} \qquad m_{11}^{d} = kb^2 \left.\frac{\cos^3(\mu)}{3}\right|_0^{q_1} + m_{11}^{0}$$

$$m_{11}^{d} = \frac{kb^2\cos^3(q_1)}{3} - \frac{kb^2}{3} + m_{11}^{0} \qquad m_{11}^{d} = \frac{kb^2\cos^3(q_1)}{3} + \left(m_{11}^{0} - \frac{kb^2}{3}\right)$$

Como es de observar $\boxed{m_{11}^{0} = \frac{kb^2}{3}}$, quedando $m_{11}^{d} = \frac{kb^2\cos^3(q_1)}{3} = m_{11}^{0}\cos^3(q_1)$.

De igual forma se tiene para m_{12}^{d}

$$m_{12}^{d} = kb\int_0^{q1} sen(\mu)\cos(\mu)d\mu + m_{12}^{0} \Rightarrow \qquad m_{12}^{d} = -kb\left.\frac{\cos^2(\mu)}{2}\right|_0^{q1} + m_{12}^{0} \Rightarrow$$

$$m_{12}^{d} = -kb\frac{\cos^2(q_1)}{2} + \left(m_{12}^{0} + \frac{kb}{2}\right)$$

para lo cual se nota que $\boxed{m_{12}^{0} = -\frac{kb}{2}}$ para así obtener

$$m_{12}^{d} = -kb\frac{\cos^2(q_1)}{2} = m_{12}^{0}\cos^2(q_1).$$

Para hallar a m_{22}^{d} se tiene que:

$$m_{22}^{d} = -k\int_0^{q1} sen(\mu)d\mu + m_{22}^{0} \Rightarrow \quad m_{22}^{d} = k\cos(q1) + \left(-k + m_{22}^{0}\right) \Rightarrow \boxed{m_{22}^{0} = k}$$

$$\boxed{m_{22}^{d} = k\left(\cos(q_1) - 1\right) + m_{22}^{0}}$$

luego. $$M_d(q_1)=\begin{pmatrix} \frac{kb^2}{3}\cos^3(q_1) & -\frac{kb}{2}\cos^2(q_1) \\ -\frac{kb}{2}\cos^2(q_1) & k\left(\cos(q_1)-1\right)+m_{22}^0 \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

siendo $$M_d^0(q_1)=\begin{pmatrix} \frac{kb^2}{3} & -\frac{kb}{2} \\ -\frac{kb}{2} & k \end{pmatrix}$$

6.3. CONSTRUCCIÓN DE η

Si se define:

$$\eta\left(q_1\right)\tilde{G}^{\perp}(q_1)\cdot M_d(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1=\rho$$

se tiene que,

$$\eta(q_1)\left(1 \quad b\cdot\cos(q_1)\right)\begin{pmatrix} \frac{kb^2}{3}\cos^3(q_1) & -\frac{kb}{2}\cos^2(q_1) \\ -\frac{kb}{2}\cos^2(q_1) & k\left(\cos(q_1)-1\right)+m_{22}^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\rho$$

$$\eta(q_1)\left(1 \quad b\cdot\cos(q_1)\right)\begin{pmatrix} \frac{kb^2}{3}\cos^3(q_1) \\ -\frac{kb}{2}\cos^2(q_1) \end{pmatrix}=\rho$$

$$\eta(q_1)\left(\frac{kb^2}{3}\cos^3(q_1)-\frac{kb^2}{2}\cos^3(q_1)\right)=\eta(q_1)\left(\frac{2kb^2}{6}\cos^3(q_1)-\frac{3kb^2}{6}\cos^3(q_1)\right)=\rho$$

$$-\eta(q_1)\frac{kb^2}{6}\cos^3(q_1)=\rho \qquad \Rightarrow \qquad \eta(q_1)=-\frac{6\rho}{kb^2\cos^3(q_1)} \tag{6.14}$$

ahora evaluando

$$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(q_1)\cdot s(q_1)=\frac{1}{\rho}\eta(q_1)\left(1 \quad b\cdot\cos(q_1)\right)\left(a\cdot \mathrm{sen}(q_1)e_1\right)$$

$$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(q_1)\cdot s(q_1)=\frac{1}{\rho}\eta(q_1)\left(1 \quad b\cdot\cos(q_1)\right)\left(a\cdot \mathrm{sen}(q_1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(q_1)\cdot s(q_1)=\frac{1}{\rho}\eta(q_1)\left(1 \quad b\cdot\cos(q_1)\right)\begin{pmatrix}a\cdot \mathrm{sen}(q_1)\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(q_1)\cdot s(q_1)=\frac{1}{\rho}\eta(q_1)a\cdot \mathrm{sen}(q_1)$$

$$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(q_1)\cdot s(q_1)=\frac{1}{\rho}\left(-\frac{6\rho}{kb^2\cos^3(q_1)}\right)a\cdot \mathrm{sen}(q_1)$$

$$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(q_1)\cdot s(q_1)=-\frac{6a}{kb^2}\frac{\mathrm{sen}(q_1)}{\cos^3(q_1)}$$

lo cual satisface la derivada requerida.

6.4. CÁLCULOS DE LA ENERGÍA POTENCIAL Vd(q) Y ∇_qVd(q):

La energía potencial viene dada por $Vd(q)=\frac{1}{\rho}\int_0^{q_1}G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu)d\mu+\phi(z(q))$

donde $\phi(z(q))\overset{\Delta}{=}\frac{1}{2}\left[z(q)-z(q^*)\right]^T P\left[z(q)-z(q^*)\right]$

$$\phi(z(q))\overset{\Delta}{=}\frac{1}{2}\left[z_2(q_2,q_1)-z_2\left(q_2^*,q_1^*\right)\right]^T P\left[z_2(q_2,q_1)-z_2\left(q_2^*,q_1^*\right)\right]$$

donde

$$z_i(q_i,q_r)\overset{\Delta}{=}q_i-\frac{1}{\rho}\int_0^{q_r}G^{\perp}(\mu)\cdot M_d(\mu)\cdot M^{-1}(\mu)\cdot e_i\cdot d\mu$$

$$Vd(q) = \frac{1}{\rho}\int_0^{q_1} G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu)\,d\mu + \phi\big(z(q)\big)$$

de (6.14) $$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu) = -\frac{6a}{kb^2}\frac{sen(\mu)}{cos^3(\mu)}$$

sustituyendo

$$Vd(q) = -\int_0^{q_1}\frac{6a}{kb^2}\frac{sen(\mu)}{cos^3(\mu)}d\mu + \phi\big(z(q)\big) \quad Vd(q) = -\frac{6a}{kb^2}\int_0^{q_1}\frac{sen(\mu)}{cos^3(\mu)}d\mu + \phi\big(z(q)\big)$$

$$Vd(q) = -\frac{6a}{kb^2}\int_0^{q_1} cos^{-3}(\mu)sen(\mu)\,d\mu + \phi\big(z(q)\big)$$

$$Vd(q) = \frac{6a}{kb^2}\frac{cos^{-2}(\mu)}{2}\Bigg|_0^{q_1} + \phi\big(z(q)\big)$$

$$Vd(q) = \frac{3\cdot a}{kb^2 cos^2(\mu)}\Bigg|_0^{q_1} + \phi\big(z(q)\big) \qquad Vd(q) = \frac{3\cdot a}{kb^2}\left(\frac{1}{cos^2(q_1)} - 1\right) + \phi\big(z(q)\big)$$

$$Vd(q) = \frac{3\cdot a}{kb^2 cos^2(q_1)} - \frac{3\cdot a}{kb^2} + \phi\big(z(q)\big).$$

Se calcula ahora

$$\phi\big(z(q)\big) = \frac{1}{2}\big[z(q) - z(q*)\big]^T P\big[z(q) - z(q*)\big]$$

que, en este caso en particular, la coordenada generalizada q es (q_1,q_2)

$$\phi\big(z(q)\big) = \frac{1}{2}\Big[z_2(q_2,q_1) - z_2\big(q_2^*,q_1^*\big)\Big]^T P\Big[z_2(q_2,q_1) - z_2\big(q_2^*,q_1^*\big)\Big]$$

donde por definición:

$$z_i(q_i,q_r) \overset{\Delta}{=} q_i - \frac{1}{\rho}\int_0^{q_r} G^{\perp}(\mu)\cdot M_d(\mu)\cdot M^{-1}(\mu)\cdot e_i\cdot d\mu$$

$$z_2(q_2, q_1) \overset{\Delta}{=} q_2 - \frac{1}{\rho}\int_0^{q_1} G^{\perp}(\mu)\cdot M_d(\mu)\cdot M^{-1}(\mu)\cdot \mathbf{e}_2 \cdot d\mu$$

siendo $\mathbf{e_2}$ el vector estándar euclidiano básico $\boxed{\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$. Se halla, en primer lugar, el argumento de las integrales:

$$G^{\perp}(\mu_r) = \eta(\mu)\begin{pmatrix}1 & b\cdot\cos(\mu)\end{pmatrix} \qquad M_d(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{kb^2}{3}\cos^3(\mu) & -\frac{kb}{2}\cos^2(\mu) \\ -\frac{kb}{2}\cos^2(\mu) & k\left(\cos(\mu)-1\right)+m_{22}^0 \end{pmatrix}$$

$$G^{\perp}(\mu r)M_d(q_1)M^{-1}(\mu)e_2 =$$

$$\eta(\mu)\begin{pmatrix}1 & b\cdot\cos(\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{kb^2}{3}\cos^3(\mu) & -\frac{kb}{2}\cos^2(\mu) \\ -\frac{kb}{2}\cos^2(\mu) & k\left(\cos(\mu)-1\right)+m_{22}^0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$$

$$G^{\perp}(qr)M_d(q_1)M^{-1}(\mu)e_2 = \eta(\mu)\begin{pmatrix}1 & b\cdot\cos(\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{kb}{2}\cos^2(\mu) \\ k\left(\cos(\mu)-1\right)+m_{22}^0 \end{pmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_r)M_d(q_1)M^{-1}(\mu)e_2 = \eta(\mu)\begin{pmatrix}1 & b\cdot\cos(\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{kb}{2}\cos^2(\mu) \\ k\cos(\mu)+\left(m_{22}^0-k\right) \end{pmatrix} \text{ si } \boxed{m_{22}^0 > k} \text{ entonces}$$

$$G^{\perp}(qr)M_d(q_1)M^{-1}(\mu)e_2 = \eta(\mu)\begin{pmatrix}1 & b\cdot\cos(\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{kb}{2}\cos^2(\mu) \\ k\cos(\mu)+m_{22}^0 \end{pmatrix}$$

$$G^{\perp}(qr)M_d(q_1)M^{-1}(\mu)e_2 = \eta(\mu)\left(-\frac{kb}{2}\cos^2(\mu)+kb\cos^2(\mu)+m_{22}^0 b\cdot\cos(\mu)\right)$$

$$G^{\perp}(qr)M_d(q_1)M^{-1}(\mu)e_2 = \left(-\frac{6\rho}{kb^2\cos^3(\mu)}\right)\left(\frac{kb}{2}\cos^2(\mu)+m_{22}^0 b\cdot\cos(\mu)\right)$$

$$G^{\perp}(q_r)M_d(q_1)M^{-1}(\mu)e_2 = \left(-\frac{3\cdot\rho}{b\cos(\mu)} - \frac{6m_{22}^0\rho}{kb\cos^2(\mu)}\right),$$

Recordando que $z_2(q_2,q_1) \overset{\Delta}{=} q_2 - \frac{1}{\rho}\int_0^{q_1} G^{\perp}(\mu)\cdot M_d(\mu)\cdot M^{-1}(\mu)\cdot \mathbf{e}_2 \cdot d\mu$, se tiene:

$$z_2(q_2,q_1) = q_2 - \frac{1}{\rho}\int_0^{q_1}\left(-\frac{3\rho}{b\cos(\mu)} - \frac{6m_{22}^0\rho}{kb\cos^2(\mu)}\right)\cdot d\mu$$

$$z_2(q_2,q_1) = q_2 + \int_0^{q_1}\frac{3}{b\cos(\mu)}d\mu + \int_0^{q_1}\frac{6m_{22}^0}{kb\cos^2(\mu)}d\mu$$

$$z_2(q_2,q_1) = q_2 + \frac{3}{b}\int_0^{q_1}\frac{d\mu}{\cos(\mu)} + \frac{6m_{22}^0}{kb}\int_0^{q_1}\frac{d\mu}{\cos^2(\mu)}$$

$$z_2(q_2,q_1) = q_2 + \frac{3}{b}\Big[\mathrm{Ln}\big(\sec(\mu)+\tan(\mu)\big)\Big]\Big|_0^{q_1} + \frac{6m_{22}^0}{kb}\tan(\mu)\Big|_0^{q_1}$$

$$z_2(q_2,q_1) = q_2 + \frac{3}{b}\mathrm{Ln}\big(\sec(q_1)+\tan(q_1)\big) + \frac{6m_{22}^0}{kb}\tan(q_1)$$

z_2 evaluada en q_{r*} es:

$$z_2(q_2,q_1) = q_{2*} + \frac{3}{b}\mathrm{Ln}\big(\sec(0)+\mathrm{tag}(0)\big) + \frac{6m_{22}^0}{kb}\mathrm{tag}(0)$$

$$z_2(q_{2*},q_{1*}) = q_{2*}$$

$$z_2(q_2,q_1) - z_2(q_{2*},q_{1*}) = q_2 + \frac{3}{b}\mathrm{Ln}\big(\sec(q_1)+\tan(q_1)\big) + \frac{6m_{22}^0}{kb}\tan(q_1) - q_{2*}$$

$$z_2(q_2,q_1) - z_2(q_{2*},q_{1*}) = q_2 - q_{2*} + \frac{3}{b}\mathrm{Ln}\big(\sec(q_1)+\tan(q_1)\big) + \frac{6m_{22}^0}{kb}\tan(q_1)$$

puesto que por definición $\phi(z(q)) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}\big[z(q)-z(q*)\big]^T P\big[z(q)-z(q*)\big]$, y z(q) no es una matriz, se tiene que

$$\phi(z(q)) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}\left[z(q)-z(q^*)\right]^T P\left[z(q)-z(q^*)\right] = \frac{P\left[z(q)-z(q^*)\right]^2}{2} \quad \text{donde } P>0.$$

Por tanto, la energía potencial **Vd(q)** será:

$$Vd(q) = \frac{3a}{kb^2\cos^2(q_1)} - \frac{3a}{kb^2} + \frac{P}{2}\left[q_2 - q_{2*} + \frac{3}{b}Ln\left(\sec(q_1)+\tan(q_1)\right) + \frac{6m_{22}^0}{kb}\tan(q_1)\right]^2$$

$$Vd(q) = \frac{3a}{kb^2\cos^2(q_1)} - \frac{3a}{kb^2} + \frac{P}{2}\left[q_2 - q_{2*} + f(q_1)\right]^2$$

donde $$f(q_1) \overset{\Delta}{=} \frac{3}{b}Ln\left(\sec(q_1)+\tan(q_1)\right) + \frac{6m_{22}^0}{kb}\tan(q_1)$$

luego el gradiente de Vd(q) vendrá dado por:

$$\nabla_{q1}Vd(q) = \frac{6a\cdot sen(q_1)}{kb^2\cos^3(q_1)} + \frac{P}{2}\left[2f'(q_1)(q_2-q_{2*}) + 2f(q_1)f'(q_1)\right]$$

$$\nabla_{q1}Vd(q) = \frac{6a\cdot sen(q_1)}{kb^2\cos^3(q_1)} + P\left[f'(q_1)(q_2-q_{2*}) + f(q_1)f'(q_1)\right]$$

$$\nabla_{q2}Vd(q) = P\left[(q_2-q_{2*}) + f(q_1)\right]$$

siendo la derivada de $f(q_1)$,

$$f'(q_1) = \left(\frac{3}{b}\right)\frac{\sec(q_1)\cdot\tan(q_1)+\sec^2(q_1)}{\left(\sec(q_1)+\tan(q_1)\right)} + \frac{6m_{22}^0}{kb}\sec^2(q_1)$$

$$\nabla_{q1}Vd(q) = \begin{bmatrix}\nabla_{q1}Vd(q)\\ \nabla_{q2}Vd(q)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dfrac{6a\cdot sen(q_1)}{kb^2\cos^3(q_1)} + P\left[f'(q_1)(q_2-q_{2*}) + f(q_1)f'(q_1)\right]\\ P\left[(q_2-q_{2*}) + f(q_1)\right]\end{bmatrix}$$

6.5. CONSTRUCCIÓN de U_{es}:

$$u_{es} = G^{\perp}(q_r)M_d(q_r)M^{-1}(q_r)e_1\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q_1)\frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1}M_d^{-1}(q_1)p$$
$$-G^{\perp}(q_r)M_d(q_r)M^{-1}(q_r)\begin{bmatrix}\dfrac{6a\cdot sen(q_1)}{kb^2\cos^3(q_1)}+P\left[f'(q_1)(q_2-q_{2*})+f(q_1)\right]f'(q_1)\\ P\left[(q_2-q_{2*})+f(q_1)\right]\end{bmatrix}$$
$$+G^{\perp}(q_r)J_2(q_r,p)M_d^{-1}(q_r)\cdot p$$

$$\tilde{p}\overset{\Delta}{=}M_d^{-1}(q_1)p \qquad \tilde{p}^T\overset{\Delta}{=}p^T\left(M_d^{-1}(q_1)\right)^T$$

dado que $M_d^{-1}(q_1)$ es una matriz simétrica se tiene que

$$\left(M_d^{-1}(q_1)\right)^T = M_d^{-1}(q_1) \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}^T\overset{\Delta}{=}p^T M_d^{-1}(q_1)$$

$$u_{es} = G^{\perp}(q_r)M_d(q_r)M^{-1}(q_r)e_1\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q_1)\frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1}M_d^{-1}(q_1)p$$
$$-G^{\perp}(q_r)M_d(q_r)M^{-1}(q_r)\begin{bmatrix}\dfrac{6a\cdot sen(q_1)}{kb^2\cos^3(q_1)}+P\left[f'(q_1)(q_2-q_{2*})+f(q_1)f'(q_1)\right]\\ P\left[(q_2-q_{2*})+f(q_1)\right]\end{bmatrix}$$
$$+G^{\perp}(q_r)J_2(q_r,p)M_d^{-1}(q_r)\cdot p$$

De la expresión (2.34) $G^{\perp}(q_r)J_2(q_r,p)=\tilde{p}^T\cdot\Im(q_r)\cdot A^T(q_r)$ y definiendo

$$G^{\perp}(q_1)M_d(q_1)M^{-1}(q_1)e_1\frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1}=-2\cdot\Im(q_1)\cdot A^T(q_r)$$

$$u_{es} = -\frac{1}{2} M_d^{-1}(q_r) \cdot p^T \Im(q_r) \cdot A^T(q_r) \cdot p \cdot M_d^{-1}(q_r)$$
$$-G^{\perp}(q_r) M_d(q_r) M^{-1}(q_r) \begin{bmatrix} \dfrac{6a \cdot sen(q_1)}{kb^2 \cos^3(q_1)} + P\left[f'(q_1)(q_2 - q_{2*}) + f(q_1) f'(q_1)\right] \\ P\left[(q_2 - q_{2*}) + f(q_1)\right] \end{bmatrix}$$
$$+M_d^{-1}(q_r) \cdot p^T \cdot \left[\Im(q_r) \cdot A^T(q_r)\right] \cdot p \cdot M_d^{-1}(q_r)$$

$$u_{es} = \frac{1}{2} M_d^{-1}(q_1) \cdot p^T \left[\Im(q_1) \cdot A^T(q_1)\right] M_d^{-1}(q_1) \cdot p$$
$$-G^{\perp}(q_1) M_d(q_1) M^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} \dfrac{6a \cdot sen(q_1)}{kb^2 \cos^3(q_1)} + P\left[f'(q_1)\left(q_2 - q_2^*\right) + f(q_1) f'(q_1)\right] \\ P\left[\left(q_2 - q_2^*\right) + f(q_1)\right] \end{bmatrix}$$

donde, para la estabilidad $G^{\perp}\left(q_1^*\right) \cdot s\left(q_1^*\right) = 0$

$$u_{es} = \frac{1}{2} \tilde{p}^T \left[\Im(q_1) \cdot A^T(q_1)\right] \tilde{p}$$
$$-G^{\perp}(q_1) M_d(q_1) M^{-1}(q_1) \begin{bmatrix} \dfrac{6a \cdot sen(q_1)}{kb^2 \cos^3(q_1)} + P\left[f'(q_1)\left(q_2 - q_2^*\right) + f(q_1) f'(q_1)\right] \\ P\left[\left(q_2 - q_2^*\right) + f(q_1)\right] \end{bmatrix}$$

6.6. CONSTRUCCIÓN DE $\Im(\mathbf{q_r}) \cdot \mathbf{A}^T(\mathbf{q_r})$:

De la construcción de la matriz W^{kl}, dada en la sección 2.3.2.2 (Pág. 18), y utilizando la prueba del *Lema 3* **[3]**, se tiene:

$$A(q_1) \stackrel{\Delta}{=} W_1 \left(G^{\perp}(q_1)\right)^{\mathsf{T}} \quad \text{donde} \quad \upsilon \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{col}(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n) = \left(G^{\perp}(q_r)\right)^{\mathsf{T}}$$

$$\upsilon \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \vdots \\ \upsilon_n \end{bmatrix} = \left(G^{\perp}(q_r)\right)^{\mathsf{T}}$$

si se halla un vector w tal que $w^{\mathsf{T}} A(q_r) = 0$ se pueden hallar los a_i por medio de la fórmula $w = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i$. Si se sabe, de la ecuación (2.37) que $W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $G^{\perp}(q_1) = \eta(q_1)\left[1 \;\; b\cos(q_1)\right]$ entonces se tiene que $A(q_r) \propto \begin{bmatrix} b\cos(q_1) \\ -1 \end{bmatrix}$, siendo el vector w^{T} un vector que se satisface $w^{\mathsf{T}} A(q_r) = 0$, para lo cual es obvio que $w^{\mathsf{T}} = \left[1 \;\; b\cos(q_1)\right]$ cumple con la condición, así $w = \begin{bmatrix} 1 \\ b\cos(q_1) \end{bmatrix}$. Luego se halla las a_i tal que se cumpla $w = \sum_{i=1}^{2} a_i \cdot e_i = a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b\cos(q_1) \end{bmatrix}$ se aprecia que $a_1=1$ y $a_2=b\cos(q_1)$ es una elección satisfactoria.

Considerando $e_r^{\mathsf{T}} W^{kl} \equiv \begin{cases} e_l^{\mathsf{T}} & \text{si } r = k \\ -e_k^{\mathsf{T}} & \text{si } r = l \\ 0 & \text{si otras} \end{cases}$ se tiene que para $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i^{\mathsf{T}} W^{lj} \upsilon = 0$, en donde para r=k=1 implica que $e_1^{\mathsf{T}} W^{12} \equiv e_2^{\mathsf{T}}$ y para r=l=2 se tiene $e_2^{\mathsf{T}} W^{12} \equiv -e_1^{\mathsf{T}}$ obteniéndose así, la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i^{\mathsf{T}} W^{lj} \upsilon = a_1 \cdot e_1^{\mathsf{T}} \cdot W^{12} \cdot \upsilon + a_1 \cdot e_2^{\mathsf{T}} \cdot W^{12} \cdot \upsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot e_2^{\mathsf{T}} \upsilon - a_2 \cdot e_1^{\mathsf{T}} \upsilon = 0,$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \left[0 \;\; 1\right] \upsilon - b\cos(q_1) \cdot \left[1 \;\; 0\right] \upsilon = 0, \quad \Rightarrow \left[0 \;\; 1\right] \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} - \left[b\cos(q_1) \;\; 0\right] \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} = 0,$$

Los valores que se ajustan de $\boldsymbol{v_1}$ y $\boldsymbol{v_2}$ serán:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ b\cos(q_1)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}b\cos(q_1) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ b\cos(q_1)\end{bmatrix} = 0,$$

para lo cual $v \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{col}(v_1,\ldots,v_n) = \left(G^{\perp}(q_r)\right)^{T} = \begin{bmatrix}v_1 \\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ b\cos(q_1)\end{bmatrix}$

lo cual cumple con $\dfrac{v_2}{v_1} a_1 = a_1 \Rightarrow \dfrac{b\cos(q_1)}{1} 1 = b\cos(q_1)$

$$A(q_r) = W_1\left(G^{\perp}(q_r)\right)^{T} = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ b\cos(q_1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\cos(q_1) \\ -1\end{bmatrix}$$

y la expresión

$$G^{\perp}(q_r) J_2(q_r, p) = \tilde{p}^{T} \cdot \Im(q_r) \cdot A^{T}(q_r) = \tilde{p}^{T}\begin{bmatrix}\alpha_{11} \\ \alpha_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\cos(q_1) & -1\end{bmatrix} = \tilde{p}^{T}\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdot b\cos(q_1) & -\alpha_{11} \\ \alpha_{12}\cdot b\cos(q_1) & -\alpha_{12}\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_{11}(q_1) b\cos(q_1) & -\alpha_{11}(q_1) \\ \alpha_{12}(q_1) b\cos(q_1) & -\alpha_{12}(q_1)\end{pmatrix} = -\alpha_{11}(q_1)\alpha_{12}(q_1) b\cos(q_1) + \alpha_{11}(q_1)\alpha_{12}(q_1) b\cos(q_1) = 0$$

$$G^{\perp}(q_r) J_2(q_r, p) = \tilde{p}^{T} \cdot \Im(q_r) \cdot A^{T}(q_r) = \tilde{p}^{T}\begin{bmatrix}\alpha_{11} \\ \alpha_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\cos(q_1) & -1\end{bmatrix} = \tilde{p}^{T} \cdot \begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{12} & 0\end{pmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_r) J_2(q_r, p) = \tilde{p}^{T} \cdot \Im(q_r) \cdot A^{T}(q_r) = \tilde{p}^{T} \cdot \begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{12} & 0\end{pmatrix}$$

$$\Im(q_r) \cdot A^{T}(q_r) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{12} & 0\end{pmatrix}$$

$$u_{es} = \frac{1}{2} \cdot p^{T} \cdot M_d^{-1}(q_r) \cdot \begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{12} & 0\end{pmatrix} \cdot M_d^{-1}(q_r) \cdot p$$

$$-G^{\perp}(q_r) M_d(q_r) M^{-1}(q_r)\begin{bmatrix}\dfrac{6a}{kb^2\cos^3(q_1)} + P\left[f'(q_1)(q_2 - q_{2*}) + f(q_1) f'(q_1)\right] \\ P\left[(q_2 - q_{2*}) + f(q_1)\right]\end{bmatrix}$$

6.7. CONSTRUCCIÓN DE α_1:

Ahora se calcula α_1 pero tratando de no despreciar el término $\eta(q_1)$, para ello se parte de la siguiente expresión:

$$G^{\perp}(q_1)\cdot Md(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1\cdot\frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1}=-2\cdot\Im(q_1)\cdot A^{T}(q_1)$$

donde de la ecuación (6.8) se sabe que:

$$G^{\perp}(q_1)\cdot Md(q_1)\cdot M^{-1}(q_1)\cdot e_1=\rho$$

$$\rho\frac{\partial M_d(q_r)}{\partial q_1}=-2\cdot\Im(q_r)\cdot A^{T}(q_r)$$

$$\frac{\rho}{2}\frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1}=-\Im(q_1)\cdot A^{T}(q_1)=\begin{pmatrix}-\alpha_{11}\cdot b\cos(q_1) & \alpha_{11}\\ -\alpha_{12}\cdot b\cos(q_1) & \alpha_{12}\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1}=\begin{pmatrix}-kb^2\cos^2(q_1)\mathrm{sen}(q_1) & kb\cos(q_1)\mathrm{sen}(q_1)\\ kb\cos(q_1)\mathrm{sen}(q_1) & -k\,\mathrm{sen}(q_1)\end{pmatrix}$$

Siendo $A(q_1)=\left[W_1\left(G^{\perp}(q_1)\right)^{T}\right]$ y su transpuesta $A^{T}(q_1)=\left[W_1\left(G^{\perp}(q_1)\right)^{T}\right]^{T}$ la cual por simple algebra matricial se transforma en $A^{T}(q_1)=G^{\perp}(q_1)W_1^{T}$

donde $W_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ siendo $W_1^{T}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $G^{\perp}(q_1)=\eta(q_1)\left[1\ \ b\cos(q_1)\right]$

$$A^{T}(q_1)=\eta(q_1)\left[1\ \ b\cos(q_1)\right]\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^{T}(q_1)=\eta(q_1)\left[b\cos(q_1)\ \ -1\right]$$

$$\Im(q_1)A(q_1)^{T}=\eta(q_1)\left[\alpha_1(q_1)\right]\left[b\cos(q_1)\ \ -1\right]$$

$$\Im(q_1)A(q_1)^T = \eta(q_1)\begin{bmatrix}\alpha_{11}(q_1)\\ \alpha_{12}(q_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\cos(q_1) & -1\end{bmatrix}$$

$$\Im(q_1)A(q_1)^T = \eta(q_1)\begin{pmatrix}\alpha_{11}(q_1)b\cos(q_1) & -\alpha_{11}(q_1)\\ \alpha_{12}(q_1)b\cos(q_1) & -\alpha_{12}(q_1)\end{pmatrix}$$

Puesto que $\rho\dfrac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1} = -2\cdot\Im(q_1)\cdot A^T(q_1)$ y sabiendo que

$$\frac{\partial M_d(q_1)}{\partial q_1} = \begin{pmatrix}-kb^2\cos^2(q_1)\operatorname{sen}(q_1) & kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1)\\ kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1) & -k\operatorname{sen}(q_1)\end{pmatrix}$$

si $\rho=1 \Rightarrow \begin{pmatrix}-kb^2\cos^2(q_1)\operatorname{sen}(q_1) & kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1)\\ kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1) & -k\operatorname{sen}(q_1)\end{pmatrix} = -2\cdot\Im(q_r)\cdot A^T(q_r)$

$$\begin{pmatrix}-kb^2\cos^2(q_1)\operatorname{sen}(q_1) & kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1)\\ kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1) & -k\operatorname{sen}(q_1)\end{pmatrix} = -2\cdot\eta(q_1)\begin{pmatrix}\alpha_{11}(q_1)b\cos(q_1) & -\alpha_{11}(q_1)\\ \alpha_{12}(q_1)b\cos(q_1) & -\alpha_{12}(q_1)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-kb^2\cos^2(q_1)\operatorname{sen}(q_1) & kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1)\\ kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1) & -k\operatorname{sen}(q_1)\end{pmatrix} = 2\cdot\eta(q_1)\begin{pmatrix}-\alpha_{11}(q_1)b\cos(q_1) & \alpha_{11}(q_1)\\ -\alpha_{12}(q_1)b\cos(q_1) & \alpha_{12}(q_1)\end{pmatrix}$$

$$\left[\alpha_1(q_1)\right] = \begin{bmatrix}\alpha_{11}(q_1)\\ \alpha_{12}(q_1)\end{bmatrix} = \frac{1}{2\cdot\eta(q_1)}\begin{bmatrix}kb\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_1)\\ -k\operatorname{sen}(q_1)\end{bmatrix}$$

6.8. CONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTROL (u):

$$u_{es} = \frac{1}{2}\cdot p^T \cdot M_d^{-1}(q_r)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0\\ \alpha_{12} & 0\end{pmatrix}\cdot M_d^{-1}(q_r)\cdot p$$

$$-G^{\perp}(q_r)M_d(q_r)M^{-1}(q_r)\begin{bmatrix}\dfrac{6a\cdot sen(q_1)}{kb^2\cos^3(q_1)}+P\left[f'(q_1)(q_2-q_{2*})+f(q_1)f'(q_1)\right]\\ P\left[(q_2-q_{2*})+f(q_1)\right]\end{bmatrix}$$

Se calcula la expresión $-G^{\perp}(q_r)M_d(q_r)M^{-1}(q_r)$ sabiendo que $G^{\perp}(q_r)$ es un anulador izquierdo de rango completo se tiene que:

$$-G^{\perp}(q_r)M_d(q_r)M^{-1}(q_r) = -G^{\perp}(q_r)\begin{bmatrix}m_{11}^d(q_1) & m_{12}^d(q_1)\\ m_{12}^d(q_1) & m_{22}^d(q_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}m_{12}^d(q_1) & m_{22}^d(q_1)\end{bmatrix}$$

$$u_{es} = \frac{1}{2}\cdot p^T \cdot M_d^{-1}(q_r)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0\\ \alpha_{12} & 0\end{pmatrix}\cdot M_d^{-1}(q_r)\cdot p$$

$$-\begin{bmatrix}m_{12}^d(q_1) & m_{22}^d(q_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{6a\cdot sen(q_1)}{kb^2\cos^3(q_1)}+P\left(f'(q_1)(q_2-q_{2*})+f(q_1)f'(q_1)\right)\\ P\left[(q_2-q_{2*})+f(q_1)\right]\end{bmatrix}$$

$$u_{es} = \frac{1}{2}\cdot p^T \cdot M_d^{-1}(q_1)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_{11} & 0\\ \alpha_{12} & 0\end{pmatrix}\cdot M_d^{-1}(q_1)\cdot p\left[\frac{1}{2}m_{11}^d \quad -m_{12}^d\right]$$

$$-\left(m_{12}^d(q_1)\left(\frac{6a\cdot sen(q_1)}{kb^2\cos^3(q_1)}+Pf(q_1)f'(q_1)\right)+m_{22}^d(q_1)Pf(q_1)\right)$$

$$-\left(m_{12}^d(q_1)f'(q_1)+m_{22}^d(q_1)\right)P\left(q_2-q_2^*\right)$$

$$u_{di} = -Kv\cdot G^T(q_1)M_d^{-1}(q_1)\cdot p \quad \text{donde} \quad u = u_{es}+u_{di}.$$

Organizando la ecuación de control de la forma siguiente:

$$\mathbf{u} = A_1(q_1)\ \mathbf{P}\,(\mathbf{q_1}-\mathbf{q_{2*}}) + \mathbf{p}^{\mathbf{T}}\cdot A_2(q_1)\cdot\mathbf{p} - \mathbf{Kv}\ A_3(q_1)\cdot\mathbf{p} + A_4(q_1) \qquad (6.15)$$

donde las constantes $A_1(q_1)$, $A_2(q_1)$, $A_3(q_1)$ y $A_4(q_1)$ vienen dada por:

$$A_1(q_1) = -\left(m_{12}^d(q_1)\frac{df(q_1)}{dq_1} + m_{22}^d(q_1) \right)$$

$$A_2(q_1) = \frac{1}{2} m_{22}^d \cdot M_d^{-1}(q_1) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{12} & 0 \end{pmatrix} M_d^{-1}(q_1)$$

$$A_3(q_1) = G^{\perp}(q_1) \cdot M_d^{-1}(q_1) = \begin{bmatrix} -b \cdot \cos(q_1) & 1 \end{bmatrix} \cdot M_d^{-1}(q_1)$$

$$A_4(q_1) = -\left(m_{12}^d(q_1)\left(\frac{6a \cdot \operatorname{sen}(q_1)}{kb^2 \cos^3(q_1)} + Pf(q_1) \cdot \frac{df(q_1)}{dq_1} \right) + P \cdot m_{22}^d(q_1) \cdot f(q_1) \right)$$

y la función $f(q_1)$ definida como $f(q_1) \overset{\Delta}{=} \frac{3}{b} \mathrm{Ln}\left(\sec(q_1) + \tan(q_1) \right) + \frac{6m_{22}^0}{kb} \tan(q_1)$

con su derivada $\frac{df(q_1)}{dq_1} = -\left(\frac{3}{b} \right) \frac{\sec(q_1) \cdot \tan(q_1) + \sec^2(q_1)}{\left(\sec(q_1) + \tan(q_1) \right)} + \frac{6m_{22}^0}{kb} \sec^2(q_1)$

$$\left[\alpha_1(q_1) \right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(q_1) \\ \alpha_{12}(q_1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \eta(q_1)} \begin{bmatrix} kb \cos(q_1) \operatorname{sen}(q_1) \\ -k \operatorname{sen}(q_1) \end{bmatrix}$$

La matriz de inercia deseada viene dada por

$$M_d(q_1) = \begin{bmatrix} m_{11}^d(q_1) & m_{12}^d(q_1) \\ m_{12}^d(q_1) & m_{22}^d(q_1) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{kb^2}{3}\cos^3(q_1) & -\frac{kb}{2}\cos^2(q_1) \\ -\frac{kb}{2}\cos^2(q_1) & k\left(\cos(q1) - 1 \right) + m_{22}^0 \end{pmatrix}$$

6.9. RESULTADOS DEL SISTEMA DEL PÉNDULO SOBRE EL CARRO MÓVIL.

En la figura (6.2) se presentan los resultados de la simulación del sistema Péndulo sobre el carro móvil. A fin de ilustrar la naturaleza global de la ley de control obtenida en la ecuación (6.15), se presenta una simulación donde la variable $q_1 = \pi/2-0.2$ rad. y $q_2=0.10$ m. hasta la posición $q_1=0.00$ rad. y $q_2=20.00$ m.

Tabla 6.1. Condiciones Iniciales y finales del Péndulo		
a=1	b=1	Kv=0.02
k=0.01	P=1	RHO=1
m_{110}=k*b^2/3	m_{120}=-k*b/2	m_{220}=0.02 Kg.
q_{10}=(pi/2-0.2) rad.	q_{20}=-0.1 m.	p_{10}=0.1 Kg.m/s.
p_{20}=0.0 Kg.m/s.	q_{1f}=0.0 rad.	q_{2f}=20.0 m.

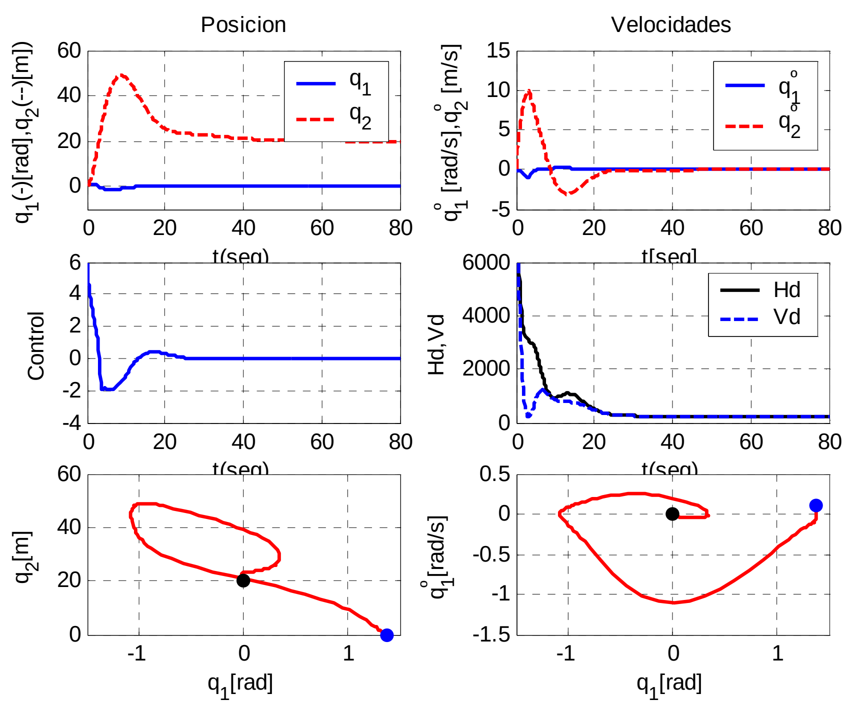

Figura 6.2. Trayectorias con las condiciones iniciales y finales de la Tabla 6.1.

De las figuras (6.2), (6.3), (6.4), (6.5) y (6.6) se observa que la convergencia se preserva tal como predice la teoría.

La figura (6.2) puede ser comparada con la figura (2) del artículo [3], donde se observa que ambas tienen una respuesta igual, esta observación valida el método y el diseño del software empleado.

La figura (6.3) muestra la variable q_1, el ángulo del péndulo (subactuada), y q_2, el desplazamiento del carro (actuada), donde se observa que el carro se desplaza en sentido contrario a la abertura del ángulo tratando de cerrarlo y aproximadamente en 50 s. el carro a recorrido 20 m., logrando estabilizar el péndulo a 0 radianes.

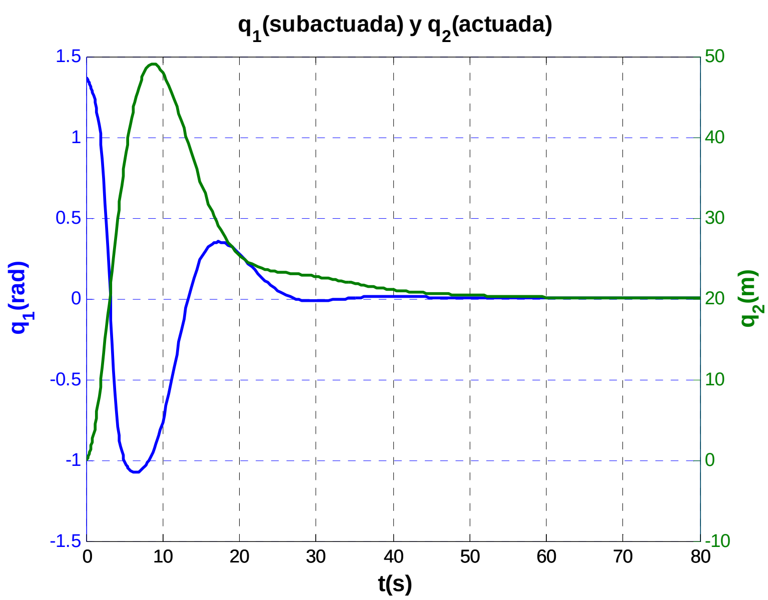

Figura 6.3. Detalles de la Trayectorias q_1 y q_2 de la Figura 6.2

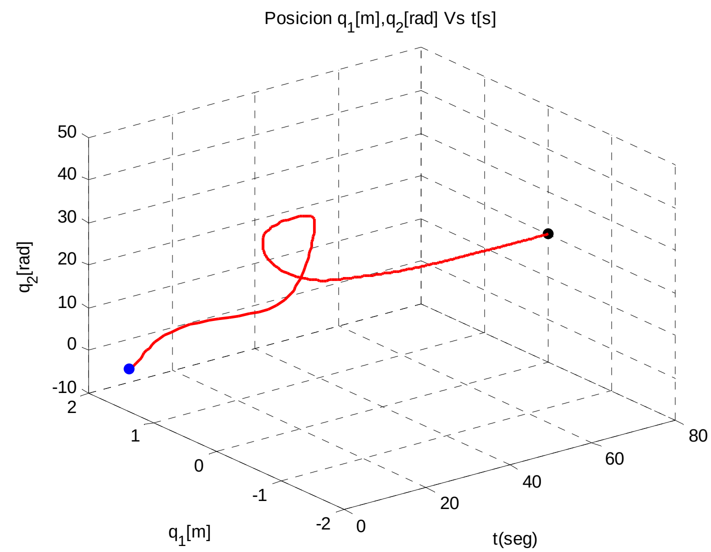

Figura 6.4. Trayectoria de q_1 y q_2, con las condiciones iniciales y finales de la Tabla 6.1.

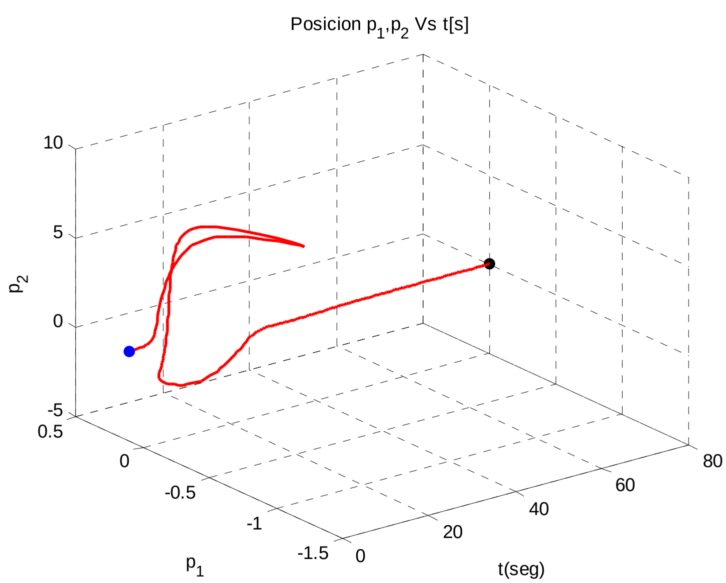

Figura 6.5. Trayectoria de p_1 y p_2, con las condiciones iniciales y finales de la Tabla 6.1.

En la figura (6.5) se observa como converge la trayectoria de q_1 y q_2, de una energía potencial deseada Vd alta que se dirige hacia una Vd mínima.

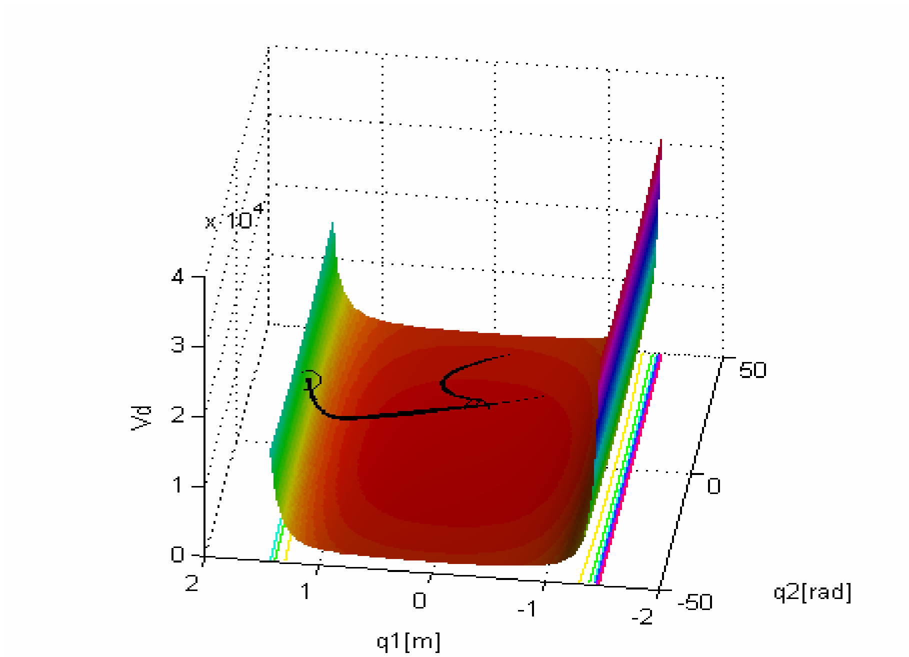

Figura 6.6. Forma de la energía potencial Vd con las condiciones iniciales y finales de la Tabla 6.1.

En la figura (6.6) se representa la convergencia de la trayectoria de q_1 y q_2, en los diferentes niveles de energía potencial Vd.

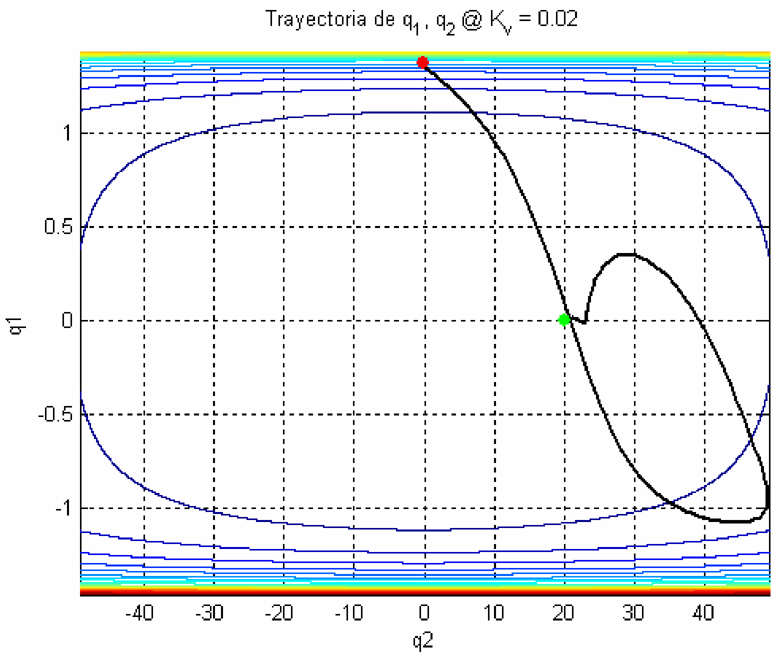

Figura 6.7. Curvas de Nivel de Vd con la trayectoria de q1 y q2
bajo los siguientes parámetros
a=1, b=1, Kv=0.02, k=0.01, P=1, RHO=1, m110=k*b^2/3
m120=-k*b/2, m220=0.02, q2f=20, q10=(pi/2-0.2), q20=-0.1, p10=0.1, p20=0

CAPITULO VII: CONTROL DE DESPEGUE Y ATERRIZAJE VERTICAL DE UNA AERONAVE (VERTICAL TAKEOFF AND LANDING (VTOL) AIRCRAFT).

Nuestro siguiente ejemplo se trata de un sistema de control de una aeronave para posicionarlo de un punto (x_o,y_o) a otro (x_1,y_1), tratando de que siga la trayectoria más favorable, o sea óptima, para el menor gasto de energía.

La aeronave se representa en la figura No. 7.1 y en la figura No. 7.2, se muestra las posiciones, las fuerzas involucradas y el vector de gravedad.

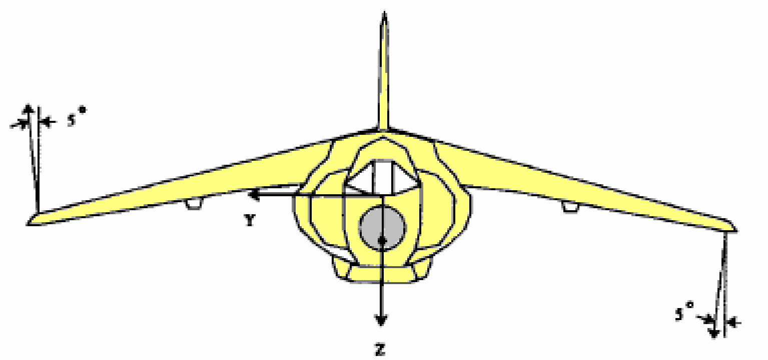

Fig. 7.1 (VTOL) Aircraft

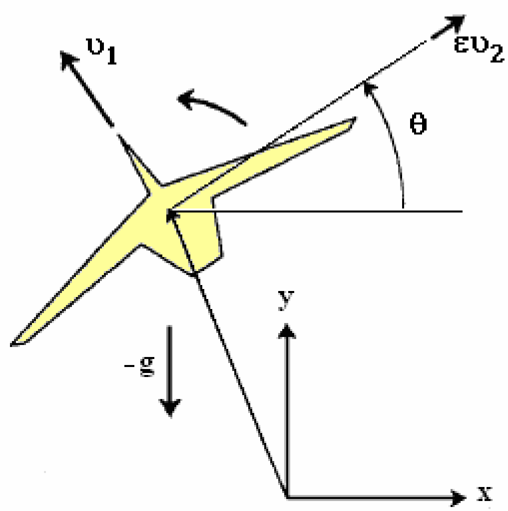

Fig. 7.2 (VTOL) Aircraft Coordenadas

7.1. CINEMÁTICA DEL SISTEMA

La dinámica del sistema del *despegue y aterrizaje vertical de una aeronave* (*Vertical takeoff and landing (VTOL) aircraft*) viene dada por las proyecciones de las aceleraciones proyectadas en los ejes x,y, básicamente, será:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\cos(90^{o}-\theta)\upsilon_1 - \varepsilon\cdot\upsilon_2\cos(\theta) \\ \ddot{y} = \ \ \operatorname{sen}(90^{o}-\theta)\upsilon_1 + \varepsilon\cdot\upsilon_2\cdot\operatorname{sen}(\theta) - g \\ \ddot{\theta} = \ \ \upsilon_2 \end{cases}$$

donde θ es el ángulo de rotación, (**x,y**) es el plano donde se mueve la aeronave, **g** es la aceleración de gravedad, ε es un parámetro de influencia del viento y υ_1 y υ_2 son los controladores de acción. De tal forma que se tiene tres grados de libertad (x, y) y el ángulo θ (n = 3), de los cuales dos son actuados o controlados (x, y) (m = 2), por lo que el grado de subactuación es de (n-m = 1).

De acuerdo a las identidades trigonométricas

$$\cos\left(90^{o}-\theta\right) = \cos\left(90^{o}\right)\cos\left(\theta\right) + \operatorname{sen}\left(90^{o}\right)\operatorname{sen}\left(\theta\right)$$
$$\cos\left(90^{o}-\theta\right) = \operatorname{sen}\left(\theta\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(90^{o}-\theta\right) = \operatorname{sen}\left(90^{o}\right)\cos\left(\theta\right) + \cos\left(90^{o}\right)\operatorname{sen}\left(\theta\right)$$
$$\cos\left(90^{o}-\theta\right) = \cos\left(\theta\right)$$

se tiene

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\operatorname{sen}(\theta)\upsilon_1 - \varepsilon\upsilon_2\cos(\theta) \\ \ddot{y} = \cos(\theta)\upsilon_1 + \varepsilon\upsilon_2\operatorname{sen}(\theta) - g \\ \ddot{\theta} = \upsilon_2 \end{cases} \tag{7.1}$$

Llevando la ecuación (7.1) a la forma matricial y despejando el factor $\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix}$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) & -\varepsilon\cdot\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \varepsilon\cdot\operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta) & -\varepsilon\cdot\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \varepsilon\cdot\operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix}\right)$$

hallando la matriz inversa

$$\begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & -\varepsilon\cdot\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \varepsilon\cdot\text{sen}(\theta) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon\cdot\text{sen}(\theta)}{-\varepsilon\left(\text{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right)} & \dfrac{-\varepsilon\cdot\cos(\theta)}{-\varepsilon\left(\text{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right)} \\ \dfrac{-\cos(\theta)}{-\varepsilon\left(\text{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right)} & \dfrac{-\text{sen}(\theta)}{-\varepsilon\left(\text{sen}^2(\theta)+\cos^2(\theta)\right)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ \dfrac{\cos(\theta)}{\varepsilon} & \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta)/\varepsilon & \text{sen}(\theta)/\varepsilon \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta)/\varepsilon & \text{sen}(\theta)/\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ g+\ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)\cdot\ddot{x} + \cos(\theta)\cdot\ddot{y} \\ \dfrac{g\cdot\text{sen}(\theta)}{\varepsilon} + \dfrac{\cos(\theta)}{\varepsilon}\cdot\ddot{x} + \dfrac{\text{sen}(\theta)}{\varepsilon}\cdot\ddot{y} \end{bmatrix}$$

operando

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} = \frac{g}{\varepsilon}\begin{bmatrix} \varepsilon\cdot\cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} -\varepsilon\cdot\text{sen}(\theta) & \varepsilon\cdot\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \quad \text{si} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} = \frac{g}{\varepsilon}\begin{bmatrix} \varepsilon\cdot\cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} -\varepsilon\cdot\text{sen}(\theta) & \varepsilon\cdot\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 \end{bmatrix} = \frac{g}{\varepsilon}\begin{bmatrix} -\cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} u$$

$$\upsilon_1 = \frac{g}{\varepsilon}\cos(\theta) - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{sen}(\theta)\cdot u_1 + \frac{1}{\varepsilon}\cos(\theta)\cdot u_2$$
$$\upsilon_2 = \frac{g}{\varepsilon}\operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{\varepsilon}\cos(\theta)u_1 + \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{sen}(\theta)u_2$$

Si $\dot{q}_1 = \dot{x} \wedge \dot{q}_2 = \dot{y} \wedge \dot{q}_3 = \dot{\theta} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dot{x} \\ \dot{q}_2 = \dot{y} \\ \dot{q}_3 = \dot{\theta} \\ \dot{p}_1 = u_1 \\ \dot{p}_2 = u_2 \\ \dot{p}_3 = \dfrac{g}{\varepsilon}\operatorname{sen}(\theta) + \dfrac{1}{\varepsilon}\cos(\theta)u_1 + \dfrac{1}{\varepsilon}\operatorname{sen}(\theta)u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = \dfrac{g}{\varepsilon}\operatorname{sen}(q_3)e_3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos(q_3)/\varepsilon & \operatorname{sen}(q_3)/\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases} \cong \begin{cases} \dot{q} = Md^{-1}(q_3)p \\ \dot{p} = s(q_3) + G(q_3)u \end{cases}$$

donde

$$G(q_3) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos(q_3)/\varepsilon & \operatorname{sen}(q_3)/\varepsilon \end{bmatrix} \quad M^{-1}(q_3) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad s(q_3) \equiv \frac{g}{\varepsilon}\operatorname{sen}(q_3)e_3$$

7.2. TRANSPUESTA DE LA MATRIZ DE CONTROL $G^{\perp}(q_3)$

Para hallar $G^{\perp}(q_3)$ se debe hallar una matriz tal que se cumpla $G^{\perp}(q_3)G(q_3) = 0$

$$G^{\perp}(q_3)G(q_3) = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3) & -\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos(q_3)/\varepsilon & \operatorname{sen}(q_3)/\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_3)G(q_3)=\begin{bmatrix}\cos(q_3)-\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3)-\operatorname{sen}(q_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

de tal forma que es obvio que el vector fila $\begin{bmatrix}\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}$ es $G^{\perp}(q_3)$

$$G^{\perp}(q_3)=\begin{bmatrix}\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}$$

Otra vector fila que serviría para hallar $G^{\perp}(q_3)$ y cumpliría con que $G^{\perp}(q_3)G(q_3)=0$, es el siguiente:

$$G^{\perp}(q_3)G(q_3)=\begin{bmatrix}-\cos(q_3) & -\operatorname{sen}(q_3) & \varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \cos(q_3)/\varepsilon & \operatorname{sen}(q_3)/\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_3)G(q_3)=\begin{bmatrix}-\cos(q_3)+\cos(q_3) & -\operatorname{sen}(q_3)+\operatorname{sen}(q_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

para lo cual $G^{\perp}(q_3)$ sería:

$$G^{\perp}(q_3)=\begin{bmatrix}-\cos(q_3) & -\operatorname{sen}(q_3) & \varepsilon\end{bmatrix} \tag{7.2}$$

Si se escoge $G^{\perp}(q_3)=\begin{bmatrix}\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}$ entonces

$$G^{\perp}(q_r)s(q_r)=0 \qquad \begin{bmatrix}\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{g}{\varepsilon}\operatorname{sen}(q_3)\end{bmatrix}=0$$

7.3. MATRIZ DE MASA INERCIAL DESEADA $Md(q_3)$

Partiendo de que $G^{\perp}(q_3)Md(q_3)M^{-1}(q_3)e_3 = \rho$

$$G^{\perp}(q_3)Md(q_3)e_3 = \begin{bmatrix}\cos(q_3) & \mathrm{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11}^d & m_{12}^d & m_{13}^d \\ m_{21}^d & m_{22} & m_{23}^d \\ m_{31}^d & m_{32}^d & m_{33}^d \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \rho$$

$$\begin{bmatrix} \cos(q_3)m_{11}^d + \mathrm{sen}(q_3)m_{21}^d - \varepsilon m_{31}^d \\ \cos(q_3)m_{12}^d + \mathrm{sen}(q_3)m_{22}^d - \varepsilon m_{32}^d \\ \cos(q_3)m_{13}^d + \mathrm{sen}(q_3)m_{23}^d - \varepsilon m_{33}^d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \rho$$

$$\cos(q_3)\cdot m_{13}^d + \mathrm{sen}(q_3)\cdot m_{23}^d - \varepsilon\cdot m_{33}^d = \rho \tag{7.3}$$

sabiendo que

$$G^{\perp}(q_3)\frac{dMd(q_3)}{dq_3} = 0$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix}\cos(q_3) & \mathrm{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{dm_{11}^d}{dq_3} & \frac{dm_{12}^d}{dq_3} & \frac{dm_{13}^d}{dq_3} \\ \frac{dm_{12}^d}{dq_3} & \frac{dm_{22}^d}{dq_3} & \frac{dm_{23}^d}{dq_3} \\ \frac{dm_{13}^d}{dq_3} & \frac{dm_{23}^d}{dq_3} & \frac{dm_{33}^d}{dq_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$\cos(q_3)\cdot\frac{dm_{11}^d}{dq_3} + \mathrm{sen}(q_3)\cdot\frac{dm_{12}^d}{dq_3} - \varepsilon\cdot\frac{dm_{13}^d}{dq_3} = 0 \tag{7.4}$$

$$\cos(q_3)\cdot\frac{dm_{12}^d}{dq_3} + \mathrm{sen}(q_3)\cdot\frac{dm_{22}^d}{dq_3} - \varepsilon\cdot\frac{dm_{23}^d}{dq_3} = 0 \tag{7.5}$$

$$\cos(q_3)\cdot\frac{dm_{13}^d}{dq_3}+\operatorname{sen}(q_3)\cdot\frac{dm_{23}^d}{dq_3}-\varepsilon\cdot\frac{dm_{33}^d}{dq_3}=0 \tag{7.6}$$

De acuerdo a las ecuaciones (7.4), (7.5) y (7.6), se proponen valores de m_{13}^d, m_{23}^d y m_{33}^d, los siguientes: $m_{13}^d=k_1\cdot\cos(q_3)$, $m_{23}^d=k_1\cdot\operatorname{sen}(q_3)$ y $m_{33}^d=k_2$ y para la simetría $m_{13}^d=m_{31}^d$ y $m_{23}^d=m_{32}^d$.

$$Md(q_3)=\begin{bmatrix} m_{11}^d & m_{12}^d & k_1\cdot\cos(q_3)\\ m_{12}^d & m_{22} & k_1\cdot\operatorname{sen}(q_3)\\ k_1\cdot\cos(q_3) & k_1\cdot\operatorname{sen}(q_3) & k_2\end{bmatrix}$$

de la ecuación (7.6) con $\frac{dm_{33}^d}{dq_3}=0$, se tiene que,

$$\frac{dm_{23}^d}{dq_3}=-\frac{\cos(q_3)}{\operatorname{sen}(q_3)}\cdot\frac{dm_{13}^d}{dq_3} \tag{7.7}$$

Puesto que $m_{13}^d=k_1\cdot\cos(q_3)$ entonces $dm_{13}^d/dq_3=-k_1\cdot\operatorname{sen}(q_3)$ sustituyendo en la ecuación (7.4)

$$\cos(q_3)\cdot\frac{dm_{11}^d}{dq_3}+\operatorname{sen}(q_3)\cdot\frac{dm_{12}^d}{dq_3}+\varepsilon\cdot k_1\cdot\operatorname{sen}(q_3)=0$$

$$\frac{dm_{11}^d}{dq_3}=-\frac{\operatorname{sen}(q_3)}{\cos(q_3)}\left(\varepsilon\cdot k_1+\frac{dm_{12}^d}{dq_3}\right) \tag{7.8}$$

y de la ecuación (7.7) en (7.5)

$$\cos(q_3)\cdot\frac{dm_{12}^d}{dq_3}+\operatorname{sen}(q_3)\cdot\frac{dm_{22}^d}{dq_3}-\varepsilon\cdot\frac{\cos(q_3)}{\operatorname{sen}(q_3)}\cdot k_1\cdot\operatorname{sen}(q_3)=0$$

$$\cos(q_3)\cdot\frac{dm_{12}^d}{dq_3}+\operatorname{sen}(q_3)\cdot\frac{dm_{22}^d}{dq_3}-k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(q_3)=0$$

$$\operatorname{sen}(q_3)\cdot\frac{dm_{22}^d}{dq_3}=k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(q_3)-\cos(q_3)\cdot\frac{dm_{12}^d}{dq_3}$$

$$\frac{dm_{22}^d}{dq_3}=\frac{\cos(q_3)}{\operatorname{sen}(q_3)}\left(k_1\cdot\varepsilon-\frac{dm_{12}^d}{dq_3}\right) \tag{7.9}$$

Para lograr la *singularidad* se propone una función $\frac{dm_{12}^d}{dq_3}$ tal que

$$\left.\frac{dm_{12}^d}{dq_3}\right|_{q_3=0}=k_1\varepsilon \quad y \qquad \left.\frac{dm_{12}^d}{dq_3}\right|_{q_3=\pi/2}=-k_1\varepsilon$$

Así, una selección apropiada es:

$$\frac{dm_{12}^d}{dq_3}=k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(2\cdot q_3) \tag{7.10}$$

sustituyendo (7.10) en la ecuación (7.9)

$$\frac{dm_{22}^d}{dq_3}=\frac{\cos(q_3)}{\operatorname{sen}(q_3)}\left(k_1\cdot\varepsilon-k_1\cdot\varepsilon\cos(2\cdot q_3)\right)$$

$$\frac{dm_{22}^d}{dq_3}=k_1\cdot\varepsilon\cdot\frac{\cos(q_3)}{\operatorname{sen}(q_3)}\left(1-\underbrace{\cos(2\cdot q_3)}_{\cos^2(q_3)-\operatorname{sen}^2(q_3)}\right)=2\cdot k_1\cdot\varepsilon\frac{\cos(q_3)}{\operatorname{sen}(q_3)}\operatorname{sen}^2(q_3)$$

$$\frac{dm_{22}^d}{dq_3}=2\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot\operatorname{sen}(q_3)\cos(q_3) \tag{7.11}$$

y de (7.10) en (7.8):

$$\frac{dm_{11}^d}{dq_3}=-\frac{\operatorname{sen}(q_3)}{\cos(q_3)}\left(\varepsilon\cdot k_1+k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(2q_3)\right)=-\varepsilon\cdot k_1\frac{\operatorname{sen}(q_3)}{\cos(q_3)}\left(1+\cos(2\cdot q_3)\right)$$

$$\frac{dm_{11}^d}{dq_3}=-\varepsilon\cdot k_1\frac{\operatorname{sen}(q_3)}{\cos(q_3)}\left(\cos^2(q_3)\right)$$

$$\frac{dm_{11}^{d}}{dq_3} = -2 \cdot k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(q_3) \cdot \cos(q_3) \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial Md(q_3)}{\partial q_3} = \begin{bmatrix} \frac{dm_{11}^{d}}{dq_3} & \frac{dm_{12}^{d}}{dq_3} & \frac{dm_{13}^{d}}{dq_3} \\ \frac{dm_{21}^{d}}{dq_3} & \frac{dm_{22}^{d}}{dq_3} & \frac{dm_{23}^{d}}{dq_3} \\ \frac{dm_{31}^{d}}{dq_3} & \frac{dm_{32}^{d}}{dq_3} & \frac{dm_{33}^{d}}{dq_3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2 \cdot k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(q_3)\cos(q_3) & k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot q_3) & -k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(q_3) \\ k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot q_3) & 2 \cdot k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(q_3)\cos(q_3) & k_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos(q_3) \\ -k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(q_3) & k_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos(q_3) & 0 \end{bmatrix}$$

de la ecuación (7.10)

$$\frac{dm_{12}^{d}}{dq_3} = k_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos(2 \cdot q_3) \quad m_{12}^{d} = k_1 \cdot \varepsilon \cdot \int \cos(2 \cdot q_3) \cdot dq_3$$

$$m_{12}^{d} = \frac{k_1 \cdot \varepsilon}{2} \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot q_3) \quad m_{12}^{d} = k_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos(q_3)\operatorname{sen}(q_3)$$

$$\frac{dm_{22}^{d}}{dq_3} = 2 \cdot k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(q_3) \cdot \cos(q_3) \qquad m_{22}^{d} = 2 \cdot k_1 \cdot \varepsilon \cdot \int \cos(q_3) \cdot \operatorname{sen}(q_3) \cdot dq_3$$

$$m_{22}^{d} = -2 \cdot k_1 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\cos^2(q_3)}{2} \cdot \operatorname{sen}(q_3) + k_3 \quad m_{22}^{d} = -k_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos^2(q_3) \cdot \operatorname{sen}(q_3) + k_3$$

$$\frac{dm_{11}^{d}}{dq_3} = -2 \cdot k_1 \cdot \varepsilon \cdot \operatorname{sen}(q_3) \cdot \cos(q_3) \qquad m_{11}^{d} = -2k_1\varepsilon \cdot \int \cos(q_3) \cdot \operatorname{sen}(q_3) \cdot dq_3$$

$$m_{11}^{d} = 2 \cdot k_1 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\cos^2(q_3)}{2} \operatorname{sen}(q_3) + k_3 \quad m_{11}^{d} = k_1 \cdot \varepsilon \cdot \cos^2(q_3) \cdot \operatorname{sen}(q_3) + k_3$$

donde la Matriz de masa inercial deseada toma la siguiente forma:

$$M_d(q_3)=$$

$$\begin{bmatrix} k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos^2(q_3)\,\mathrm{sen}(q_3)+k_3 & k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(q_3)\cdot\mathrm{sen}(q_3) & k_1\cdot\cos(q_3) \\ k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(q_3)\,\mathrm{sen}(q_3) & -k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos^2(q_3)\cdot\mathrm{sen}(q_3)+k_3 & k_1\cdot\mathrm{sen}(q_3) \\ k_1\cdot\cos(q_3) & k_1\cdot\mathrm{sen}(q_3) & k_2 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

7.4. CONSTANTES k_1, k_2, k_3

Al sustituir los valores propuestos de m_{13}^d, m_{23}^d y m_{33}^d, en la ecuación (7.3), se obtiene:

$$\cos(q_3)\cdot k_1\cos(q_3)+\mathrm{sen}(q_3)\cdot k_1\cdot\mathrm{sen}(q_3)-\varepsilon\cdot k_2=\rho$$

$$k_1\cos^2(q_3)+k_1\cdot\mathrm{sen}^2(q_3)-\varepsilon\cdot k_2=k_1\cdot\underbrace{\left(\cos^2(q_3)+\mathrm{sen}^2(q_3)\right)}_{=1}-\varepsilon\cdot k_2=\rho$$

$k_1-\varepsilon\cdot k_2=\rho$ para lo cual se define $k_1\stackrel{\Delta}{=}\rho+\varepsilon\cdot k_2$

de sustituir los valores propuestos, $\dfrac{dm_{13}^d}{dq_3}$, $\dfrac{dm_{23}^d}{dq_3}$ y $\dfrac{dm_{33}^d}{dq_3}$, en la ecuación (7.6)

$$-\cos(q_3)\cdot k_1\cdot\mathrm{sen}(q_3)+\mathrm{sen}(q_3)\cdot k_1\cdot\cos(q_3)-\varepsilon\cdot\frac{dk_2}{dq_3}=0$$

se puede verificar que: $\dfrac{dk_2}{dq_3}=0 \quad\Rightarrow\quad k_2=\text{cte.}$

de la (2.50) $$M_d(q_3)=\int_{q_3^*}^{q_3} G(\mu)\psi(\mu)G^T(\mu)\,d\mu+M_d^0$$

donde la matriz $\psi(\mu)=\psi^T(\mu)\in\Re^{(n-1)\times(n-1)}$

$$G(\mu)\psi(\mu)G^T(\mu)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \cos(\mu)/\varepsilon & \mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cos(\mu)/\varepsilon\\ 0 & 1 & \mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$G(\mu)\psi(\mu)G^{T}(\mu)=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\\ \psi_{11}\cos(\mu)/\varepsilon+\psi_{21}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon & \psi_{12}\cos(\mu)/\varepsilon+\psi_{22}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cos(\mu)/\varepsilon\\ 0 & 1 & \mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{11}\cos(\mu)/\varepsilon+\psi_{21}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon\\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{12}\cos(\mu)/\varepsilon+\psi_{22}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon\\ \psi_{11}\cos(\mu)/\varepsilon+\psi_{21}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon & \psi_{12}\cos(\mu)/\varepsilon+\psi_{22}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon & \psi_{11}\cos^{2}(\mu)/\varepsilon^{2}+2\,\psi_{12}\cos(\mu)/\varepsilon^{2}+\psi_{22}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon^{2}\end{bmatrix}$$

$$k_2=\int_{q3*}^{q3}\left(\psi_{11}\cos^{2}(\mu)/\varepsilon^{2}+2\,\psi_{12}\cos(\mu)/\varepsilon^{2}+\psi_{22}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon^{2}\right)d\mu+M_{33}^{0}$$

$$k_2=\frac{1}{\varepsilon^{2}}\int_{q3*}^{q3}\left(\psi_{11}\cos^{2}(\mu)+2\psi_{12}\cos(\mu)+\psi_{22}\mathrm{sen}(\mu)\right)d\mu+M_{33}^{0}$$

$$\psi_{11}\cos^{2}(\mu)+2\psi_{12}\cos(\mu)+\psi_{22}\mathrm{sen}(\mu)=0$$

$$\left(k_1\cos^{2}(\mu)+K_3\right)\cos^{2}(\mu)+2\left(k_1\cos(\mu)\mathrm{sen}(\mu)\right)\cos(\mu)+\left(-k_1\cos^{2}(\mu)+K_3\right)\mathrm{sen}(\mu)=0$$

$$k_1\cos^{2}(\mu)\cos^{2}(\mu)+K_3\cos^{2}(\mu)+2k_1\cos^{2}(\mu)\mathrm{sen}(\mu)-k_1\cos^{2}(\mu)\mathrm{sen}(\mu)+K_3\mathrm{sen}(\mu)=0$$

$$k_1\cos^{4}(\mu)\cos^{2}(\mu)\cos^{2}(\mu)+K_3\cos^{2}(\mu)+k_1\cos^{2}(\mu)\mathrm{sen}(\mu)+K_3\mathrm{sen}(\mu)=0$$

$$k_1\cdot\mathrm{sen}(q_3)=\int_{q3*}^{q3}\left(\psi_{11}\cos(\mu)/\varepsilon+\psi_{21}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon\right)d\mu+M_{13}^{0}$$

$$k_1\cdot\cos(q_3)=\int_{q3*}^{q3}\left(\psi_{12}\cos(\mu)/\varepsilon+\psi_{22}\,\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon\right)d\mu+M_{23}^{0}$$

$$k_1\cdot\mathrm{sen}(q_3)=\left(k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(\mu)\mathrm{sen}(\mu)\right)\cos(\mu)/\varepsilon+\left(-k_1\varepsilon\cos^{2}(\mu)+k_3\right)\mathrm{sen}(\mu)/\varepsilon$$

$$\varepsilon\cdot k_1\cdot\mathrm{sen}(q_3)=k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos^{2}(\mu)\mathrm{sen}(\mu)-k_1\cdot\varepsilon\cos^{2}(\mu)\mathrm{sen}(\mu)+k_3\cdot\mathrm{sen}(\mu)$$

$$\varepsilon\cdot k_1\cdot\mathrm{sen}(q_3)=k_3\cdot\mathrm{sen}(\mu)$$

$$k_3=\varepsilon\cdot k_1$$

7.5. CONSTRUCCIÓN DE $\Im(q_r)\cdot A^{T}(q_r)$:

De la construcción del la matriz W^{kl} dada en la sección previa y utilizando la prueba del *Lema 3* [3], se tiene:

$$A(q_1) \equiv W_1\left(G^{\perp}(q_1)\right)^{T} \quad \text{donde} \quad v \equiv \operatorname{col}(v_1,\ldots,v_n) = \left(G^{\perp}(q_r)\right)^{T}$$

$$v \equiv \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \left(G^{\perp}(q_r)\right)^{T}$$

si se halla un vector w tal que $w^{T}A(q_r) = 0$ se pueden hallar los a_i a través de la fórmula $w = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot e_i$. De (2.38), (2.39) y (2.40)

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $G^{\perp}(q_3)^{T} = \begin{bmatrix} \cos(q_3) \\ \operatorname{sen}(q_3) \\ -\varepsilon \end{bmatrix}$ se tiene, entonces, para la ecuación (2.35), que se repite a continuación, $A(q_3) \equiv \left[W_1\left(G^{\perp}(q_1)\right)^{T} \,\vdots\, W_2\left(G^{\perp}(q_1)\right)^{T} \,\vdots\, W_2\left(G^{\perp}(q_1)\right)^{T} \right]$, la ecuación siguiente:

$$A(q_3) \equiv \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_3) \\ \operatorname{sen}(q_3) \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \,\vdots\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_3) \\ \operatorname{sen}(q_3) \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \,\vdots\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_3) \\ \operatorname{sen}(q_3) \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \right]$$

$$A\left(q_3\right)=\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(q_3\right) & -\varepsilon & 0 \\ -\cos\left(q_3\right) & 0 & -\varepsilon \\ 0 & -\cos\left(q_3\right) & -\operatorname{sen}\left(q_3\right) \end{bmatrix}$$

siendo su transpuesta igual a: $A^{\mathsf{T}}\left(q_3\right)=\begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(q_3\right) & -\cos\left(q_3\right) & 0 \\ -\varepsilon & 0 & -\cos\left(q_3\right) \\ 0 & -\varepsilon & -\operatorname{sen}\left(q_3\right) \end{bmatrix}$

$$\underbrace{G^{\perp}\left(q_3\right)\cdot Md\left(q_3\right)\cdot M^{-1}\left(q_3\right)\cdot e_3}_{\rho}\frac{dMd\left(q_3\right)}{dq_3}=-2\cdot\Im\left(q_r\right)\cdot A^{\mathsf{T}}\left(q_r\right)$$

$$\frac{dMd\left(q_3\right)}{dq_3}=-\frac{2}{\rho}\cdot A\left(q_r\right)\cdot\Im^{\mathsf{T}}\left(q_r\right) \tag{7.14}$$

$$\Im\left(q_r\right)\overset{\Delta}{=}\left[\alpha_1\left(q_3\right) \mid \alpha_2\left(q_3\right) \mid \alpha_3\left(q_3\right)\right]$$

$$\alpha_1\left(q_3\right)=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\left(q_3\right)\\ \alpha_{12}\left(q_3\right)\\ \alpha_{13}\left(q_3\right)\end{bmatrix} \qquad \alpha_1\left(q_3\right)=\begin{bmatrix}\alpha_{21}\left(q_3\right)\\ \alpha_{22}\left(q_3\right)\\ \alpha_{23}\left(q_3\right)\end{bmatrix} \qquad \alpha_1\left(q_3\right)=\begin{bmatrix}\alpha_{31}\left(q_3\right)\\ \alpha_{32}\left(q_3\right)\\ \alpha_{33}\left(q_3\right)\end{bmatrix}$$

$$\Im\left(q_r\right)\equiv\left[\begin{array}{c|c|c}\alpha_{11}\left(q_3\right) & \alpha_{21}\left(q_3\right) & \alpha_{31}\left(q_3\right)\\ \alpha_{12}\left(q_3\right) & \alpha_{22}\left(q_3\right) & \alpha_{32}\left(q_3\right)\\ \alpha_{13}\left(q_3\right) & \alpha_{23}\left(q_3\right) & \alpha_{33}\left(q_3\right)\end{array}\right]$$

Siendo su transpuesta

$$\Im^{\mathsf{T}}\left(q_r\right)\equiv\begin{bmatrix}\alpha_{11}\left(q_3\right) & \alpha_{12}\left(q_3\right) & \alpha_{13}\left(q_3\right)\\ \alpha_{21}\left(q_3\right) & \alpha_{22}\left(q_3\right) & \alpha_{23}\left(q_3\right)\\ \alpha_{31}\left(q_3\right) & \alpha_{32}\left(q_3\right) & \alpha_{33}\left(q_3\right)\end{bmatrix}$$

de la ecuación (7.14) se tiene:

$$\rho\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{dm_{11}^{d}}{dq_3} & \dfrac{dm_{12}^{d}}{dq_3} & \dfrac{dm_{13}^{d}}{dq_3}\\ \dfrac{dm_{21}^{d}}{dq_3} & \dfrac{dm_{22}^{d}}{dq_3} & \dfrac{dm_{23}^{d}}{dq_3}\\ \dfrac{dm_{31}^{d}}{dq_3} & \dfrac{dm_{32}^{d}}{dq_3} & \dfrac{dm_{33}^{d}}{dq_3}\end{bmatrix}=$$

$$\rho\cdot\begin{bmatrix}-2\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{sen}(q_3)\cos(q_3) & k_1\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{sen}(2\cdot q_3) & -k_1\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{sen}(q_3)\\ k_1\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{sen}(2\cdot q_3) & 2\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{sen}(q_3)\cos(q_3) & k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(q_3)\\ -k_1\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{sen}(q_3) & k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(q_3) & 0\end{bmatrix}=$$

$$-2\begin{bmatrix}\mathrm{sen}(q_3) & -\varepsilon & 0\\ -\cos(q_3) & 0 & -\varepsilon\\ 0 & -\cos(q_3) & -\mathrm{sen}(q_3)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_{11}(q_3) & \alpha_{12}(q_3) & \alpha_{13}(q_3)\\ \alpha_{21}(q_3) & \alpha_{22}(q_3) & \alpha_{23}(q_3)\\ \alpha_{31}(q_3) & \alpha_{32}(q_3) & \alpha_{33}(q_3)\end{bmatrix}$$

$$\rho\frac{dm_{11}^{d}}{dq_3}=-2\cdot\alpha_{11}(q_3)\cdot \mathrm{sen}(q_3)+2\cdot\varepsilon\cdot\alpha_{21}(q_3)=-2\cdot\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{sen}(q_3)\cos(q_3)$$

$$\rho\frac{dm_{12}^{d}}{dq_3}=-2\cdot\alpha_{12}(q_3)\cdot \mathrm{sen}(q_3)+2\cdot\varepsilon\cdot\alpha_{22}(q_3)=\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(2\cdot q_3)$$

$$\rho\frac{dm_{13}^{d}}{dq_3}=-2\cdot\alpha_{13}(q_3)\cdot \mathrm{sen}(q_3)+2\cdot\varepsilon\cdot\alpha_{23}(q_3)=-\rho\cdot k_1\cdot \mathrm{sen}(q_3)$$

$$\rho\frac{dm_{21}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{11}\cdot(q_3)\cdot\cos(q_3)+2\cdot\varepsilon\cdot\alpha_{31}(q_3)=\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(2\cdot q_3)$$

$$\rho\frac{dm_{22}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{12}(q_3)\cdot\cos(q_3)+2\cdot\alpha_{32}(q_3)\cdot\varepsilon=2\cdot\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot \mathrm{sen}(q_3)\cos(q_3)$$

$$\rho\frac{dm_{23}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{13}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)+2\cdot\alpha_{23}\left(q_3\right)\cdot\varepsilon=\rho\cdot k_1\cdot\cos(q_3)$$

$$\rho\frac{dm_{31}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{21}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)+2\cdot\alpha_{31}\left(q_3\right)\cdot\operatorname{sen}\left(q_3\right)=-\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot\operatorname{sen}(q_3)$$

$$\rho\frac{dm_{32}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{22}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)+2\cdot\alpha_{32}\left(q_3\right)\cdot\operatorname{sen}\left(q_3\right)=\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos(q_3)$$

$$\rho\frac{dm_{33}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{23}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)+2\cdot\alpha_{33}\left(q_3\right)\cdot\operatorname{sen}\left(q_3\right)=0$$

$$\rho\frac{dm_{32}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{22}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)+2\cdot\alpha_{32}\left(q_3\right)\cdot\operatorname{sen}\left(q_3\right)$$

$$\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos\left(q_3\right)=2\cdot\alpha_{22}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)\qquad\Rightarrow\qquad\alpha_{22}\left(q_3\right)=\frac{k_1\cdot\rho}{2}$$

$$\rho\frac{dm_{22}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{12}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)+2\cdot\alpha_{32}\left(q_3\right)\cdot\varepsilon$$

$$-\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos\left(q_3\right)\cdot\operatorname{sen}\left(q_3\right)=-2\cdot\alpha_{12}\left(q_3\right)\cdot\operatorname{sen}\left(q_3\right)+2\cdot\frac{k_1\cdot\rho}{2}\cdot q_3\cdot\varepsilon$$

$$-2\cdot\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cos\left(q_3\right)=-2\cdot\alpha_{12}\left(q_3\right)\qquad\Rightarrow\qquad\alpha_{12}\left(q_3\right)=k_1\cdot\rho\cos\left(q_3\right)$$

$$\rho\frac{dm_{33}^{d}}{dq_3}=2\cdot\alpha_{23}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)+2\cdot\alpha_{33}\left(q_3\right)\cdot\operatorname{sen}\left(q_3\right)$$

$$0=2\cdot\alpha_{23}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)\qquad\Rightarrow\qquad\alpha_{23}\left(q_3\right)=0$$

$$\rho\frac{dm_{33}^{d}}{dq_3}=-2\cdot\alpha_{11}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)+2\cdot\alpha_{21}\left(q_3\right)\cdot\varepsilon$$

$$2\cdot\rho\cdot k_1\cdot\varepsilon\cdot\cos\left(q_3\right)\cdot\operatorname{sen}\left(q_3\right)=-2\cdot\alpha_{11}\left(q_3\right)\cdot\cos\left(q_3\right)\qquad\alpha_{11}\left(q_3\right)=-k_1\cdot\rho\cdot\cos\left(q_3\right)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}(q_3) & \alpha_{12}(q_3) & \alpha_{13}(q_3) \\ \alpha_{21}(q_3) & \alpha_{22}(q_3) & \alpha_{23}(q_3) \\ \alpha_{31}(q_3) & \alpha_{32}(q_3) & \alpha_{33}(q_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \cdot \rho \cdot \varepsilon \cdot \cos(q_3) & -k_1 \cdot \rho \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{sen}(q_3) & -\frac{k_1 \cdot \rho}{2} \\ 0 & -\frac{k_1 \cdot \rho}{2} & 0 \\ \frac{k_1 \cdot \rho}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.6. CÁLCULOS DE LA ENERGÍA POTENCIAL Vd(q) Y ∇_qVd(q):

La energía potencial viene dada por $Vd(q) = \frac{1}{\rho}\int_0^{q_1} G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu)\,d\mu + \phi(z(q))$

donde $\phi(z(q)) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2}\left[z(q) - z(q^*)\right]^T P\left[z(q) - z(q^*)\right]$

$$\phi(z(q)) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2}\left[z_2(q_2, q_1) - z_2(q_{2^*}, q_{1^*})\right]^T P\left[z_2(q_2, q_1) - z_2(q_{2^*}, q_{1^*})\right]$$

Siendo $z_i(q_i, q_r)$ definida por:

$$z_i(q_i, q_r) \stackrel{\Delta}{=} q_i - \frac{1}{\rho}\int_{q_r^*}^{q_r} G^{\perp}(\mu)\cdot M_d(\mu)\cdot M^{-1}(\mu)\cdot e_i \cdot d\mu$$

$$Vd(q) = -\frac{1}{\rho}\int_0^{q_r} G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu)\,d\mu + \phi(z(q)) \qquad s(q_3) \equiv \frac{g}{\varepsilon}\mathrm{sen}(q_3)\,e_3$$

$$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu) = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}\cos(\mu) & \mathrm{sen}(\mu) & -\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{g}{\varepsilon}\mathrm{sen}(q_3)\,e_3\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{\rho}G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu)\cdot e_3 = \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix}\cos(\mu) & \mathrm{sen}(\mu) & -\varepsilon\end{bmatrix}\cdot\frac{g}{\varepsilon}\mathrm{sen}(q_3)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

donde $\frac{1}{\rho}G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu) = -\frac{g}{\rho}\mathrm{sen}(q_3)$ sustituyendo

$$-\frac{1}{\rho}\int_0^{q1} G^{\perp}(\mu)\cdot s(\mu)\,d\mu = \frac{g}{\rho}\int_0^{q3} \operatorname{sen}(\mu)\,d\mu = \frac{g}{\rho}\left[-\cos(\mu)\Big|_0^{q_3}\right] =$$

$$-\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-\cos(0)\right] = -\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-1\right] = -\frac{g}{\rho}\cos(q_3)+\frac{g}{\rho}$$

$$Vd(q_3) = -\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-1\right]+\phi(z(q))$$

Hallando $G^{\perp}(q_3)$ tal que se cumpla $G^{\perp}(q_3)G(q_3)=0$

$$G^{\perp}(q_3)G(q_3) = \begin{bmatrix}\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \cos(q_3)/\varepsilon & \operatorname{sen}(q_3)/\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_3)G(q_3) = \begin{bmatrix}\cos(q_3)-\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3)-\operatorname{sen}(q_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad G^{\perp}(q_3) = \begin{bmatrix}\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$\phi(z(q)) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2}\left[z(q)-z(q^*)\right]^T P\left[z(q)-z(q^*)\right]$$

$$\phi(z(q)) = \frac{1}{2}\left[z_2(q_1,q_2,q_3)-z_2\left(q_1^*,q_2^*,q_3^*\right)\right]^T P\left[z_2(q_1,q_2,q_3)-z_2\left(q_1^*,q_2^*,q_3^*\right)\right]$$

donde

$$z(q_1,q_2,q_3) = \begin{bmatrix} z_1(q_1,q_2,q_3)\\ z_2(q_1,q_2,q_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1-\frac{1}{\rho}\int_0^{q3} G^{\perp}(\mu)\cdot M_d(\mu)\cdot M^{-1}(\mu)\cdot e_1\cdot d\mu \\ q_2-\frac{1}{\rho}\int_0^{q3} G^{\perp}(\mu)\cdot M_d(\mu)\cdot M^{-1}(\mu)\cdot e_2\cdot d\mu\end{bmatrix}$$

$$z_3(q_1,q_2,q_3) = \begin{bmatrix} q_1-\frac{1}{\rho}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-\frac{1}{\rho}\left[1-\cos(q_3)\right]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1-\frac{1}{k_1\rho}k_1\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{k_1\rho}k_1\cos(q_3)\end{bmatrix}$$

$$z_3(q_1,q_2,q_3)=\begin{bmatrix} q_1-\dfrac{1}{k_1\rho}m_{23} \\ q_2-\dfrac{1}{\rho}+\dfrac{1}{k_1\rho}m_{13}\end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad z_3(q_1^*,q_2^*,q_3^*)=\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^*\end{bmatrix}$$

$$\phi(z(q))\overset{\Delta}{=}\frac{1}{2}\left[z_3(q_1,q_2,q_3)-z_3(q_1^*,q_2^*,q_3^*)\right]^T P\left[z_3(q_1,q_2,q_3)-z_3(q_1^*,q_2^*,q_3^*)\right]$$

$$\phi(z(q))=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} q_1-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-\dfrac{1}{\rho}\left[1-\cos(q_3)\right]\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^*\end{bmatrix}\right]^T P\left[\begin{bmatrix} q_1-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-\dfrac{1}{\rho}\left[1-\cos(q_3)\right]\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^*\end{bmatrix}\right]$$

$$\phi(z(q))=\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^*-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^*-\dfrac{1}{\rho}\left[1-\cos(q_3)\right]\end{bmatrix}\right]^T P\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^*-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^*-\dfrac{1}{\rho}\left[1-\cos(q_3)\right]\end{bmatrix}\right]$$

$$Vd(q)=-\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-1\right]+\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^*-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^*-\dfrac{1}{\rho}\left[1-\cos(q_3)\right]\end{bmatrix}\right]^T P\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^*-\dfrac{1}{\rho}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^*-\dfrac{1}{\rho}\left[1-\cos(q_3)\right]\end{bmatrix}\right]$$

$$G^{\perp}(q_3)Md(q_3)Md^{-1}(q_3)e_3=k_1-\varepsilon\cdot k_2=\rho$$

$$\begin{aligned} Vd(q)=&-\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-1\right] \\ &+\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^*-\dfrac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^*+\dfrac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]\end{bmatrix}\right]^T P\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^*-\dfrac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^*+\dfrac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]\end{bmatrix}\right]\end{aligned}$$

$$Vd(q) = -\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-1\right]+\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^*-F_1 \\ q_2-q_2^*+F_2-\dfrac{1}{\rho}\end{bmatrix}\right]^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^*-F_1 \\ q_2-q_2^*+F_2-\dfrac{1}{\rho}\end{bmatrix}\right]$$

$$Vd(q) = -\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-1\right]+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(q_1-q_1^*-F_1\right)^2 P_{11}+\left(q_2-q_2^*+F_2-\dfrac{1}{\rho}\right)\left(q_1-q_1^*-F_1\right)P_{12} \\ +\left(q_1-q_1^*-F_1\right)\left(q_2-q_2^*+F_2-\dfrac{1}{\rho}\right)P_{12}+\left(q_2-q_2^*+F_2-\dfrac{1}{\rho}\right)^2 P_{22}\end{bmatrix}$$

$$\nabla_q Vd(q) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Vd(q)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial Vd(q)}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial Vd(q)}{\partial q_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi(q)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial \phi(q)}{\partial q_2} \\ \dfrac{g}{\rho}\left[\operatorname{sen}(q_3)\right]+\dfrac{\partial \phi(q)}{\partial q_3}\end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_3)Md(q_3) = \begin{bmatrix}\cos(q_3) & \operatorname{sen}(q_3) & -\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11}^d & m_{12}^d & m_{13}^d \\ m_{12}^d & m_{22}^d & m_{23}^d \\ m_{13}^d & m_{23}^d & m_{33}^d\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(q_3)m_{11}^d+\operatorname{sen}(q_3)m_{12}^d-\varepsilon m_{23}^d \\ \cos(q_3)m_{12}^d+\operatorname{sen}(q_3)m_{22}^d-\varepsilon m_{23}^d \\ \cos(q_3)m_{13}^d+\operatorname{sen}(q_3)m_{23}^d-\varepsilon m_{33}^d\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_{11}^d+m_{12}^d \\ m_{12}^d+m_{22}^d \\ m_{13}^d+m_{23}^d\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_{11}^d+m_{12}^d & m_{12}^d+m_{22}^d & m_{13}^d+m_{23}^d\end{bmatrix}$$

Para $q_3=0$ y $\varepsilon=0$ $\Rightarrow \cos(q_3)=1$ y $\operatorname{sen}(q_3)=0$

$$G^{\perp}(0)Md(q_3) = \begin{bmatrix} m_{11}^d \\ m_{12}^d \\ m_{13}^d\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_{11}^d & m_{12}^d & m_{13}^d\end{bmatrix}$$

Para $q_3 = \pi/2$ y $\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \cos(q_3) = 0$ y $\mathrm{sen}(q_3) = 1$

$$G^{\perp}\left(\frac{\pi}{2}\right)Md(q_3) = \begin{bmatrix} m_{12}^{d} \\ m_{22}^{d} \\ m_{23}^{d} \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} m_{12}^{d} & m_{22}^{d} & m_{23}^{d} \end{bmatrix}$$

$$Vd(q) = -\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3) - 1\right] + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(q_1 - q_1^{*}\right)^2 P_{11} - 2\left(q_1 - q_1^{*}\right)F_1 \cdot P_{11} + F_1^2 \cdot P_{11} + \left(q_1 - q_1^{*}\right)\left(q_2 - q_2^{*}\right)P_{12} \\ -\left(q_2 - q_2^{*}\right)F_1 P_{12} + \left(q_1 - q_1^{*}\right)F_2 \cdot P_{12} - F_1 \cdot F_2 \cdot P_{12} - \dfrac{\left(q_1 - q_1^{*} - F_1\right)}{\rho}P_{12} \\ +\left(q_1 - q_1^{*}\right)\left(q_2 - q_2^{*}\right)P_{12} + \left(q_2 - q_2^{*}\right)F_2 \cdot P_{12} - \left(q_1 - q_1^{*}\right)F_1 \cdot P_{12} - F_1 \cdot F_2 \cdot P_{12} \\ -\dfrac{\left(q_1 - q_1^{*} - F_1\right)}{\rho}P_{12} + \left(q_2 - q_2^{*}\right)^2 P_{22} - 2\left(q_2 - q_2^{*}\right)\left(F_2 - \dfrac{1}{\rho}\right)P_{11} + \left(F_2 - \dfrac{1}{\rho}\right)^2 P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Vd(q)}{\partial q_1} = \left(q_1 - q_1^{*}\right) \cdot P_{11} - F_1 \cdot P_{11} + \left(q_2 - q_2^{*}\right) \cdot P_{12} - \frac{P_{12}}{\rho}$$

$$\frac{\partial Vd(q)}{\partial q_2} = \frac{1}{2}\left[2\left(q_1 - q_1^{*}\right) \cdot P_{12} + 2\left(q_2 - q_2^{*}\right)P_{22} + F_2 \cdot P_{12} - F_1 \cdot P_{12} - \frac{P_{12}}{\rho} - 2\left(F_2 - \frac{1}{\rho}\right)P_{11}\right]$$

$$\frac{\partial Vd(q)}{\partial q_3} = \frac{g}{\rho}\mathrm{sen}(q_3) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(q_1 - q_1^{*}\right)\left[P_{12}F_2' - 2P_{11}F_1^2 - 2P_{12}F_1^2\right] + \left(q_2 - q_2^{*}\right)\left[P_{12}F_2^2 - 2P_{11}F_2^2\right] \\ +2F_1F_1'\left(P_{11} + P_{22}\right) - 2P_{12}\left(F_1F_2' + F_2F_1'\right) + 2\dfrac{P_{12}P_{12}}{\rho}F_1' - 2\dfrac{P_{22}}{\rho}F_2' \end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_3) \cdot Md(q_3) \cdot M^{-1}(q_3) = \begin{bmatrix} K_1\varepsilon\cos(q_3)\mathrm{sen}^2(q_3) - K_1\varepsilon\cos(q_3) + K_1\varepsilon\cos^3(q_3) + K_3\cos(q_3) \\ K_1\varepsilon\mathrm{sen}(q_3)\cos^2(q_3) - K_1\varepsilon\mathrm{sen}(q_3) + K_3\mathrm{sen}(q_3) - K_1\varepsilon\mathrm{sen}(q_3)\cos^2(q_3) \\ K_1\cos^2(q_3) + K_1\mathrm{sen}^2(q_3) - \varepsilon K_2 \end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_3)\cdot Md(q_3)\cdot M^{-1}(q_3)=$$

$$\begin{bmatrix} K_1\varepsilon\cos(q_3)+\left[K_3-K_1\varepsilon\right]\cos(q_3) \\ -K_1\varepsilon \mathrm{sen}(q_3)+K_3\mathrm{sen}(q_3) \\ \left(K_1-\varepsilon K_2\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{13}+\left(K_1-\varepsilon K_2\right)F_2(q_3) \\ -m_{23}+\left(K_1-\varepsilon K_2\right)F_1(q_3) \\ \left(K_1-\varepsilon K_2\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{13}+\rho F_2(q_3) \\ -m_{23}+\rho F_1(q_3) \\ \rho \end{bmatrix}$$

$$G^{\perp}(q_3)\cdot Md(q_3)\cdot M^{-1}(q_3)=\begin{bmatrix} K_3\cos(q_3) \\ -m_{23}+K_3\mathrm{sen}(q_3) \\ K_1-\varepsilon K_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Vd(q)}{\partial q_1}=\left(q_1-q_1^*\right)P_{11}-F_1P_{11}+\left(q_2-q_2^*\right)P_{12}-\frac{P_{12}}{\rho}$$

$$\frac{\partial Vd(q)}{\partial q_2}=\frac{1}{2}\left[2\left(q_1-q_1^*\right)P_{12}+2\left(q_2-q_2^*\right)P_{22}+F_2P_{12}-F_1P_{12}-\frac{P_{12}}{\rho}-2\left(F_2-\frac{1}{\rho}\right)P_{11}\right]$$

$$\frac{\partial Vd(q)}{\partial q_3}=\frac{g}{\rho}\mathrm{sen}\left(q_3\right)+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left(q_1-q_1^*\right)\left[P_{12}\cdot F_2'-2\cdot P_{11}\cdot F_1^2-2P_{12}\cdot F_1^2\right]+\left(q_2-q_2^*\right)\left[P_{12}\cdot F_2^2-2\cdot P_{11}\cdot F_2^2\right] \\ +2\cdot F_1\cdot F_1'\left(P_{11}+P_{22}\right)-2P_{12}\left(F_1\cdot F_2'+F_2\cdot F_1'\right)+2\frac{P_{12}P_{12}}{\rho}F_1'-2\frac{P_{22}}{\rho}F_2'\end{bmatrix}$$

$$Vd\left(q_3\right)=-\frac{g}{\rho}\left[\cos\left(q_3\right)-1\right]+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left(q_1-q_1^*-F_1\right)^2P_{11}+\left(q_2-q_2^*+F_2-\frac{1}{\rho}\right)\left(q_1-q_1^*-F_1\right)\left[P_{12}+P_{22}\right] \\ +\left(q_2-q_2^*+F_2-\frac{1}{\rho}\right)^2P_{12}\end{bmatrix}$$

$$Vd\left(q_3\right)=-\frac{g}{\rho}\left[\cos\left(q_3\right)-1\right]+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2\left(q_1-q_1^*-F_1\right)F_1'P_{11}-\left(q_2-q_2^*\right)F_1'\left[P_{12}+P_{22}\right] \\ +\left(q_2-q_2^*\right)F_2'\left[P_{12}+P_{22}\right]+\left[F_1'F_2+F_1F_2'\right]\left[P_{12}+P_{22}\right] \\ -\frac{\left(q_1-q_1^*-F_1\right)}{\rho}\left[P_{12}+P_{22}\right]+2\left(q_2-q_2^*+F_2-\frac{1}{\rho}\right)F_2'P_{12}\end{bmatrix}$$

$$V_d(q_3) = -\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-1\right]+\frac{1}{2}\left[(-F_1)^2 P_{11}+\left(+F_2-\frac{1}{\rho}\right)(-F_1)\left[P_{12}+P_{22}\right]+\left(F_2-\frac{1}{\rho}\right)^2 P_{12}\right]$$

$$V_d(q_3) = -\frac{g}{\rho}\left[\cos(q_3)-1\right]+\frac{1}{2}\left[2F_1F_1^{'}P_{11}-\left[F_1^{'}F_2+F_1F_2^{'}-\frac{1}{\rho}F_1^{'}\right]\left[P_{12}+P_{22}\right]+2F_2F_2^{'}P_{12}-\frac{2F_2^{'}P_{12}}{\rho}\right]$$

$$V_d(q_3) = -\frac{g}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]+\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^{*}-\frac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^{*}+\frac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]\end{bmatrix}\right]^{T} P\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^{*}-\frac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^{*}+\frac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]\end{bmatrix}\right]$$

$$V_d(q_3) = -\frac{g}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^{*}-\frac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^{*}+\frac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]\end{bmatrix}\right]^{T}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^{*}-\frac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3) \\ q_2-q_2^{*}+\frac{1}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]\end{bmatrix}\right]$$

$$V_d(q_3) = -\frac{g}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\left[\cos(q_3)-1\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} \left\{q_1-q_1^{*}-\frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\right\}P_{11}+\left\{q_2-q_2^{*}+\frac{\left[\cos(q_3)-1\right]}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\right\}P_{21} \\ \left\{q_1-q_1^{*}-\frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\right\}P_{12}+\left\{q_2-q_2^{*}+\frac{\left[\cos(q_3)-1\right]}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\right\}P_{22}\end{bmatrix}\right]^{T}\left[\begin{bmatrix} q_1-q_1^{*}-\frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1-\varepsilon\cdot k_2} \\ q_2-q_2^{*}+\frac{\left[\cos(q_3)-1\right]}{k_1-\varepsilon\cdot k_2}\end{bmatrix}\right]$$

$$Vd(q_3) = -\frac{g}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right] +$$

$$\frac{1}{2}\left[\left[\begin{matrix} \left\{q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right\}P_{11} + \left\{q_2 - q_2^* + F_2(q_3) - \frac{1}{\rho}\right\}P_{21} \\ \left\{q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right\}P_{12} + \left\{q_2 - q_2^* + F_2(q_3) - \frac{1}{\rho}\right\}P_{22} \end{matrix}\right]\right]^T \left[\left[\begin{matrix} q_1 - q_1^* - F_1(q_3) \\ q_2 - q_2^* + F_2(q_3) - \frac{1}{\rho} \end{matrix}\right]\right]$$

$$Vd(q_3) = -\frac{g}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right] +$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \left(\left(q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right)\left(q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right)P_{11} + \left\{q_2 - q_2^* + F_2(q_3) - \frac{1}{\rho}\right\}\left(q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right)P_{21}\right) + \\ \left\{\left\{q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right\}\left(q_2 - q_2^* + F_2(q_3) - \frac{1}{\rho}\right)P_{12} + \left\{q_2 - q_2^* + F_2(q_3) - \frac{1}{\rho}\right\}P_{22}\left(q_2 - q_2^* + F_2(q_3) - \frac{1}{\rho}\right)\right\} \end{matrix}\right\}$$

$$Vd(q_3) = -\frac{g}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right] +$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \left(q_1 - q_1^*\right)^2 P_{11} - 2\left(q_1 - q_1^*\right)F_1(q_3)P_{11} + F_1^2(q_3)P_{11} + \\ \left(q_1 - q_1^*\right)^2 P_{21} - \left(q_2 - q_2^*\right)F_1(q_3)P_{12} + \left(q_2 - q_2^*\right)F_2(q_3)P_{21} - F_1(q_3)F_2(q_3)P_{21} - \frac{\left(q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right)}{\rho}P_{21} + \\ \left(q_1 - q_1^*\right)^2 P_{12} + \left(q_2 - q_2^*\right)F_2(q_3)P_{12} - \left(q_2 - q_2^*\right)F_1(q_3)P_{12} - F_1(q_3)F_2(q_3)P_{12} - \frac{\left(q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right)}{\rho}P_{12} + \\ \left(q_1 - q_1^*\right)^2 P_{22} + 2\left(q_2 - q_2^*\right)F_2(q_3)P_{22} + F_2^2(q_3)P_{22} - \frac{\left(q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right)}{\rho}P_{22} \end{matrix}\right\}$$

$$Vd(q_3) = -\frac{g}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right] +$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \left(q_1 - q_1^*\right)^2 (P_{11} + P_{21} + P_{12} + P_{22}) - 2\left(q_1 - q_1^*\right)F_1(q_3)P_{11} + \\ -2\left(q_2 - q_2^*\right)F_1(q_3)P_{12} - F_1(q_3)F_2(q_3)P_{21} \\ -2\dfrac{\left(q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right)}{\rho}P_{12} - \dfrac{\left(q_1 - q_1^* - F_1(q_3)\right)}{\rho}P_{22} \\ +2\left(q_2 - q_2^*\right)F_2(q_3)P_{12} + 2\left(q_2 - q_2^*\right)F_2(q_3)P_{22} - F_1(q_3)F_2(q_3)P_{12} \\ +F_2^2(q_3)P_{22} + F_1^2(q_3)P_{11} \\ \end{array}\right\}$$

$$Vd(q_3) = -\frac{g}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right] +$$
$$P\left[\left(q_1 - q_1^* - \frac{1}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3)\right)^2 + \left(q_2 - q_2^* + \frac{1}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right]\right)^2\right]$$

$$\nabla_{q_3} Vd(q_3) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Vd(q_3)}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial Vd(q_3)}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial Vd(q_3)}{\partial q_3} \end{bmatrix} \text{ donde}$$

$$\frac{\partial Vd(q_3)}{\partial q_1} = 2\left(q_1 - q_1^* - \frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right)$$

$$\frac{\partial Vd(q_3)}{\partial q_2} = 2\left(q_2 - q_2^* + \frac{\left[\cos(q_3) - 1\right]}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right)$$

$$\nabla_{q_3} Vd(q_3) = \frac{g}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2} \operatorname{sen}(q_3) +$$

$$P\left[2\left(q_1 - q_1^* - \frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right)\left(-\frac{\cos(q_3)}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right) + 2\left(q_2 - q_2^* + \frac{1}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right]\right)\frac{(-\operatorname{sen}(q_3))}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right]$$

$$\nabla_{q_3} Vd(q_3) = \frac{g}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2} \operatorname{sen}(q_3) +$$
$$P\begin{bmatrix} 2\left(q_1 - q_1^* - \frac{1}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3)\right) + 2\left(q_2 - q_2^* + \frac{1}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right]\right) \\ 2\left(q_1 - q_1^* - \frac{1}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\operatorname{sen}(q_3)\right) + 2\left(q_2 - q_2^* + \frac{1}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right]\right) \end{bmatrix}$$

$$Vd(q_3) = -\frac{g}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\left[\cos(q_3) - 1\right] +$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} P_{11}\left(q_1 - q_1^* - \frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right)\left(q_1 - q_1^* - \frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right) & P_{12}\left(q_2 - q_2^* + \frac{\left[\cos(q_3) - 1\right]}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right)\left(q_2 - q_2^* + \frac{\left[\cos(q_3) - 1\right]}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right) \\ P_{12}\left(q_1 - q_1^* - \frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right)\left(q_1 - q_1^* - \frac{\operatorname{sen}(q_3)}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right) & P_{22}\left(q_2 - q_2^* + \frac{\left[\cos(q_3) - 1\right]}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right)\left(q_2 - q_2^* + \frac{\left[\cos(q_3) - 1\right]}{k_1 - \varepsilon \cdot k_2}\right) \end{bmatrix}^T$$

7.7. ECUACIÓN DE CONTROL (u)

$$u_{es} = \frac{1}{2}\tilde{p}^T\left[\Im(qr) \cdot A^T(qr)\right]\tilde{p} - G^{\perp}(qr)Md(qr)Md^{-1}(qr)\nabla_{q_3}Vd(q_3)$$
$$u_{di} = -Kv \cdot G^{\perp}(qr)Md^{-1}(qr) \cdot p$$
$$\tilde{p} = Md^{-1}(qr) \cdot p$$
$$\tilde{p}^T = p^T \cdot \left(Md^{-1}(qr)\right)^T$$

$$u_{es} = \frac{1}{2}p^T \cdot Md^{-1}(qr)\left[\Im(qr) \cdot A^T(q_r)\right]Md^{-1}(qr) \cdot p - G^{\perp}(qr)Md(qr)Md^{-1}(qr)\nabla_q Vd(q_3)$$

$$u_{di} = -Kv \cdot G^{\perp}\left(qr\right) Md^{-1}\left(qr\right) \cdot p$$

$$u = \quad A_1\left(q\right) P\ S\left(q - q^*\right) + \begin{bmatrix} p^T A_2 (q_r) p \\ p^T A_3 (q_r) p \end{bmatrix} + A_4 (q_r) + Kv.A_5 (q_r) p \qquad (7.15)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} m_{11d} + m_{13d} & m_{12d} + m_{13d} \\ m_{12d} + m_{23d} & m_{22d} + m_{23d} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = M_d^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_{13d} * \dfrac{dm_{11d}}{dq_3}/2 & m_{13d} * \dfrac{dm_{12d}}{dq_3}/2 + \alpha(1,1) & m_{13d} * \dfrac{dm_{13d}}{dq_3}/2 + \alpha(2,1) \\ m_{13d} * \dfrac{dm_{12d}}{dq_3}/2 & m_{13d} * \dfrac{dm_{22d}}{dq_3}/2 + \alpha(1,2) & m_{13d} * \dfrac{dm_{23d}}{dq_3}/2 + \alpha(2,2) \\ m_{13d} * \dfrac{dm_{13d}}{dq_3}/2 & m_{13d} * \dfrac{dm_{23d}}{dq_3}/2 + \alpha(1,3) & \alpha(3,3) \end{bmatrix} \cdot M_d^{-1}$$

$$A_3 = M_d^{-1} \cdot \begin{bmatrix} m_{23d} * \dfrac{dm_{11d}}{dq_3}/2 & m_{23d} * \dfrac{dm_{12d}}{dq_3}/2 + \alpha(1,1) & m_{23d} * \dfrac{dm_{13d}}{dq_3}/2 + \alpha(2,1) \\ m_{23d} * \dfrac{dm_{12d}}{dq_3}/2 & m_{23d} * \dfrac{dm_{22d}}{dq_3}/2 + \alpha(1,2) & m_{23d} * \dfrac{dm_{13d}}{dq_3}/2 + \alpha(2,2) \\ m_{23d} * \dfrac{dm_{13d}}{dq_3}/2 & m_{23d} * \dfrac{dm_{23d}}{dq_3}/2 + \alpha(1,3) & \alpha(3,3) \end{bmatrix} \cdot M_d^{-1}$$

$$A_4=\begin{bmatrix} \mathrm{m}_{11}\left(P_{11}F_1+P_{12}F_2\right)+\mathrm{m}_{12}\left(P_{12}F_1+P_{22}F_2\right)+\mathrm{m}_{13}\left(P_{11}F_1+P_{22}F_2+P_{12}\left(F_2\dfrac{dF_1}{dq_3}+F_1\dfrac{dF_2}{dq_3}\right)\right)-\dfrac{gsen\left(q_3\right)}{\rho} \\ \mathrm{m}_{12}\left(P_{11}F_1+P_{12}F_2\right)+\mathrm{m}_{22}\left(P_{12}F_1+P_{22}F_2\right)+\mathrm{m}_{23}\left(P_{11}F_1+P_{22}F_2+P_{12}\left(F_2\dfrac{dF_1}{dq_3}+F_1\dfrac{dF_2}{dq_3}\right)\right)-\dfrac{gsen\left(q_3\right)}{\rho} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A}_5\left(\mathrm{q}_3\right)=\mathrm{G}^{\perp}\left(\mathrm{q}_3\right)\mathrm{M}_{\mathrm{d}}^{-1}\left(\mathrm{q}_3\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\cos\left(\mathrm{q}_3\right)}{\varepsilon} \\ 0 & 1 & \dfrac{\mathrm{sen}\left(\mathrm{q}_3\right)}{\varepsilon} \end{bmatrix}\cdot\mathrm{M}_{\mathrm{d}}^{-1}\left(\mathrm{q}_3\right)$$

7.8. RESULTADOS DEL SISTEMA VTOL.

En la figura 7.3 se presentan los resultados de la simulación del sistema mecánico con rueda inercial. A fin de ilustrar la naturaleza global de la ley de control obtenida en (7.15), se presenta una simulación donde la variable q_1=5.00 m, q_2=-5.0 m. y $q_3=\pi$ rad. hasta la posición q_1=-5.00 m, q_2=5.0 m. y q_3=0.0 rad.

Tabla 7.1. Condiciones Iniciales y finales del VTOL (1)		
g=9.8 m/s^2.	RHO=1	epsilon=1
P=[0.015 0;0 0.01]	Kv=[2.5, 1.25;1.25, 2.5]	q_{1f}= -5.0 m.
q_{2f}= 5.0 m.	q_{3f}= 0.0 rad.	x_0=[5.0, -5.0, pi, 0.1, -0.1, 0.1]'

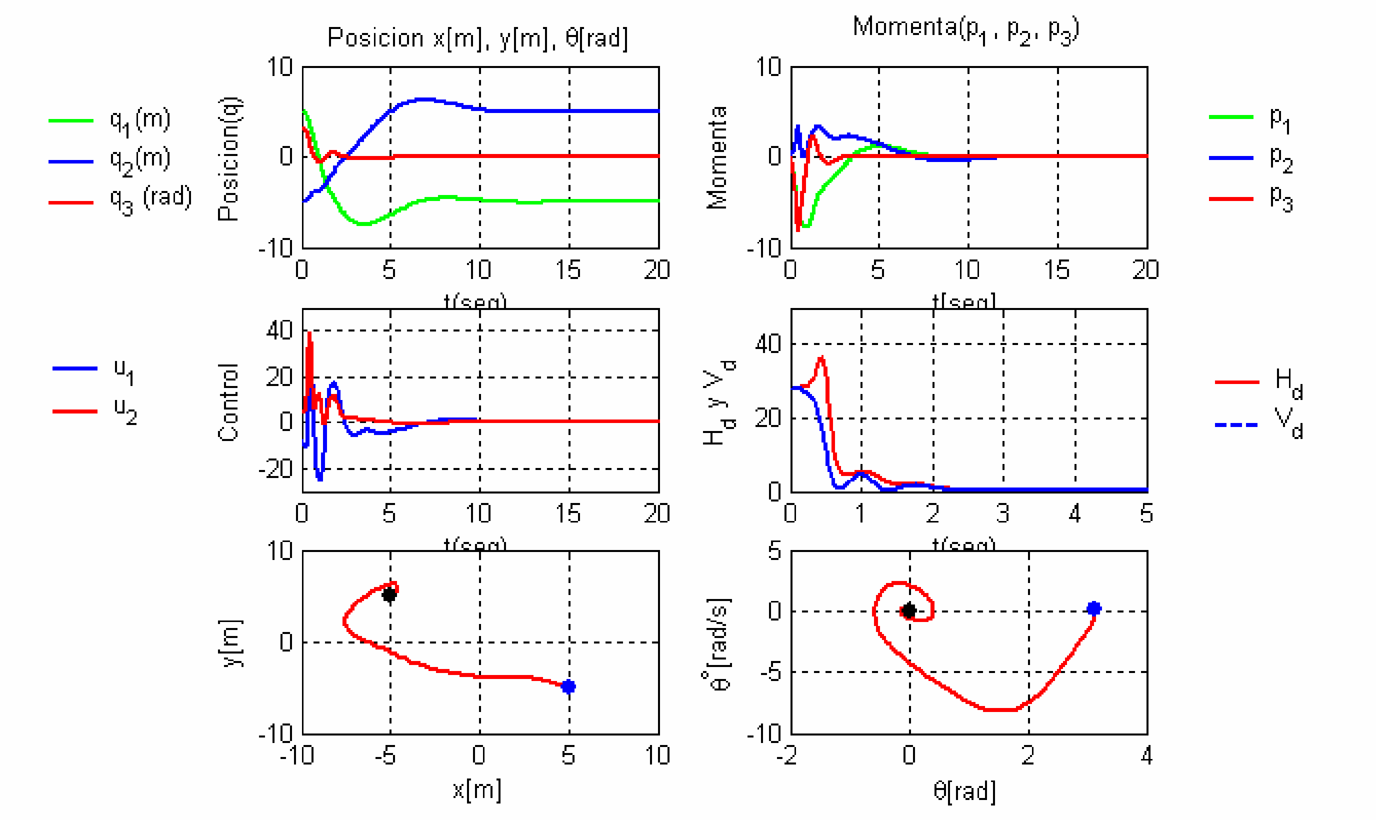

Figura 7.3. Trayectorias, para el sistema VTOL, con las condiciones iniciales y finales de la Tabla 7.1.

En la figura 7.4 se presenta la simulación donde la variable q_1=5.00 m, q_2=-5.00 m. y $q_3=\pi$ rad. hasta la posición q_1=0.0 m, q_2=0.0 m. y q_3=0.0 rad

Tabla 7.2. Condiciones Iniciales y finales del VTOL (2)		
g=9.8 m/s^2.	RHO=1	epsilon=1
P=[0.015 0;0 0.01]	Kv=[2.5, 1.25;1.25, 2.5]	q_{1f}=0.0 m.
q_{2f}=0.0 m.	q_{3f}= 0.0 rad.	x_0=[5.0, -5.0, pi, 0.1, -0.1, 0.1]'

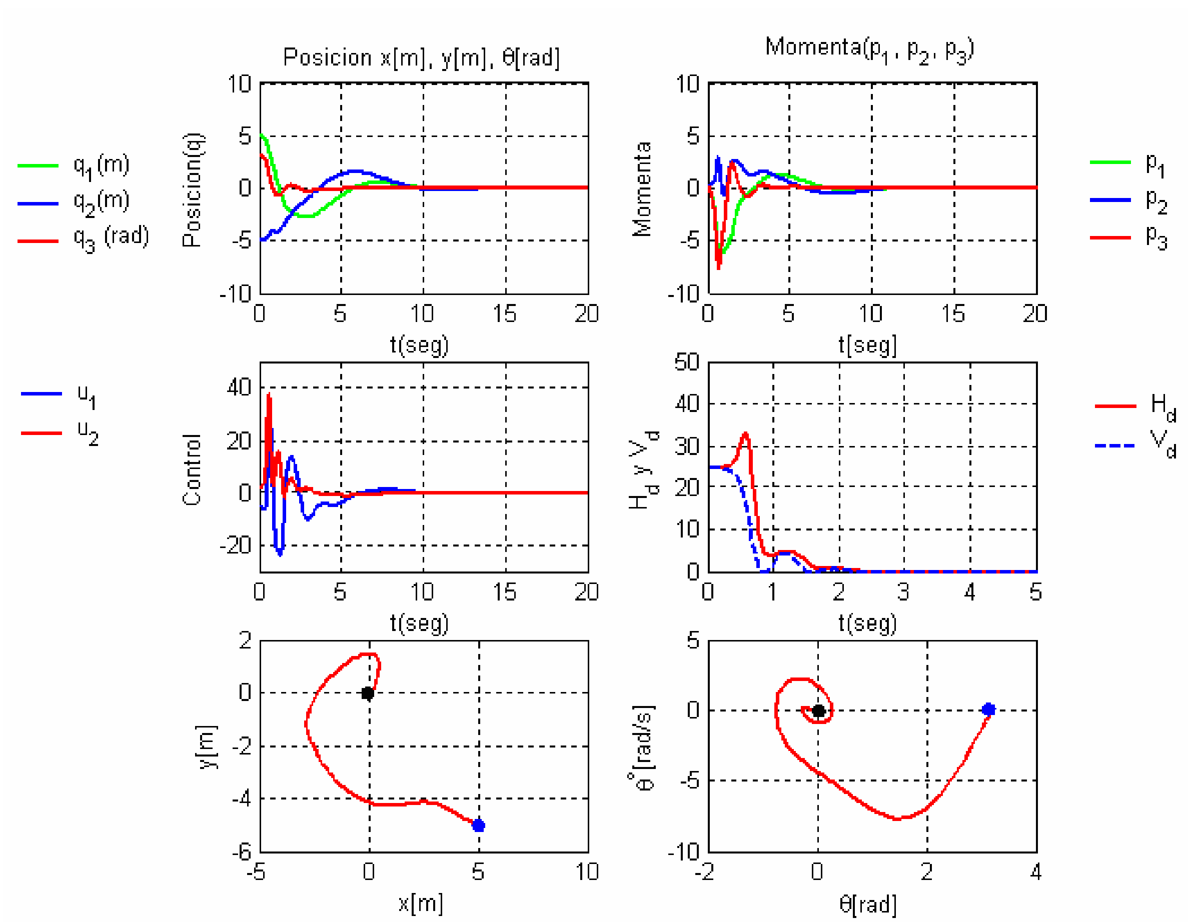

Figura 7.4. Trayectorias, para el sistema VTOL, con las condiciones iniciales y finales de la Tabla 7.2.

En la figura 7.5 se presenta la simulación donde la variable q_1=5.00 m, q_2=0.00 m. y q_3=0.1 rad. hasta la posición q_1=5.00 m, q_2=0.00 m. y q_3=0.0 rad

Tabla 7.3. Condiciones Iniciales y finales del VTOL (3)		
g=9.8 m/s^2.	RHO=1	epsilon=1
P=[0.015 0;0 0.01]	Kv=[2.5, 1.25;1.25, 2.5]	q_{1f}=5.0 m.
q_{2f}=0.0 m.	q_{3f}= 0.0v rad.	x_0=[5.0, 0.0, 0.1, -0.1, -0.1, 0.1]'

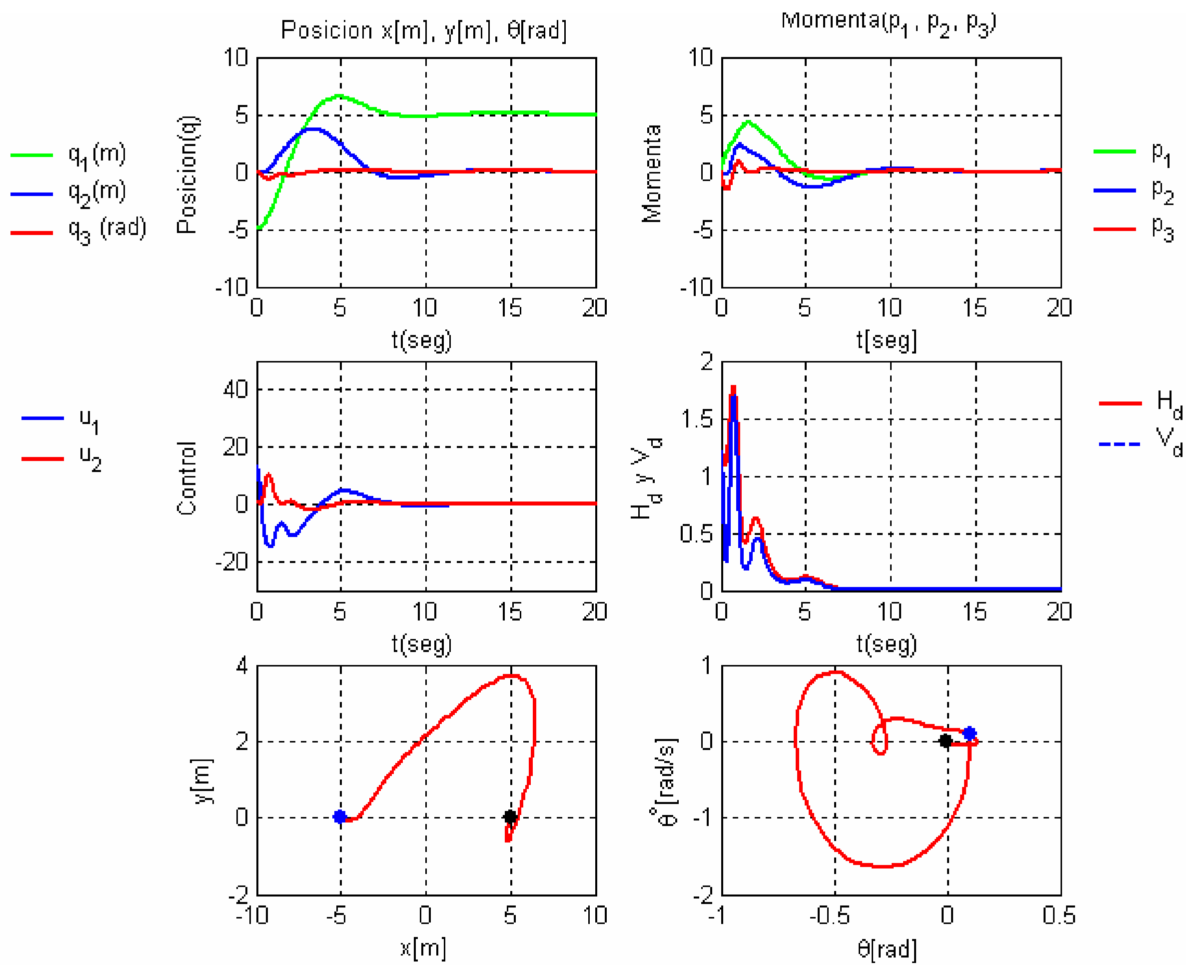

Figura 7.5. Trayectorias, para el sistema VTOL, con las condiciones iniciales y finales de la Tabla 7.3.

CONCLUSIONES

- El IDA-PBC es un método para obtener controladores de realimentación del estado basados en la transformación de un sistema hamiltoniano controlado por puertos (PCH) en otro sistema hamiltoniano (PCH) con propiedades deseadas del sistema en lazo cerrado. Por ejemplo, en los sistemas mecánicos subactuados analizados, se transforma los sistemas de ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) en (2.7), (2.8) y (2.12) con una matriz de inercia Md, una función de energía potencial Vd que satisfaga (2.53) para así la matriz de interconexión antisimétrica J2 seleccionada arbitrariamente o a través del método de la sección 2.3.1, dependiendo de la forma de Md.

- Los sistemas analizados presentan los elementos de la matriz de inercia de diferentes formas y estos implican una técnica de resolución diferente, los elementos de la matriz de inercia pueden ser constantes, dependientes de la variable actuada o de la variable subactuada. En cada caso el método IDA-PBC, utilizado, varía ligeramente. En la Tabla 01 se pueden observar las dependencias de la matriz de inercia con respecto a cada sistema estudiado.

Tabla C1	
Sistemas	**Elementos de la Matriz de Inercia**
Rueda Inercial [1]	Constante
TORA [5]	Variable Actuada
Bola en la Viga [1]	Variable Subactuada
Péndulo sobre un carro móvil [3]	Variable Subactuada
VTOL aircraft [3]	Variables Subactuadas

- En este trabajo se realizó el análisis extenso, del artículo de Acosta *et al*. **[3]**. Para ello se utilizó la metodología IDA-PBC expuesta en el mismo. Se diseñó la programación en Matlab para los cinco sistemas expuestos en la Tabla No.C1, obteniéndose resultados, para todos los casos, aceptables desde el punto de vista de estabilizar el sistema.

- En el análisis de los sistemas Rueda Inercial, TORA y Bola en la viga. se partió de la dinámica del proceso de la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u$$

y se llegó a obtener las ecuaciones de control con la siguiente estructura:

- o Ecuación (3.33) para el sistema de Rueda Inercial.
- o Ecuación (4.31) para el sistema de TORA.
- o Ecuación (5.33) para el sistema de Bola en la Viga.

- En el análisis de los sistemas de Péndulo sobre el Carro y VTOL. se partió de la dinámica y cinemática del proceso, respectivamente, de la forma:

$$\begin{cases} \dot{q} = M^{-1}(q_r) \cdot p \\ \dot{p} = s(q_r) + G(q_r) \cdot u \end{cases}$$

y se llegó a obtener las ecuaciones de control con la siguiente estructura:

$$u = A_1(q) P\, S(q - q^*) + \begin{bmatrix} p^T A_2(q_r) p \\ \vdots \\ p^T A_n(q_r) p \end{bmatrix} + A_{n+1}(q_r) + Kv.A_{n+2}(q_r) p$$

- o Ecuación (6.15) para el sistema de Péndulo sobre el Carro.
- o Ecuación (7.15) para el sistema VTOL.

- En el *Péndulo sobre carro móvil* se observó convergencia a valores cercanos al parámetro subactuado (en grados) de $\pi/2$ presentando un buen desempeño para condiciones iniciales de [q(0),p(0)] = [(pi/2-0.2),-0.1,0.1,0] y [q(0),p(0)] = [(pi/2-1.2),-0.1,0.1,0].

.

- En el *Control de despegue y aterrizaje vertical de una aeronave* se observó un buen desempeño para condiciones iniciales de [q(0),p(0)] = [5,-5,π,0.1,-0.1,0.1] con $q_* = (-5, 5, 0)$ y [q(0),p(0)] = [5,0,0.1,-0.1,-0.1,0.1] con $q_* = (5, 0, 0)$.

- En la figura 3.10. (Péndulo con rueda inercial) se observa que manteniendo Kv=10 y variando Kp a los valores de 2, 5 y 10 las oscilaciones son más pronunciadas a medida que Kp aumenta. Estas características se repiten para todos los ejemplos analizados.

- En la figura 3.11. (Péndulo con rueda inercial) se observa que manteniendo Kp=3 y variando Kv a los valores de 5, 10 y 20 las oscilaciones son menos pronunciadas a medida que Kv aumenta. Se observa también oscilaciones al comienzo cuando Kv = 5. Estas características se repiten para todos los ejemplos analizados.

- Los resultados obtenidos por Ortega *et al*. (2002) [1], con sus dos ejemplos expuestos traen confusión, en el sentido de que si la longitud de la viga es L=10 m. las condiciones iniciales de los dos ejemplos están sobredimensionados. q_1 = 8 m. y q_1 = 6 m., ya que es de suponer que la longitud de la viga total es de 10 m., 5 m. para cada lado de su centro. De tal manera que <u>en este trabajo se propone</u> como energía total máxima $\mathbf{H_d}$ **= 0,1038/2 = 0.0519** para mantener la bola sobre la viga.

RECOMENDACIONES

- Para futuras investigaciones en el caso de sistemas con grado de subactuación mayor a uno presentará ciertos inconvenientes como el que $G^{\perp}(q_r)$ será una matriz y la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales será en extremo difícil.

- Otro caso particular, se espera cuando la matriz de inercia y la energía potencial del sistema original dependen de más de una coordenada. Las ecuaciones en derivadas parciales de la energía cinética admiten soluciones pero las de la energía potencial no admite soluciones fácilmente.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Ortega, M. Spong, F. Gomez and G. Blankenstein, Stabilization of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC–47, No. 8, August 2002,
pp. 1218–1233.

[2] R. Olfati-Saber, Global configuration for the VTOL aircraft with strong input coupling, *IEEE Trans. Automat.*
Contr., Vol. 47, No. 11, November 2002, pp. 1949–1952.

[3] J. Acosta, R. Ortega, A. Astolfi. Interconnection and damping assignment passivity–based control of mechanical systems with underactuation degree one. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 50, No. 12, december 2005.

[5] A. Morillo, M. Ríos, V. Acosta, Control no lineal de sistemas mecánicos subactuados basados en el enfoque IDA-PBC: el caso del sistema TORA, 2002.

[6] J. Hauser, S. Sastry, P. Kokotovic. Nolinear control via approximate input-output linearization: the ball and beam example, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol, 37, No. 3 March 1992. pp.392-398.

[7] J. Acosta, R. Ortega and A. Astolfi, Position feedback stabilization of mechanical systems with underactuation degree one, *6th IFAC Symp. Nonlinear Control Systems, NOLCOS'03,* Stuttgart, Germany, September 1–3, 2004.

[8] A. Astolfi and R. Ortega, Energy based stabilization of the angular velocity of a rigid body operating in failure configuration, *J of Guidance Control and Dynamics*, Vol 25, No. 1, pp. 184–187, Jan–Feb 2002.

[9] A. Bloch, N. Leonard and J. Marsden, Controlled Lagrangians and the stabilization of mechanical systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 45, No. 12, December 2000.

[10] D.E. Chang, A.M. Bloch, N.E. Leonard, J.E. Marsden and C.A. Woolsey, The Equivalence of Controlled Lagrangian and Controlled Hamiltonian Systems for

Simple Mechanical Systems, *ESAIM: Control, Optimisation, and Calculus of Variations*, Vol. 8, pp. 393–422, 2002.

[11] J. Hauser, S. Sastry and G. Meyer, Nonlinear Control Design for Slightly Non-minimum Phase Systems: Application to V/STOL Aircraft,*Automatica*, Vol. 28, No. 4, July 1992, pp. 665–679.

[12] R. Olfati-Saber, Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles. Tesis de Doctor of Philosophy en Electrical Engineering and Computer Science de Massachusetts Institute of Technology, febrero 2001

[13] R. Olfati-Saber, Normal forms for underactuated mechanical systems with symmetry, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol 47, No. 2, pp 305–308, 2002.

[14] R. Ortega, E. Garcia-Canseco and A. Astolfi, Interconnection and Damping Assignment Passivity–Based Control: Towards a Constructive Procedure—Part I and II, *IEEE 2004 Conference on Decision and Control*, December 14 - 17, 2004, Bahamas. (Also to appear in *European Journal of Control*.)

[15] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke and G. Escobar, Interconnection and damping assignment passivity–based control of port–controlled hamiltonian systems, *Automatica*, Vol. 38, No. 4, April 2002.

[16] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez, “Passivity based control of Euler-Lagrange systems,” in *Communications and Control Engineering*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, Sept. 1998.

[17] W. Spong, Underactuated mechanical systems, in Control Problems in Robotics and Automation, (eds.) B. Siciliano and K. Valavanis, LNICS Vol. 230, Springer–Verlag, 1998.

ANEXOS

ANEXO 01
Péndulo con rueda inercial

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

TÍTULO

TÍTULO	DISEÑO DE CONTROLADORES DE ENERGÍA (HAMILTONIANOS) PARA SISTEMAS NO LINEALES CON UN GRADO DE SUBACTUACIÓN: UN ENFOQUE IDA-PBC
SUBTÍTULO	

AUTOR:

APELLIDOS Y NOMBRES	**CÓDIGO CULAC / E MAIL**
Balebona Contreras Jenry José	**CVLAC:** 5.085.816 **E MAIL:** jbalebona@gmail.com

PALABRAS O FRASES CLAVES:

Controladores Hamiltonianos.

Controladores de Energía.

Sistemas Mecánicos

IDA-PBC

IDA

PBC

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

ÀREA Y SUBAREA

ÀREA	SUBÀREA
Ingeniería	Automatización
	Sistemas de Control
	Informática Industrial
Ciencias Aplicada	Física
	Matemática Aplicada

RESUMEN (ABSTRACT):

El objetivo central de este trabajo es diseñar y evaluar controladores de energía (Hamiltonianos) para sistemas mecánicos no lineales con un grado de subactuación, aplicando el método Interconexión y Asignación de Amortiguamiento basados en Pasividad (IDA-PBC). Para ello se analizan las estructuras hamiltonianas de cinco sistemas mecánicos con un grado de subactuación, para luego diseñar las leyes de Control respectiva de cada sistema.

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

CONTRIBUIDORES:

APELLIDOS Y NOMBRES	ROL / CÓDIGO CVLAC / E_MAIL				
Dr. Rios Bolivar Miguel	ROL	CA	AS	TU X	JU
	CVLAC:	5.341.939			
	E_MAIL	riosm@ula.ve			
	E_MAIL				
Dr. García Padilla Félix	ROL	CA	AS	TU	JU X
	CVLAC:	3.672.075			
	E_MAIL	f.garcia@anz.udo.edu.ve			
	E_MAIL	fpadilla2001@hotmail.com			
Dr. Rengel José Eduardo	ROL	CA	AS	TU	JU X
	CVLAC:	9.278.475			
	E_MAIL	rengel66 @gmail.com			
	E_MAIL	rengel66 @hotmail.com			

FECHA DE DISCUSIÓN Y APROBACIÓN:

2009	07	10
AÑO	MES	DÍA

LENGUAJE. SPA

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

ARCHIVO (S):

NOMBRE DE ARCHIVO	TIPO MIME
TESIS_IDAPBC.doc	Documento Word

CARACTERES EN LOS NOMBRES DE LOS ARCHIVOS: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z. a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

ALCANCE
ESPACIAL: ___________________________________ (**OPCIONAL**)

TEMPORAL: ___________________________________ (**OPCIONAL**)

TÍTULO O GRADO ASOCIADO CON EL TRABAJO:

Magíster Scientiarium en Automatización e Informática Industrial

NIVEL ASOCIADO CON EL TRABAJO:

4to nivel, Magíster Scientiarium.

ÁREA DE ESTUDIO:

Departamento de Postgrado de Ingeniería Eléctrica

INSTITUCIÓN:

Universidad de Oriente. Núcleo de Anzoátegui

METADATOS PARA TRABAJOS DE GRADO, TESIS Y ASCENSO:

DERECHOS

De acuerdo al artículo 44 del reglamento de trabajos de grado

“Los Trabajos de grado son exclusiva propiedad de la Universidad de Oriente y sólo podrán ser utilizadas a otros fines con el consentimiento del Consejo de Núcleo respectivo, quien lo participará al Consejo Universitario”

Ing. Jenry J. Balebona C.
CI 5.085.816
AUTOR

TUTOR	JURADO	JURADO
Dr. Miguel Ríos	Dr. Félix García	Dr. José E. Rengel
CI 5.341.939	CI 3.672.075	CI 9.278.475

POR LA SUBCOMISIÓN DE TESIS